

Spezielle Relativitätstheorie

Thomas Filk

Skript zur Vorlesung

Ausgewählte Kapitel der Theoretischen Physik für Lehramtsstudierende

(Version vom 05.01.2022)

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	1
1 Die spezielle Relativitätstheorie	5
1.1 Der Äther	6
1.2 Das Experiment von Michelson und Morley	7
1.3 Axiomatische Formulierung der speziellen Relativitätstheorie	10
1.4 Lorentz-Transformationen	11
1.5 Die Minkowski-Raumzeit	14
1.5.1 Die Geometrie des Minkowski-Raums	14
1.5.2 Darstellung des Minkowski-Raums	14
1.5.3 Die kausale Struktur	15
1.5.4 Inertialsysteme	16
1.6 Geometrische Konstruktionen	17
1.6.1 Der Raum gleichzeitiger Ereignisse	17
1.6.2 Die Einstein-Synchronisation	18
1.6.3 Die relativen Skalen	19
2 „Philosophisches“ Zwischenkapitel	23
2.1 Eine Kette gekoppelter Pendel	23
2.2 Von der Ätherhypothese zur Relativitätstheorie	27
2.3 Die Synchronisation von Uhren	29
2.3.1 Synchronisation durch Lichtsignale	29
2.3.2 Die Einstein-Synchronisation	30
2.3.3 Synchronisation mit der Ätherhypothese	31
2.3.4 Synchronisation durch langsamen Uhrentransport	33
3 SRT – Anwendungen	35
3.1 Zeitdilatation	35
3.2 Lorentz-Kontraktion	36
3.3 Doppler-Effekte	37
3.3.1 Der Doppler-Effekt in der klassischen Mechanik	37
3.3.2 Der longitudinale relativistische Doppler-Effekt	38
3.3.3 Der transversale Doppler-Effekt	39
3.4 „Einparken“	39
3.5 Das Zwillingsparadoxon	40
3.6 Die Eigenzeit	42

3.7	Der kanonische Formalismus	42
3.8	Die Äquivalenz von Masse und Energie	43
4	SRT – Beschleunigte Systeme	47
4.1	Die konstante Beschleunigung	47
4.1.1	Herleitung der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit	48
4.1.2	Bestimmung der Bahnkurve	48
4.1.3	Erste Analyse der konstant beschleunigten Bewegung	50
4.2	Zwei konstant beschleunigte Systeme	51
4.3	Das Rindler-Universum	54
4.3.1	Kausale Beziehungen	54
4.3.2	Was „sehen“ die Beobachter voneinander?	56
	Literaturangaben	59

Kapitel 1

Die spezielle Relativitätstheorie

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts mehrten sich die Anzeichen, dass irgendetwas im Weltbild der Physik nicht stimmen konnte. Die Newton'sche Mechanik war sehr erfolgreich bei der Beschreibung der Bewegungen von materiellen Körpern, andererseits war die Theorie Maxwell's ebenso erfolgreich bei der Beschreibung der Phänomene im Zusammenhang mit elektrischen und magnetischen Feldern. Doch die beiden Theorien passten nicht zusammen: Die Newton'sche Theorie ist fundamental Galilei-invariant, d.h. in zwei über eine Galilei-Transformation verbundenen Inertialsystemen gelten dieselben physikalischen Gesetze. Die Maxwell'sche Theorie enthält jedoch als Parameter eine Geschwindigkeit (die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum) und scheint somit ein spezielles Ruhesystem auszuzeichnen. Dieses Ruhesystem dachte man sich gleichzeitig als Ruhesystem des Äthers, dessen oszillatorische Anregungen den elektromagnetischen Wellen entsprechen sollten, ähnlich wie die Schwingungen von Luft den Schallwellen entsprechen. Das Experiment von Michelson und Morley (siehe Abschnitt 1.2) war dazu gedacht, dieses Ruhesystem experimentell zu bestimmen.

Oftmals wird der Ausgang des Michelson-Morley-Experiments als Beweis dafür gewertet, dass es den Äther bzw. das ausgezeichnete Ruhesystem nicht gibt. Das ist streng genommen nicht richtig: Die mechanistischen Erklärungen von Lorentz und Fitzgerald (wonach sich Gegenstände bei einer Bewegung relativ zum Äther verkürzen und alle Zeitabläufe entsprechend verlangsamen) kann sämtliche Phänomene ebenso erklären wie die heute vorherrschende Interpretation von Einstein und Minkowski, bei der kein Ruhesystem ausgezeichnet ist. Man kann sogar sagen, dass jede Lorentz-invariante Theorie *per definitionem* auch die Interpretation von Lorentz-Fitzgerald zulässt. Experimentell lässt sich zwischen diesen beiden Interpretationen nicht unterscheiden (Näheres siehe Abschnitt 2.1). Die Einstein'sche Interpretation hat lediglich den Vorteil, auf unbeobachtbare Entitäten verzichten zu können.

Wenn auch heute die spezielle Relativitätstheorie in erster Linie mit dem Namen Albert Einsteins verbunden ist, sollte man nicht vergessen, dass insbesondere Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) und Jules Henri Poincaré (1854–1912) wesentliche Vorarbeiten geliefert haben. Was die entscheidenden Schritte zur speziellen Relativitätstheorie betrifft, so werden heute meist drei Arbeiten zitiert (aus [24], S. 2 und [31], S. 408):

1. H.A. Lorentz; *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light* ([18]). Eingereicht hatte er diese Arbeit am 27.5.1904.
2. J.H. Poincaré; *Sur la dynamique de l'électron* ([25]). Diese Arbeit wurde bei der Französischen Akademie der Wissenschaften am 5.6.1905 eingereicht.
3. A. Einstein; *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* ([7]). Diese Arbeit wurde am 30.6.1905 ein-

gereicht.

Eine Diskussion, welchem Autor was zuzuschreiben ist, findet man bei Pauli [24] (S. 2/3).

1.1 Der Äther

Den Begriff des Äthers gab es in unterschiedlichen Bedeutungen schon im Altertum. Bei den Griechen bezeichnete er je nach Autor eine „leuchtende Substanz“, „Sitz der Götter“, „Urmaterie und Quintessence (fünftes Element neben den vier bekannten Elementen)“ etc. [Brockhaus]. Eine spezifischere Wiederbelebung erfuhr der Äther bei Descartes zur Erklärung der Planetenbahnen (allgemeiner zur Erklärung der Gravitation) und bei Huygens als Träger der Lichtwellen. Newton setzte sich in seiner Optik ([23], Frage 18ff, besonders Frage 22: „... Äther (denn so will ich ihn nennen) ...“) mit der Ätherhypothese auseinander.

Eine konkrete Definition von Äther bzw. der Ätherhypothese zu geben fällt schwer, da sich die Bedeutung des Wortes wie auch die ihm zugesprochenen Eigenschaften oft gewandelt haben. Meist verstand man aber unter Äther eine „schwerelose, durchsichtige, reibungslose, chemisch oder physikalisch nicht nachweisbare und alle Materie und den gesamten Raum durchdringende Substanz“ ([6]; Stichwort ‘Ether’). Manchmal schienen die oben genannten Eigenschaften jedoch auch im Widerspruch zu den Beobachtungen zu stehen. Um den großen Wert der Lichtgeschwindigkeit erklären zu können, musste man beispielsweise eine sehr hohe Dichte des Äthers annehmen. 1816 zeigten Augustin Jean Fresnel (1788–1827) und François Arago (1786–1853), dass senkrecht aufeinander polarisierte Strahlen nicht interferieren und 1817 erklärte Thomas Young (1773–1829) diese Erscheinung durch die Annahme transversaler Schwingungen.

Transversale Schwingungen setzen jedoch voraus, dass es in dem Trägermedium Scherkräfte gibt, die einer transversalen Auslenkung entgegenwirken. Damit schied aber ein Äther mit den Eigenschaften von Flüssigkeiten oder Gasen (in denen nur longitudinale Wellen existieren) aus (vgl. Born [5], S. 3). Die fehlende longitudinale Polarisation konnte sogar nur erklärt werden, wenn man dem Äther die Eigenschaften eines unendlich dichten Festkörpers zuschrieb. Andererseits sollten sich aber die Planeten nahezu reibungslos durch dieses Medium bewegen können.

Eine Theorie von George Gabriel Stoke (1819–1903) zur Erklärung dieser scheinbaren Widersprüche erscheint uns heute eher absurd: Er schrieb dem Äther die Eigenschaften bestimmter nicht-newtonscher Fluide zu, wie sie beispielsweise bei Pech, Siegellack oder nassem Sand beobachtet wurden. Von diesen Stoffen war bekannt, dass sie einerseits recht schneller Schwingungen fähig sind (also die hohe Lichtgeschwindigkeit und die fehlende longitudinale Polarisation erklärbar wurde), andererseits aber auch gegenüber langsamen Beanspruchungen völlig nachgiebig sind (und dadurch die vergleichsweise langsame, nahezu reibungslose Planetenbewegung möglich war).

Im 19. Jahrhundert wurden viele Experimente unternommen, den Äther nachzuweisen. Als Beweis für die Existenz des Äthers wurde oft ein Experiment von Armand Hypolit Louis Fizeau (1819–1896) gewertet, der die Lichtgeschwindigkeit c' in einer bewegten Flüssigkeit gemessen und festgestellt hatte, dass sich die Geschwindigkeit von Licht in der ruhenden Flüssigkeit (d.h. c/n , wobei n der Brechungsindex der Flüssigkeit ist) und die Geschwindigkeit der Flüssigkeit v nicht addieren, sondern v um einen vom Brechungsindex abhängigen Faktor verringert werden muss ([31]; S. 400):

$$c' = \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v. \quad (1.1)$$

Diese Ergebnis konnte unter der Annahme einer partiellen, von der optischen Dichte n abhängigen Mitführung des Äthers durch die Flüssigkeit erklärt werden ([31], S. 400). Erst das verallgemeinerte

Additionstheorem für Geschwindigkeiten in der Relativitätstheorie konnte diese Erscheinung auch ohne Ätherhypothese erklären. Danach erhält man (vgl. Pauli [24], S. 114):

$$c' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{cv}{nc^2}} = \frac{c}{n} + v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) \frac{1}{1 + \frac{v}{nc}}. \quad (1.2)$$

In führender Ordnung von v/c stimmt dieses Ergebnis mit dem alten Resultat überein. In seiner bekannten „Geschichte der Physik“ schreibt Max von Laue ([17], S. 63) in diesem Zusammenhang:

Der Fizeausche Versuch galt lange als der schlagende Beweis für die Existenz eines Äthers, der alle Körper durchdringen sollte, ohne an ihrer Bewegung teilzunehmen. Denn nur so konnte man diesen verkleinerten Faktor verstehen. ... So ist die Geschichte des Fizeau-Versuchs ein lehrreiches Beispiel dafür, wie weit in die Deutung jedes Versuchs schon theoretische Elemente hineinspielen; man kann sie gar nicht ausschalten. Und wenn dann die Theorien wechseln, so wird aus einem schlagenden Beweise für die eine leicht ein ebenso starkes Argument für eine ganz entgegengesetzte.

Im 19. Jahrhundert war die Ätherhypothese auch Grundlage vieler Modelle von Raum, Zeit und Materie, die weit über die einfache Erklärung der Wellennatur von Licht hinausgingen. Ein interessantes Modell stammt beispielsweise von William Thomson (1824–1907), dem späteren Lord Kelvin of Largs. 1866 hatte er unter dem Eindruck der bahnbrechenden Arbeiten von Hermann von Helmholtz (1821–1894) zur Theorie der Vortizes in einem idealen Fluid (1858, [15]) – insbesondere ihrer erstaunlichen Stabilität, der Möglichkeit elastischer Stoßprozesse zwischen Vortizes und der Komplexität ihrer Strukturen – eine Theorie aufgestellt, wonach der Äther in unserem Kosmos nicht nur für die optischen, elektrischen und magnetischen Phänomene verantwortlich ist, sondern darüberhinaus auch die Atome – die Bausteine der Materie – als Verknötungen von Vortizes in diesem Äther beschreibt. Die einzelnen Atomarten entsprechen dabei topologisch verschiedenen Knotentypen. Sämtliche Naturgesetze sollten sich somit aus den statischen und dynamischen Eigenschaften des Äthers als einem idealen Fluid ableiten lassen. Dieses Modell würde sogar erklären, weshalb der Raum eines „nicht leeren“ Universums dreidimensional sein muss, denn nur in drei Dimensionen sind Knoten topologisch stabil. (Lit.: Encyclopaedia Britannica [6], Macropaedia, Stichwort ‘Helmholtz’, Bd. 20, S. 564-2b.)

1.2 Das Experiment von Michelson und Morley

Wenn der Äther tatsächlich existierte und wenn er, wie das Experiment von Fizeau andeutete, die Körper durchdringt, ohne unmittelbar an ihrer Bewegung teilzuhaben, dann sollte die Geschwindigkeit der Erde relativ zum Äther – und damit relativ zum absoluten Raum – bestimmbar sein. Auf diese Möglichkeit hatte auch bereits Maxwell hingewiesen. Da die von Maxwell, Hertz und Lorentz entwickelte Theorie des Elektromagnetismus die Lichtgeschwindigkeit c als Konstante enthielt, galt es als sicher, dass die Maxwell’schen Gleichungen nur in dem Bezugssystem gelten, in dem Licht diese Geschwindigkeit hat, d.h. dem System, in dem der Äther als Träger der Lichtwellen ruht.

Das Schlüsselexperiment zum Nachweis des Äthers sollte das Experiment von Albert Abraham Michelson (1852–1931) und Edward Williams Morley (1838–1923) werden. Der entsprechende Versuch wurde 1881 von Michelson, dann 1887 nochmals von ihm gemeinsam mit Morley durchgeführt. Mit Hilfe eines Interferometers (Abb. 1.1(a)) wurde die Laufzeit von Licht entlang zweier aufeinander senkrecht stehender Richtungen l_1 und l_t verglichen. l_1 bezeichnet dabei die Distanz in longitudinaler Richtung, d.h. der Richtung der vermuteten Erdbewegung relativ zum Äther, und l_t eine dazu senkrechte Distanz.

Relativ zum Äther hat Licht immer die Geschwindigkeit c . Für die longitudinale Richtung berechnen wir die Laufzeit am einfachsten im Laborsystem. Je nachdem, ob sich die experimentelle

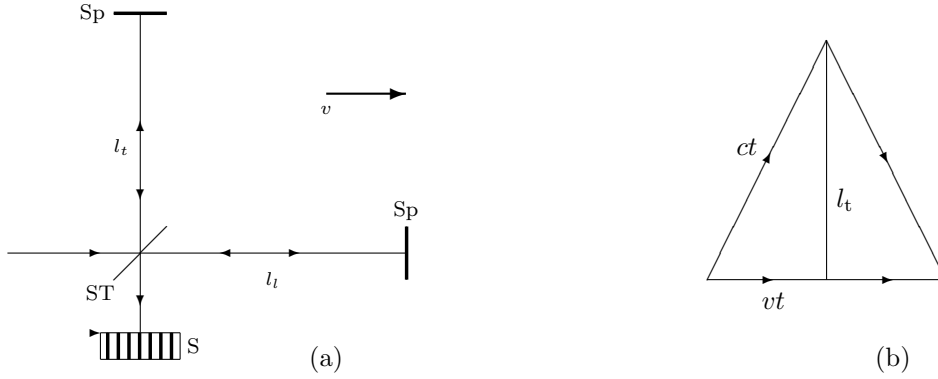


Abbildung 1.1: Das Michelson-Morley-Interferometer. (a) Ein Lichtstrahl trifft auf einen Strahlteiler (ST) und die beiden Anteile breiten sich in orthogonale Richtungen entlang der Strecken l_l und l_t aus. Sie werden an Spiegeln (Sp) reflektiert, treffen wieder auf den Strahlteiler und können auf dem Schirm (S) interferieren. (b) Der Strahl transversal zur Bewegungsrichtung relativ zum Äther legt die Strecke $2ct$ zurück, während sich die Apparatur um die Strecke $2vt$ weiterbewegt hat.

Anordnung in oder entgegen der Ausbreitungsrichtung des Lichts bewegt, hat das Licht im Laborsystem die Geschwindigkeit $c + v$ bzw. $c - v$. Die Summe der Zeiten zur Durchquerung der Strecke l_l in beide Richtungen ist somit

$$t_l = \frac{l_l}{c + v} + \frac{l_l}{c - v} = \frac{2l_l}{c} \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (1.3)$$

Für die transversale Richtung berechnen wir die Laufzeit im Ruhesystem des Äthers (vgl. Abb. 1.1(b)). Das Labor bewegt sich in diesem System mit der Geschwindigkeit v und das Licht „schräg“ dazu mit der Geschwindigkeit c , sodass die Geschwindigkeitskomponente von Licht parallel zum Laborsystem ebenfalls gleich v ist. Wir berechnen zunächst die Zeit t , die das Licht bis zum Umkehrpunkt benötigt, also die Hälfte der Zeit t_t zum Durchlaufen der gesamten Strecke. Für die vom Licht und vom Bezugssystem (Erde) zurückgelegten Strecken, bis das Licht am Umkehrpunkt ist, gilt:

$$(vt)^2 + l_t^2 = (ct)^2$$

d.h.

$$t = \frac{l_t}{\sqrt{c^2 - v^2}}$$

und damit insgesamt

$$t_t = \frac{2l_t}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.4)$$

Durch Drehung der Apparatur um 90° konnten die Rollen von l_t und l_l vertauscht werden. Außerdem wurde das Experiment zu verschiedenen Jahreszeiten wiederholt, falls zu einem Zeitpunkt des Experiments die Erde zufällig relativ zum Äther ruhen sollte.

Wäre die Ätherhypothese richtig gewesen, hätte man im Rahmen einer Newton'schen Beschreibung eine Differenz zwischen der longitudinalen und der transversalen Richtung finden müssen. Das Experiment zeigte aber keine solche Differenz.

Zunächst war man derart von der Richtigkeit der Ätherhypothese überzeugt, dass man nach anderen Erklärungen für den negativen Ausgang des Michelson-Morley-Experiments suchte. Eine naheliegende Erklärung war, dass die Erde den Äther in ihrer Umgebung gleichsam mitschleppt, sodass an der Erdoberfläche die Geschwindigkeit des Äthers relativ zur Erde immer Null ist. Eine solche

Erklärung widersprach aber nicht nur dem Fizeau'schen Experiment (wonach der Mitführungsterm ja von der optischen Dichte abhängen sollte und somit für Luft nahezu verschwindet), sondern auch der 1728 von James Bradley (1692–1762) entdeckten Aberration des Lichtes. Darunter versteht man den Effekt, dass ein Fernrohr relativ zur Richtung zu einem Stern etwas vor bzw. nachgestellt werden muss, je nach der senkrechten Geschwindigkeit der Erde relativ zu dieser Richtung ([31], S. 400). Der Effekt beruht darauf, dass das Licht wegen der Endlichkeit der Lichtgeschwindigkeit auch eine endliche Zeit benötigt, um das Fernrohr zu durchqueren. Die Aberration ließ sich am einfachsten durch die Annahme erklären, dass die Erde den Äther nicht mitführt.

Ein interessanter Vorschlag kam 1892 von Hendrik Antoon Lorentz (1853–1928) und gleichzeitig von George Francis Fitzgerald (1851–1901). Nach ihrer Hypothese sollte jeder Maßstab als Folge der Wechselwirkung mit dem Äther in Richtung der relativen Bewegung zum Äther eine sogenannte Lorentz-Fitzgerald-Kontraktion erfahren. Diese Kontraktion bzw. Verkürzung von Längenmaßstäben sollte gerade einem Faktor $\sqrt{1 - \beta^2}$ (mit $\beta = v/c$) entsprechen. Wie ein Vergleich der Gleichungen 1.3 und 1.4 zeigt, werden die beiden Laufzeiten t_l und t_t gleich, wenn man l_l mit diesem Faktor multipliziert. Lorentz konnte in den folgenden Jahren seine Theorie soweit ausbauen, dass er nicht nur die bekannten Phänomene beschreiben sondern sogar die Transformationsgesetze formulieren konnte, die sich später aus der speziellen Relativitätstheorie ergeben sollten. Für eine widerspruchsfreie Theorie musste neben der Kontraktion von Längen auch noch angenommen werden, dass die Zeitskalen sämtlicher physikalischer Phänomene bei einer Bewegung relativ zum Äther um einen entsprechenden Faktor größer werden. Seine Überlegungen basierten jedoch immer noch auf der Annahme eines ausgezeichneten Bezugssystems, in welchem der Äther ruhte. Diese Annahme hat er auch nachdem die Relativitätstheorie ihre Triumphe feierte nur langsam und zögerlich aufgegeben.

1.3 Axiomatische Formulierung der speziellen Relativitätstheorie

Wie schon aus den Titeln der drei in der Einleitung zu diesem Kapitel zitierten Arbeiten deutlich wird, nahm die Relativitätstheorie ihren Ausgang von der Elektrodynamik. Auch Lorentz hat sich die Frage gestellt, wie sich physikalische Systeme (z.B. solche, die wir als Uhren und Maßstäbe verwenden) verhalten, wenn ihre elementaren Bestandteile durch elektromagnetische Kräfte zusammengehalten werden. Auf diese Weise konnte er den Faktor für die Längenkontraktion aus den Maxwell'schen Gleichungen ableiten. In der Folgezeit wurde jedoch versucht, die Annahmen, die zur Herleitung der speziellen Relativitätstheorie führen, auf ein Minimum zu reduzieren. Man kann zeigen, dass die folgenden drei Axiome bereits die Struktur der speziellen Relativitätstheorie – und damit auch die Lorentz-Invarianz der fundamentalen Gleichungen – implizieren:

1. Der Raum ist homogen und isotrop.
2. Es gilt das Relativitätsprinzip.
3. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle.

Axiom 1 wird zunächst als Erfahrungstatsache angesehen. Axiom 2 war für Einstein eine Konsequenz der fehlgeschlagenen Versuche, den Äther bzw. Bewegungen relativ zu dem ausgezeichneten Ruhesystem des Universums nachzuweisen. Wenn sich experimentell kein ausgezeichnetes Ruhesystem nachweisen lässt, dann sollte die Annahme eines absoluten Raumes oder einer absoluten Zeit auch aus der Theorie verschwinden.

Diese ersten beiden Axiome gelten auch für die Newton'sche Theorie. Es gibt also kein „Relativitätsprinzip der Relativitätstheorie“ oder relativistisches Relativitätsprinzip. Inertialsysteme sind solche Bezugssysteme, in denen die kräftefreie Bewegung geradlinig und gleichförmig verläuft. Das Relativitätsprinzip besagt, dass die Physik in allen Inertialsystemen gleich ist.

Axiom 3 ist das Minimum, auf das sich die Aussagen der Maxwell-Gleichungen reduzieren lassen, so dass zusammen mit den ersten beiden Axiomen die spezielle Relativitätstheorie eindeutig wird. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit bedeutet, dass jeder inertielle Beobachter die Wellenfronten einer punktförmigen Lichtquelle als konzentrische (gleichzentrierte) Sphären beobachtet.

Streng genommen gelten die ersten beiden Axiome nur in einem lokalen Sinne: Die Mikrowellenhintergrundstrahlung bzw. die sichtbare Masse im Universum zeichnen ein Ruhesystem aus. Auf diesen Punkt werden wir bei der Untersuchung kosmologischer Modelle noch eingehen. Solange wir aber nicht das Universum als Ganzes bzw. kosmologische Probleme betrachten, sind die ersten beiden Axiome hinreichend gut erfüllt.

