

Kapitel 3

ART-Effekte für schwache Gravitation

Nachdem wir die mathematischen Grundlagen behandelt und die Einstein'schen Gleichungen angegeben haben, betrachten wir nun erste Anwendungen bzw. Konsequenzen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Sehr viele Effekte der Allgemeinen Relativitätstheorie – dazu gehören alle Effekte, die sich innerhalb unseres Sonnensystems beobachten lassen – erhält man im Rahmen einer störungstheoretischen Behandlung um die flache Minkowski-Raumzeit bzw. um die Newton'sche Theorie. Das GPS – Global Positioning System – berücksichtigt gleich mehrere Ordnungen in einer solchen Störungstheorie. Ohne die Berücksichtigung dieser Einflüsse wäre eine Positionierung, wie sie heute möglich ist (im Bereich von wenigen Metern, unter bestimmten Umständen sogar wenigen Zentimetern), nicht möglich.

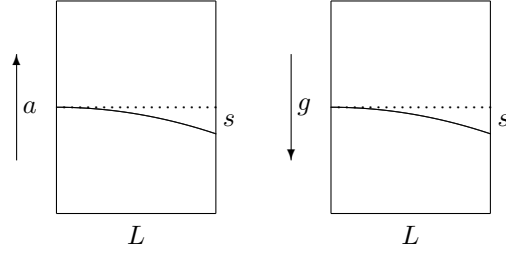
Wir können im Rahmen dieses Überblicks auf die meisten dieser Effekte leider nicht eingehen, sondern beschränken uns hier auf die drei „klassischen Effekte“ der ART. Diese beziehen sich auf die Ablenkung von Licht im Gravitationsfeld, die Rotverschiebung von Licht, das ein Gravitationsfeld verlässt, und die Erklärung der Periheldrehung des Merkur. Ebenfalls kurz ansprechen werde ich die Beschreibung von Gravitationswellen, den Newton'schen Grenzfall sowie das Verhalten von Drehimpuls bzw. Spin im Gravitationsfeld.

3.1 Die Lichtablenkung im Gravitationsfeld

Der erste wichtige Test der Relativitätstheorie bezog sich auf die Lichtablenkung an der Sonne. Die Einstein'sche Relativitätstheorie sagt vorher, dass ein Lichtstrahl von einem Stern hinter der Sonne in der gekrümmten Raumzeit in der Nähe der Sonnenoberfläche abgelenkt werden muss. Diese Sprechweise bezieht sich auf den Vergleich zwischen der Situation, wo die Sonne nahezu zwischen Erde und dem betreffenden Stern steht, und der Situation, wo diese Verbindungslinie frei von gravitativen Einflüssen ist. Eine tatsächliche „Ablenkung“ des Lichtstrahls an der Sonne findet nicht statt, denn der Lichtstrahl folgt immer einer geodätischen Linie.

Wir betrachten zunächst die Lichtablenkung in einem konstanten Gravitationsfeld. Nach dem Äquivalenzprinzip sollte die Physik in diesem Fall nicht unterscheidbar von der Physik in einem konstant beschleunigten Bezugssystem sein. Dazu stellen wir uns zwei Systeme vor (vgl. Abb. 3.1): das eine System werde konstant beschleunigt (Beschleunigung a), das zweite System befinde sich in einem Gravitationsfeld der Stärke $g = a$.

Abbildung 3.1: Nach dem Äquivalenzprinzip sollte die Lichtablenkung s in einem Labor, das mit der Beschleunigung a nach oben beschleunigt wird (links) dieselbe sein wie die in einem Labor, das sich in einem konstanten Gravitationsfeld der Stärke $g = a$ befindet (rechts).



Näherungsweise benötigt ein Lichtstrahl zum Durchlaufen des Labors (Länge L) die Zeit $t = L/c$. In dieser Zeit hat sich das Laborsystem aufgrund der Beschleunigung a um die Strecke $s = at^2/2$ weiterbewegt. Um dieselbe Strecke sollte daher ein Lichtstrahl in dem Laborsystem, das in einem Gravitationsfeld mit $g = a$ ruht, abgelenkt werden.

