Riassunto di probabilità

Matti Martelli

Indice

1 Formule importanti

Lo spazio probabilistico è sempre $(\Omega,\, \mathscr{F},\, P)$ e gli eventi e relative intersezioni hanno sempre probabilità al minimo nulla.

Definizione 1 (Formula delle probabilità totali)**.**

$$P(E) = \sum_{k=1}^{n} P(E|F_k)\, P(F_k),$$

dove $\bigcup_{k=1}^{n} F_k = \Omega$ e $F_h \cap F_k = \varnothing$, $\forall\, h \neq k$.

Definizione 2 (Formula di Bayes)**.**

$$P(F_h|E) = \frac{P(E|F_h)\, P(F_h)}{\sum_{k=1}^{n} P(E|F_k)\, P(F_k)},$$

per $h = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$.

Definizione 3 (Formula della moltiplicazione)**.**

$P(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) = P(E_1)\, P(E_2|E_1)\, P(E_3|E_1 \cap E_2) \ldots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_{n-1})$.

Definizione 4 (Indipendenza)**.** Due eventi E e F sono indipendenti se

$$P(E \cap F) = P(E)\, P(F).$$

Ne deriva che, se indipendenti, $P(E|F) = P(E)$ e viceversa. Per estenderlo a più eventi bisogna verificare la formula per tutte le combinazioni, estendendola secondo necessità.

2 Variabili aleatorie

Definizione 5 (Variabile aleatoria)**.** Una variabile aleatoria X è una funzione $\Omega \to \mathbb{R}$ tale che, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

$$\{X \leqslant x\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leqslant x\} \in \mathscr{F}.$$

2.1 Funzione di ripartizione

Definizione 6 (Funzione di ripartizione)**.** Si chiama *funzione di ripartizione* di X la funzione $F_X : \mathbb{R} \to [0,\, 1]$ definita come

$$F_X(x) \coloneqq P(X \leqslant x).$$

Proprietà:

- F_X è una funzione monotona non decrescente;
- F_X è continua da destra, cioè $\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0)$, $\forall\, x_0 \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

Se abbiamo una funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che soddisfa queste medesime proprietà essa è detta *funzione di distribuzione*.

2.2 Variabili aleatorie discrete

Definizione 7 (Variabile aleatoria discreta)**.** Una variabile aleatoria è detta discreta quando può assumere valori su un insieme al più numerabile.

Definizione 8 (Funzione di densità)**.** La funzione f_X, alternativamente scritta come p_X, definita come

$$f_X(x) \coloneqq P(X = x)$$

è detta *funzione di densità discreta* X o, semplicemente, densità discreta di X.

Proprietà su un insieme $S \coloneqq \{x_k \mid k \in I \subset \mathbb{Z}\}$:

- $0 \leqslant f_X(x) \leqslant 1\ \forall\, x \in \mathbb{R}$ e $f_X(x) = 0\ \forall\, x \notin S$;
- $\sum_{k \in I} f_X(x_k) = 1$;
- $F_X(x) = \sum_{k : x_k \leqslant x} f_X(x_k)$;
- $f_X(x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$;
- $P(X \in B) = \sum_{k : x_k \in B} f_x(x_k)$, dove $B \subset \mathbb{R}$.

2.2.1 Distribuzione di Bernoulli

Si utilizza per calcolare la probabilità di una singola prova di Bernoulli. Si indica come $X \sim \mathbf{Be}(p)$, dove $p \in [0,\, 1]$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1-p & \text{se } x = 0 \\ p & \text{se } x = 1 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1-p & \text{se } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

Media: $\mathrm{E}(X) = p$.

Varianza: $\mathrm{Var}(X) = p(1-p)$.

