Kapitel 6

Thermodynamik Schwarzer Löcher

6.1 Quantentheorie und Gravitation

Eine wirklich zufriedenstellende Quantentheorie der Gravitation bzw. der Raumzeit gibt es derzeit trotz umfangreicher Versuche (es gibt die kanonische Quantengravitation, die Loop-Quantengravitation, die String-Theorie, kausale Mengen, kausale Triangulationen, nicht-kommutative Geometrie, ...) noch nicht. Auch nur ein elementarer Überblick zu diesen Ansätzen würde den Rahmen dieser Vorlesung mehr als sprengen.

Ein paar wichtige Überlegungen scheinen jedoch so allgemein, dass sie vermutlich in jeder sinnvollen Form der Quantengravitation eine Rolle spielen werden. Dazu zählen beispielsweise die so genannten Planck'schen Einheiten, als auch insbesondere die Thermodynamik Schwarzer Löcher. Auf beides möchte ich kurz eingehen.

Planck'sche Einheiten

Die Quantentheorie, die Spezielle Relativitätstheorie und die Allgemeine Relativitätstheorie liefern uns drei fundamentale Naturkonstanten:

$$\begin{aligned} \hbar &= 1{,}054572 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s} \\ c &= 299\,792\,458\,\mathrm{m} \\ G &= 6{,}675 \times 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{kg\cdot s^2}\,. \end{aligned}$$

Aus diesen Konstanten lassen sich fundamentale Größen zu allen physikalischen Einheiten ableiten, z.B.:

$$\begin{aligned} \text{Planck-Länge} \quad l_\mathrm{P} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 1{,}6162 \times 10^{-35}\,\mathrm{m} \\ \text{Planck-Zeit} \quad t_\mathrm{P} &= \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5{,}391 \times 10^{-44}\,\mathrm{s} \\ \text{Planck-Masse} \quad m_\mathrm{P} &= \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} = 2{,}1765 \times 10^{-8}\,\mathrm{kg} \\ \text{Planck-Energie} \quad E_\mathrm{P} &= \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G}} = 1{,}9561 \times 10^{9}\,\mathrm{J} \\ \text{Planck-Dichte} \quad \rho_\mathrm{P} &= \frac{c^5}{\hbar G^2} = 5{,}155 \times 10^{96}\,\mathrm{kg/m^3} \\ \text{Planck-Volumen} \quad V_\mathrm{P} &= \sqrt{\frac{(\hbar G)^3}{c^9}} = 4{,}2217 \times 10^{-105}\,\mathrm{m}^3 \end{aligned}$$

Nehmen wir noch die Boltzmann-Konstante

$$k_{\mathrm{B}} = 1{,}38065 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K} \tag{6.1}$$

hinzu, so erhalten wir auch eine

$$\text{Planck-Temperatur} \quad T_{\mathrm{P}} \quad = \quad \sqrt{\frac{\hbar c^5}{G k_{\mathrm{B}}^2}} = 1{,}4168 \times 10^{32}\,\mathrm{K}\,. \tag{6.2}$$

Schon 1899 (also ein Jahr vor seinem berühmten Vortrag am 14. Dezember 1900 vor der Physikalischen Gesellschaft, der allgemein als die Geburtsstunde der Quantentheorie angesehen wird) machte Max Planck darauf aufmerksam, dass es diese fundamentalen Größen geben müsse. Er hatte zu dieser Zeit eine empirische Formel für die Schwarzkörperstrahlung gefunden und erkannt, dass in dieser Formel eine fundamentale Konstante (die wir heute als Planck-Konstante bezeichnen) auftritt. Mit dieser Konstanten und den damals schon bekannten Konstanten c und G gelangte er zu den Größen, die wir heute als *Planck-Einheiten* bezeichnen.

Die Planck-Länge ist vermutlich die kleinste Skala, auf der das Konzept einer Länge noch sinnvoll ist, ähnliches gilt für die Planck-Zeit. Die Planck-Zeit entspricht der Zeit, die das Licht braucht, um eine Planck-Länge zu durchqueren.

Die Planck-Masse ist die Masse eines Schwarzen Loches, dessen Schwarzschild-Radius gleich der Planck-Länge ist. Mit rund 0,02 mg hat sie fast einen makroskopischen Wert. Ausgedrückt in GeV/c^2, eine bei Teilchenphysikern sehr beliebte Einheit, entspricht dies $m_{\mathrm{P}} = 1{,}22 \times 10^{19}\,\mathrm{GeV}/c^2$. Dies ist vermutlich die höchste Masse, die ein nachweisbares elementares Teilchen haben kann.