Wir betrachten nun die Ablenkung des Lichts an einem Stern wie der Sonne. Wenn das Äquivalenzprinzip gilt, sollte der Winkel der Ablenkung nur von der Anfangsgeschwindigkeit und dem Stoßparameter abhängen, nicht aber von der Masse eines Teilchens. Für sehr kleine Ablenkungswinkel (bei denen alle Korrekturterme höherer Ordnung vernachlässigt werden) ergibt sich in der klassischen Mechanik für die Streuung am Kepler-Potenzial:

$$\Delta\phi = 2 \frac{GM}{v^2 r_0}, \quad (3.1)$$

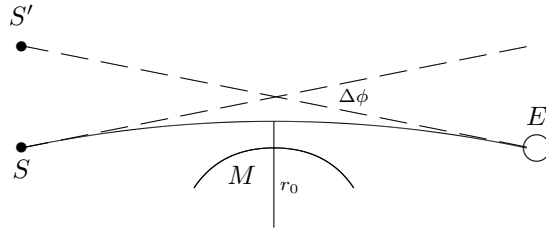
wobei r_0 der Minimalabstand der Bahnkurve vom Sonnenmittelpunkt ist (vgl. Abb. 3.2), was bei den Beobachtungen während einer Sonnenfinsternis dem Sonnenradius entspricht.

Wenn wir (etwas naiv, da nicht-relativistisch gerechnet) für die Geschwindigkeit c einsetzen, erhalten wir:

$$\Delta\phi = 2 \frac{GM}{c^2 r_0}, \quad (3.2)$$

Dies war das Ergebnis, das Einstein zunächst vermutet hatte.

Abbildung 3.2: (Links) Ein Lichtstrahl eines entfernten Sterns S wird an der Sonne abgelenkt. Für einen Beobachter auf der Erde E erscheint der Stern scheinbar an einer anderen Position S' . Als Ablenkungswinkel bezeichnet man den Winkel $\Delta\phi$.



Wie schon erwähnt (S. ??) wurde der Effekt der Lichtablenkung an der Sonne 1919 gemessen und damit die Vorhersage der ART bestätigt. Einstein hatte ursprünglich nur die oben skizzierte Form des Äquivalenzprinzips für seine Vorhersage verwendet. Eine genauere Rechnung, die möglich wurde, nachdem 1916 die Schwarzschild-Lösung bekannt war, ergab diese für den Ablenkungswinkel

$$\Delta\phi = 4 \frac{GM}{c^2 r_0} \frac{1 + \gamma}{2}. \quad (3.3)$$

Hierbei ist γ einer der Parameter der Robertson-Entwicklung (siehe Abschnitt ??) und für die Schwarzschild-Lösung gilt $\gamma = 1$ (siehe Gl. ??), wohingegen in der Newton'schen Näherung $\gamma = 0$ folgt. Die tatsächliche Ablenkung eines Lichtstrahls an der Sonne fällt also im Rahmen der ART doppelt so stark aus, wie ursprünglich vermutet.

3.2 Die Rotverschiebung von Licht

Einer der klassischen Effekte der Relativitätstheorie, der mittlerweile auch mit einer großen Genauigkeit auf der Erde gemessen wurde, ist die Rotverschiebung von Licht, das ein Gravitationsfeld verlässt. Diese Rotverschiebung hat mit dem Gang von Uhren – genauer mit der Länge von Weltlinien – im Gravitationsfeld zu tun.

3.2.1 Uhren im Gravitationsfeld

Wir haben gesehen, dass wir für raumartige Abstände die Metrik durch starre Körper ausmessen können. Für zeitartige Wege können wir die Länge immer durch die Eigenzeit einer mittransportierten Uhr ausmessen.

Grundsätzlich gilt in diesem Fall das Gleiche, wie schon bei der Geometrisierung des Raumes. Es ist eine Definition, die Eigenzeit und damit die zeitartige Metrik über den Lauf guter Uhren zu bestimmen. Universelle Einflüsse sind solche, die den Lauf aller Uhren – d.h. aller physikalischen Systeme mit einer charakteristischen Zeitskala – gleichermaßen beeinflussen, sodass es sinnvoll ist, die Eigenzeit der Geometrie und nicht einer universellen Kraft zuzuschreiben.