Nicht alle Schritte zur Herleitung der Lorentz-Transformationen werden in voller mathematischer Strenge durchgeführt (siehe beispielsweise Pauli [24] oder unter anderem Sexl und Urbantke [30]). Die folgende Herleitung umgeht die meisten mathematischen Feinheiten.

1. Aus dem Relativitätsprinzip (Axiom 2) folgt insbesondere, dass geradlinige Bewegungen wieder in geradlinige Bewegungen übergehen müssen, also Geraden in der Raum-Zeit in Geraden transformiert werden. Diese Aussage bedeutet, dass der Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen nur durch eine lineare Transformation gegeben sein kann:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{x}' \end{pmatrix} = \Lambda(\vec{v}) \begin{pmatrix} ct \\ \vec{x} \end{pmatrix},$$

wobei $\Lambda(\vec{v})$ eine 4×4 Matrix ist, die von der relativen Geschwindigkeit \vec{v} zwischen den beiden Koordinatensystemen abhängen kann. An dieser Stelle haben wir außerdem angenommen, dass beide Koordinatensysteme denselben Ursprung haben, d.h., dass die Koordinaten $(0, 0, 0, 0)$ für den Ursprung in beiden Systemen dasselbe Ereignis O beschreiben. Allgemeiner sind es die (bijektiven) affinen Transformationen, die sämtliche Geraden wieder in Geraden überführen.

Dieser Schritt ist übrigens mathematisch am schwierigsten zu beweisen.

2. Da die Lichtgeschwindigkeit in jedem Intertialsystem dieselbe sein soll (Axiom 3), folgt aus $|\vec{x}|/t = \pm c$ auch $|\vec{x}'|/t' = \pm c$, bzw.

$$(ct)^2 - (\vec{x})^2 = 0 \iff (ct')^2 - (\vec{x}')^2 = 0. \quad (1.5)$$

Hierbei stellen wir uns vor, dass bei dem Ereignis O (das für beide Koordinatensysteme dasselbe ist) ein Lichtsignal ausgesandt wurde. In Gl. 1.5 sollen sich (t, \vec{x}) bzw. (t', \vec{x}') auf ein Ereignis A beziehen, das von diesem Lichtsignal „getroffen“ wird.¹

Betrachten wir nun ein beliebiges Ereignis (nicht notwendigerweise auf dem Lichtkegel) mit den Koordinaten (t, \vec{x}) bzw. (t', \vec{x}') , so folgt zusammen mit der Linearität der Transformation, dass sich die beiden Ausdrücke nur um einen Faktor unterscheiden können:

$$(ct)^2 - (\vec{x})^2 = \alpha \left((ct')^2 - (\vec{x}')^2 \right).$$

3. Der Faktor α kann noch von der Geschwindigkeit \vec{v} abhängen, mit der sich das eine System gegen das andere bewegt: $\alpha = \alpha(\vec{v})$. Wegen der Isotropie des Raumes (Axiom 1) sollte $\alpha(-\vec{v}) = \alpha(\vec{v})$ gelten, und aus der Tatsache, dass die zu \vec{v} inverse Transformation durch $-\vec{v}$ gegeben ist, folgt $\alpha(-\vec{v})\alpha(\vec{v}) = 1$, insgesamt also $\alpha(\vec{v}) = \pm 1$. Aus der Stetigkeit als Funktion von \vec{v} (sowie $\alpha(0) = 1$) können wir schließen: $\alpha(\vec{v}) = 1$ oder

$$(ct)^2 - (\vec{x})^2 = (ct')^2 - (\vec{x}')^2. \quad (1.6)$$

4. Gesucht sind also alle linearen Transformationen Λ , welche die Kombination $(ct)^2 - \vec{x}^2$ invariant lassen.

1.4 Lorentz-Transformationen

Wie allgemein üblich führen wir nun die 4-Koordinaten $x^0 = ct$ und x^i ein und bezeichnen mit x (ohne Vektorpfeil) einen 4-Vektor: $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. Die Komponenten eines 4-Vektors bezeichnen wir mit griechischen Buchstaben (μ, ν , etc.) und sie nehmen die Werte 0, 1, 2, 3 an. Für die räumlichen Komponenten verwenden wir weiterhin lateinische Buchstaben.

Dass die Indizes für die Komponenten von Vektoren hochgestellt sind, ist eine Konvention. Wir bezeichnen damit die Koordinaten von Vektoren. Wie aus der Linearen Algebra bekannt, gibt es zu jedem Vektorraum auch einen Dualraum (der Raum der linearen Abbildungen von dem Vektorraum in den jeweiligen Zahlenkörper). Die Komponenten von Elementen des Dualraums kennzeichnen wir durch untenstehende Indizes. Außerdem verwenden wir im Folgenden noch die *Einstein'sche Summenkonvention*: Über doppelt auftretende Indizes, einmal oben und einmal unten, auf einer Seite einer Gleichung wird summiert. Diese Konvention macht viele Formeln wesentlich übersichtlicher.

¹Man beachte, dass es sich bei t, t' bzw. \vec{x} und \vec{x}' um *Differenzen* handelt, die sich auf zwei Ereignisse beziehen: das Ereignis A und das Referenzereignis O. Trotzdem werde ich die umständlichere Notation $\Delta t, \Delta \vec{x}$ etc. vermeiden.

Wir definieren nun ein symmetrisches, bilineares Produkt

$$(x, y) := \eta_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \sum_{i,j=1}^3 x^i y^j. \quad (1.7)$$

Wir bezeichnen dieses Produkt manchmal als Skalarprodukt, obwohl es nicht positiv definit und damit in der üblichen mathematischen Sprechweise kein Skalarprodukt ist. Oft nennen wir es auch Minkowski-Produkt. Dieses Produkt ist nicht-entartet, d.h., es gibt keine nicht-verschwindenden Vektoren y , sodass (x, y) für alle Vektoren x gleich null ist. Die Matrix

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

bezeichnen wir manchmal als Minkowski-Metrik. Auch dieser Ausdruck ist strenggenommen irreführend, da von einer Metrik üblicherweise verlangt wird, dass Abstände nie negativ werden können, was hier aber nicht der Fall ist. Daher spricht man manchmal auch von einer *Pseudo-Metrik*.

Durch die Bilinearform η können wir jedem Vektor $\{x^\mu\}$ einen dualen Vektor $\{x_\mu\}$ zuordnen:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu. \quad (1.9)$$

Beim dualen Vektoren kehren sich also alle Vorzeichen der räumlichen Komponenten um.

Die Lorentz-Transformationen Λ sind alle Transformationen, welche die Minkowski-Metrik invariant lassen. Das bedeutet

$$(x, y) = (\Lambda x, \Lambda y) \quad (1.10)$$

für alle 4-Vektoren x und y . Ausgedrückt in Komponenten bedeutet diese Bedingung

$$\Lambda^\alpha_\mu \eta_{\alpha\beta} \Lambda^\beta_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (1.11)$$

oder komponentenunabhängig

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (1.12)$$

Wir lösen diese Gleichungen für eine Raumdimension, also für 2×2 Matrizen. Die Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} A & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

führt auf drei algebraische Gleichungen,

$$A^2 - C^2 = D^2 - B^2 = 1 \quad AB = CD, \quad (1.14)$$

die (bis auf Vorzeichen) eine einparametrische Schar an Lösungen zulassen. Eine mögliche Parametrisierung dieser Lösungen ist:

$$A = D = \cosh \phi \quad B = C = \sinh \phi. \quad (1.15)$$

Man bezeichnet ϕ auch manchmal als Rapidität.

Wir können aber auch eine anschaulichere Parametrisierung wählen, die sich aus folgender Überlegung ergibt: Die Weltlinie des räumlichen Ursprungs des (t', x') -Systems, also die Gerade zu $x' = 0$, soll sich für den anderen Beobachter als die Gerade $x = vt$ darstellen. Damit erhält die Geschwindigkeit v erst ihre Bedeutung. Das bedeutet aber, dass

$$x' = \gamma(v)(x - vt) = \gamma(v) \left(x^1 - \frac{v}{c} x^0 \right) \quad (1.16)$$

sein muss, mit einem beliebigen (v -abhängigen) Faktor $\gamma(v)$. Durch Vergleich mit den obigen Transformationen folgt $A = D = \gamma$ und $B = C = -\gamma \frac{v}{c}$, und aus $A^2 - C^2 = 1$ ergibt sich

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} . \quad (1.17)$$

Damit erhalten wir für die Lorentz-Transformationen in einer Raumdimension:

$$\Lambda(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{v}{c} \\ -\frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} . \quad (1.18)$$

Für die weiteren Überlegungen wird meist diese Form der Lorentz-Transformation ausreichen. Man bezeichnet sie auch als „Boost“. Die Matrixdarstellung eines allgemeinen Boosts (für eine beliebige dreidimensionale Geschwindigkeit \vec{v}) erhält man am einfachsten, indem man die Raumkoordinaten in zur Geschwindigkeit \vec{v} parallele und senkrechte Komponenten aufspaltet und berücksichtigt, dass sich die senkrechten Komponenten nicht ändern (vgl. z.B. die englische Wikipedia-Seite „Lorentz transformation“):

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \vec{\beta}^T \\ -\gamma \vec{\beta} & \mathbb{I} + (\gamma - 1) \vec{\beta} \vec{\beta}^T / \beta^2 \end{pmatrix} , \quad (1.19)$$

wobei $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ ist, $\vec{\beta}^T$ der zugehörige transponierte (Zeilen)-Vektor und $\vec{\beta} \vec{\beta}^T$ die 3×3 Matrix mit den Komponenten $\beta_i \beta_j$. \mathbb{I} ist die 3×3 Identitätsmatrix und $\beta^2 = v^2/c^2$.

Diese Matrizen bilden noch keine Gruppe. Die gewöhnlichen dreidimensionalen Drehungen $R \in \text{SO}(3)$ lassen die Minkowski-Metrik ebenfalls invariant. Erst die Boosts zusammen mit den Drehungen bilden eine (sechsparemetrige) Gruppe, die Lorentz-Gruppe $\text{SO}(1,3)$.² Man kann die Gruppe noch um räumliche Spiegelungen (Paritätstransformationen) und die zeitliche Umkehr $t \rightarrow -t$ erweitern. Da der Minkowski-Raum ein affiner Raum ohne ausgezeichneten Raum-Zeit-Ursprung ist, erhält man insgesamt als Invarianzgruppe der Speziellen Relativitätstheorie die Poincaré-Gruppe, bestehend aus den Transformationen $\tilde{\Lambda} + \vec{a}$ wobei $\tilde{\Lambda}$ eine Lorentz-Transformation (eventuell plus Paritätstransformation oder Zeitumkehr) ist und \vec{a} ein beliebiger 4-dimensionaler Translationsvektor.

Abschließend soll noch das Geschwindigkeitadditionstheorem in seiner einfachsten Form (parallele Geschwindigkeiten) abgeleitet werden. Dazu betrachten wir einfach das Produkt zweier Lorentz-Boosts, für die gelten soll:

$$\gamma(v_1) \begin{pmatrix} 1 & -v_1/c \\ -v_1/c & 1 \end{pmatrix} \gamma(v_2) \begin{pmatrix} 1 & -v_2/c \\ -v_2/c & 1 \end{pmatrix} = \gamma(v_{\text{ges}}) \begin{pmatrix} 1 & -v_{\text{ges}}/c \\ -v_{\text{ges}}/c & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Durch direktes Nachrechnen (am einfachsten bildet man das Produkt auf der linken Seite und erhält $-v_{\text{ges}}/c$ aus dem Verhältnis eines Nebendiagonalelements mit einem Diagonalelement) findet man:

$$v_{\text{ges}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} . \quad (1.21)$$

Für nicht-relativistische Geschwindigkeiten $v_i \ll c$ erhält man das klassische Ergebnis der Newton'schen Mechanik – die Gesamtgeschwindigkeit ist die Summe der Einzelgeschwindigkeiten. v_{ges} kann jedoch nie größer als c werden und setzt man z.B. $v_1 = c$ so erhält man auch $v_{\text{ges}} = c$. Gleichung 1.21 hatten wir schon bei der Herleitung des Fresnel'schen Mitführungsfaktors in Gl. 1.2 verwendet.

²Zur Notation: Die Gruppe $\text{SO}(n, m)$ ist die Gruppe aller reellen linearen Transformationen mit Determinante 1, welche die $(n + m) \times (n + m)$ Matrix $\eta = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1)$ invariant lassen, wobei die ersten n Einträge +1 und die letzten m Einträge -1 sind. Für die üblichen speziellen orthogonalen Gruppen ist $m = 0$ und man schreibt einfach $\text{SO}(n)$.

1.5 Die Minkowski-Raumzeit

1908 hatte Hermann Minkowski (1864–1909) die 4-dimensionale Raumzeit eingeführt und damit den Formalismus der speziellen Relativitätstheorie wesentlich vereinfacht. Berühmt geworden sind die Anfangsworte zu einem seiner Vorträge, gehalten auf der „80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte zu Cöln“ am 21. September 1908 (aus [1], S. 123):

Meine Herren! Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stund an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.

Doch worin bestand das eigentlich Neue?

1.5.1 Die Geometrie des Minkowski-Raums

Die Besonderheit der 4-dimensionalen Minkowski-Raumzeit ergibt sich nicht einfach aus der Zusammenfassung des 3-dimensionalen gewöhnlichen Raums mit einer 1-dimensionalen Zeitkoordinate. Dies ist auch in der gewöhnlichen Newton’schen Mechanik möglich. Die Besonderheit ergibt sich aus den Invarianzen dieses Raumes bzw. der Art von Geometrie, welche durch die Minkowski-Metrik auf ihm definiert wird.

Abgesehen von räumlichen und zeitlichen Translationen ist der Newton’sche Raum invariant unter Galilei-Transformationen: dreidimensionale Rotationen sowie die speziellen Galilei-Transformationen

$$t \longrightarrow t' = t \quad \text{und} \quad \vec{x} \longrightarrow \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}t. \quad (1.22)$$

Dass beide Koordinatensysteme über eine affine Transformation zusammenhängen, folgt wiederum aus dem Relativitätsprinzip, das auch in der Newton’schen Mechanik gilt (Geraden in einem Inertialsystem sind Geraden in allen Inertialsystemen). Während die ersten beiden Axiome in unveränderter Form auch in der Newton’schen Mechanik gelten, kann man dort das 3. Axiom ersetzen durch: Zwei Ereignisse haben in allen Inertialsystemen denselben zeitlichen Abstand (daraus folgt $\Delta t = \Delta t'$) und zwei gleichzeitige Ereignisse haben in allen Inertialsystemen denselben räumlichen Abstand (daraus folgt $\Delta \vec{x}^2 = (\Delta \vec{x}')^2$). Damit liegen die Galilei-Transformationen als Invarianzgruppe fest.

Demgegenüber ist die Geometrie des Minkowski-Raums durch die Invarianz von $(ct)^2 - \vec{x}^2$ bestimmt. Genauer bedeutet dies Folgendes: Zwei Ereignisse A und B werden von zwei Inertialsystemen durch die Koordinaten (t_A, \vec{x}_A) bzw. (t_B, \vec{x}_B) sowie (t'_A, \vec{x}'_A) und (t'_B, \vec{x}'_B) beschrieben. Dann gilt

$$c^2(t_A - t_B)^2 - (\vec{x}_A - \vec{x}_B)^2 = c^2(t'_A - t'_B)^2 - (\vec{x}'_A - \vec{x}'_B)^2. \quad (1.23)$$

Durch diese Invariante wird zwei Ereignissen ein „Abstand“ zugeschrieben, der nicht vom Koordinatensystem abhängt. Diesen Abstand werden wir später nutzen, um Linien (insbesondere Weltlinien) eine „Länge“ zuzuschreiben und Geometrie zu betreiben. Diese Minkowski-Geometrie ist zunächst etwas ungewohnt, sodass ich einige Aspekte betonen möchte.

1.5.2 Darstellung des Minkowski-Raums

Im Folgenden werden wir sehr oft Gebrauch von geometrischen Konstruktionen machen. Wir stellen dabei die Raumzeit meist vereinfacht durch eine Ebene dar, die einer Raum- und einer Zeitdimension entspricht. Die Punkte dieser Ebene repräsentieren Ereignisse und damit physikalische Tatsachen, die nicht von irgendeinem Koordinatensystem oder einer anderen Wahl der Beschreibung abhängen (vgl. Abb. 1.2). Ob sich zwei Personen am selben Ort treffen, oder der Zeiger einer bestimmten Uhr

auf die 12 springt, oder eine Lampe an- und wieder ausgeknippst wird, oder eine Rakete dicht an einem bestimmten Satelliten vorbeifliegt – das sind Tatsachen, die für alle Beobachter gleichermaßen existent sind.

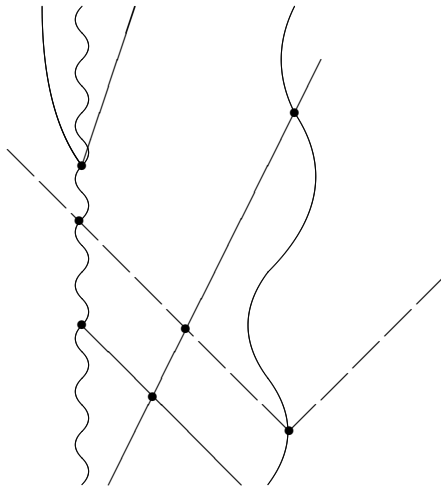


Abbildung 1.2: Die Raumzeit ist die Menge aller Ereignisse. Klassische Weltlinien sind kontinuierliche Folgen von Ereignissen (nicht zu verwechseln mit den „Weltlinien“ in Feynman-Graphen, hierbei handelt es sich um Repräsentationen von Propagatoren bzw. Green’schen Funktionen, nicht um reale, „faktische“ Weltlinien).

Sehr oft handelt es sich bei Ereignissen um den Schnittpunkt von Weltlinien, wobei Weltlinien von Objekten bestimmte kontinuierliche Folgen von Ereignissen und somit ebenfalls unabhängig von einem Koordinatensystem sind. Auch wenn der Zeiger einer Uhr auf 12 zeigt, schneiden sich im Prinzip zwei Weltlinien: die Weltlinie der Zeigerspitze und die Weltlinie der Markierung für die 12. Die Weltlinien von Objekten, auf die keine Kräfte wirken, werden in Minkowski-Diagrammen durch Geraden dargestellt. Insbesondere verläuft der räumliche Ursprung eines Inertialsystems entlang einer geraden Weltlinie. (Dies wird bei allgemeinen Raumzeit-Diagrammen und in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht immer der Fall sein.)

1.5.3 Die kausale Struktur

Zu jedem Ereignis können wir den Zukunfts- und den Vergangenheitslichtkegel angeben. Der Zukunftslichtkegel besteht aus allen Ereignissen, die von einem Lichtblitz, der bei dem betreffenden Ereignis ausgesandt wird, überstrichen wird. Dabei stellen wir uns vor, dass sich das Licht von diesem Ereignis aus kugelförmig in alle Richtungen ausbreitet. Die Zeitdauer des Lichtblitzes sei vernachlässigbar kurz. Der Vergangenheitslichtkegel besteht aus allen Lichtstrahlen, die das betreffende Ereignis treffen.

Für alle Ereignisse auf dem Lichtkegel gilt (in jedem Inertialsystem) $(ct)^2 - \vec{x}^2 = 0$ (wobei wir das Ereignis O als Ursprung $(0,0)$ des Koordinatensystems gewählt haben, ansonsten sind t und \vec{x} entsprechend durch Δt und $\Delta \vec{x}$ zu ersetzen). Zwei Ereignisse, die direkt durch einen Lichtstrahl verbunden werden können, also auf dem Lichtkegel des jeweils anderen Ereignisses liegen, bezeichnet man als *lichtartig*. In Abb. 1.3 sind O und L lichtartig.

Für Ereignisse innerhalb des Zukunfts- oder Vergangenheitslichtkegels gilt $(ct)^2 - \vec{x}^2 > 0$. Solche Ereignispaare bezeichnet man als *zeitartig*. Die Ereignisse A und B sind zeitartig zu O. Ereignisse außerhalb des Lichtkegels (z.B. die Ereignisse C und D) bezeichnet man als relativ zu O *raumartig*. Für solche Ereignisse gilt $(ct)^2 - \vec{x}^2 < 0$.

Für zeit- und lichtartige Ereignispaare kann man eindeutig angeben, welches der beiden Ereignisse in der Zukunft relativ zu dem anderen Ereignis liegt. (Ist $c|t| \geq |\vec{x}|$ und $t > 0$, so gibt es

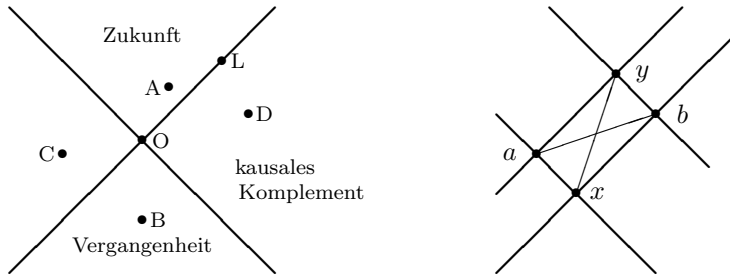


Abbildung 1.3: (links) Der Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel zu einem Ereignis O und sein kausales Komplement. (rechts) Ein „Diamant“ zu zwei Ereignissen x und y besteht aus allen Ereignissen, die sowohl in der Zukunft von x als auch in der Vergangenheit von y liegen. Er definiert zwei raumartige Ereignisse a und b , die „gerade eben noch“ im Diamanten liegen. Bis auf ein Vorzeichen ist der Abstand \overline{xy} gleich dem Abstand \overline{ab} (für $c = 1$); damit lassen sich Raummessungen auf Zeitmessungen reduzieren.

keine Lorentz-Transformation, für die t' negativ wird.) Diese Relation – „A liegt in der Zukunft von B“, geschrieben als $A > B$ – ist antisymmetrisch (wenn $A > B$, gilt nicht $B > A$). Außerdem ist diese Relation transitiv: Aus $A > B$ und $B > C$ folgt $A > C$. Bei dieser Relation handelt es sich also um eine Teilordnung.

Für raumartige Ereignisse ist eine allgemein gültige zeitliche Ordnung nicht möglich. Man kann immer Bezugssysteme finden, in denen $\Delta t > 0$ und $\Delta t' < 0$ ist, d.h., während in dem einen System C scheinbar später als O liegt, findet es in dem anderen System früher statt. Solche Ereignisse können sich gegenseitig nicht kausal beeinflussen.

Die beiden Lichtkegel (meist spricht man einfach von *dem* Lichtkegel) zu einem Ereignis O unterteilen also die Menge aller Ereignisse in drei Klassen: (1) die Menge der zukünftigen Ereignisse, *die von* O theoretisch kausal beeinflusst werden können, (2) die Menge der Ereignisse in der Vergangenheit, *von denen* O theoretisch kausal beeinflusst werden kann, (3) sowie die raumartigen Ereignisse, die in *keinem* kausalen Zusammenhang zu O stehen. Die für die Newton'sche Raumzeit noch sinnvolle Relation „gleichzeitig“ gibt es in der Relativitätstheorie nicht mehr in einem absoluten Sinne.