Die Planck-Energie ist die Energie zu einer Planck-Masse nach der Einstein'schen Beziehung $E = mc^2$. Gleichzeitig ist es die Unbestimmtheit in der Energie, die nach der Quantentheorie innerhalb einer Planck-Zeit nicht unterschritten werden kann.

Außerdem definieren die Planck-Einheiten die Grenzen, bis zu denen wir nach dem Standardmodell der Teilchenphysik vordringen können, ohne die Quantengravitation mit einbeziehen zu müssen: Das Universum hatte eine Planck-Zeit nach dem Urknall einen Radius von der Planck-Länge bzw. ein Planck-Volumen. Es hatte zu diesem Zeitpunkt eine Temperatur von der Planck-Temperatur, usw.

6.1.1 Die Hawking-Bekenstein-Strahlung

Als einzigen Quantenaspekt der Gravitation möchte ich in dieser Vorlesung kurz die Thermodynamik Schwarzer Löcher ansprechen. Es geht dabei darum, dass man einem Schwarzen Loch eine Entropie und eine Temperatur zuschreiben kann, und dass mit dieser Temperatur auch eine Strahlung verbunden ist, die *Bekenstein-Hawking-Strahlung* Schwarzer Löcher [**?**, **?**].

Wie wir im Zusammenhang mit den Lösungen der Einstein'schen Gleichungen gesehen haben, gilt für Schwarze Löcher das „No Hair-Theorem“. Neben ihrer Masse, ihrem Drehimpuls und ihrer Ladung (sowie einigen Erhaltungsgrößen aus der Teilchenphysik) haben Schwarze Löche keine weiteren Freiheitsgrade. Insbesondere gibt es keine Quadrupolmomente zur Massen- oder Ladungsverteilung etc. Im Sinne der Boltzmann'schen Beziehung $S = k_{\mathrm{B}} \ln \Omega$ zwischen der Entropie S und der Anzahl der Mikrozustände Ω sollte ein Schwarzes Loch daher praktisch keine Entropie besitzen.

Damit würden Schwarze Löcher jedoch dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik (zumindest in einer bestimmten Form) widersprechen: Die Gesamtentropie in unserem Universum kann niemals abnehmen. Wenn jedoch ein Schwarzes Loch praktisch keine Entropie hätte, gleichzeitig aber beliebige Materiemengen mit nahezu beliebig viel Entropie „verschlucken“ kann, dann scheint bei diesem Prozess die Entropie in unserem Universum abzunehmen.

Ein Ausweg ergibt sich, wenn man einem Schwarzen Loch eine Entropie zuschreibt, die mit seiner Masse zusammenhängt. Durch solche Überlegungen gelangte Bekenstein zu der Schlussfolgerung, dass ein Schwarzes Loch eine Entropie

$$S = \frac{k_{\mathrm{B}}}{4} \frac{A}{l_{\mathrm{P}}^2} \tag{6.3}$$

haben muss. Hierbei ist A die Oberfläche des Schwarzen Lochs (also die Fläche einer Kugeloberfläche vom Radius R_{S}) und l_{P} die oben eingeführte Planck-Länge. Die Entropie eines Schwarzen Lochs entspricht also seiner Oberfläche in Einheiten der Planck-Fläche. Es zeigt sich, dass dies die höchste Entropie ist, die sich in dem Volumen eines Schwarzen Lochs unterbringen lässt. Keine Materieform kann in einem so kleinen Bereich eine größere Entropie haben.

Es mag erstaunen, dass ein Schwarzes Loch eine Entropie hat, die proportional zu seiner Oberfläche und nicht zu seinem Volumen ist, denn gewöhnlich ist die Entropie eine extensive Größe, die proportional zum Volumen eines Systems ist. Hier hilft aber vielleicht die Vorstellung, dass für einen asymptotischen Beobachter Materie (und damit Entropie) niemals hinter dem Horizont verschwindet, sondern in gewisser Hinsicht an der Oberfläche „kleben" bleibt. Die emittierte Strahlung wird zwar immer langwelliger, aber die Wellenlänge kann nie größer als der Durchmesser des Schwarzen Lochs werden.