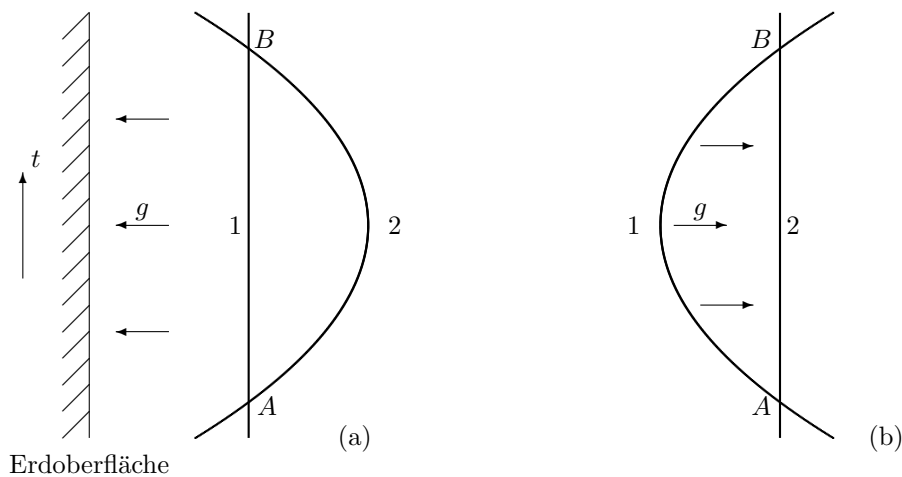


Abbildung 3.3: Das Äquivalenzprinzip für Beobachter im Gravitationsfeld. In Teil (a) befinden sich beide Beobachter in einem Gravitationsfeld g . Beobachter 1 hält seinen Abstand zur Erdoberfläche konstant, spürt also das Feld. Beobachter 2 bewegt sich in einem freien Inertialsystem. Die Situation ist äquivalent zu der Darstellung in Teil (b). Beobachter 2 bewegt sich frei entlang einer Geodäten. Beobachter 1 erfährt eine konstante Beschleunigung. Die Eigenzeit zwischen Ereignis A und B ist daher für Beobachter 2 länger.

Wir wollen nun unter Ausnutzung des Äquivalenzprinzips qualitativ herleiten, wie sich Uhren in einem Gravitationsfeld verhalten. Dazu vergleichen wir zunächst zwei Beobachter 1 und 2 (siehe Abb.3.3). Beobachter 1 sei in einem konstanten Gravitationsfeld „in Ruhe“; er hält beispielsweise seinen Abstand zur Quelle des Gravitationsfeldes (der Erdoberfläche) unter Ausnutzung einer anderen Kraft (beispielsweise der elektromagnetischen Kraft, die in einem Raketenantrieb wirksam ist) konstant. Beobachter 2 hingegen bewegt sich auf einer inertialen Bahnkurve, zum Beispiel in einem mit großer Geschwindigkeit abgeschossenen und dann frei fallenden Satelliten. Der Moment der Trennung der beiden Beobachter sei Ereignis A , der Moment des Zusammentreffens sei Ereignis B .

Beide Beobachter haben auf ihren Uhren die Zeit zwischen Ereignis A und B gemessen. Was stellen sie fest?

Dieses Problem lässt sich mit Hilfe des Äquivalenzprinzips besonders einfach auf ein Problem der speziellen Relativitätstheorie zurückführen. Wir können nämlich auch sagen, dass sich Beobachter 2 entlang einer Geodäten bewegt hat (in seinem System gelten die physikalischen Gesetze eines Inertialsystems), im Minkowski-Raum also entlang einer geraden Linie, und Beobachter 1 wurde konstant beschleunigt. Er entfernt sich zunächst bei Ereignis A mit großer Geschwindigkeit von Beobachter 1, aber seine Beschleunigung ließ ihn immer langsamer werden, bis sich seine Geschwindigkeit umkehrte und er schließlich bei Ereignis B wieder mit Beobachter 1 zusammentraf. Nun wissen wir in der speziellen Relativitätstheorie, dass die Eigenzeit von Beobachter 2 länger ist als die Eigenzeit von Beobachter 1. Die Situation entspricht genau dem Beispiel des Zwillingsparadoxons, wobei 1 der „reisende Astronaut“ ist und 2 der rascher alternde Zwilling, der zu Hause zurückbleibt.