1.5.4 Inertialsysteme

In einem Inertialsystem werden alle kräftefreien Bewegungen (im Sinne der speziellen Relativitätstheorie – wir werden in der allgemeinen Relativitätstheorie auch die Geodäten in gekrümmten Raumzeiten als kräftefreie Bahnkurven ansehen) durch Geraden dargestellt. Damit bewegt sich auch der räumliche Ursprung eines Inertialsystems entlang einer Geraden. Die Koordinate entlang dieser Geraden bezeichnen wir als Zeitkoordinate. Sie wird realisiert durch die Weltline einer idealen Uhr (näherungsweise z.B. durch eine Cs-Uhr), die sich im Ursprung des Systems befindet.

Wenn wir einem Ereignis A in einem solchen Inertialsystem die Koordinaten (t, \vec{x}) zuordnen, ist damit operational Folgendes gemeint: Wir denken uns den gesamten Raum des Inertialsystems mit Uhren ausgepflastert, die alle synchronisiert sind. (Auf die Problematik der Synchronisation von Uhren werden wir in Abschnitt 2.3 näher eingehen, in einer speziellen Form schon im nächsten Abschnitt. An dieser Stelle soll genügen, dass eine solche globale Synchronisation möglich ist und dass

sie beispielsweise durch den langsamen Transport von Uhren – alle Uhren wurden in der fernen Vergangenheit im Ursprung auf dieselbe Zeit eingestellt und dann langsam an ihren Platz gebracht – realisiert werden kann.³⁾ Außerdem können wir die räumliche Lage von jeder Uhr in diesem System durch einen Vektor \vec{x} kennzeichnen, dessen Komponenten wir durch Anlegen eines geeichten Längenmaßstabes bestimmen können.⁴ Alle Uhren bewegen sich im Raumzeit-Diagramm auf parallelen Weltlinien und halten untereinander ihren Abstand. Die \vec{x} -Koordinate eines Ereignisses A ist dann gleich der räumlichen Koordinate der Uhr, bei der das Ereignis A stattfindet. Die t -Koordinate des Ereignisses A ist gleich der Zeitanzeige dieser Uhr.

Zwei Ereignisse ereignen sich *in diesem Inertialsystem* gleichzeitig, wenn die Uhren an den jeweiligen Punkten, an denen die Ereignisse stattfinden, dieselbe Zeit anzeigen. Für ein gegebenes Inertialsystem ist es also sinnvoll, von der Gleichzeitigkeit zweier Ereignisse zu sprechen. Allerdings muss betont werden, dass die physikalische Realisation dieser Gleichzeitigkeit nur durch die Synchronisation von Uhren möglich ist, die sich bei den jeweiligen Ereignissen befinden, und eine solche globale Synchronisation ist nur in einem Inertialsystem realisierbar. Insbesondere wird der Gleichzeitigkeitsbegriff problematisch für allgemeine Bezugssysteme (die keine Inertialsysteme sind, also beispielsweise beschleunigt werden) oder auch in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Abschließend noch eine Anmerkung zur Sprechweise. Sehr oft liest man, dass ein Beobachter ein Ereignis A zu einem bestimmten Zeitpunkt t an einem bestimmten Ort \vec{x} „sieht“ oder „wahrnimmt“. Dieses „sehen“ oder „wahrnehmen“ hat jedoch meist nichts mit einem physiologischen Sehen oder Wahrnehmen zu tun, sondern bedeutet, dass das Ereignis in dem Inertialsystem des Beobachters von einer entsprechenden Uhr (im oben beschriebenen Sinne) zum Zeitpunkt t am Ort \vec{x} registriert wird. Der Beobachter im Ursprung des Systems erfährt möglicherweise erst sehr viel später durch einen Datenaustausch von dem Ereignis und seinen Koordinaten. Für ein tatsächliches Sehen muss erst ein Lichtsignal von dem Ereignis A zu dem Beobachter gelangen. Dieses Sehen findet also im Allgemeinen später statt, außerdem kann es sein, dass unterschiedliche Ereignisse, die in dem Inertialsystem zwar gleichzeitig stattfinden (und damit dieselbe t -Koordinate haben) von dem Beobachter im Ursprung zu unterschiedlichen Zeiten gesehen werden und umgekehrt.

1.6 Geometrische Konstruktionen

In diesem Abschnitt sollen die in Abschnitt 1.4 angedeuteten algebraischen Herleitungen der Lorentz-Transformationen nochmals anhand geometrischer Darstellungen verdeutlicht werden.

1.6.1 Der Raum gleichzeitiger Ereignisse

Wir beginnen mit der geometrischen Konstruktion der Ereignismengen, die nach den Axiomen der speziellen Relativitätstheorie von einem gegebenen Inertialsystem als gleichzeitig eingestuft werden. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum handelt es sich dabei um dreidimensionale affine Unterräume. In einer zweidimensionalen Darstellung handelt es sich um Geraden.

Abbildung 1.4 zeigt zwei zweidimensionale Raumzeit-Diagramme mit den Weltlinien zweier Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen. Die Weltlinie von Beobachter 1 verlaufe entlang der t -Achse (mit der Raumkoordinate $x \equiv 0$), die von Beobachter 2 entlang der t' -Achse (mit $x' \equiv 0$). Beide Beobachter haben bei Ereignis O ihre Uhren auf 0 gesetzt. Außerdem hat es bei Ereignis O

³Später werden wir zeigen, dass die so genannte Einstein-Synchronisation, bei der Uhren durch Austausch von Lichtsignalen synchronisiert werden, zu dieser Vorschrift identisch ist.

⁴Auch hier ist der Austausch von Lichtsignalen und die Messung des räumlichen Abstands durch die Messung der Zeit für Hin- plus Rückweg ein praktikableres Verfahren. Das Anlegen eines Längenmaßstabes ist äquivalent und dient hier nur der Veranschaulichung.

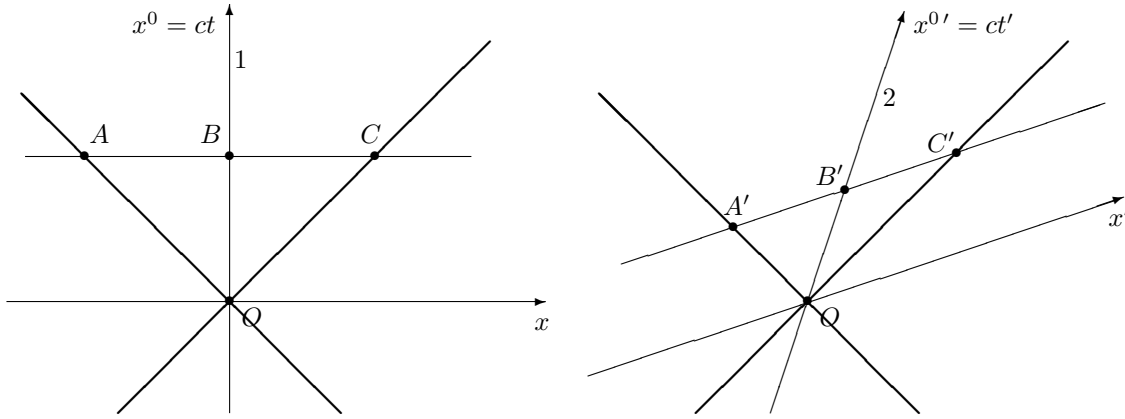


Abbildung 1.4: Die gleichzeitigen Ereignisse für einen ruhenden (links, Weltlinie 1) und einen relativ dazu bewegten Beobachter (rechts, Weltlinie 2) ergeben sich aus der Forderung, dass für beide der Lichtkegel zentriert ist, d.h. die Distanz AB ($A'B'$) muss gleich der Distanz BC ($B'C'$) sein. Diese Bedingung legt in beiden Fällen die Linie ABC (bzw. $A'B'C'$) eindeutig fest. Die Ereignisse auf dazu parallelen Linien (beispielsweise durch den Ursprung) sind für die Beobachter jeweils gleichzeitig.

einen Lichtblitz gegeben, der sich entlang der Diagonalen ausbreitet. Diese Diagonalen bilden den Zukunftslichtkegel zum Ereignis O . (In Abbildung 1.4 sind auch Teile des Vergangenheitslichtkegels zu O dargestellt.)

Für beide Beobachter soll sich das Licht in ihrem jeweiligen Inertialsystem in Vor- und Rückrichtung gleich schnell ausbreiten. Das bedeutet, zu dem Ereignis B (bzw. B') sind auf dem Lichtkegel die Ereignisse A und C (bzw. A' und C') gleichzeitig, da nur für diese Ereignisse der Abstand AB und der Abstand BC (bzw. $A'B'$ und $B'C'$) gleich sind. Offensichtlich sind die Ereignisse A', B', C' für Beobachter 1 nicht gleichzeitig, umgekehrt die Ereignisse A, B, C nicht für Beobachter 2.

1.6.2 Die Einstein-Synchronisation

Auf dem genannten Verfahren beruht auch die Einstein-Synchronisation von Uhren. Da nach Axiom 3 das Licht für jedes Inertialsystem in alle Richtungen dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit hat, können zwei entfernte Beobachter in konstantem Abstand (beide bewegen sich auf parallelen Weltlinien) ihre Uhren dadurch synchronisieren, dass sie ein Lichtsignal austauschen (vgl. Abb. 1.5): Beobachter 1 sendet bei Ereignis A das Signal zu Beobachter 2, der es sofort reflektiert (Ereignis B) und zu Beobachter 1 zurückschickt, der es bei Ereignis C empfängt. Beobachter 1 kann nun davon ausgehen, dass das Licht für Hin- und Rückweg dieselbe Zeit braucht. Bei der Hälfte dieser Zeit sollte die Uhr von Beobachter 1 also dieselbe Zeit angezeigt haben (Ereignis D), wie die Uhr von Beobachter 2 bei Ereignis B .

Das gleiche Verfahren erlaubt auch eine Synchronisation der Uhren in umgekehrter Richtung zwischen Beobachter 1 und 3 und führt auf Ereignis B' , das zu Ereignis D gleichzeitig ist. Man beachte, dass die gleichzeitigen Ereignisse B', D und B auf einer Geraden liegen.

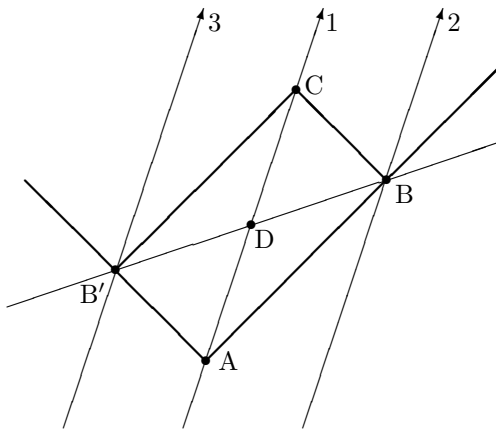


Abbildung 1.5: Die Einstein-Synchronisation. Durch Austausch von Lichtsignalen können die Beobachter 2 und 3 ihre Uhren mit der von Beobachter 1 synchronisieren.

1.6.3 Die relativen Skalen

Wir müssen noch die relativen Skalen festlegen. Dazu verlegen wir die beiden Koordinatensysteme in dasselbe Bild (Abb. 1.6). Außerdem stellen wir uns die Abbildung senkrecht zur Papierebene in eine zweite Raumdimension erweitert vor: Den Lichtkegel erhält man durch Rotation um die t -Achse, die Gleichzeitigkeitsebenen von Beobachter 1 durch Ereignis B und von Beobachter 2 durch Ereignis B' stehen senkrecht auf der Papierebene.

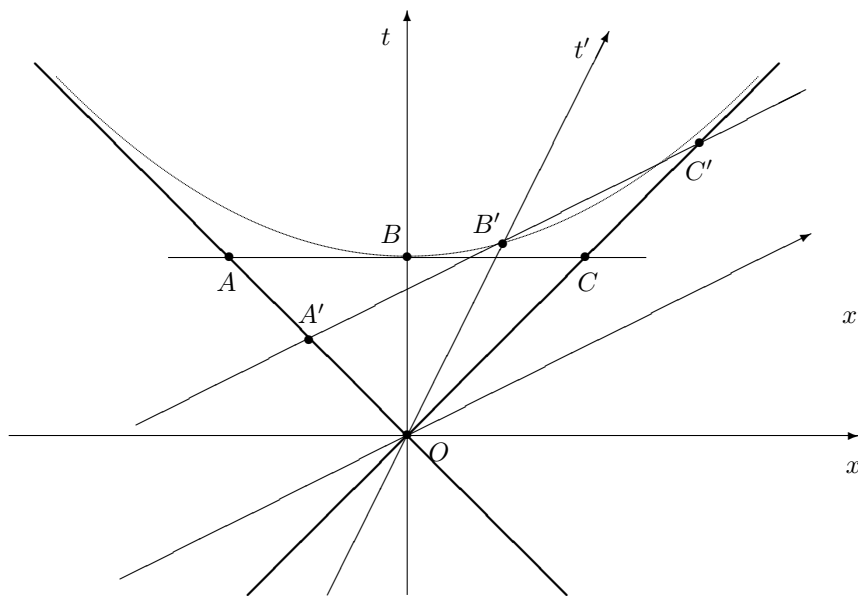


Abbildung 1.6: Für Beobachter 1 sind die Ereignisse A, B, C gleichzeitig, für Beobachter 2 die Ereignisse A', B', C' . Der Einfachheit halber wurde $c = 1$ gesetzt (bzw. t entspricht x^0). Daher ist die Strecke OB gleich AB bzw. BC . Aus demselben Grund ist $OB' = A'B' = B'C'$. Die Strecke OB ist aber auch gleich OB' , da das Licht in der Richtung senkrecht zur Papierebene für diese beiden Ereignisse dieselbe Strecke zurückgelegt hat.

Die Ereignisse A und C gehören in $(2+1)$ -Raumzeitdimensionen zu einem Kreis mit Zentrum B . Der Radius dieses Kreises ist $AB = BC = OB$. Entsprechend gehören die Ereignisse A' und C' (in unserer euklidischen Geometrie) zu einer Ellipse (der Schnittmenge des Kegels mit einer Ebene),

in deren Zentrum sich B' befindet. Die große Halbachse dieser Ellipse ist $A'B' = B'C'$. Nach unserer Forderung, dass sich Licht in alle Richtungen mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet, hat diese große Halbachse in der Minkowski-Geometrie dieselbe Länge wie die kleine Halbachse (senkrecht zu B'). Doch die Mittelpunkte aller Ellipsen, deren große Halbachse in der Zeichenebene liegen und deren kleine Halbachsen dieselbe Länge haben, liegen auf der Hyperbel $t^2 - x^2 = \text{const}$ (dazu schneide man den Kegel einfach mit einer senkrechten Ebene parallel zur Zeichenebene). Also ist in der Zeichnung die Strecke OB' gleich der Strecke OB , wodurch wir auch die Skala festgelegt haben.

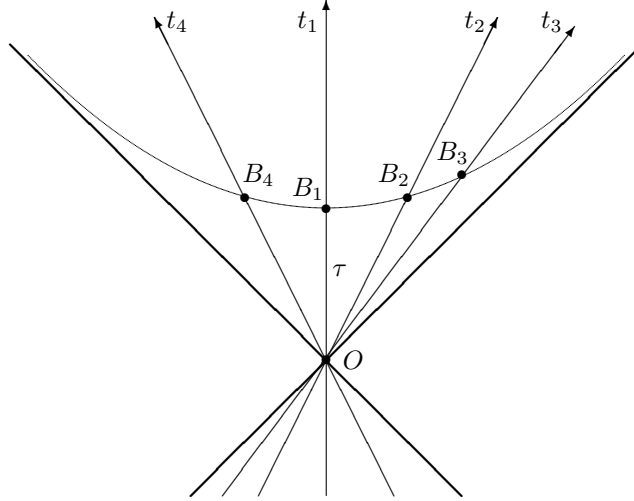


Abbildung 1.7: Für alle inertialen Weltlinien durch das Ereignis O ist bei den Ereignissen B_i auf der Hyperbel dieselbe Zeit vergangen: Alle Uhren entlang dieser Weltlinien, die bei O auf 0 gesetzt wurden, zeigen bei den Ereignissen B_i dieselbe Zeit τ an.

Nachdem wir die zeitlichen Skalen zu verschiedenen „geneigten“ Strecken gefunden haben, können wir auch die entsprechenden räumlichen Skalen konstruieren. Wegen der Konstanz der Lichtausbreitung in allen Systemen hatten wir in Abb. 1.6 argumentieren können, dass die zeitliche Distanz OB' gleich der räumlichen Distanz $B'C'$ (jeweils als positive Werte aufgefasst) sein muss. Damit können wir aus Abb. 1.7 auf Abb. 1.8 schließen und feststellen, dass alle zu O raumartigen Ereignisse A_i von O dieselbe Entfernung haben.

Wir haben oben die relative Skala durch Vergleich mit einer zweiten Raumdimension, relativ zu der sich zwei Inertialsysteme nicht bewegen, abgeleitet. Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, die sich auch in zwei Dimensionen anwenden lässt: Wir integrieren das Vektorfeld, das in jedem Punkt durch die Richtung der Gleichzeitigkeit erzeugt wird. Dies führt auf die Bedingung

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} \quad \text{oder} \quad t^2 - x^2 = \text{const.} \quad .$$

Alle Ereignisse auf einer solchen Hyperbel haben denselben Abstand vom Ursprung. Insbesondere gilt

$$t_B^2 - x_B^2 = t_D^2 ,$$

und da $x_B = vt_B$ folgt

$$t_B^2 - v^2 t_B^2 = t_D^2$$

oder

$$t_D = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t_B .$$

Dieses Verfahren setzt voraus, dass Ereignisse mit einem konstanten Abstand vom Ursprung in gewisser Hinsicht „stetig“ sind, und daß wir infinitesimal annehmen können, dass solche Ereignisse für einen Beobachter, der sich gleichförmig vom Ursprung zu einem dieser Ereignisse bewegt, lokal gleichzeitig sind.

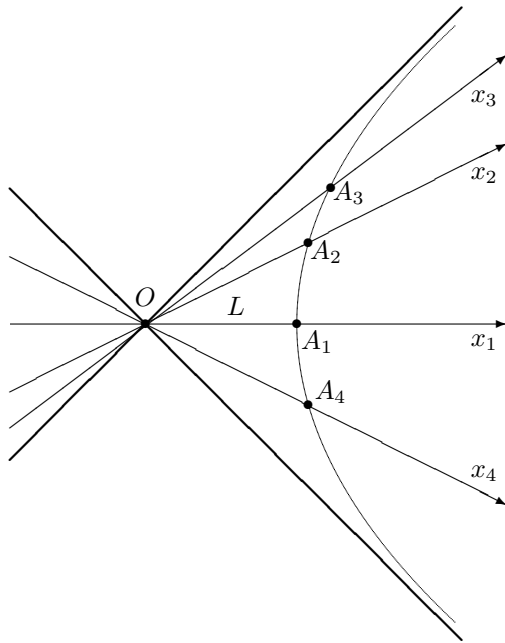


Abbildung 1.8: Alle Ereignisse A_i haben von O denselben invarianten räumlichen Abstand L . Das bedeutet, zu jedem Ereignis A_i gibt es ein Inertialsystem, sodass O und A_i gleichzeitig stattfinden. Die räumliche Differenz in diesem Inertialsystem ist gleich dem invarianten räumlichen Abstand der Ereignisse.

Abbildung 1.9: (links) In zwei Raumdimensionen schneidet die Gleichzeitigkeitsebene zu einem Beobachter 2 den Lichtkegel in einer Ellipse. Die große Halbachse entspricht dem gesuchten Abstand $A'B'$ bzw. $B'C'$, die kleine Halbachse ist senkrecht zur relativen Bewegung und hat daher für Beobachter 1 und 2 dieselbe Länge. Andererseits soll sich für Beobachter 2 das Licht in alle Richtungen gleich schnell ausbreiten, d.h. für Beobachter 2 haben die große und die kleine Halbachse der Ellipse dieselbe Länge. (rechts) Die Punkte mit einem konstanten Abstand von der (x, t) -Ebene schneiden den Lichtkegel in einer Hyperbel, d.h. alle Punkte auf dieser Hyperbel haben von der (x, t) -Ebene denselben Abstand.

Kapitel 2

„Philosophisches“ Zwischenkapitel

Erinnert man sich vor dem Hintergrund der speziellen Relativitätstheorie an das Modell von Lorentz, so wirkt die mechanische Kontraktion physikalischer Systeme und die zeitliche Verzögerung physikalischer Prozesse bei einer Bewegung relativ zum Äther eher befremdlich. Insbesondere der materialunabhängige, universelle Verkürzungsfaktor $\sqrt{1 - (v/c)^2}$ erscheint auf den ersten Blick absurd. Man gewinnt den Eindruck, als ob eine entsprechende universelle Wechselwirkung zwischen Materie und Äther, die diesen Verkürzungsfaktor erklärt, nur in einem sehr komplizierten und unnatürlichen Modell beschrieben werden kann. Wir werden sehen, dass dies nicht der Fall ist. Im Gegenteil, die Maxwell-Theorie oder unser heutiges Standardmodell sind ebenfalls in der Lage, diesen Verkürzungsfaktor zu erklären. Der Unterschied zwischen der speziellen Relativitätstheorie und der Lorentz'schen Theorie (Äther, Verkürzungsfaktor, etc.) erweist sich nur als eine Frage des Standpunktes.

2.1 Eine Kette gekoppelter Pendel

Wir betrachten zunächst ein einfaches mechanisches Modell, in dem die Längenmaßstäbe eine Lorentz-Kontraktion erfahren, wenn sie sich mit einer Geschwindigkeit v relativ zu dem absolut ruhenden Bezugssystem bewegen. Auch die anderen bekannten Beziehungen aus der speziellen Relativitätstheorie wie beispielsweise die Zeitdilatation werden in diesem Modell wiedergegeben.

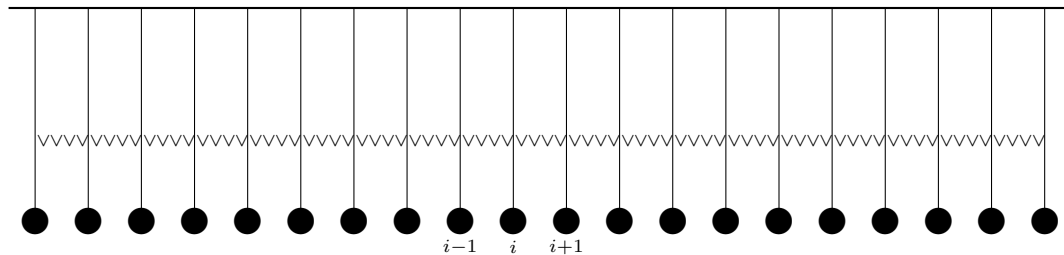


Abbildung 2.1: Eine Kette harmonisch gekoppelter Pendel im Schwerfeld der Erde. Die Pendel können senkrecht zur Darstellungsebene schwingen. Ihr Freiheitsgrad ist der Auslenkungswinkel relativ zur Senkrechten.