Dies gibt auch gleichzeitig eine Vorstellung von der Temperatur des Schwarzen Lochs: Ein Schwarzes Loch strahlt eine thermische Strahlung ab, deren Wellenlänge seinem Durchmesser entspricht. Verwenden wir das Wien'sche Verschiebungsgesetz, das eine Beziehung zwischen der Temperatur und der Wellenlänge zur maximalen Intensität der abgestrahlten Strahlung angibt,

$$\lambda = \mathrm{const} \frac{\hbar c}{k_{\mathrm{B}} T} \,, \tag{6.4}$$

und setzen für λ den Schwarzschild-Durchmesser (doppelten Radius) eines Schwarzen Lochs ein, so erhalten wir

$$\frac{4GM}{c^2} = \mathrm{const} \frac{\hbar c}{k_{\mathrm{B}} T} \tag{6.5}$$

oder

$$T = \mathrm{const} \frac{\hbar c^3}{k_{\mathrm{B}} G M} \,. \tag{6.6}$$

Eine genaue quantenfeldtheoretische Rechnung liefert die *Bekenstein-Hawking-Temperatur*:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi k_{\mathrm{B}} G M} \,. \tag{6.7}$$

Aus dieser Gleichung kann man auch wieder die Entropie des Schwarzen Lochs ableiten.

In einem sehr vereinfachten Bild wird der Ursprung der Bekenstein-Hawking-Strahlung in der Quantenfeldtheorie gerne folgendermaßen beschrieben: Das Vakuum ist in der Quantenfeldtheorie nicht leer, sondern es gibt eine Grundzustandsenergie und Grundzustandsfluktuationen. Diese werden oft durch die Erzeugung und Vernichtung virtueller Teilchen-Antiteilchen-Paare beschrieben. Wenn nun ein Teilchen-Antiteilchen-Paar nahe der Oberfläche eines Schwarzen Lochs entsteht, kann es passieren, dass eines der Teilchen den Schwarzschild-Radius überquert, wohingegen das andere Teilchen dem Schwarzen Loch entkommt. Für einen entfernten Beobachter scheint dieses (nun reale) Teilchen von dem Schwarzen Loch abgestrahlt worden zu sein. Das vom Schwarzen Loch verschluckte Teilchen hatte eine negative Energie und hat somit die Energie des Schwarzen Lochs um die Energie des abgestrahlten Teilchens verringert. Man sollte jedoch nicht vergessen, dass dies nur ein sehr vereinfachtes, anschauliches Bild ist.

Die Entropie zu einem Schwarzen Loch von der Masse der Sonne ist ungefähr

$$\frac{S_{\text{Sonne}}}{k_{\text{B}}} \approx 1{,}07 \cdot 10^{76} \,. \tag{6.8}$$

Die Masse unseres Universums wird auf rund 10^{24} Sonnenmassen geschätzt. Da die Entropie proportional zum Quadrat der Sonnenmasse ist, folgt daraus für die maximal mögliche Entropie, die unser Universum haben kann (wenn nämlich die gesamte Masse in einem einzige Schwarzen Loch verschwunden ist), ein Wert von rund 10^{124}. Die geschätzte Entropie des heutigen Universums liegt um rund 20 Größenordnungen niedriger.

Derzeit entspricht die Mikrowellenhintergrundstrahlung einer Temperatur von rund 2,7 K. Dies bezeichnet man manchmal als die heutige Temperatur des Universums. Die Temperatur eines Schwarzen Lochs von der Masse unserer Sonne ist nach obiger Formel ungefähr 10^{-6} K, schwerere Schwarze Löcher haben sogar noch niedrigere Temperaturen. Somit würde ein Schwarzes Loch derzeit mehr Strahlung aufnehmen (und dadurch an Masse zunehmen) als es abstrahlt. Da sich unser Universum aber beschleunigt ausdehnt (siehe nächstes Kapitel) und somit seine Temperatur weiterhin abnimmt, könnte irgendwann der Zeitpunkt kommen, an dem Schwarze Löcher mehr Strahlung abstrahlen als sie aufnehmen. Ist das der Fall, könnten langsam sämtliche Schwarzen Löcher verstrahlen und zurück bliebe ein sehr dünnes Gas in einem ansonsten leeren Raum.

Literaturverzeichnis