Da die physikalische Situation in beiden Fällen nach dem Äquivalenzprinzip die gleiche ist, bedeutet das, dass für den Beobachter 1 im Gravitationsfeld die Uhr langsamer geht als für den Beobachter 2, der sich scheinbar entlang einer längeren Linie bewegt, allerdings in einem Inertialsystem. Die Allgemeinen Relativitätstheorie besagt somit, dass Uhren im Gravitationsfeld langsamer gehen.

Diese letzte Bemerkung erfordert noch eine Erklärung: Was genau bedeutet „Uhren gehen im Gravitationsfeld langsamer?“ Zunächst einmal verlangt „langsamer“ nach einem Vergleich bzw. einer Referenz – langsamer im Vergleich zu was? Gemeint ist hier der Vergleich zu der Uhr, die sich nicht im Gravitationsfeld befindet (bzw. einer Beschleunigung unterliegt). Wir können jedoch nicht einfach das Gravitationsfeld abschalten (das war eine der Forderungen an eine „universelle Kraft“). In dem oben diskutierten Beispiel ist offensichtlich, welche zwei Uhren wir miteinander vergleichen. Diese Uhren haben aber unterschiedliche Weltlinien durchlaufen. Statt zu sagen, Uhren gehen im Gravitationsfeld langsamer, sollten wir besser sagen: Die Weltlinie entlang eines Weges, bei dem die Uhr den Einfluss der Gravitation spürt, ist kürzer. Eine gute Uhr setzt den Maßstab und geht nicht langsamer. Wenn wir trotzdem manchmal sagen „Uhren gehen im Gravitationsfeld langsamer“, ist diese Bedeutung gemeint, obwohl diese Sprechweise streng genommen irreführend ist.

3.2.2 Rotverschiebung

An einem ganz ähnlichen Gedankenexperiment lässt sich auch die Rotverschiebung von Licht im Gravitationsfeld verstehen. Beobachter S (der Sender) befinde sich in einem Gravitationsfeld, Beobachter E (Empfänger) sei außerhalb dieses Gravitationsfeldes. Beide Beobachter halten konstanten Abstand. Beobachter S benutzt nun eine Referenzfrequenz, beispielsweise die Frequenz einer bestimmten Spektrallinie eines Atoms, und sendet in entsprechendem Takt Signale zu Beobachter E . Zwischen der Ankunft zweier Signale vergeht für Beobachter E aber mehr Zeit, als zwischen den Absendezeiten für Beobachter S . Da es sich um Frequenzen handelt, sieht Beobachter E die entsprechende Spektrallinie also rotverschoben.

Wir werden im nächsten Kapitel sehen, dass die g_{00} -Komponente der Metrik von der Form

$$g_{00} = 1 - 2 \frac{\phi(x)}{c^2} \quad (3.4)$$

ist (vgl. Gleichung 3.26), wobei $\phi(x) = GM/r$ das klassische Newton'sche Potenzial einer kugelsymmetrischen Gravitationsquelle der Masse M (noch geteilt durch die Masse eines Probekörpers) ist. Damit folgt als Beziehung zwischen den Eigenzeiten:

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - 2 \frac{\phi(x)}{c^2}} \Delta t. \quad (3.5)$$

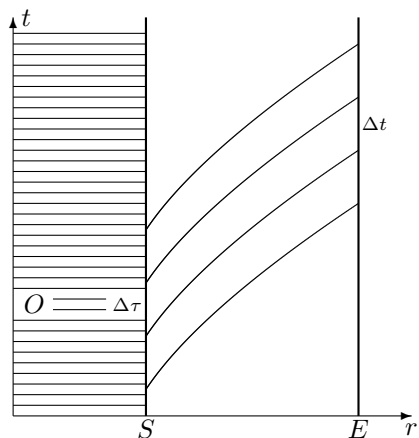


Abbildung 3.4: Rotverschiebung von Licht. Von der Weltlinie eines Senders S an der Oberfläche O eines massiven Körpers wird in regelmäßigen Abständen ein Lichtsignal ausgesandt. Die Signale verlaufen zwar in der angegebenen Karte parallel, aber der Eigenzeitabstand $\Delta\tau$ zwischen zwei Ereignissen beim Sender ist kürzer als der Eigenzeitabstand Δt beim Empfänger E . Daher sieht E die Farbe von Licht rotverschoben.