Als physikalisches Modell stelle man sich eine Kette harmonisch gekoppelter Pendel in einem konstanten Gravitationsfeld vor. Die Pendel seien mit einem Index i durchnummeriert, wobei wir zunächst i die ganzen Zahlen durchlaufen lassen. Der Freiheitsgrad des i -ten Pendels ist der Winkel

φ_i relativ zur herabhängenden Ruhelage. Die Wirkung dieses Modells lautet:

$$S = \frac{1}{2} \int dt \sum_i \left[\left(\frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t} \right)^2 - D [\varphi_{i+1}(t) - \varphi_i(t)]^2 + 2g \cos \varphi_i(t) \right],$$

und die zugehörige Bewegungsgleichung des i -ten Pendels ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi_i(t)}{\partial t^2} - D[\varphi_{i+1}(t) - 2\varphi_i(t) + \varphi_{i-1}(t)] + g \sin \varphi_i = 0. \quad (2.1)$$

Suchen wir nach Lösungen, bei denen sich die Winkel benachbarter Pendel nicht wesentlich unterscheiden, so muss $g \ll D$ gelten. In diesem Fall können wir das diskrete Modell durch ein kontinuierliches feldtheoretisches Modell mit der Wirkung

$$S = \frac{1}{2} \int dt dx \left[\left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right)^2 + g \cos \varphi(x, t) \right]$$

und den Feldgleichungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + g \sin \varphi = 0 \quad (2.2)$$

approximieren. Hier wurde $D = 1$ gesetzt und der kontinuierliche Parameter x , der beispielsweise den Ort der Aufhängung bezeichnet, ersetzt die Nummerierung der Pendel. Die folgenden Überlegungen gehen immer von diesem kontinuierlichen Modell aus. Die Kennzeichnung der Raum-Zeit-Punkte (x, t) bezieht sich jedoch auf eine feste, Newton'sche Hintergrundsraumzeit. Daher ist es auch ganz instruktiv, sich die Kette gekoppelter Pendel vorzustellen, da in diesem Fall der klare – Newton'sche – Charakter von „Raum“ und „Zeit“ deutlicher wird.

Wir wissen, dass die Kontinuumsfeldgleichung (2.2) invariant unter Lorentz-Transformationen ist. Eine solche Feststellung ist zunächst keine Aussage über die zugrundeliegende Raum-Zeit-Struktur, sondern bezeichnet eine Eigenschaft der Lösungsmenge der Gleichungen: Wenn $\varphi_0(x, t)$ eine Lösung der Gleichung (2.2) ist, dann ist auch

$$\varphi_v(x, t) = \varphi_0(\gamma(v)(x - vt), \gamma(v)(t - vx)) \quad \text{mit} \quad \gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (2.3)$$

eine Lösung dieser Gleichung für beliebiges $-1 < v < 1$. Solange $g \ll 1$, bzw. der Wert für v so eingeschränkt wird, daß auch $g\gamma(v) \ll 1$ (in unserer Normierung ist $c = 1$), werden die Lösungen der diskretisierten Gleichung (2.1) durch die Lösungen der Kontinuumsgleichung angenähert. Im Rahmen dieser Näherung werden die diskretisierten Lösungen daher auch dieselbe Invarianzeigenschaft (2.3) zeigen.

Da wir untersuchen wollen, wie sich Längenmaßstäbe und Uhren verhalten, wenn man sie gegen das Ruhesystem bewegt, müssen wir zunächst intrinsische „Lineale“ und „Uhren“ definieren. Dazu benutzen wir die besonderen Lösungen der Sinus-Gordon-Gleichung: die Soliton-Lösung und die Lösung zu gebundenen Zuständen von zwei Solitonen – die Breather-Lösungen. Die genaue Form der Lösungen spielt für das Folgende keine Rolle, wird aber (um wirklich explizit zu sein) angegeben. Wie wir sehen werden, ist nur die oben erwähnte Invarianz der Lösungsmenge von Bedeutung.

Die Soliton-Lösung entspricht einer Konfiguration, bei der sich die Pendel in der Nähe eines Punktes einmal um ihre Aufhängung herumwinden, sich anderenfalls aber im Wesentlichen in der senkrecht herabhängenden Ruhelage befinden (siehe Abb. 2.2). Diese Lösung ist stabil. Die statische Lösung des Kontinuumsmodells ist durch

$$\varphi_0(x) = 4 \tan^{-1}(\exp \pm \sqrt{g}(x - x_0)) \quad (2.4)$$

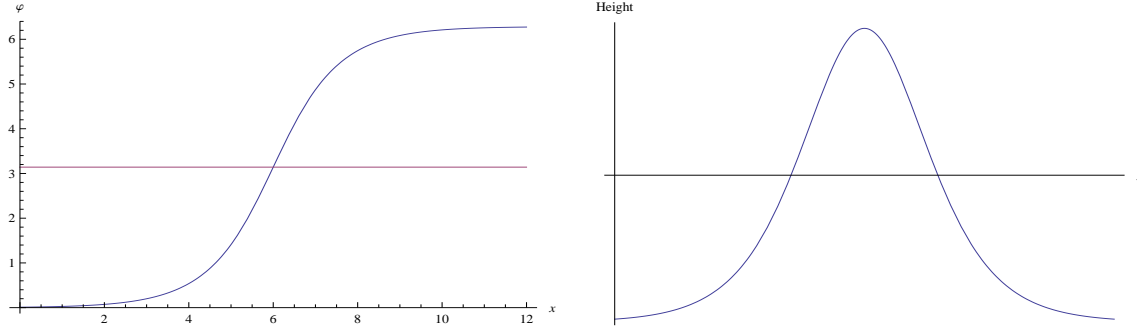


Abbildung 2.2: Die Soliton-Lösung: (oben links) Der Auslenkungswinkel φ als Funktion der Koordinate x entlang der Aufhängung, (oben rechts) die Seitenansicht.

gegeben, wobei die Integrationskonstante x_0 die Position des Solitons angibt, d.h. den Punkt, bei dem $\varphi = \pi$. Das $+$ Zeichen in (2.4) entspricht einer Lösung, für die $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \rightarrow 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \rightarrow 2\pi$. Das $-$ Zeichen beschreibt eine sogenannte Anti-Soliton-Lösung mit $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) \rightarrow 2\pi$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) \rightarrow 0$. In beiden Fällen nähern sich die Lösungen ihrem asymptotischen Wert für große $|x - x_0|$ exponentiell. Die Reichweite der Lösung entspricht dabei

$$\Delta L = 1/\sqrt{g}. \quad (2.5)$$

Diese Größe ist ein Maß für die halbe Breite des Solitons und soll uns als Längenskala dienen.

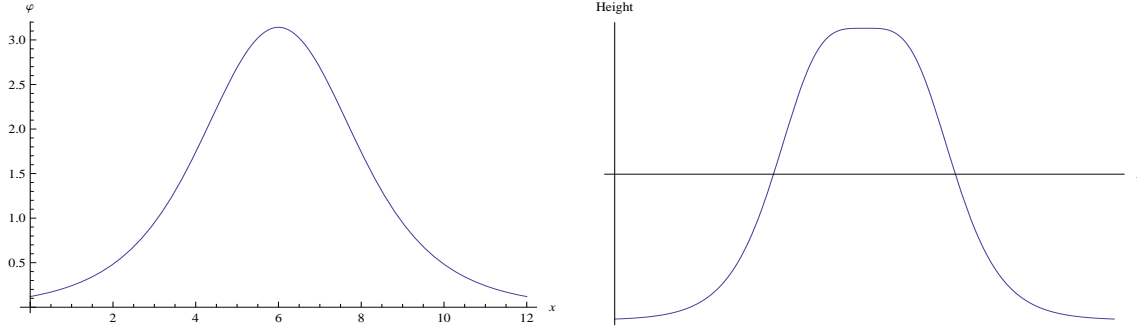


Abbildung 2.3: Die Breather-Lösung: (oben links) Der Auslenkungswinkel φ als Funktion der Koordinate x entlang der Aufhängung im Augenblick maximaler Auslenkung, (oben rechts) die Seitenansicht.

Die Sinus-Gordon Theorie besitzt ebenfalls Lösungen, die gebundenen Zuständen eines Solitons und eines Anti-Solitons entsprechen, die sogenannten Breather-Lösungen (vgl. [16]; Darstellung in Abb. 2.3):

$$\varphi_0(x, t) = -4 \tan^{-1} \left[\frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \frac{\sin \sqrt{g(1-m^2)}(t-t_0)}{\cosh m\sqrt{g}(x-x_0)} \right]. \quad (2.6)$$

Der Parameter m muss der Bedingung $0 < m^2 < 1$ genügen, ist ansonsten aber beliebig. Die Schwingungsperiode ist

$$\Delta T = \frac{2\pi}{\sqrt{g(1-m^2)}}. \quad (2.7)$$

Diese Lösung ist metastabil. Es handelt sich um einen gebundenen Zustand zwischen einem Teilchen und seinem Antiteilchen, und kleine Störungen lassen dieses System in „Photonen“ zerfallen, d.h.

einfache Schwingungen der Pendelkette. Der freie Parameter m hängt mit der Bindungsenergie zusammen und legt sowohl die Amplitude als auch die Periode fest. Zur Festlegung einer Zeitskala muss daher ein spezieller Wert für m gewählt werden. Eine mögliche Wahl wäre, dass φ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ variiert, d.h. $m^2 = 1/2$ oder $\Delta T = \sqrt{8\pi^2/g}$. (Dieser Wert für m wurde in Abb. 2.3 gewählt.)

Wir wollen nun untersuchen, wie sich die so definierten Längen- und Zeitmaßstäbe transformieren, wenn man sie relativ zum „Äther“, d.h. dem durch die Pendel definierten Ruhesystem, bewegt. Wir betrachten zunächst ein Soliton mit einer Geschwindigkeit v . Diese Lösung erhalten wir aus der statischen Lösung nach Gleichung (2.3). Auch die Breite des propagierenden Solitons lässt sich daraus ablesen.

Die statische Lösung $\varphi_0(x)$ habe ihr Zentrum bei $x = 0$. Dann bestimmt die Bedingung

$$\varphi_0(\pm\Delta L) = \pi \pm \alpha$$

einen Wert für α , bei dem wir die Breite von φ_0 messen. Für die propagierende Lösung

$$\varphi_v(x, t) = \varphi_0(\gamma(v)(x - vt)) ,$$

bewegt sich das Zentrum $x_0(t)$ nach der Gleichung $x_0(t) = vt$. Die Breite dieser Lösung ist gleich dem Wert ΔL_v , der der Bedingung

$$\varphi_v(x_0(t) \pm \Delta L_v, t) = \pi \pm \alpha$$

genügt. Dies ist offensichtlich der Fall für

$$\gamma(v) \Delta L_v = \Delta L \quad \text{oder} \quad \Delta L_v = \sqrt{1 - v^2} \Delta L . \quad (2.8)$$

Die Breite der propagierenden Lösung ist daher um einen Faktor $1/\gamma(v)$ kontrahiert. Diese „Lorentz-Kontraktion“ kann von einem außenstehenden Beobachter, der sieht, wie sich die Solitonen entlang der Pendelkette ausbreiten, tatsächlich wahrgenommen werden.

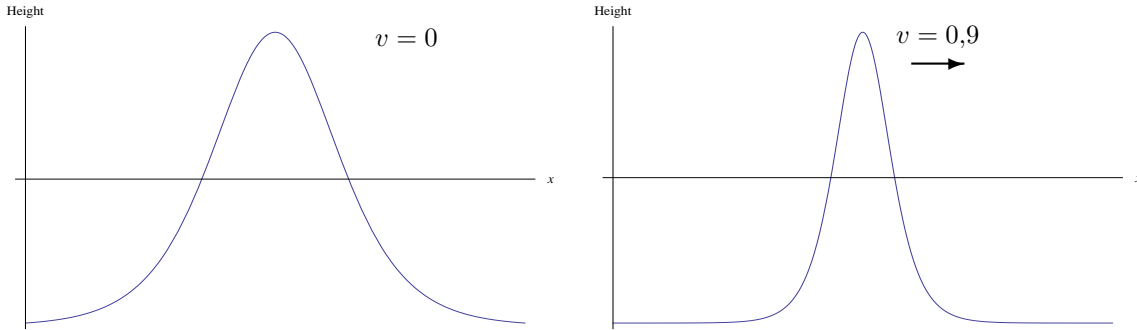


Abbildung 2.4: Die Soliton-Lösung in Bewegung: (links) Die ruhende Soliton-Lösung aus Abb. 2.2, (rechts) die zugehörige transformierte Lösung zu einer Geschwindigkeit $v = 0,9$.

Auch die Dilatation der Schwingungsperiode des gebundenen Zustands lässt sich leicht herleiten. In Ruhe gilt für die Breather-Lösung:

$$\varphi_0^b(x, t) = \varphi_0^b(x, t + \Delta T) .$$

Die zugehörige propagierende Lösung erfüllt

$$\varphi_v^b(x, t) = \varphi_v^b(x + v\Delta T_v, t + \Delta T_v) .$$

Da

$$\varphi_v^b(x, t) = \varphi_0^b(\gamma(v)(x - vt), \gamma(v)(t - vx))$$

erhalten wir

$$\gamma(v)(t + \Delta T_v - v(x + v\Delta T_v)) = \gamma(v)(t - vx) + \gamma(v)(1 - v^2)\Delta T_v$$

und somit:

$$\Delta T = \gamma(v)(1 - v^2)\Delta T_v \quad \text{oder} \quad \Delta T_v = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\Delta T. \quad (2.9)$$

Die Schwingungsdauer eines sich bewegendes gebundenen Zustands ist also tatsächlich um einen Faktor $\gamma(v)$ im Vergleich zum ruhenden Zustand verlängert.

Solitonen und gebundene Zustände von Solitonen können an einem festen Ende der Kette ohne Energieverlust reflektiert werden. Durch eine solche experimentelle Anordnung kann man das „Zwillingsparadoxon“ aufzeigen (vgl. Abschnitt 3.5): Ein gebundener Zustand, der sich entlang der Kette bewegt und nach einer Reflektion am Ende der Kette zurückkehrt, hat weniger Schwingungen ausgeführt, als ein ruhender gebundener Zustand. Offensichtlich kann dieser Effekt nicht der „Beschleunigung“ am Ende der Kette zugeschrieben werden.

2.2 Von der Ätherhypothese zur Relativitätstheorie

Zunächst hat es vielleicht den Anschein, als ob das oben diskutierte Modell der harmonisch gekoppelten Pendel sehr speziell sei. Hinsichtlich der Existenz von Soliton- und Breather-Lösung mag das richtig sein, nicht aber hinsichtlich der Tatsache, dass dieses Modell den richtigen Verkürzungsfaktor und die richtige Zeitdilatation liefert. Das einzige, was wir zur Herleitung dieser Faktoren benutzt haben, ist die Lorentz-Invarianz der Feldgleichungen. *Jede Lorentz-invariante Feldgleichung hat somit die Eigenschaft, dass ihre Lösungen, die eine Längen- oder Zeitskala definieren, sich genau so transformieren, dass die bewegten Maßstäbe bzw. Uhren mit dem Lorentz'schen Verkürzungs- bzw. Dilatationsfaktor multipliziert werden.*

Insbesondere haben auch die Maxwell-Gleichungen diese Eigenschaft. Genau das hatte Lorentz gezeigt, wobei er allerdings noch die falschen Transformationsgesetze für die Ladungen und Ströme verwendet hatte. Diesen Fehler hat Poincaré korrigiert. Unter der Annahme, dass auf atomarer Ebene die Materie, und damit auch Längenmaßstäbe, durch die elektromagnetische Wechselwirkung zusammengehalten wird, war daher die Lorentz-Kontraktion nicht nur plausibel sondern sogar eine Folgerung aus den Maxwell-Gleichungen.

Vor diesem Hintergrund können wir auch den Übergang von der Lorentz'schen Sichtweise zur Einstein'schen Sichtweise und der speziellen Relativitätstheorie leichter nachvollziehen. Aus der Lorentz-Invarianz der fundamentalen Gleichungen folgen ja nicht nur die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatation, sondern sämtliche Phänomene, die sich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie erklären lassen.

Oftmals wird behauptet, der Übergang zur Sichtweise der speziellen Relativitätstheorie bestünde in einer Neuinterpretation von „Raum“ und „Zeit“. Doch über Raum und Zeit als abstrakte Entitäten können wir eigentlich nichts sagen. In der Physik interessieren wir uns nur für räumliche und zeitliche *Distanzen*, und diese Distanzen messen wir mit physikalischen Instrumenten – Längenmaßstäben und Uhren –, die selbst den physikalischen Gesetzen unterliegen.

Bisher bezog sich das Symbol x auf eine Koordinate im Ruhesystem des Äthers – im obigen Modell war dies das Ruhesystem der Pendelaufhängung. Dies entspricht dem „Lineal“ eines externen Beobachters, der außerhalb unserer Welt steht und alles mit seinen Maßstäben ausmessen kann –

wie wir bei den gekoppelten Pendeln. Entsprechend bezog sich auch das Symbol t auf die Uhr eines externen Beobachters. Wir als externe Beobachter können die Längenkontraktion der Solitonen nachweisen, indem wir einfach ein „externes“ Lineal neben das Soliton halten. Ebenso können wir den propagierenden gebundenen Zustand beobachten und die Dilatation in der Schwingungsperiode mit unserer externen Uhr vergleichen. Für uns als externe Beobachter sind Raum (gemessen entlang der Pendelkette) und Zeit absolut. $c = 1$ (die Geschwindigkeit von Wellen bzw. kleinen Störungen entlang der Kette) ist für uns keine obere Grenzggeschwindigkeit, und wenn wir uns entlang der Kette bewegen, ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Störung entlang der Kette (das entspricht der Ausbreitung des Lichts) in unserem System für die Vorwärts- und Rückwärtsrichtung verschieden: Das Ruhesystem der Pendelkette ist ein ausgezeichnetes System.

Stellen wir uns nun jedoch (1+1)-dimensionale Wesen vor, die in dieser „Soliton-Welt“ leben. Ihnen stehen nur die Solitonen bzw. andere Lösungen ihrer „universellen Bewegungsgleichungen“ als Längen- und Zeitmaßstäbe zur Verfügung. Sie werden daher die Breite eines Solitons und die Schwingungsdauer der Breather-Lösung als Längen- und Zeitmaßstab zur Beschreibung der physikalischen Phänomene benutzen. Doch wenn sie ein bewegtes Soliton mit der Breite eines anderen bewegten Solitons vergleichen, „messen“ sie keine Verkürzung, entsprechend messen sie auch mit bewegten Breather-Lösungen keine Veränderungen in der Zeitskala eines entsprechend bewegten Systems. Erst wenn sie die Breite oder Zeitskalen von bewegten Systemen mit denen von anders bewegten oder ruhenden Systemen vergleichen, messen sie Unterschiede.

Der Übergang zur Minkowski-Welt erfolgt gerade dadurch, dass die externen Längen- und Zeitmaßstäbe durch interne Längen- und Zeitmaßstäbe, die denselben physikalischen Gesetzen unterliegen, ersetzt werden. Es ist der Übergang von einer externen zu einer internen Perspektive. Die zugrundeliegende diskrete Struktur und damit das ausgezeichnete Ruhesystem (der „Äther“) zeigen sich erst, wenn v so groß wird, dass die Breite der Solitonen mit der Größenordnung des Pendelabstands (bzw. der Gitterstruktur) vergleichbar wird. Ist die fundamentale Theorie eine Kontinuumstheorie, so tritt der „Äther“ für einen internen Beobachter überhaupt nicht in Erscheinung.

Wenn wir von der Lorentz-Invarianz bzw. allgemeiner Poincaré-Invarianz der Raum-Zeit sprechen, sollten wir eigentlich zwei Schritte bzw. Aspekte unterscheiden. Wir haben oben die Invarianzeigenschaft der Bewegungsgleichungen als eine Eigenschaft der Lösungsmenge dieser Gleichungen interpretiert: Mit jeder Lösung $\varphi(x)$ ist auch $\varphi^{(\Lambda,a)}(x) = \varphi(\Lambda x - a)$ eine Lösung der Bewegungsgleichung. Gibt es nun ausgezeichnete Lösungen, die Längenmaßstäbe oder Uhren definieren, so bedeutet diese Invarianz, dass bewegte Längenmaßstäbe kürzer, bewegte Uhren langsamer erscheinen. Dies gilt zunächst bezüglich der festen „Hintergrunds-Raum-Zeit“. Diesen Schritt hatte auch Lorentz erkannt. Der wesentliche zweite Schritt aber blieb Einstein vorbehalten. Er erkannte nämlich, dass die Poincaré-Invarianz einer Gleichung auch bedeutet, dass bezüglich der intrinsischen Maßstäbe das Relativitätsprinzip gilt und damit kein Inertialsystem mehr ausgezeichnet ist.

Statt die Lorentz-Invarianz der Gleichungen als Eigenschaft der Lösungsmenge anzusehen, was beispielsweise auch für die diskretisierte Pendelkette einfach zu interpretieren war, können wir die Lorentz-Invarianz auch als eine Freiheit der Koordinatenwahl auffassen. Wenn wir nämlich die Raum- und Zeitkoordinaten einer Lorentz-Transformation unterwerfen, für eine Raumdimension somit die Ersetzung

$$x \rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{und} \quad t \rightarrow t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad (2.10)$$

vornehmen, dann bleiben die Feldgleichungen unverändert. Ordnen wir nun die Koordinaten (x, t) bzw. (x', t') jeweils Beobachtern zu, deren Weltlinie durch $x = 0$ bzw. $x' = 0$ und deren „gleichzeitige Ereignisse“ durch die Bedingungen $t = \text{const.}$ bzw. $t' = \text{const.}$ definiert sind, dann bedeutet die Invarianz der Feldgleichungen, dass beide Beobachter dieselbe Physik sehen, d.h., es gilt das

Relativitätsprinzip.

Die Lorentz-Invarianz der Bewegungsgleichungen können wir offensichtlich physikalisch auf zwei vollkommen unterschiedliche Weisen interpretieren. Einmal als Eigenschaft der Lösungsmenge, die es uns erlaubt, aus bestimmten Lösungen andere zu gewinnen. Diese Interpretation bezieht alles auf einen festen Satz von Koordinaten (x, t) (vgl. (2.3)), der als das Koordinatensystem eines ausgezeichneten Ruhesystems interpretiert werden kann. Bezüglich dieser Koordinaten beobachten wir die Lorentz-Kontraktion und die Zeitdilatation.

Die andere Interpretation impliziert das Relativitätsprinzip. Wenn sich zwei Beobachter relativ zueinander mit einer konstanten Geschwindigkeit v bewegen, können sie unterschiedliche Koordinatensysteme verwenden, in denen sie sich jeweils im Ursprung (und damit in Ruhe) befinden. Jeder verwendet zur Angabe von räumlichen und zeitlichen Distanzen Werte, die mit Instrumenten in seinem System gemessen wurden. Die von den beiden Beobachtern verwendeten Koordinaten hängen über die Gleichungen (2.10) miteinander zusammen. In diesem Fall erfahren beide Beobachter dieselbe Physik. In dieser Interpretation gibt es kein ausgezeichnetes Ruhesystem – der Äther ist verschwunden. Der Preis ist eine neue Vorstellung von Gleichzeitigkeit. Dieser letzte Schritt zeichnete Einstein vor Lorentz und Poincaré aus.

2.3 Die Synchronisation von Uhren

Einer der seltsamsten und umstrittensten Aspekte der speziellen Relativitätstheorie ist ihr Konzept von Gleichzeitigkeit. Dabei wird oft vergessen, dass es sich bei der Behauptung, zwei Ereignisse seien gleichzeitig, nicht um eine „faktische“ Aussagen handelt, sondern eher um eine Konvention. Ob zwei Ereignisse (für ein gegebenes Inertialsystem) gleichzeitig stattfinden oder nicht, können wir experimentell nur entscheiden, wenn wir eine Vorschrift angegeben haben, was wir unter „gleichzeitig“ verstehen wollen. Diese Vorschrift wird letztendlich darin bestehen, dass wir zwei Ereignisse als gleichzeitig ansehen, wenn die Uhren am jeweiligen Ort dieser Ereignisse dieselbe Zeit anzeigen, womit wir das Problem auf die Synchronisation von Uhren an verschiedenen Orten (aber im selben Inertialsystem) reduzieren haben. Die einzige Einschränkung ist, dass zwei gleichzeitige Ereignisse A und B *nicht* in einer kausalen Abhängigkeit stehen sollten. Grundsätzlich können wir eine beliebige raumartige Hyperfläche als gleichzeitig *definieren*.