2.2.2 Distribuzione binomiale

Si utilizza per calcolare il numero di successi su n prove di Bernoulli. Si indica con $X \sim \mathbf{Bi}(n,\, p)$, dove $n \in \mathbb{N}$ e $p \in [0,\, 1]$. Nota: $\mathbf{Bi}(1,\, p) = \mathbf{Be}(p)$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{se } x = 0,\, \ldots,\, x \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \sum_{k=0}^{x} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Media: $\mathrm{E}(X) = np$.

Varianza: $\mathrm{Var}(X) = np(1-p)$.

2.2.3 Distribuzione geometrica

Si utilizza per calcolare la probabilità che un successo avvenga dopo n tentativi. Si indica con $X \sim \mathbf{Geom}(p)$, dove $p \in [0,\, 1]$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^{x-1} & \text{se } x = 1,\, 2,\, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = 1 - (1-p)^x.$$

Media: $\mathrm{E}(X) = p$.

Varianza: $\mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

2.2.4 Distribuzione di Poisson

Si utilizza per calcolare la probabilità per eventi successivi ed indipendenti, sapendo che se ne verificano mediamente λ. Si indica con $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, con $\lambda > 0$. Nota: $\mathbf{Bi}(n,\, {}^{\lambda}\!/_{n}) \approx \mathcal{P}(\lambda)$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda}\lambda^x}{x!} & \text{se } x \in \{0,\, 1,\, 2,\, \ldots\} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \frac{\Gamma(x+1,\, \lambda)}{x!}.$$

dove

$$\Gamma(a,\, x) = \int_x^{\infty} e^{-t}\, t^{a-1}\, \mathrm{d}t.$$

Media: $\mathrm{E}(X) = \lambda$.
Varianza: $\mathrm{Var}(X) = \lambda$.

2.2.5 Distribuzione ipergeometrica

Si utilizza per calcolare il numero di successi su n prove senza reinserimento. Si indica con $X \sim \mathbf{Iper}(b+r,\, r,\, n)$, dove $b+r,\, r,\, n \in \mathbb{N}$. Nota: $\mathbf{Iper}(b+r,\, r,\, 1) = \mathbf{Be}\left(\frac{r}{b+r}\right)$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \frac{\binom{r}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{r+b}{n}}.$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \sum_{k=1}^{x} f_X(k).$$

Media: $\mathrm{E}(X) = \frac{rn}{b+r}$.
Varianza: $\mathrm{Var}(X) = \frac{nbr}{(b+r)^2}\left(1 - \frac{n-1}{b+r-1}\right)$.

2.3 Variabili aleatorie assolutamente continue

Definizione 9 (Variabile aleatoria assolutamente continua)**.** Una variabile aleatoria X si dice *assolutamente continua* se esiste una funzione $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ integrabile, detta *densità di X*, tale che

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(s)\, \mathrm{d}s.$$

Proprietà:

- $\int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x = 1$;
- $f_X(x) = F'_X(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R} \mid \exists\, F'_X(x)$;
- se $-\infty < a < b < +\infty$ allora

$$P\left(X \in (a,\, b)\right) = P\left(X \in (a,\, b]\right) = P\left(X \in [a,\, b)\right) = P\left(X \in [a,\, b]\right) = \int_a^b f_X(x)\,\mathrm{d}x.$$

2.3.1 Distribuzione continua uniforme

Si usa quando tutti gli eventi hanno la medesima probabilità di verificarsi. Si indica con $X \sim \mathcal{U}(a,\, b)$ in $[a,\, b]$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a}.$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}.$$

Media: $\mathrm{E}(X) = \frac{a+b}{2}$.
Varianza: $\mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

2.3.2 Distribuzione esponenziale

Analogo continuo della distribuzione geometrica. Si indica con $X \sim \varepsilon(\lambda)$, con $\lambda > 0$.

Funzione di densità:

$$f_X(x) = \lambda\, e^{-\lambda\, x}.$$

Funzione di ripartizione:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda\, x}.$$

Media: $\mathrm{E}(X) = {}^1/_\lambda$.
Varianza: $\mathrm{Var}(X) = {}^1/_{\lambda^2}$.