3.3 Periheldrehung des Merkur

Nach der Newton'schen Gravitationstheorie ist die Ellipsenbahn eines einzelnen um eine schwere Masse (z.B. die Sonne) rotierenden Körpers in einem Inertialsystem konstant, d.h., die Lage der großen Halbachse oder auch der Vektor vom Massenzentrum zum Perihel bleiben zeitlich konstant. Dies ist die Folge einer zusätzlichen Erhaltungsgröße, die als Lenz-Runge-Vektor bekannt ist. Der Lenz-Runge-Vektor zeigt vom Kraftzentrum zum Perihel (dem Punkt mit dem kürzesten Abstand der Bahnkurve zum Kraftzentrum) und ist proportional zur Exzentrizität der Ellipse.

Für die meisten Planetenbahnen ist jedoch bekannt, dass sich ihr Perihel im Laufe der Zeit langsam auf einer Kreisbahn um das Kraftzentrum dreht. Diese Periheldrehung ist für den Planeten Merkur am größten und beträgt in einem Inertialsystem rund 575,2 Bogensekunden pro Jahrhundert. Der Großteil dieser Periheldrehung – rund 532,1 Bogensekunden pro Jahrhundert – lässt sich auf Einflüsse der anderen Planeten sowie eine nicht kugelförmige Massenverteilung der Sonne zurückführen. Die Differenz zwischen dem gemessenen und dem aus der Newton'schen Theorie berechneten Wert beträgt rund 43,1 Bogensekunden pro Jahrhundert.

Dieser Wert ist zu groß, als dass man ihn als „Dreckeffekt“ wegdiskutieren könnte. Mitte des 19. Jahrhunderts gab es daher Vorschläge, einen weiteren Planeten – Vulkan – zu postulieren, der sich so nah an der Sonne befinden sollte, dass man ihn (mit damaligen Mitteln) nicht beobachten kann.

Eine genauere Rechnung (siehe z.B. [?], Kap. 27) ergibt für die Periheldrehung pro Umlauf:

$$\Delta\phi = \frac{6\pi GM}{c^2 p} \frac{2 - \beta + 2\gamma}{3}. \quad (3.6)$$

Hierbei ist p der harmonische Mittelwert der beiden Halbachsen – für die Merkurbahn gilt $p = 55 \cdot 10^6$ km – und somit ein fester Ellipsenparameter:

$$\frac{2}{p} = \frac{1}{r_+} + \frac{1}{r_-}, \quad (3.7)$$

und β und γ sind zwei Parameter der Robertson-Entwicklung (siehe Abschnitt ??), die sich für die Schwarzschild-Lösung zu $\beta = \gamma = 1$ ergeben (Gl. ??). Setzt man Werte ein, so erhält man pro Umlauf $\Delta\phi = 0,104$ Bogensekunden oder im Jahrhundert (der Merkur hat in einem Jahrhundert 415 Sonnenumläufe): $\Delta\phi = 43,0$ Bogensekunden.

Erstaunen mag zunächst, dass für $\beta = \gamma = 0$, also in der Newton'schen Näherung der Schwarzschild-Lösung, der Defektwinkel $\Delta\phi$ in Gl. 3.6 nicht verschwindet, sich also nicht das klassische Ergebnis des Kepler-Problems ergibt. Der Grund ist, dass zwar das Gravitationspotenzial in der Newton'schen Näherung angesetzt wird, die Bewegungsgleichung zur Bestimmung der Bahnkurven

in diesem Potenzial aber immer noch relativistisch ist. Die relativistische Lösung des Wasserstoffproblems (hier wird das Gravitationspotential durch das elektromagnetische Potential ersetzt, was – zumindest nach der gängigen Theorie – nicht zu einer Veränderung der Raumzeitgeometrie führt) hat ebenfalls keine stabilen Ellipsenkurven.