Die folgenden Überlegungen gelten für den flachen Minkowski-Raum. Wir konzentrieren uns ausschließlich auf den Aspekt der Synchronisation von Uhren für ein gegebenes Inertialsystem. Eine ausführlichere Darstellung dieser Problematik findet man bei Mittelstaedt [21] sowie in den beiden Abhandlungen *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre* [26] und *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre* [27] von Hans Reichenbach (Hans Friedrich Herbert Günther Reichenbach, *geb. 26.9.1891 in Hamburg; gest. 9.4.1953 in Los Angeles*).

2.3.1 Synchronisation durch Lichtsignale

Zunächst ist es recht hilfreich, sich bei der operationalen Definition von Gleichzeitigkeit auf ein allgemeines Verfahren zu beschränken, das allerdings noch keine Einschränkung an die Möglichkeiten darstellt. Wir wollen Uhren durch Austausch von Lichtsignalen synchronisieren. Beobachter A sendet zum Zeitpunkt t_1 ein Lichtsignal aus. Dieses wird von Beobachter B reflektiert und erreicht Beobachter A zum Zeitpunkt t_2 . Bezeichnen wir den Zeitpunkt des Ereignisses der Reflektion des Lichtstrahls bei Beobachter B mit t , so möchte Beobachter A nun definieren, welches Ereignis auf seiner Weltlinie zu dem Moment der Reflektion des Lichtstrahls bei Beobachter B gleichzeitig war, d.h. dem Zeitpunkt t entspricht. Die einzige Einschränkung liefert dabei die Forderung der Kausalität: $t_1 < t < t_2$.

Beobachter A definiert nun:

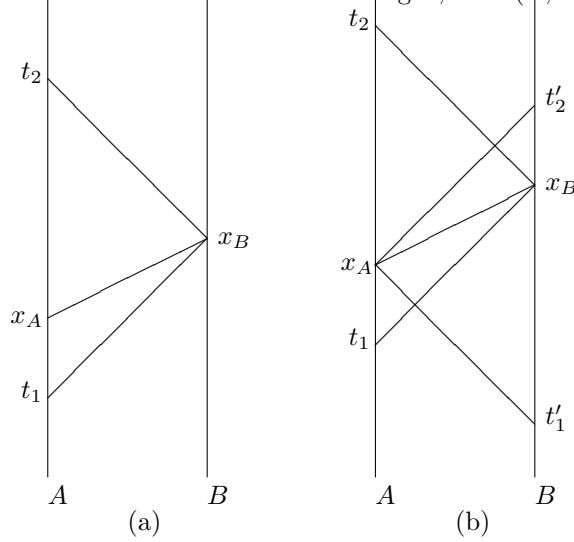
$$t = t_1 + \epsilon(A, B)(t_2 - t_1)$$

mit

$$0 < \epsilon(A, B) < 1 .$$

(Der Einfachheit halber soll das Synchronisierungsverfahren nicht von der Zeit abhängen, d.h. $\epsilon(A, B)$ hängt nicht zusätzlich noch von t bzw. t_1 ab.)

Abbildung 2.5: Synchronisation von Uhren durch Lichtstrahlen. Die senkrechten Linien entsprechen den Weltlinien der Beobachter A und B , die zueinander einen konstanten Abstand halten. (a) Zum Zeitpunkt t_1 sendet A ein Lichtsignal aus, das von B im Ereignis x_B reflektiert wird und bei t_2 wieder Beobachter A erreicht. Durch Vorgabe von ϵ_A konstruiert A das Ereignis x_A , das zu x_B gleichzeitig ist. (b) Soll die Gleichzeitigkeit der Ereignisse x_A und x_B auch für Beobachter B gelten, so muss er sein Verfahren zur Bestimmung der Gleichzeitigkeit (ausgedrückt durch ϵ_B) so wählen, dass $\epsilon_B = 1 - \epsilon_A$.



Zunächst kann man sich leicht überzeugen, dass durch geeignete Wahl von ϵ tatsächlich je zwei raumartige Ereignisse x_A und x_B auf der Weltlinie von A und B als gleichzeitig definiert werden können (vgl. Abb. 2.5). Dieses Verfahren bildet daher keine Einschränkung der Allgemeinheit. Damit die Hyperfläche der zu x_A gleichzeitigen Ereignisse eine raumartige Hyperfläche ist, müssen die Richtungsableitungen der Funktion $\epsilon(A, B)$ (aufgefasst als eine Funktion von B) noch durch eine Konstante (bei unserer Definition der Lichtgeschwindigkeit ist diese Konstante 1) beschränkt sein. Durch geeignete Forderungen an die Funktion ϵ erhält man verschiedene Synchronisationsverfahren.

2.3.2 Die Einstein-Synchronisation

Eine sehr allgemeine Forderung an die Gleichzeitigkeit von Ereignissen ist die Symmetrieforderung: Wenn für einen Beobachter A das Ereignis x_B auf der Weltlinie eines Beobachters B gleichzeitig zu dem Ereignis x_A auf seiner Weltlinie ist, dann soll umgekehrt auch für den Beobachter B das Ereignis x_A gleichzeitig zu x_B sein. Anhand der Abbildung 2.5(b) kann man sich leicht überzeugen, dass diese Forderung gleichbedeutend mit der Bedingung

$$\epsilon(A, B) = 1 - \epsilon(B, A)$$

ist.

Eine weitere allgemeine Forderung ergibt sich aus der Homogenität des Raumes. Wir verlangen, dass sich die Funktion $\epsilon(A, B)$ nicht ändert, wenn wir die beiden Beobachter A und B um denselben (räumlichen) Vektor verschieben. Symbolisch ausgedrückt:

$$\epsilon(A + \vec{a}, B + \vec{a}) = \epsilon(A, B) .$$

Dies bedeutet, dass $\epsilon(A, B)$ nur noch von der räumlichen Richtung abhängen kann, unter der der Beobachter B von A aus gesehen wird. Innerhalb einer Halbebene, die die Weltlinie von A als Rand hat, ist ϵ konstant. Auch diese Forderung verlangen wir allgemein.

Nun kommen wir zu einer speziellen Forderung, die sich aus der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ergibt. Da die Lichtgeschwindigkeit für jeden Beobachter und für jede Richtung dieselbe sein soll, können wir zusätzlich noch Isotropie unserer Gleichzeitigkeitsdefinition verlangen. ϵ soll also auch nicht mehr von der räumlichen Richtung abhängen, unter der B von A aus gesehen wird. In diesem Fall gilt

$$\epsilon(A, B) = \text{const.}$$

Zusammen mit der ersten Forderung der Symmetrie folgt sofort:

$$\epsilon = \frac{1}{2}.$$

Die aus diesem Wert für ϵ folgende Synchronisation von Uhren bezeichnet man als Einstein-Synchronisation.

Das zweite Axiom der speziellen Relativitätstheorie - die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit - führt uns somit schon zur Festlegung der Gleichzeitigkeitsvorschrift. Das erste Axiom - das Relativitätsprinzip - geht indirekt in diese Festlegung ein, da wir die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und somit die Isotropie der Synchronisationsvorschrift für jedes Inertialsystem verlangt haben.

2.3.3 Synchronisation mit der Ätherhypothese

Wir haben aus der Lorentz-Invarianz der universellen Bewegungsgleichungen geschlossen, dass die spezielle Relativitätstheorie in der Formulierung von Einstein äquivalent zur Lorentz-Theorie ist, d.h. zu einer Theorie mit Ätherhypothese und Lorentz-Kontraktion der Längenskalen. Es sollte daher nicht überraschen, wenn es eine Synchronisationsvorschrift gibt, die auf die Lorentz-Theorie führt.

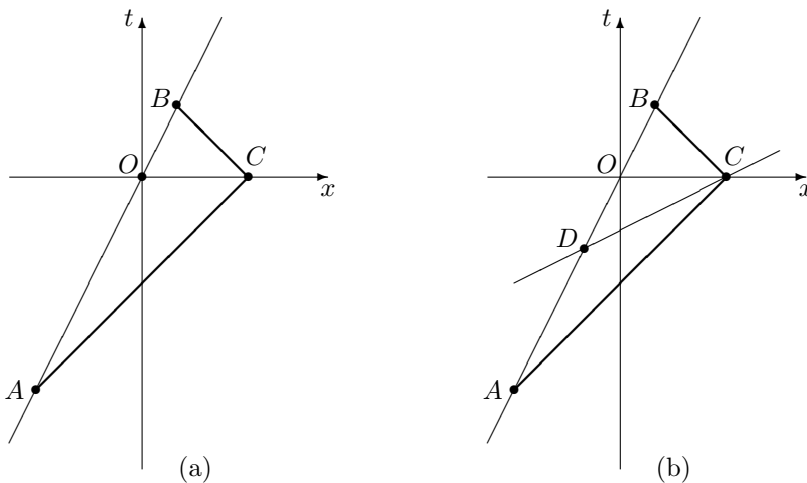


Abbildung 2.6: Äther- und Einstein-Synchronisation. In Teil (a) rekonstruiert der Beobachter auf der Weltlinie AB das Ereignis O als gleichzeitig zum Ereignis C . Seine Synchronisationsvorschrift hängt von der Geschwindigkeit v relativ zu dem ausgezeichneten Ruhesystem ab. Dabei gilt für das Verhältnis $(AO)/(AB) = (1 + v)/2$. In Abbildung (b) wird nach der Einstein-Synchronisation aus denselben Lichtsignalen das Ereignis D als zu C gleichzeitig rekonstruiert.

Auch mit Ätherhypothese verlangen wir von der Gleichzeitigkeit von Ereignissen Symmetrie und Homogenität des Raumes. Was wir jedoch nicht mehr verlangen können, ist die allgemein gültige Isotropie der Synchronisationsvorschrift. Für ein System, das sich relativ zum Äther mit einer Geschwindigkeit \vec{v} bewegt, wird die Synchronisationsvorschrift von der Richtung relativ zu \vec{v} abhängen. Allgemein wird also nun gelten:

$$\epsilon(A, B) = \epsilon(\vec{v}; A, B) .$$

Lediglich für das ausgezeichnete Inertialsystem, das dem Ruhesystem des Äthers entspricht, ist die Lichtgeschwindigkeit in alle Richtungen dieselbe und somit das Synchronisationsverfahren symmetrisch:

$$\epsilon(\vec{v} = 0; A, B) = \frac{1}{2} .$$

Bewegt sich das Inertialsystem der Beobachter A und B relativ zum Äther mit der Geschwindigkeit \vec{v} , so gilt (vgl. Abb. 2.6)

$$\epsilon(\vec{v}; A, B) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{|\vec{v}|}{c} \cos \alpha \right) ,$$

wobei α der Relativwinkel zwischen der Richtung von \vec{v} und der Halbebene ist, die durch die Weltlinie von A begrenzt wird und die Weltlinie von B enthält.

Der Vorteil dieses Verfahrens ist, dass Gleichzeitigkeit nun ein absoluter Begriff wird. Sind zwei Ereignisse x_A und x_B für einen Beobachter A gleichzeitig, so sind sie es auch für alle anderen Beobachter, unabhängig von deren Bewegungszustand.

Der Nachteil dieses Verfahrens ist jedoch, dass wir das Ruhesystem des Äthers nicht kennen. Wir müssen also willkürlich ein System auszeichnen, das wir als Ruhesystem definieren, beispielsweise das System des Schwerpunkts der in unserem Universum beobachtbaren Massen oder das Ruhesystem relativ zur Hintergrundstrahlung. (Es ist nicht selbstverständlich, dass diese beiden Systeme identisch sind.) Wegen der Geschwindigkeitsabhängigkeit des Synchronisationsverfahrens gilt das Relativitätsprinzip nicht mehr. Die Lichtgeschwindigkeit ist nur im Ruhesystem des Äthers richtungsunabhängig konstant.

Das Relativitätsprinzip gilt jedoch in einer anderen Form: Wir können jedes beliebige Inertialsystem als Ruhesystem definieren und die Synchronisation der Uhren auf dieses System beziehen. Die physikalischen Gesetze bleiben dieselben. Hier liegt der physikalisch unbefriedigende Aspekt dieses Synchronisierungsverfahrens. Wir brechen die Symmetrie, die sich im Relativitätsprinzip ausdrückt, *per Hand*, indem wir ein Inertialsystem auszeichnen. Umgekehrt trägt die Einstein-Synchronisation dem Relativitätsprinzip Rechnung. Kein Inertialsystem wird durch dieses Verfahren ausgezeichnet. Der Preis ist allerdings die Relativität der Gleichzeitigkeit.

Unter bestimmten Umständen ist es jedoch sinnvoll, eine Synchronisation zu wählen, die der Lorentz'schen Sichtweise näher ist als der Einstein'schen. Beispielsweise könnte man die Lorentz'sche Sichtweise so interpretieren, dass irgendwo in der Mitte unseres Universums eine riesige Uhr steht, und das, was diese Uhr anzeigt, ist die „wahre“ Zeit. Alle anderen Systeme müssen ihre Zeit auf diese wahre Zeit umrechnen. Dieses Verfahren wird in abgewandelter Form beispielsweise bei der Zeitsynchronisation des GPS-Satellitensystems verwendet. Die „riesige Uhr“ steht in der GPS-Zentrale in Colorado. Die Uhren der Satelliten sind so geschaltet, dass ihre Zeit gleich der „Masterzeit“ ist. Insbesondere ist ihr Gang im Vergleich zu einer „richtigen“ Uhr etwas gedrosselt, um den Einfluss der schwächeren Gravitation sowie der Bewegung auszugleichen.

Die Einstein-Synchronisation wie auch die „Äthersynchronisation“ sind Spezialfälle einer Klasse von Synchronisationsvorschriften, bei denen die Konstanz der sogenannten „Zwei-Wege-Lichtgeschwindigkeit“ gefordert wird. Dabei handelt es sich um die Geschwindigkeit c , die man einem Lichtstrahl zuordnet, der eine Strecke in beide Richtungen - vor und zurück - durchläuft. Ist c^+ die

Geschwindigkeit für eine Richtung und c^- die Geschwindigkeit für die Rückrichtung, so ist

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c^+} + \frac{1}{c^-} \right).$$

Während jedoch zur Messung von c^+ bzw. c^- die Uhren an verschiedenen Raumpunkten synchronisiert sein müssen, kann man c an einem Punkt auswerten, d.h. c hängt nicht von der Synchronisationsvorschrift ab. Im Michelson-Morley-Versuch beispielsweise wird die Lichtgeschwindigkeit ja gar nicht für verschiedenen Raumrichtungen verglichen, sondern nur die Zwei-Wege-Lichtgeschwindigkeit. Nur von dieser wird gezeigt, daß sie isotrop ist. Die Einstein'sche Forderung der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit geht also über das Ergebnis des Michelson-Morley-Versuchs hinaus.

2.3.4 Synchronisation durch langsamen Uhrentransport

Abschließend soll noch gezeigt werden, dass die Synchronisation durch langsamen Uhrentransport zu demselben Ergebnis wie die Einstein-Synchronisation führt. Das bedeutet, wenn man zwei Uhren am selben Ort synchronisiert und dann die eine der beiden Uhren langsam zu einem anderen Ort bringt, dann ist die so erreichte Synchronisation eine Einstein-Synchronisation.

Zunächst sollten wir etwas genauer definieren, was „Synchronisation durch langsamen Uhrentransport“ bedeutet. Wir stellen uns dazu zwei Beobachter vor, die einen konstanten Abstand L halten und sich im selben Inertialsystem befinden. Zu einem Zeitpunkt $t_0 = 0$ werden bei Beobachter 1 zwei Uhren synchronisiert. Anschließend wird eine der beiden Uhren mit der Geschwindigkeit v zu Beobachter 2 gebracht. Sie benötigt dazu für Beobachter 1 die Zeit $t = L/v$, das ist also die Zeit, die Beobachter 1 dem Ereignis „Uhr ist bei Beobachter 2“ zuschreiben wird. Die Anzeige auf der Uhr ist allerdings etwas kürzer, nämlich

$$t_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t. \quad (2.11)$$

Wir können nicht einfach argumentieren, dass für $v/c \ll 1$ die rechte Seite gegen t geht, denn wenn v sehr klein ist, wird t sehr groß, und damit würde zwar t_1/t gegen 1 gehen, aber t_1 und t könnten sich möglicherweise selbst im Limes $v \rightarrow 0$ noch um einen konstanten Term unterscheiden. Es gilt aber

$$t_1 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + O((v/c)^4) \right) \frac{L}{v} \approx \frac{L}{v} - \frac{L}{c} \frac{v}{c} + \dots = t - \frac{L}{c} \frac{v}{c} + \dots \quad (2.12)$$

Da L und c Konstanten sind (L/c ist die Zeit, die das Licht braucht, die Strecke L zu durchqueren), wird der Korrekturterm für sehr kleine Geschwindigkeiten beliebig klein. Allerdings ist die Korrektur von der Ordnung v/c und nicht, wie man zunächst nach Gleichung 2.11 erwarten könnte, von der Ordnung $(v/c)^2$.

Kapitel 3

SRT – Anwendungen

In diesem Kapitel sollen erste Anwendungen bzw. Schlussfolgerungen aus der Lorentz-Invarianz der Minkowski-Raumzeit beschrieben werden. Dazu zählen neben der Zeitdilatation, der Lorentz-Kontraktion, dem relativistischen Doppler-Effekt (longitudinal und transversal) auch einige Scheinparadoxa wie beispielsweise das so genannte Zwillings-Paradoxon.

Anschließend deuten wir an, wie sich der Lagrange-Formalismus auf die Relativitätstheorie verallgemeinern lässt und was der zum Ortsvektor kanonisch konjugierte Impuls ist. In diesem Zusammenhang definieren wir auch den Begriff der Eigenzeit. Den Abschluss bildet ein von Einstein erdachtes Gedankenexperiment, das eine elegante Herleitung der bekannten Beziehung $E = mc^2$ erlaubt.

3.1 Zeitdilatation

Wir behandeln zunächst das Phänomen der Zeitdilatation. Schon bei der Pendelkette hatten wir gesehen, dass aus der Lorentz-Invarianz der Feldgleichungen folgt, dass eine relativ zum Äther bewegte Breather-Lösung langsamer schwingt bzw. eine größere Schwingungsperiode hat. Doch es gilt ja das Relativitätsprinzip und das bedeutet, dass ein Beobachter in dem bewegten System umgekehrt ebenfalls den Eindruck hat, dass die Uhren in dem ruhenden System langsamer gehen. Wir wollen nun untersuchen, was genau damit gemeint ist und weshalb dieses Phänomen tatsächlich auftritt.

Wir betrachten wieder zwei Inertialsysteme mit den jeweiligen Koordinaten (x, t) und (x', t') (vgl. Abb. 3.1). Bei dem Ereignis O treffen sich die beiden Beobachter im Ursprung ihrer jeweiligen Systeme und setzen ihre Uhren jeweils auf $t_0 = 0$. Wir betrachten nun die Situation zunächst aus der Perspektive des Inertialsystems von Beobachter 1. Für diesen Beobachter zeigt die Uhr bei Ereignis A auf die Zeit t . In seinem Inertialsystem ist das Ereignis B' gleichzeitig zu A , hat also ebenfalls die Koordinate t . Bei diesem Ereignis B' scheidet die Weltlinie von Beobachter 2 die „Gleichzeitigkeitslinie“ von Beobachter 1 zur Zeitkoordinate t . Wir wissen jedoch, dass für Beobachter 2 erst im Ereignis A' dieselbe Zeit vergangen ist wie für Beobachter 1 zum Ereignis A . Das Ereignis A' ist aber später als B' . Das bedeutet, dass die Uhr von Beobachter 2 bei Ereignis B' noch nicht so viele Zeittakte anzeigt, wie zum Zeitpunkt A' (nämlich t) und damit die Uhr von Beobachter 1 zum Zeitpunkt t . Beobachter 1 hat also den Eindruck, die Uhr von Beobachter 2 gehe langsamer.

Ich betone hier nochmals, dass Beobachter 1 die Uhr von Beobachter 2 nicht „sieht“ (außer vielleicht im Augenblick, wo sich beide Beobachter treffen, also bei Ereignis O). Für den Vergleich der Uhren wählt er für sein Inertialsystem zwei gleichzeitige Ereignisse (z.B. A und B') und die Zeit auf der Uhr von Beobachter 2 wird von einem anderen Beobachter (dessen Weltlinie parallel zu der

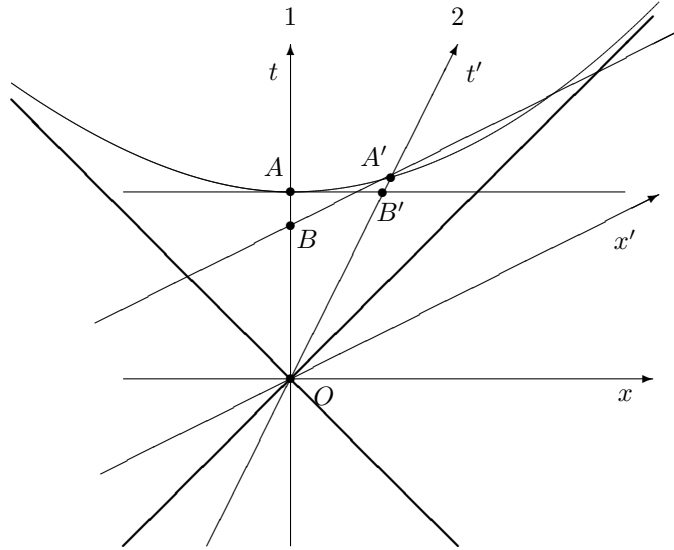


Abbildung 3.1: Für den ruhenden Beobachter 1 scheint eine bewegte Uhr langsamer zu gehen (B' liegt vor A'). Denselben Eindruck hat umgekehrt auch der Beobachter 2 (B liegt vor A).

von 1 ist aber durch das Ereignis B' verläuft, dessen Uhr aber mit der von 1 synchronisiert wurde) abgelesen. Der Uhrenvergleich erfolgt in Inertialsystem 1 zu vollkommen anderen Ereignissen als in Inertialsystem 2 und der Grund dafür liegt in der unterschiedlichen Zuordnung von Gleichzeitigkeit für Ereignisse.

3.2 Lorentz-Kontraktion

Ähnlich wie im letzten Abschnitt die Zeitdilatation untersuchen wir nun das Phänomen der Lorentz-Kontraktion aus der Sichtweise der verschiedenen Inertialsysteme. Die Länge, beispielsweise eines Lineals, wird dabei als der räumliche Abstand von Anfangs- und Endpunkt des Lineals bestimmt, wobei die Augenblicke der Messung in den jeweiligen Inertialsystemen gleichzeitig sein sollen.