3.4 Gravitationswellen

Auch ohne „Materie“ – ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ – haben die Einstein'schen Feldgleichungen nicht-triviale Lösungen. Eine Klasse von Lösungen der freien Feldgleichungen bilden die Gravitationswellen. In diesem Fall interessiert man sich für Metriken, die sich nur wenig von der Metrik der flachen Raum-Zeit – der Minkowski-Metrik $\eta_{\mu\nu}$ – unterscheiden. Daher bietet sich die Aufspaltung

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (3.8)$$

an. Man interessiert sich nun für die sogenannten linearisierten Einstein-Gleichungen, d.h. es werden nur Terme in linearer Ordnung in ϵ berücksichtigt.

In dieser Näherung ergibt sich für die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu} h_{\kappa\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\kappa} - \partial_{\kappa} h_{\mu\nu}) \quad (3.9)$$

(Dieses Ergebnis ist sogar exakt, wenn man $\eta^{\lambda\kappa}$ durch $g^{\lambda\kappa}$ ersetzt.) Für den Riemann'schen Krümmungstensor erhalten wir:

$$R_{\mu\gamma\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu}^2 h_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu}^2 h_{\mu\gamma} - \partial_{\mu\nu}^2 h_{\kappa\gamma} - \partial_{\kappa\gamma}^2 h_{\mu\nu}) . \quad (3.10)$$

(Hier ergeben die in den Christoffel-Symbolen quadratischen Terme in der linearen Näherung keinen Beitrag.) Die Verkürzung über den mittleren unteren Index mit dem oberen führt auf den Ricci-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial^2 h_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) . \quad (3.11)$$

Wie in Abschnitt ?? gezeigt wurde, muss für eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen im Vakuum der Ricci-Tensor verschwinden. Man erhält so eine lineare Differentialgleichung für $h_{\mu\nu}$:

$$\square h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 h_{\rho}^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} = 0 . \quad (3.12)$$

Eine infinitesimale Koordinatentransformation

$$y^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon f^{\mu}(x) \quad \text{bzw.} \quad dy^{\mu} = dx^{\mu} + \epsilon \frac{\partial f^{\mu}(x)}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu} \quad (3.13)$$

soll die Metrik natürlich nicht ändern, d.h.

$$\hat{g}_{\mu\nu} dy^{\mu} dy^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} . \quad (3.14)$$

Die Funktion $h_{\mu\nu}$ transformiert sich in diesem Fall wie

$$\hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial f^{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial f^{\nu}}{\partial x^{\mu}} . \quad (3.15)$$

Die Funktionen $f^{\mu}(x)$ sind dabei (im physikalischen Sinne) beliebig, und die obige Gleichung beschreibt die Auswirkung einer solchen *Eichtransformation* auf die Funktion $h_{\mu\nu}$. Ähnlich wie in der

Elektrodynamik können wir also eine Eichung wählen, für die die Feldgleichungen eine besonders einfache Form annehmen. Hier wählt man üblicherweise

$$2 \frac{\partial h^\mu_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial h^\mu_\mu}{\partial x^\nu} . \quad (3.16)$$

Durch eine geeignete Wahl von f_μ lassen sich diese vier Bedingungen immer erfüllen. In dieser Eichung lauten die linearisierten freien Feldgleichungen:

$$\square h_{\mu\nu} = 0 . \quad (3.17)$$

Dies ist eine gewöhnliche Wellengleichung für die Komponenten $h_{\mu\nu}$. Die Eichbedingung führt allerdings zu Einschränkungen zwischen den verschiedenen Komponenten.

Auch wenn es noch keine zufriedenstellende Quantentheorie der Gravitation gibt, so kann man doch vermuten, dass im Grenzfall kleiner Raum-Zeit-Fluktuationen die Quantentheorie der Gravitation durch eine quantisierte Form obiger Wellengleichung gegeben ist. Die zugehörigen Teilchen bezeichnet man als Gravitonen. Als Quantenzahlen zum Eigendrehimpuls \hbar der Gravitonen treten zunächst die Werte $h = 0, \pm 1, \pm 2$ auf, was Gravitonen als Spin-2-Teilchen kennzeichnet. Die Helizitäten zu $h = 0$ und $h = \pm 1$ gibt es jedoch nicht (ähnlich, wie es auch die Helizität $m = 0$ für das Photon als Spin-1-Teilchen nicht gibt – da das Photon keine Masse hat, gibt es auch keine transversalen Freiheitsgrade). Lediglich die Helizitäten $h = \pm 2$ entsprechen daher der physikalischen Polarisation einer Gravitationswelle bzw. dem Zustand eines Gravitons (vgl. [?], Kap. 29 und 38).

Man versucht heute mit Hilfe von Laserinterferenzexperimenten (im Wesentlichen riesige Michelson-Morley-Interferometer) Gravitationswellen nachzuweisen. Bisher ist ein direkter Nachweis noch nicht geglückt, allerdings gibt es indirekte Hinweise auf Gravitationswellen: An Doppelpulsarsystemen (das bekannteste ist das System PSR 1913+16) beobachtet man über die Jahre hinweg eine Verkürzung der Umlaufzeiten (Abb. 3.5). Diese beruht auf einem Energieverlust, der nach der ART berechnet werden kann und im Wesentlichen in einer Abstrahlung von Gravitationswellen besteht.

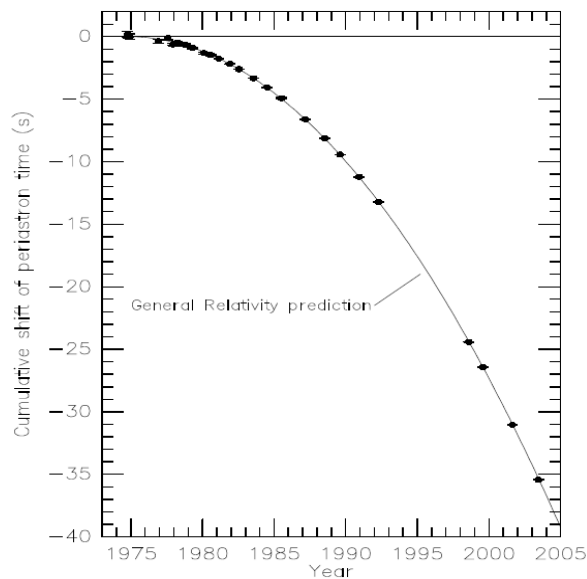


Abbildung 3.5: Periodenverkürzung des Periastrons (der Punkt, bei dem ein Stern eines Doppelstern-Systems seinem Partner am nächsten ist) bei dem Doppelstern-System PSR 1913+16. Die Verkürzung beruht im Wesentlichen auf einer Abstrahlung von Gravitationswellen. (Aus [?])

3.5 Die Newton'sche Näherung

Die Geodätengleichung (??) entspricht der Bewegungsgleichung für ein Teilchen unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes. In der Newton'schen Näherung sollte diese Gleichung somit in

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi(x) \quad (3.18)$$

übergehen, wobei

$$\phi(x) = -G \frac{M}{|\vec{x}|} \quad (3.19)$$

das Gravitationspotential eines Massepunktes bzw. Zentralkraftfelds (dividiert durch die Probemasse) ist. Für den Minkowski-Raum verschwinden die Christoffel-Symbole und man erhält die freie Bewegungsgleichung. Also muss für die Newton'sche Näherung eine nicht-triviale Metrik angenommen werden.