Wir betrachten zunächst einen Beobachter 1 in dessen Inertialsystem das Lineal ruht (Abb.3.2 (links)). Die von dem Lineal überstrichene Weltfläche ist in der Abbildung grau unterlegt. Wichtig sind für uns die Weltlinien der beiden Endpunkte des Lineals. Zu einem bestimmten Zeitpunkt in Inertialsystem 1 (beispielsweise $t = 0$) befinden sich die beiden Endpunkte bei den Ereignissen O und A . Der räumliche Abstand $l = OA$ dieser Ereignisse für Beobachter 1 definiert die Länge des Lineals. Im Inertialsystem von Beobachter 2 sind aber die Ereignisse O (linkes Ende des Lineals) und B (rechtes Ende) gleichzeitig, in seinem System ist die Länge also durch $l' = OB$ gegeben. Diese Länge ist aber kürzer als l , da das Ereignis A' , das für Inertialsystem 2 von O denselben räumlichen Abstand hat wie A für Inertialsystem 1, außerhalb des Lineals liegt.

Wir betrachten nun die umgekehrte Situation: Das Lineal ist in System 2 in Ruhe, seine Anfangs- und Endpunkte bewegen sich also in System 1 mit einer bestimmten Geschwindigkeit (Abb. 3.2(rechts)). In System wird die Länge des Lineals beispielsweise bei den gleichzeitigen Ereignissen O und A' bestimmt, und der zugehörige räumliche Abstand ist $l = OA'$. In Inertialsystem 1 wird der Abstand bei den gleichzeitigen Ereignissen O und B' gemessen, und deren Abstand ist offensichtlich kleiner als l .

In beiden Fällen finden wir somit, dass die Länge des Lineals, gemessen von einem bewegten System aus, immer kleiner ist als seine Länge in seinem eigenen Ruhesystem.

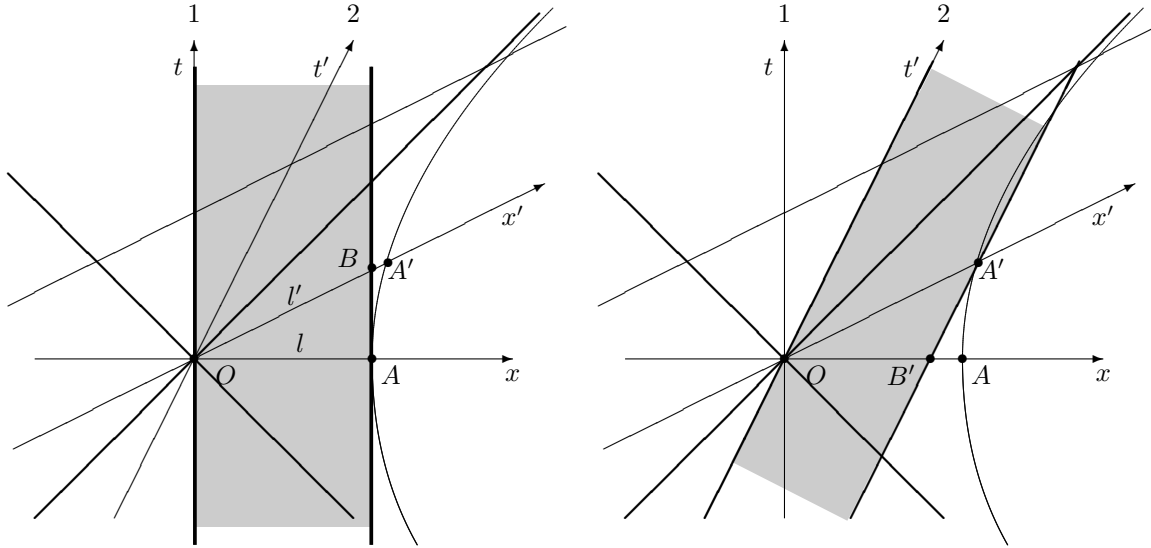


Abbildung 3.2: Das von einem Lineal überstrichene Raumzeitgebiet (grau unterlegt) erscheint in den verschiedenen Inertialsystemen unterschiedlich breit. (links) Für den bewegten Beobachter 2 scheint das in Inertialsystem 1 ruhende Lineal kürzer. (rechts) Umgekehrt erscheint ein bewegtes Lineal für den ruhenden Beobachter kürzer als für einen Beobachter, der sich mit dem Lineal bewegt.

3.3 Doppler-Effekte

Der Doppler-Effekt ist schon aus der nicht-relativistischen Mechanik bekannt: Ein Martinshorn klingt höher, wenn das Auto auf uns zukommt und tiefer, wenn es sich von uns entfernt. Durch die Bewegung des Autos werden die Wellenberge in Fahrtrichtung gestaucht – treffen daher in kürzeren Zeitabständen beim Empfänger ein und klingen höher – und entgegen der Fahrtrichtung gestreckt – sie treffen in größeren Zeitabständen beim Empfänger ein und klingen daher tiefer. In der klassischen Mechanik gibt es nur einen *longitudinalen* Doppler-Effekt, d.h. dieser Effekt tritt nur auf, wenn sich der radiale Abstand eines Senders relativ zu einem Empfänger ändert.

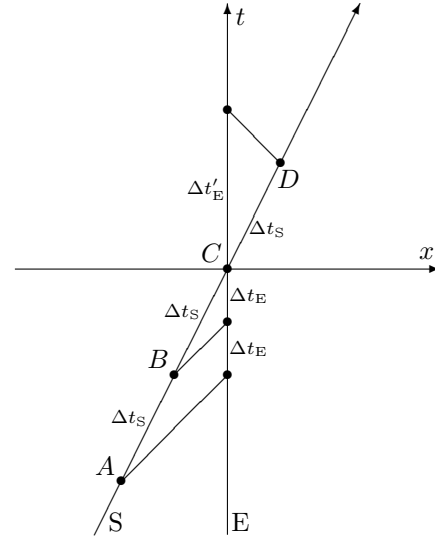
In der Relativitätstheorie kommen wegen der Zeitdilatationen bzw. der Lorentz-Kontraktionen in relativ zueinander bewegten Systemen noch weitere Einflüsse hinzu, insbesondere gibt es nun auch den so genannten *transversalen* Doppler-Effekt.

3.3.1 Der Doppler-Effekt in der klassischen Mechanik

Abbildung 3.3 zeigt eine nicht-relativistische Raumzeit, d.h., die Gleichzeitigkeitslinien sind für alle Beobachter parallel zur x -Achse und die zeitlichen Abstände zwischen zwei Ereignissen entsprechen den Projektionen auf die t -Achse. Beobachter E (der „Empfänger“) sei in Ruhe (bei Schallwellen bedeutet dies im Ruhesystem des Schallträgers), Beobachter S (der „Sender“) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf E zu, trifft ihn bei Ereignis C und bewegt sich ab dann von E weg. In gleichen Zeitabständen Δt_S sendet Beobachter S bei den Ereignissen A, B, C und D Signale an E. Solange sich der Abstand zwischen dem Sender S und dem Empfänger E mit konstanter Rate verkürzt, empfängt E die Signale in gleichen Zeitabständen Δt_E ; bewegt sich S von E weg, sind die Zeitabstände $\Delta t'_E$.

Δt_E ist kürzer als Δt_S und zwar um die Zeitdauer, die das Signal braucht, um eine Strecke zurückzulegen, die Beobachter S in der Zeit Δt_S zurücklegt. Um diese Strecke bewegt sich S in der

Abbildung 3.3: Doppler-Effekt in der nicht-relativistischen Mechanik. Die Gleichzeitigkeitslinien sind alle parallel zur x -Achse. In gleichen Zeitabständen Δt_S (bei den Ereignissen A, B, C, D) sendet Beobachter S Signale an Beobachter E. Solang sich S auf E zubewegt, empfängt E die Signale im Abstand Δt_E , bewegt sich S von E weg, ist der zeitliche Abstand zwischen dem Empfang zweier Signale $\Delta t'_E$. Offensichtlich ist Δt_E kürzer als Δt_S , aber $\Delta t'_E$ länger als Δt_S .



Zeit Δt_S auf E zu, und um diese Strecke ist der Weg für ein Signal kürzer als beim letzten Signal. Die Strecke ist $\Delta l = v\Delta t_S$, die Zeit, die das Signal für diese Strecke benötigt, ist $\Delta T = \Delta l/c$, also folgt:

$$\Delta t_E = \Delta t_S - \frac{v}{c} \Delta t_S = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_S. \quad (3.1)$$

Also ist die Frequenz ν_E , mit der E Signale empfängt, um den Faktor $(1 - \frac{v}{c})^{-1}$ größer als die Frequenz ν_S , mit der S die Signale abschickt:

$$\nu_E = \frac{1}{(1 - \frac{v}{c})} \nu_S. \quad (3.2)$$

Entsprechend ist die zugehörige Wellenlänge kürzer:

$$\lambda_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \lambda_S. \quad (3.3)$$

Wenn sich S von E entfernt, nimmt der Abstand zwischen den beiden Beobachtern zu und das spätere Signal braucht die Zeit ΔT länger als das vorhergehende, um von S zu E zu gelangen:

$$\Delta t'_E = \Delta t_S + \frac{v}{c} \Delta t_S = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \Delta t_S. \quad (3.4)$$

3.3.2 Der longitudinale relativistische Doppler-Effekt

Wie zuvor emittiert ein Sender S in regelmäßigen Zeitabständen $\Delta \tau_S$ Signale (vgl. Abb. 3.4). Diese Zeitabstände $\Delta \tau_S$ beziehen sich nun auf die Eigenzeit des Beobachters. Handelt es sich z.B. dabei um Licht einer bestimmten Frequenz ν_S , so bezieht sich diese Frequenz natürlich auf die Eigenzeit in dem System des Senders. Zwei Ereignisse im zeitlichen Abstand $\Delta \tau_S$ für den Sender haben jedoch im Inertialsystem E des Empfängers eine Zeitdifferenz Δt_S , die um einen Faktor γ größer ist als die Eigenzeit (der „ruhende“ Beobachter sieht die Zeit in einem relativ zu ihm bewegten System langsamer verstreichen):

$$\Delta t_S = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta \tau_S. \quad (3.5)$$

Abgesehen von diesem Unterschied bleibt die Argumentation dieselbe: In dem System E bewegt sich der Sender im Zeitraum Δt_S um die Strecke $v \Delta t_S$ und das Lichtsignal benötigt daher bei

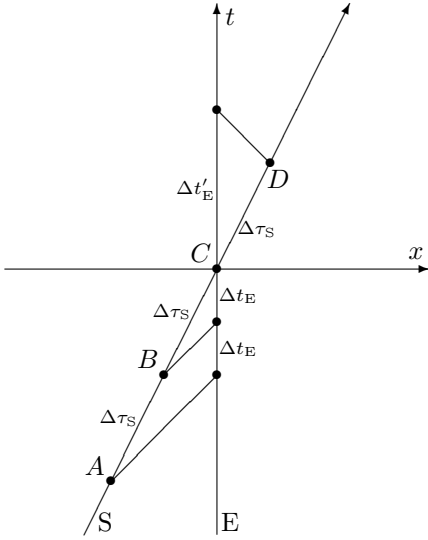


Abbildung 3.4: Longitudinaler Doppler-Effekt in der relativistischen Mechanik. Die Eigenzeiten $\Delta\tau_S$ im System des Senders sind nun um einen Faktor $1/\gamma = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ kleiner als der zeitliche Abstand Δt_S derselben Ereignisse im System von Beobachter E. Man beachte, dass die Beziehung der Ereignisse identisch ist, wie im nicht-relativistischen Fall. Geändert hat sich lediglich die Beziehung zwischen der Eigenzeit $\Delta\tau$ und der entsprechenden Zeit im System des Signalempfängers.

zwei aufeinanderfolgenden Signalen für das zweite Signal die Zeit $\Delta T = (\frac{v}{c}) \Delta t_S$ weniger. Insgesamt ergibt sich damit folgende Beziehung:

$$\Delta t_E = \left(1 - \frac{v}{c}\right) \Delta t_S = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta\tau_S = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \Delta\tau_S. \quad (3.6)$$

Die Vorzeichen für v drehen sich entsprechend um, wenn sich der Sender vom Empfänger entfernt.

Bewegt sich der Sender auf den Empfänger zu und handelt es sich bei dem ausgetauschten Signal um Licht (was wir beim relativistischen Effekt angenommen haben), so erscheint das Licht für den Empfänger mit einer höheren Frequenz als für den Sender, daher spricht man auch von einer *Blauverschiebung*. Entfernt sich der Sender vom Empfänger kommt es entsprechend zu einer *Rotverschiebung*.

3.3.3 Der transversale Doppler-Effekt

In der nicht-relativistischen Mechanik gibt es keinen transversalen Doppler-Effekt, da sich der Abstand zwischen Sender und Empfänger nicht ändert und die Zeitdifferenzen für beide Beobachter gleich sind. In der relativistischen Mechanik bleibt bei einer transversalen Bewegung (d.h. der Sender bewegt sich in einem gewissen Abstand senkrecht zum Abstandsvektor) der Abstand ebenfalls konstant, es bleibt aber noch der Faktor der Zeitdilatation. Dieser bewirkt, dass es nun auch zwischen Sender (S) und Empfänger (E) eine Frequenzverschiebung des Lichts gibt:

$$\Delta\nu_S = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta\nu_S. \quad (3.7)$$

3.4 „Einparken“

Die Längenkontraktion und die Zeitdilatation geben Anlass zu einer Vielfalt an Scheinparadoxa, die mit der speziellen Relativitätstheorie assoziiert werden. In fast allen Fällen erkennt man die Ursache der scheinbaren Widersprüche, wenn man sich vor Augen hält, dass relativ zueinander bewegte Beobachter unterschiedliche Ereignismengen als gleichzeitig empfinden.

Das folgende Beispiel bezieht sich auf die Lorentz-Kontraktion und wird in verschiedenen Varianten in der Literatur behandelt. Wir formulieren es hier als ein Problem des Einparkens.

Gegeben sei eine Garage der Länge L und ein Auto der Länge $l > L$. Offensichtlich passt das Auto nicht in die Garage, d.h., wenn die Frontstoßstange die Garagenhinterwand berührt, lässt sich das Garagentor nicht schließen. Wenn das Auto aber mit einer genügend großen Geschwindigkeit in die Garage fährt, ist seine Länge kürzer als die Länge der Garage und man sollte das Tor schließen können. Andererseits könnte man sich aber auch in das Inertialsystem des Fahrers versetzen, in dem das Auto in Ruhe ist und sich die Garage mit großer Geschwindigkeit auf das Auto zubewegt. Nun ist die Garage verkürzt, die Situation ist noch ungünstiger und das Tor sollte sich erst Recht nicht schließen lassen. Ob aber ein Garagentor geschlossen werden kann oder nicht ist eine physikalische Tatsache und kann nicht vom Inertialsystem eines Beobachters abhängen.

Was passiert im Ruhesystem der Garage, wenn das Auto mit hoher Geschwindigkeit hereinfährt? Tatsächlich ist das Auto im Augenblick der Einfahrt kürzer und passt in die Garage – das Garagentor kann geschlossen werden. Doch nun wird das Auto abgebremst und dehnt sich aus, dabei stößt es vorne und hinten gegen die Garagenwand bzw. das Garagentor und wird physikalisch gestaucht.

Wie erfährt der Autofahrer dieselbe Situation? Für ihn ist die Garage wesentlich kürzer als das Auto. Wenn er mit seiner Frontstange gegen die Garagenwand fährt, ist der hintere Teil des Wagens noch weit außerhalb der Garage. Doch wenn der Wagen bezüglich des Systems der Garage vorne und hinten gleichzeitig abgebremst wird, wird er im Ruhesystem des Autofahrers von vorne abgebremst. D.h., der Wagen fährt vorne gegen die Garagenwand und wird dadurch gestaucht, während der hintere Teil des Wagens sich weiter nach vorne bewegt und schließlich ebenfalls ganz in der Garage ist, sodass das Tor geschlossen werden kann. Erst dann erreicht die Stauchung des Wagens auch den hinteren Teil.

In beiden Fällen fährt der Wagen in die Garage und das Tor kann geschlossen werden, aber der Wagen wurde durch das Abbremsen bzw. die Garagenwände derart gestaucht, dass er nicht mehr seine ursprüngliche Länge hat.

Eine wichtige Erkenntnis können wir aus diesem Beispiel festhalten: Es gibt keinen idealen starren Körper! Darunter würde man einen Körper verstehen, der jede Beeinflussung (z.B. Verschiebung) an seinem einen Ende instantan auf den gesamten Körper überträgt. Aufgrund der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht kann sich auch in einem Körper kein Signal mit einer größeren Geschwindigkeit ausbreiten. Ein Stoß auf der einen Seite führt notwendigerweise zu einer Stoßwelle, die sich nicht schneller als mit Lichtgeschwindigkeit durch den Körper ausbreitet und daher jede Einwirkung an einem Ende erst verzögert überträgt.

3.5 Das Zwillingsparadoxon

Das zweite Paradoxon, das hier behandelt werden soll, ist das so genannte Zwillingsparadoxon. Gemeint ist damit das Folgende: Wenn sich zwei Zwillinge (die nach unserer Vorstellung immer dasselbe Alter haben) treffen, und einer von beiden auf der Erde verbleibt während der andere mit großer Geschwindigkeit in den Weltraum hinausfliegt und nach vielen Jahren zurückkommt, dann haben die beiden nicht mehr dasselbe biologische Alter. Der auf der Erde verbliebene Zwilling ist älter als derjenige, der durch den Weltraum gereist ist.

Betrachten wir dazu die Weltlinien der beiden Zwillinge. Bis Ereignis $A_0 = B_0$ haben beide dieselbe Weltlinie. Dann kommt es zur Trennung. Während Zwilling 1 seinen bisherigen Bewegungszustand beibehält (und die Ereignisse A_1, A_2, A_3 durchläuft), bewegt sich Zwilling 2 sehr rasch zu Ereignis B_2 , dort bremst er ab und beschleunigt in die umgekehrte Richtung, fliegt also wieder auf seinen Bruder zu. Bei $A_4 = B_4$ treffen sich die beiden Zwillinge wieder.

Die Zeitdauern lassen sich leicht berechnen: Die Zeitdauer für Zwilling 1 von A_0 bis A_1 ist

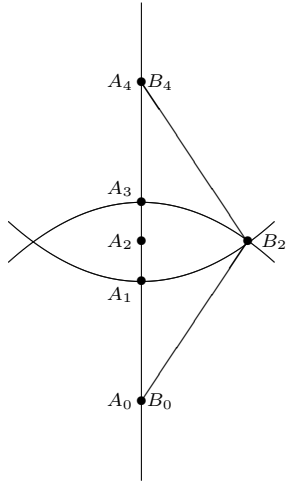


Abbildung 3.5: Zum Zwillingsparadoxon: Die Weltlinie von Zwilling 1 verläuft entlang der Ereignisse $A_0 = B_0$, A_1, A_2, A_3 , $A_4 = B_4$, die von Zwilling 2 entlang B_0, B_2, B_4 . Die Weltlinie von Zwilling 1 ist länger als die von Zwilling 2, d.h., Zwilling 1 ist bei der Wiedervereinigung in Ereignis $A_4 = B_4$ älter als sein Bruder. Bei B_2 hat Zwilling 2 dasselbe Alter wie Zwilling 1 bei A_1 . Insgesamt ist Zwilling 1 um die Zeitspanne zwischen A_1 und A_3 älter.

genauso lang wie die für Zwilling 2 von A_0 bis B_2 . Entsprechend ist die Zeitdauer A_3A_4 dieselbe wie die von Ereignis B_2 bis B_4 für Zwilling 2. Insgesamt hat die Weltlinie von Zwilling 2 von Ereignis B_0 bis B_4 also dieselbe Länge wie die Summe der beiden Abschnitte A_0A_1 und A_3A_4 für Zwilling 1. Die Zwischenzeit – von A_1 bis A_3 – ist die Zeitdauer, um die Zwilling 1 älter ist.

Man könnte auf die Idee kommen, dass das unterschiedliche Alter der beiden Zwillinge darauf zurückzuführen ist, dass Zwilling 2 mehrfach beschleunigt wurde, insbesondere auch bei Ereignis B_2 . Um zu verdeutlichen, dass dieses Argument nicht richtig ist, betrachten wir Abb. 3.6. Die Weltlinien der drei Drillinge (der erste bleibt in Ruhe, der zweite macht eine kurze Reise über Ereignis C_2 , der dritte macht die große Reise über B_2) sind unterschiedlich lang. Drilling 1 ist am meisten gealtert, Drilling 2 etwas weniger und Drilling 3 noch weniger. Insbesondere haben Drilling 2 und Drilling 3 dieselben Beschleunigungsphasen erlebt, sind aber trotzdem bei $A_4 = B_4$ unterschiedlich alt. Es handelt sich um einen Effekt der auf der Geometrie der Minkowski-Raumzeit beruht und nicht auf unterschiedlichen Beschleunigungsphasen.

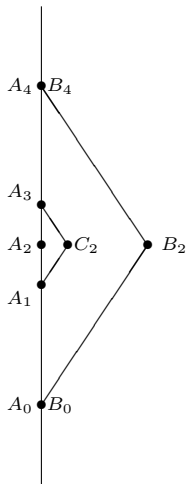


Abbildung 3.6: Erweiterung des Zwillingsparadoxons für Drillinge. Die drei Weltlinien – $(A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4)$ für Drilling 1, $(A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow C_2 \rightarrow A_3 \rightarrow A_4)$ für Drilling 2 und $(B_0 \rightarrow B_2 \rightarrow B_4)$ für Drilling 3 – sind unterschiedlich lang. Insbesondere ist die Weltlinie von Drilling 3 kürzer als die von Drilling 2, obwohl beide dieselben Beschleunigungsphasen erlebt haben.

3.6 Die Eigenzeit

Wie wir gesehen haben, können ganz allgemein Uhren, die entlang unterschiedlicher Weltlinien transportiert wurden, unterschiedliche Zeitdauern anzeigen, selbst wenn die Weltlinien zwischen denselben Ereignissen verlaufen. Im letzten Abschnitt hat es sich um stückweise gerade Weltlinien gehandelt, bei denen wir zur Bestimmen der Zeitdauer die Anteile der einzelnen Teilstücke addiert haben. Dies können wir für stetige Weltlinien verallgemeinern.

Für zwei zeitartige Ereignisse B und A (B zeitlich nach A), mit den Differenzkoordinaten $\Delta t = t_B - t_A$ und $\Delta \vec{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$ in einem beliebigen Inertialsystem, definieren wir die *Eigenzeit* τ_{AB} durch

$$\tau_{AB}^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta \vec{x})^2. \quad (3.8)$$

τ_{AB} ist die Zeitdifferenz zwischen den beiden Ereignissen, die von einer Uhr angezeigt wird, die mit konstanter Geschwindigkeit (also in einem Inertialsystem) von Ereignis A zu Ereignis B transportiert wird. In dem Inertialsystem dieser Uhr finden beide Ereignisse im räumlichen Koordinatenursprung statt. Für zwei Ereignisse ist τ eine Invariante und es spielt keine Rolle, in welchem Inertialsystem τ nach Gl. 3.8 berechnet wird.

Handelt es sich um infinitesimal benachbarte Ereignisse, deren Raum- und Zeitkoordinaten sich in einem beliebigen Inertialsystem um $d\vec{x}$ und dt unterscheiden, erhalten wir

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\vec{x}}{dt} \right)^2} dt = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (3.9)$$

als die Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen. Wir können nun einer beliebigen Weltlinie γ (die natürlich an jedem ihrer Punkte eine zeitartige Tangente haben muss) zwischen zwei Ereignissen A und B eine Eigenzeit zuordnen:

$$\tau(\gamma) = \int_{t_B; \gamma}^{t_A} \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt. \quad (3.10)$$

Diese Zeit wird von einer Uhr angezeigt, die entlang der Weltlinie γ von A nach B transportiert wird. Wie schon erwähnt spielt es dabei keine Rolle, in welchem Inertialsystem die momentane Geschwindigkeit $v(t)$ gemessen und das Integral ausgewertet wird. Die Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen entlang eines Weges γ ist am größten, wenn es sich bei γ um eine gerade Verbindungslinie handelt. Wir werden später in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht mehr von Geraden sprechen können, wohl aber von geodätischen Verbindungswegen. Diese zeichnen sich durch eine maximale Eigenzeit aus.