Wenn wir den Grenzfall $v \ll c$ oder

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \quad (3.20)$$

betrachten (das bedeutet, die Vierergeschwindigkeit hat praktisch nur eine Zeitkomponente), folgt für die Beschleunigung:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \approx -\Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \quad (3.21)$$

Außerdem sind wir an statischen Lösungen interessiert, bei denen die Metrik keine explizite Zeitabhängigkeit hat. In diesem Fall ist $\Gamma_{00}^0 = 0$ und $\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} \partial^k h_{00}$. Das bedeutet, in unserer Näherung ist

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c. \quad (3.22)$$

Weiterhin folgt

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x_k} c^2 \quad (3.23)$$

oder

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} c^2. \quad (3.24)$$

Ein Vergleich mit Gl. 3.18 gibt uns

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad \text{oder} \quad g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (3.25)$$

Damit die Einstein'sche ART im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und kleiner statischer Variationen der Metrik (d.h. für große Abstände von einer Massenkonzentration) mit der Newton'schen Theorie übereinstimmt, muss in diesem Grenzfall die Komponente g_{00} der Metrik die Form

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (3.26)$$

haben. Der Parameter M hat die Interpretation der Newton'schen Masse. Über die anderen Komponenten der Metrik können wir nichts aussagen. Insbesondere können wir nicht annehmen, dass diese in irgendeinem Sinne klein im Vergleich zu g_{00} sind. Zur Bewegungsgleichung tragen sie in dem Grenzfall $v^i \ll c$ nicht bei.

Nahe der Erdoberfläche können wir näherungsweise $\phi = gh$ setzen (h parametrisiert die Höhe über dem Erdboden) und erhalten

$$g_{00} = 1 - \frac{2gh}{c^2}. \quad (3.27)$$

3.6 Gravity B Probe

Am 20. April 2004 wurde mit einer Rakete ein Satellit in die Erdumlaufbahn gebracht, dessen Ziel die Messung der Raumkrümmung in der Nähe der Erde war. Das als „Gravity B Probe“ bekannte Experiment wurden in der Zeit bis Ende 2005 durchgeführt, die Auswertung der Daten dauerte mehrere Jahre. Zur Ausmessung der Raumkrümmung bediente man sich mehrerer hoch empfindlicher Gyroskope.

Die Idee des Experiments beruhte darauf, dass der Drehimpuls ein Vektor ist, der – sofern andere Einflüsse als die Gravitation ausgeschaltet werden können – entlang einer Weltlinie parallel verschoben wird. Den 4-Vektor s^μ erhält man aus der Forderung, dass der Vektor im Bezugssystem des Gyroskops durch $(0, s^i)$ (eine verschwindende Zeitkomponente und die drei räumlichen Komponenten des Drehimpulses) gegeben ist. Die Präzession im Gravitationsfeld erfolgt daher nach der Gleichung

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s^\lambda, \quad (3.28)$$

wobei $u^\nu(\tau)$ die Komponenten des Tangentialvektors (in der Eigenzeitparametrisierung) an die Bahnkurve der Verschiebung sind. Damit kann man aus einer Rotation der Drehimpulsachse auf bestimmte Komponenten der Metrik schließen.

Gravity B Probe sollte zwei Effekte der Raumkrümmung messen:

1. Die Raumkrümmung durch die Masse der Erde, wie sie sich beispielsweise aus einer Schwarzschild-Metrik (siehe nächstes Kapitel) für große Abstände vom Horizont ergibt. Der zu erwartende Effekt aufgrund dieses Einflusses war pro Jahr rund 6600 Millibogensekunden, um den die Drehachse verschoben wird.
2. Den so genannten *Lense-Thirring-Effekt*, wonach die Raumzeit in der Umgebung eines rotierenden Körpers von diesem „mitgezogen“ wird, was zu einer schwachen Verdrillung der Raumzeit in der Umgebung eines rotierenden Körpers führt. Man kann diesen Effekt z.B. aus der Kerr-Lösung (siehe ebenfalls nächstes Kapitel) für ein rotierendes Schwarzes Loch in großem Abstand erhalten. Hier betrug der zu erwartende Effekt rund 40 Millibogensekunden pro Jahr.

Insbesondere der Lense-Thirring-Effekt ist in der Umgebung der Erde winzig und erforderte eine sehr große Präzision sowohl bei den Gyroskopen als auch bei den Geräten zur Messung der Rotation der Drehimpulsachsen. Trotzdem konnte der Effekt mit rund 1% Genauigkeit nachgewiesen werden.

Literaturverzeichnis