3.7 Der kanonische Formalismus

In der klassischen, Newton'schen Mechanik hat sich der Lagrange-Formalismus als sehr nützlich erwiesen. Auch in der speziellen Relativitätstheorie lassen sich eine Lagrange-Funktion und eine zugehörige Wirkung angeben, aus der nicht nur die Bewegungsgleichungen sondern auch die kanonische konjugierten Variablen folgen.

Die Wirkung ordnet jeder Trajektorie $t \mapsto \vec{x}(t)$ eine Zahl zu. Ein großer Vorteil des Lagrange-Formalismus ist, dass diese Zahl nicht von der Wahl der Koordinaten abhängt. Daher soll diese Zahl auch für die relativistische Wirkung eine Invariante sein. Statt diese Invariante abzuleiten, geben wir die Lagrange-Funktion und ihre Wirkung einfach an und zeigen, dass sie im klassischen Grenzfall mit den bekannten Größen übereinstimmen, aber relativistisch invariant sind. (Durch diese beiden Forderungen sind die Größen im Allgemeinen bereits festgelegt.)

Als Lagrange-Funktion eines freien Teilchens definieren wir für ein beliebiges Inertialsystem mit Koordinaten (t, \vec{x}) (und der Geschwindigkeit $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$):

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}, \quad (3.11)$$

und die zugehörige Wirkung ist

$$S = -mc^2 \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}} dt. \quad (3.12)$$

Ausgedrückt durch die Eigenzeit entlang einer Bahnkurve ergibt sich für die Wirkung:

$$S = -mc^2 \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau. \quad (3.13)$$

Zu integrieren ist jeweils entlang der Bahnkurve. Aus der letzteren Darstellung wird die Invarianz der Wirkung offensichtlich.

Entwickeln wir in einem festen Inertialsystem die Quadratwurzel, so erhalten wir für die Lagrange-Funktion in führender Ordnung:

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2} + \dots \right) \approx -mc^2 + \frac{1}{2} m \vec{v}(t)^2, \quad (3.14)$$

also bis auf den konstanten Term $-mc^2$ (der, wie wir gleich sehen werden, der Ruheenergie eines Teilchens entspricht) die klassische Wirkung.

Die zu \vec{x} kanonisch konjugierte Variable \vec{p} ist definiert als

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial v_i(t)} = \frac{mv_i(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}(t) = \frac{m\vec{v}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}(t)^2}{c^2}}}. \quad (3.15)$$

Entsprechend ist die Energie (die eine Erhaltungsgröße ist, da L nicht explizit von der Zeit abhängt) definiert als:

$$E = \vec{v} \cdot \vec{p} - L(\vec{v}), \quad (3.16)$$

woraus wir erhalten:

$$E = \frac{m\vec{v}(t)^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2} \right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}. \quad (3.17)$$

In einem kanonischen Formalismus sollte die Energie allerdings als Funktion von Ort und kanonisch konjugiertem Impuls aufgefasst werden. Wir lösen daher Gl. 3.15 nach \vec{v}^2 auf und erhalten schließlich:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}. \quad (3.18)$$

3.8 Die Äquivalenz von Masse und Energie

Eine weitere Folgerung aus der speziellen Relativitätstheorie ist nicht nur besonders bekannt geworden sondern auch von fundamentaler Bedeutung, nämlich die Äquivalenz von Masse und Energie.

Allgemein schreibt man die Formel

$$E = mc^2 \quad (3.19)$$

Einstein zu, der sie 1905 in der Arbeit *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* ([8]) für den Sonderfall eines strahlenden Körpers hergeleitet und ihre allgemeine Richtigkeit

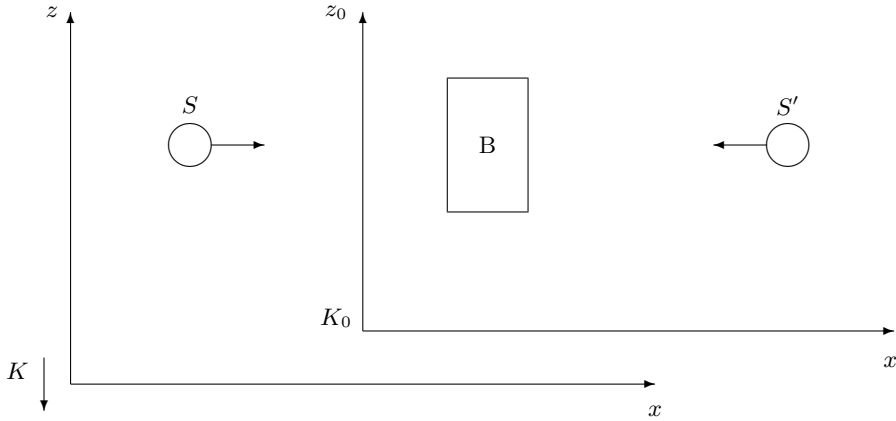
vermutet hatte. Abgesehen davon, daß die Herleitung dieser Formel als falsch gilt (siehe [31]; Farbtafel XXIV, Zitat aus Jammer), findet man Überlegungen über eine Trägheit von Energie auch schon bei Poincaré 1900.

Die folgende „Elementare Ableitung der Äquivalenz von Masse und Energie“ stammt ebenfalls von Einstein aus dem Jahre 1946, und ist in seinem Buch *Aus meinen späten Jahren* ([9], S. 121) entnommen.

Die vorstehende Ableitung des Äquivalenzgesetzes, die bisher nicht publiziert ist, hat zwei Vorteile. Sie bedient sich zwar des speziellen Relativitätsprinzips, setzt aber die technisch-formalen Hilfsmittel der Theorie nicht voraus, sondern bedient sich nur dreier vorbekannter Gesetzmäßigkeiten:

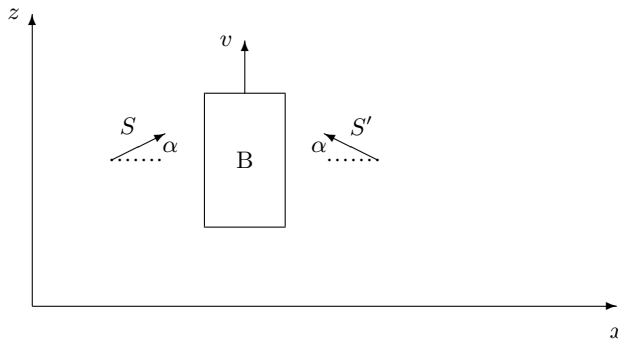
1. des Satzes von der Erhaltung des Impulses,
2. des Ausdrucks für den Strahlungsdruck beziehungsweise für den Impuls eines in bestimmter Richtung sich ausbreitenden Strahlungs-Komplexes,
3. der wohlbekannte Ausdruck für die Aberration des Lichts (Einfluß der Bewegung der Erde auf den scheinbaren Ort der Fixsterne (Bradley)).

Wir fassen nun folgendes System ins Auge. Bezüglich eines Koordinatensystems K_0 anhand



schwebe der Körper B frei im Raum. Zwei Strahlungskomplexe S, S' , je von der Energie $\frac{E}{2}$ breiten sich längs der positiven bzw. negativen x_0 -Richtung aus und werden dann von B absorbiert. Bei der Absorption wächst die Energie von B um E . Der Körper B bleibt bei diesem Prozess aus Symmetrie-Gründen in Ruhe.

Nun betrachten wir diesen selben Prozess von einem System K aus, welches sich gegenüber K_0 mit der konstanten Geschwindigkeit v in der negativen z_0 -Richtung bewegt. In bezug auf K ist dann die Beschreibung des Vorganges folgende



Der Körper B bewegt sich in der positiven z -Richtung mit der Geschwindigkeit v . Die beiden Lichtkomplexe haben in bezug auf K eine Fortpflanzungsrichtung, welche einen Winkel α mit der x -Achse bildet. Das Aberrationsgesetz besagt, dass in erster Näherung $\alpha = \frac{v}{c}$ ist, wobei c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Aus der Betrachtung in bezug auf K_0 wissen wir, dass die Geschwindigkeit v von B durch die Absorption von S und S' keine Änderung erfährt.

Nun wenden wir auf den Prozess in bezug auf K das Gesetz von der Erhaltung des Impulses in bezug auf die Richtung z des betrachteten Gesamtsystems an.

I. *Vor der Absorption* sei M die Masse von B ; Mv ist dann der Ausdruck des Impulses von B (gemäß der klassischen Mechanik). Jeder der Strahlungskomplexe hat die Energie $\frac{E}{2}$ und deshalb gemäß einer wohlbekannten Folgerung aus Maxwells Theorie den Impuls

$$\frac{E}{2c}.$$

Dies ist streng genommen zunächst der Impuls von S in bezug auf K_0 . Wenn aber v klein ist gegen c , so muss der Impuls in bezug auf K bis auf die Größe von zweiter Ordnung $\frac{v^2}{c^2}$ gegen 1) dieselbe sein. Von diesem Impuls fällt in die z -Richtung die Komponente $\frac{E}{2c} \sin \alpha$, sind aber genügend genau (bis auf Größen höherer Ordnung) $\frac{E}{2c} \alpha$ oder $\frac{E}{2} \cdot \frac{v}{c^2}$. S und S' zusammen haben also in der z -Richtung den Impuls $E \frac{v}{c^2}$. Der Gesamtimpuls des Systems vor der Absorption ist also

$$Mv + \frac{E}{c^2} v.$$

II. *Nach der Absorption* sei M' die Masse von B . Wir antizipieren hier die Möglichkeit, dass die Masse bei der Aufnahme der Energie E eine Zunahme erfahren könnte (dies ist nötig, damit das Endresultat unserer Überlegungen widerspruchsfrei sei). Der Impuls des Systems nach der Absorption ist dann

$$M'v.$$

Nun setzen wir den Satz von der Erhaltung des Impulses als richtig voraus und wenden ihn in bezug auf die z -Richtung an. Dies ergibt die Gleichung

$$Mv + \frac{E}{c^2} v = M'v$$

oder

$$M' - M = \frac{E}{c^2}.$$

Diese Gleichung drückt den Satz der Äquivalenz von Energie und Masse aus. Der Energiezuwachs E ist mit dem Massenzuwachs $\frac{E}{c^2}$ verbunden. Da die Energie ihrer üblichen Definition gemäß eine additive Konstante freilässt, so können wir nach der Wahl der letzteren stattdessen auch kürzer schreiben

$$E = Mc^2.$$

Kapitel 4

SRT – Beschleunigte Systeme

Das Äquivalenzprinzip besagt im Wesentlichen, dass wir in einem lokalen Bezugssystem nicht zwischen einer konstanten Beschleunigung und einem konstanten Gravitationsfeld unterscheiden können. Wir werden dieses Prinzip in den nächsten Kapiteln ausgiebig nutzen, um den Einfluss von Gravitationsfeldern zu untersuchen und damit ersten Schritte zur Allgemeinen Relativitätstheorie zu gehen.

In diesem Kapitel geht es konkret um einen konstant beschleunigten Beobachter in der speziellen Relativitätstheorie. Viele der Effekte lassen sich dann über das Äquivalenzprinzip auf die allgemeine Relativitätstheorie übertragen.

4.1 Die konstante Beschleunigung

Schon allein die Frage, was genau unter einer konstanten Beschleunigung zu verstehen ist, bedarf in der speziellen Relativitätstheorie einer eingehenderen Analyse. Wir können an einem ausgedehnten Körper nicht einfach eine Kraft angreifen lassen, da kein Körper wirklich starr ist (dies würde, wie wir in Abschnitt 3.4 gesehen haben, der speziellen Relativitätstheorie widersprechen) und sich die Wirkung jeder angreifenden Kraft erst über eine Stoßwelle auf den Körper ausdehnt. Der Einfachheit halber betrachten wir daher zunächst nur einen idealisierten Massepunkt, der konstant beschleunigt werden soll. Doch auch hier ist das Konzept einer konstanten Beschleunigung nicht trivial.

Einerseits befindet sich der beschleunigte Gegenstand zu jedem Zeitpunkt in einem anderen Inertialsystem, andererseits hängt die naheliegende Antwort – eine konstante Beschleunigung bedeutet einen pro Zeiteinheit konstanten Geschwindigkeitszuwachs – vom Bezugssystem ab. Eine invariante Definition des Konzepts einer konstanten Beschleunigung, die wir auch in diesem Kapitel verwenden werden, ist folgende: *Im jeweiligen momentanen Inertialsystem des beschleunigten Massepunktes ist die Beschleunigung konstant.* Damit ist gemeint, dass es in jedem Augenblick ein Inertialsystem gibt, das dieselbe Geschwindigkeit wie der beschleunigte Beobachter hat (natürlich ändert sich dieses Inertialsystem ständig). Von diesem „momentanen Inertialsystem“ aus betrachtet, erfährt der beschleunigte Beobachter eine konstante Beschleunigung.

In diesem Abschnitt betrachten die Bewegung eines konstant beschleunigten Massepunktes von einem Inertialsystem aus, in dem der Massepunkt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ruht. Zunächst leiten wir die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit – gemessen in diesem Inertialsystem – her, anschließend lösen wir diese Gleichung und bestimmen die Bahnkurve $x(t)$ für diesen Massepunkt.

4.1.1 Herleitung der Differentialgleichung für die Geschwindigkeit

Die Differentialgleichung für die Geschwindigkeit im Inertialsystem des zu Beginn ruhenden Teilchens lautet:

$$\frac{dv(t)}{dt} = g \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right)^{3/2}. \quad (4.1)$$

Diese Gleichung werden wir im nächsten Abschnitt lösen, doch zunächst wollen wir sie auf zwei verschiedene Weisen ableiten.

In dem Ruhesystem des Massepunktes zu einem bestimmten Zeitpunkt (t im Inertialsystem des anfänglichen Ruhezustands, τ im Bezugssystem des beschleunigten Massepunktes) soll eine Kraft wirken, die ihn in der infinitesimalen Eigenzeit $d\tau$ immer auf dieselbe infinitesimale Geschwindigkeit dv beschleunigt:

$$dv = g d\tau, \quad (4.2)$$

wobei g ein Maß für die konstante Beschleunigung ist.

Im anfänglichen Ruhesystem, d.h. bezüglich der Zeit t , nimmt die Geschwindigkeit also zu einem Zeitpunkt t um

$$dv = g \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (4.3)$$

zu.

Hat für den ruhenden Beobachter das beschleunigte System zum Zeitpunkt t die Geschwindigkeit $v(t)$, so hat es zum Zeitpunkt $t + dt$ nach dem Geschwindigkeitsadditionstheorem (vgl. Gl. 1.21) die Geschwindigkeit:

$$v(t + dt) = \frac{v(t) + dv}{1 + \frac{v(t) dv}{c^2}} \approx v(t) + \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right) dv + \dots \quad (4.4)$$

$$= v(t) + g \left(1 - \frac{v(t)^2}{c^2} \right)^{3/2} dt + \dots \quad (4.5)$$

Daraus erhalten wir unmittelbar Gl. 4.1.

Die zweite Herleitung der Differentialgleichung geht von der allgemeinen Beziehung für das Transformationsgesetz der Beschleunigung zwischen zwei Bezugssystemen aus. Wenn die Beschleunigung in dieselbe Richtung wie die Transformation erfolgt, gilt:

$$a' = \gamma^3 a. \quad (4.6)$$

Mit $a' = g$ und $a = \frac{dv}{dt}$ folgt obige Differentialgleichung.

4.1.2 Bestimmung der Bahnkurve

Wir können die Differentialgleichung 4.1 beispielsweise durch Trennung der Variablen lösen:

$$\frac{dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} = g dt. \quad (4.7)$$

Da

$$\frac{d}{dv} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \frac{1}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}} \quad (4.8)$$

und wir für $t_0 = 0$ die Anfangsbedingung $v = 0$ gesetzt haben, erhalten wir

$$\frac{v(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} = gt. \quad (4.9)$$

Diese Gleichung können wir nach $v(t)$ auflösen und finden:

$$v(t) = \frac{gt}{\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}}} . \quad (4.10)$$

Für $t \ll c/g$ nimmt $v(t)$ offensichtlich linear mit t zu, wie es in der nicht-relativistischen Mechanik für die konstante Beschleunigung gelten muss, für $t \gg c/g$ nähert sich $v(t)$ der Lichtgeschwindigkeit c als der Grenzgeschwindigkeit.¹

Wir können diese Gleichung nochmals integrieren und erhalten die Trajektorie $x(t)$:

$$x(t) = \int_0^t \frac{gt'}{\sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}}} dt' = \frac{c^2}{g} \sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}} \Big|_0^t \quad (4.11)$$

$$= \frac{c^2}{g} \left(\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}} - 1 \right) . \quad (4.12)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir die Lösungen für $v(t)$ und $x(t)$ etwas genauer untersuchen. Zum Abschluss dieses Abschnitts möchte ich noch eine kurze Anmerkung zu der relativistischen Bewegungsgleichung machen:

Multiplizieren wir Gleichung 4.9 auf beiden Seiten mit der Konstanten m (der Ruhemasse des Teilchens) und bilden die Ableitung nach t , so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv(t)}{\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}}} \right) = mg , \quad (4.13)$$

was wir mit dem relativistischen Impuls

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.14)$$

auch in der Form

$$\frac{dp}{dt} = mg = F \quad (4.15)$$

schreiben können. Dies ist die relativistische Bewegungsgleichung (auch für eine allgemeine Kraft F) und aus ihr hätten wir die Bewegungsgleichung für die konstante Beschleunigung durch Umkehrung der obigen Schritte sofort ableiten können. Es mag allerdings zunächst überraschen, dass auf der linken Seite der Gleichung die Ableitung nach t und nicht nach der Eigenzeit τ im beschleunigten System steht. Es sieht daher zunächst so aus, als ob diese Gleichung nicht invariant sei. Doch die relativistische Kraft ist eigentlich nicht F sondern γF und die invariante Gleichung lautet

$$\frac{dp}{d\tau} = \gamma F . \quad (4.16)$$

Da

$$\frac{dp}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{dp}{dt} \gamma , \quad (4.17)$$

hebt sich der γ -Faktor auf beiden Seiten weg.

¹Für die Erdbeschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ entspricht die Zeitskala $c/g \approx 354$ Tage bzw. fast einem Jahr. Ab dieser zeitlichen Größenordnung lohnt sich eine Weltraumreise mit konstanter Beschleunigung.

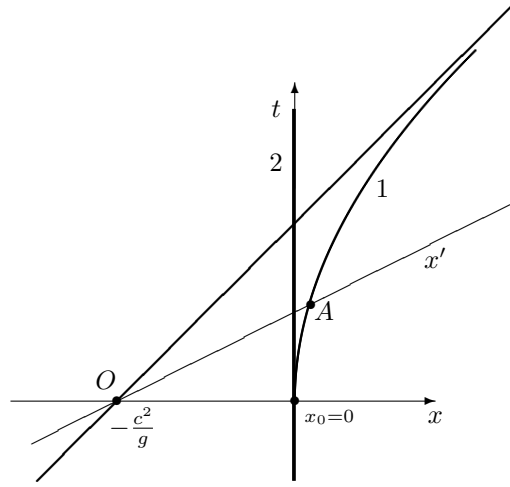
4.1.3 Erste Analyse der konstant beschleunigten Bewegung

Wir untersuchen zunächst die Trajektorie aus der Sichtweise des ruhenden Beobachters (im Ruhesystem der Ausgangslage des beschleunigten Systems). Anschließend betrachten wir die Situation aus der Sichtweise eines Beobachters in dem konstant beschleunigten System (beispielsweise einer konstant beschleunigten Rakete).

Die Trajektorie der konstanten relativistischen Beschleunigung im Inertialsystem der anfänglichen Ruhelage beschreibt einen Hyperbelast (siehe Abb. 4.1). Dies sieht man leicht, wenn man Gl. 4.12 in folgende Form bringt:

$$\left(x(t) + \frac{c^2}{g}\right)^2 - \frac{(gt)^2}{c^2} = 1. \quad (4.18)$$

Abbildung 4.1: Die konstante Beschleunigung. Die Trajektorie eines konstant beschleunigten Massepunktes (1) beschreibt im Inertialsystem eines ruhenden Beobachters (2) eine Hyperbel. Bei dem Ereignis O mit den Koordinaten $x = -\frac{c^2}{g}$ und $t_0 = 0$ schneiden sich alle Gleichzeitigkeitslinien der Trajektorie einschließlich der Weltlinie des Lichtstrahls, dem sich die Trajektorie asymptotisch nähert.



Für kleine Werte von t (genauer $t \ll \frac{c}{g}$) beschreibt die Trajektorie die zu erwartende Parabel der Newton'schen Mechanik. Dazu entwickeln wir die Lösung nach kleinen Werten von $(tg)/c$:

$$x(t) \approx \frac{c^2}{g} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{g^2 t^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{g^4 t^4}{c^4} + \dots - 1\right) = \frac{1}{2} g t^2 + \dots \quad (4.19)$$

Für sehr große Werte von t nähert sich die Trajektorie immer mehr dem Lichtstrahl $x(t) = ct$. Dieses Verhalten zeigt sich auch in der Geschwindigkeit (Gl. 4.10), die für kleine Werte von t linear zunimmt, $v(t) \approx gt + \dots$, und sich für große Werte von t der Lichtgeschwindigkeit nähert.

Interessant ist, dass sich alle Gleichzeitigkeitslinien zu der Trajektorie in einem Ereignis O bei $t = 0$ und $x = -\frac{c^2}{g}$ schneiden (in Abb. 4.1 ist die Gleichzeitigkeitslinie zum Ereignis A angegeben). Dies ist gleichzeitig das Ereignis, bei dem ein ausgesandter Lichtstrahl die Asymptote der Hyperbel bildet. Der Abstand, gemessen in einem augenblicklichen Inertialsystem, zwischen einem Punkt auf der Hyperbelbahn (z.B. dem Ereignis A) und diesem Ereignis O bleibt konstant.

Wir betrachten nun dieselbe Situation, allerdings aus der Sichtweise eines Beobachters in dem konstant beschleunigten System (man denke beispielsweise an eine Rakete, die konstant beschleunigt wird). Zunächst müssen wir die Zeit t in die Eigenzeit τ des beschleunigten Beobachters umrechnen. Dazu verwenden wir die allgemeine Beziehung

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} dt \quad (4.20)$$

und nutzen nun aus, dass

$$\sqrt{1 - \frac{v(t)^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(gt)^2}{c^2}}}. \quad (4.21)$$

Diese Beziehung folgt unmittelbar aus den beiden Gleichungen 4.9 und 4.10. Wir erhalten somit

$$\tau = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(gt')^2}{c^2}}} dt' = \frac{c}{g} \sinh^{-1} \frac{gt}{c} \quad (4.22)$$

oder, aufgelöst nach t :

$$t = \frac{c}{g} \sinh \frac{g\tau}{c}. \quad (4.23)$$

Zwischen der verstrichenen Zeit t eines Beobachters im anfänglichen Ruhesystem (beispielsweise auf der Erde) und der Zeit τ für einen Beobachter in dem konstant beschleunigten System besteht also für große Zeiten eine exponentielle Beziehung. Für die (relativ zum Bezugssystem der Erde) zurückgelegte Strecke als Funktion der Eigenzeit einer Person in dem beschleunigten System erhalten wir

$$x(\tau) = \frac{c^2}{g} \left(\cosh \frac{g\tau}{c} - 1 \right). \quad (4.24)$$

Diese Beziehung scheint zunächst den Möglichkeiten eines bemannten Raumflugs sehr entgegen zu kommen: Für die Reise zum rund 2 Millionen Lichtjahre entfernten Andromeda-Nebel (der nächsten großen Galaxie außerhalb der Milchstraße) würden bei einer konstanten Beschleunigung von $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ (der Erdbeschleunigung) für einen Astronauten in seinem Bezugssystem nur rund 28 Jahre vergehen.²

Dies widerspricht nicht der Relativitätstheorie: Die 2 Millionen Lichtjahre erfahren für den Beobachter in der Rakete eine (Lorentz-)Kontraktion auf weniger als 28 Lichtjahre. Das bedeutet aber, dieser Beobachter „sieht“ den Andromeda-Nebel mit Überlichtgeschwindigkeit auf sich zukommen.

Einen ähnlich erstaunlichen Effekt sieht der Beobachter auch, wenn er zurückblickt. Das Ereignis O bei $(t = 0, x = -\frac{c^2}{g})$ bleibt für immer auf seiner Gleichzeitigkeitslinie. Es wird zu einem Augenblick, der nie vergeht. Auch der Abstand zwischen ihm und diesem Ereignis bleibt in seinem Bezugssystem immer konstant. Allerdings sollte ich nochmals betonen, dass sich diese Effekte auf ein augenblickliches globales Inertialsystem beziehen, und dies lässt sich für einen beschleunigten Beobachter nicht operational realisieren.

In Abschnitt 4.3 kommen wir nochmals auf den konstant beschleunigten Beobachter zu sprechen und beschreiben dort, was der Beobachter wirklich „sieht“.

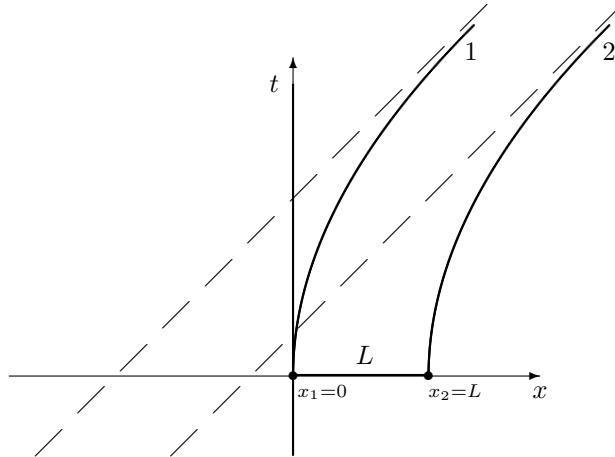
4.2 Zwei konstant beschleunigte Systeme

Die bekannte Schriftensammlung „Speakable and unspeakable in quantum mechanics“ von John Bell ([4], Kapitel 9) enthält auch einen Artikel, der nichts mit Quantentheorie zu tun hat. Er trägt den Titel „How to teach special relativity“, und hier plädiert Bell dafür, Studierende der Physik auch mit der „alten“ Version der speziellen Relativitätstheorie vertraut zu machen, wie sie von Larmor, Lorentz und Poincaré vertreten wurde und wie ich sie in Kapitel 2 angedeutet habe. Er beschreibt dort eine einfache Situation aus der speziellen Relativitätstheorie, die seiner Ansicht nach in der „alten“ Sichtweise leichter nachvollzogen werden kann als in der Form, in der die Relativitätstheorie heute meist gelehrt wird.

Zwei gleichartige Raketen befinden sich zunächst in Ruhe und haben einen Abstand L (in diesem Ruhesystem haben sie die Koordinaten $x_1 = 0$ und $x_2 = L$). Sie seien durch ein Seil der Länge L miteinander verbunden. Ab dem Zeitpunkt $t = 0$ erfahren beide Raketen dieselbe konstante

²Auf der Internetseite von John Baez „The Relativistic Rocket“ math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/rocket.html findet man eine sehr schöne Beschreibung der seltsamen Effekte einer konstant beschleunigten relativistischen Rakete.

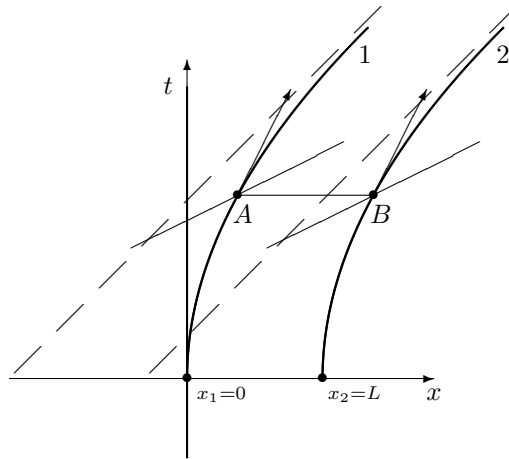
Abbildung 4.2: Zwei Raketen (1 und 2) erfahren dieselbe konstante Beschleunigung. Sie seien durch ein Seil miteinander verbunden, dessen Länge gerade dem anfänglichen Abstand L der Raketen entspricht. Wird das Seil reißen oder nicht?



Beschleunigung g in Richtung ihres Abstandsvektors (also die x -Richtung). Ihre Weltlinien sind somit Hyperbeln, deren Abstand im anfänglichen Ruhesystem (mit den Koordinaten (t, x)) konstant bleibt (vgl. Abb. 4.2).

Bell stellt nun die Frage, ob das Seil zwischen den beiden Raketen irgendwann reißt. Ein solches Ereignis ist eine physikalische Tatsache und hängt daher nicht vom Bezugssystem ab. Anscheinend hat er diese Frage in den 70er Jahren mehreren Physikern am CERN gestellt und sehr unterschiedliche Antworten erhalten (viele scheinen behauptet zu haben, das Seil reiße nicht). Tatsächlich reißt das Seil. Wir betrachten nun diese Situation aus allen drei Bezugssystemen – dem Inertialsystem, in dem die Raketen anfänglich in Ruhe sind, sowie den beiden Bezugssystemen der Raketen.

Abbildung 4.3: Die beiden Ereignisse A und B sind im ruhenden Inertialsystem gleichzeitig. Auch die Eigenzeiten der beiden Raketen sind bei diesen Ereignissen gleich. Der räumliche Abstand der Ereignisse ist L .



Wir beginnen unsere Betrachtungen im ruhenden Inertialsystem mit den Koordinaten (t, x) . Zwei in diesem System gleichzeitige Positionen der Raketen (z.B. A und B) haben immer noch den räumlichen Abstand L (vgl. Abb. 4.3). Trotzdem bewegt sich das Seil mit einer bestimmten Geschwindigkeit relativ zu dem Ruhesystem (angedeutet durch die Vektorpfeile in Abb. 4.3). Damit sind die Ereignisse A und B für das Seil auch nicht gleichzeitig (auch die Gleichzeitigkeitslinien zu den beiden Ereignissen sind in der Abbildung angedeutet). Da sich das Seil bewegt, kommt es zu einer Lorentz-Kontraktion und das Seil wird reißen.

Bell bemerkt, dass damals viele Physiker in der Lorentz-Kontraktion nur eine scheinbare

Verkürzung von Abständen sahen, weil man eine Länge aus verschiedenen Systemen mit unterschiedlichen Gleichzeitigkeitsvorstellungen ausmisst. Doch das Reißen des Seils ist eine Tatsache, kein „Scheineffekt“. Hier, so argumentiert er, gibt die Lorentz'sche Vorstellung einer tatsächlichen Verkürzung ein besseres Bild: Die Reichweite der elektromagnetischen Kräfte, die das Seil zusammenhalten, wird (ähnlich wie die Solitonen bei unserer linearen, gekoppelten Kette) kürzer, doch die Atome müssen, da sie zwischen den Raketen eingespannt sind, ihren Abstand behalten. Irgendwann wird die Reichweite der Kräfte so klein, dass die Atome nicht mehr zusammengehalten werden können und das Seil reißt.

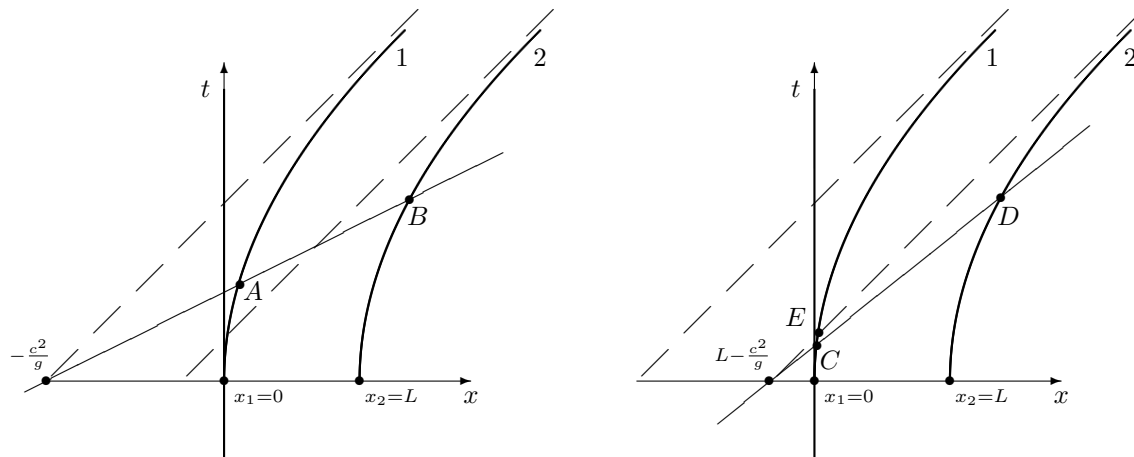


Abbildung 4.4: Die Gleichzeitigkeitslinien für die beiden Raketen. (Links) Ereignis A befindet sich auf der Weltlinie von Rakete 1. In dem augenblicklichen Inertialsystem ist Ereignis B auf der Weltlinie von Rakete 2 gleichzeitig zu A . Doch bei B hat Rakete 2 bereits eine größere Geschwindigkeit als Rakete 1 bei Ereignis A , sodass der Abstand von Rakete 2 aus Sicht von Rakete 1 zunimmt. (Rechts) D ist ein Ereignis auf der Weltlinie von Rakete 2 und in dem augenblicklichen Inertialsystem ist Ereignis C auf der Weltlinie von Rakete 1 gleichzeitig zu D . Doch nicht nur ist die Geschwindigkeit von Rakete 1 bei C sehr viel langsamer als die von Rakete 2 bei D , sodass der Abstand zwischen den beiden Raketen aus der Sicht von Rakete 2 zunimmt, sondern Rakete 2 sieht Rakete 1 auch nie zu dem Ereignis E gelangen. Für Rakete 2 endet die Weltlinie von Rakete 1 an diesem Punkt.

Wir betrachten nun die Situation aus dem Bezugssystem von Rakete 1, also der hinteren Rakete bezüglich der Beschleunigungsrichtung (Abb. 4.4 (links)). Zu einem beliebigen Ereignis A auf der Weltlinie dieser Rakete kann der Beobachter in der Rakete seine augenblickliche Gleichzeitigkeitslinie konstruieren (das sind alle Ereignisse zu Vektoren, die bezüglich der Minkowski-Metrik senkrecht auf dem augenblicklichen 4-Vektor der Geschwindigkeit bzw. der augenblicklichen Tangente an die Weltlinie stehen). Danach ist Ereignis B auf der Weltlinie von Rakete 2 gleichzeitig zu Ereignis A (für Rakete 1). Doch bei B bewegt sich Rakete 2 bereits wesentlich schneller als Rakete 1 bei A . Das bedeutet, für Rakete 1 nimmt der Abstand zu Rakete 2 ständig zu. Somit wird das Seil auch irgendwann reißen.

Abschließend betrachten wir dieselbe Situation noch aus dem Bezugssystem von Rakete 2 (Abb. 4.4 (rechts)). D sei ein beliebiges Ereignis auf dieser Weltlinie, und ähnlich wie zuvor konstruiert der Beobachter in dieser Rakete die Gleichzeitigkeitslinie zu diesem Ereignis. Er findet, dass in diesem augenblicklichen Inertialsystem Ereignis C auf der Weltlinie von Rakete 1 gleichzeitig zu D ist. Doch bei C bewegt sich Rakete 1 wesentlich langsamer als Rakete 2 bei D , daher nimmt auch in seinem Bezugssystem der Abstand zu Rakete 1 zu und das Seil wird reißen.

Wir beobachten hier aber noch etwas Weiteres: Alle Gleichzeitigkeitslinien zur Weltlinie von

Rakete 2 liegen (bei x -Koordinaten größer als $L - \frac{c^2}{g}$) unterhalb des Lichtstrahls, der zur Asymptote der Bahnkurve von 2 wird. Das bedeutet, für Rakete 2 wird Rakete 1 niemals weiter als bis zu dem Ereignis E auf diesem Lichtstrahl gelangen, Rakete 1 wird dieses Ereignis *aus der Sichtweise von Rakete 2* noch nicht einmal erreichen.

Im nächsten Abschnitt gehen wir auf diesen letztgenannten Punkt nochmals ein. Jedenfalls sind sich alle drei Beobachter darin einig, dass das Seil nach den physikalischen Gesetzen in ihrem Bezugssystem reißen muss. Man sollte aber in jedem Fall berücksichtigen, dass die Konstruktion einer „augenblicklichen Gleichzeitigkeitsfläche“ bei beschleunigten Weltlinien rein mathematische ist und sich physikalisch nicht realisieren lässt. Bei einem „ewigen“ Inertialsystem ist eine solche Konstruktion zumindest im Prinzip operational möglich.

4.3 Das Rindler-Universum

Wir haben gesehen, wie sich im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie bereits einige sehr interessante Effekte in der Physik eines konstant beschleunigten Beobachters untersuchen lassen. Dabei haben wir allerdings von globalen Gleichzeitigkeitslinien Gebrauch gemacht, die für einen Beobachter entlang einer Weltlinie nicht unbedingt von Relevanz sind. Beispielsweise kann bei beschleunigten Systemen die Folge solcher Gleichzeitigkeitslinien, selbst wenn sie entlang der Weltlinie in kausaler Reihenfolge konstruiert werden, Ereignisse in großem Abstand (hier definiert $d = \frac{c^2}{g}$ die Skala) in kausal rückläufiger Reihenfolge überstreichen (man betrachte beispielsweise Ereignisse, die in Abb. 4.1 links von Ereignis O liegen). Aus diesem Grunde verwendet man auch in der allgemeinen Relativitätstheorie solche globalen Gleichzeitigkeitslinien – in $2 + 1$ Raumzeit-Dimensionen sind es natürlich Flächen und in $3 + 1$ Raumzeit-Dimensionen Volumina – nur selten.

In diesem Abschnitt soll nochmals der konstant beschleunigte Beobachter betrachtet werden, allerdings mit den Methoden, die wir später bei verallgemeinerten Geometrien in der allgemeinen Relativitätstheorie verwenden werden: (1) durch Angabe der kausalen Beziehungen und (2) durch die Untersuchung von Signalen, die zwischen Beobachtern auf verschiedenen Weltlinien ausgetauscht werden können. Die Raumzeit eines solchen konstant beschleunigten Beobachters bezeichnet man auch als Rindler-Universum. Aufgrund des Äquivalenzprinzips lassen sich viele der beobachteten Effekte qualitativ (und in manchen Einzelheiten sogar quantitativ) auf einen Beobachter in der Nähe eines schwarzen Loches übertragen. Von besonderer Bedeutung ist in diesem Zusammenhang das Konzept eines „Horizonts“.

4.3.1 Kausale Beziehungen

Wie wir in Abschnitt 4.1.2 gezeigt haben, lässt sich im Raumzeit-Diagramm eines inertialen Beobachters B die Weltlinie eines konstant beschleunigten Beobachters A als Hyperbel darstellen. In diesem Abschnitt betrachten wir sogar eine Weltlinie zu einem System, das seit „ewigen Zeiten“ einer konstanten Beschleunigung unterlag und auch für ewige Zeiten dieser Beschleunigung unterliegen wird (vgl. Abb. 4.5). Das System kommt also aus dem Unendlichen auf den inertialen Beobachter B zu und wird dabei konstant abgebremst bis es schließlich für einen Augenblick relativ zu dem inertialen Beobachter in Ruhe ist und sich nun mit derselben Beschleunigung wieder von dem inertialen Beobachter entfernt.

Der Minkowski-Raum des inertialen Beobachters B lässt sich durch die kausale Relationen der Ereignisse zu dem beschleunigten Beobachter A in vier Klassen einteilen:

- I Dieser Bereich enthält alle Ereignisse, die irgendwann einmal in der kausalen Zukunft des Beobachters A lagen und gleichzeitig irgendwann einmal in der kausalen Vergangenheit von A sein

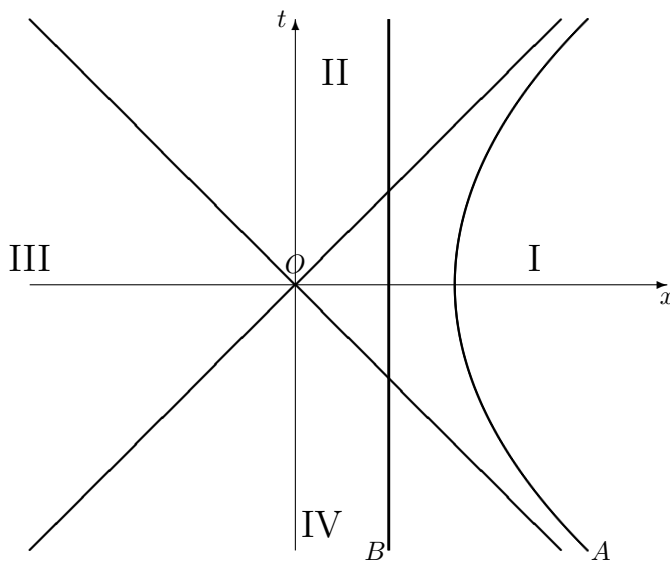


Abbildung 4.5: Rindler-Universum. Dargestellt sind die Weltlinien eines konstant beschleunigten Beobachters A und eines inertialen Beobachters B . Die Hyperbelbahn von Beobachter A definiert die angegebenen Lichtstrahlen sowie das Ereignis O . Die Quadranten I–IV stehen jeweils in einer besonderen kausalen Beziehung zu Beobachter A .

werden. Jedes der Ereignisse konnte von A einmal beeinflusst werden und kann umgekehrt einmal einen Einfluss auf A haben. Dieser Bereich entspricht also im üblichen Sinne der kausalen Raumzeit für Beobachter A .

- II Dieser Bereich enthält alle Ereignisse, die in der kausalen Zukunft von Ereignissen auf der Weltlinie von A liegen, aber nicht in der kausalen Vergangenheit irgendeines Ereignisses auf der Weltlinie von A . Der Beobachter A kann diesen Bereich also nicht „einsehen“ bzw. er kann von den Ereignissen in diesem Bereich nie kausal beeinflusst werden, er kann aber umgekehrt die Ereignisse in diesem Bereich kausal beeinflussen.
- III Die Ereignisse in diesem Bereich haben keinen kausalen Zusammenhang – weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit – zu irgendeinem Ereignis auf der Weltlinie von Beobachter A .
- IV Alle Ereignisse in diesem Bereich liegen irgendwann einmal in der kausalen Vergangenheit von A , waren aber niemals in seiner kausalen Zukunft. A kann von diesen Ereignissen also kausal beeinflusst werden, hat aber umgekehrt keinen Einfluss auf sie.

Hinsichtlich der Kausalbeziehungen ist für den beschleunigten Beobachter A die Ereignismenge in Bereich I so, wie für einen inertialen Beobachter die Ereignismenge der Minkowski-Raum-Zeit: Zu jedem Ereignis gibt es auf seiner Weltlinie einen Zeitpunkt in der Vergangenheit, *vor* dem dieses Ereignis in seiner kausalen Zukunft lag, es kann also durch diesen Beobachter beeinflusst werden. Ebenso gibt es zu jedem Ereignis einen Zeitpunkt, *ab* dem der Beobachter in der kausalen Zukunft des Ereignisses liegt, d.h. dieses Ereignis wahrnehmen bzw. von ihm Kenntnis erlangen kann.

Alle anderen Bereiche haben für einen inertialen Beobachter in einer Minkowski-Raum-Zeit kein Gegenstück. Die Ereignisse in den Bereichen III und IV liegen beispielsweise niemals in der kausalen Zukunft von A . Der beschleunigte Beobachter hat somit auch keine Möglichkeit, diese Ereignisse jemals zu beeinflussen. Allerdings kann er die Ereignisse aus Bereich IV wahrnehmen bzw. kausal von ihnen beeinflusst werden, da er sich irgendwann in der kausalen Zukunft von diesen Ereignissen befinden wird. Der Bereich III gehört zu einem Teil des Universums, der mit A überhaupt keine kausale

Verbindung hat, weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit. In gewisser Hinsicht existiert dieser Bereich für den beschleunigten Beobachter A gar nicht.

4.3.2 Was „sehen“ die Beobachter voneinander?

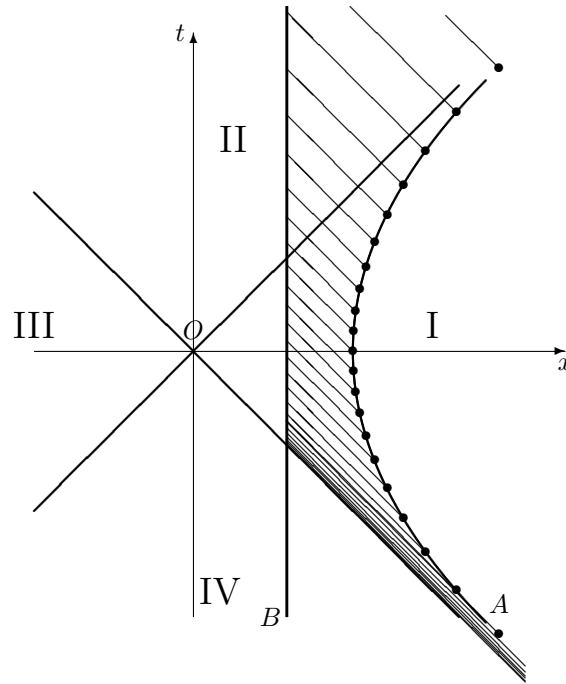


Abbildung 4.6: Was sieht der inertielle Beobachter B von dem beschleunigten Beobachter A ? In regelmäßigen Eigenzeitabständen (Ereignisse auf der Weltlinie von A , gekennzeichnet durch „•“) sendet der beschleunigte Beobachter Signale aus. B empfängt diese Signale in seinem System in unterschiedlichen Zeitabständen.

Wir überlegen uns zunächst, was der inertielle Beobachter B von dem beschleunigten Beobachter A „sieht“. In Abbildung 4.6 sind beide Weltlinien dargestellt, zusätzlich sind in gleichmäßigen Eigenzeitabständen von A Ereignisse markiert, bei denen A ein Lichtsignal zu Beobachter B aussendet.

Solange B sich in Bereich IV befindet, hat er keinerlei Kenntnisse von A . Erst beim Überschreiten der Grenze zwischen Bereich IV zu Bereich I „erfährt“ Beobachter B von A . Das geschieht allerdings gleich sehr heftig: Innerhalb einer beliebig kurzen Zeit nimmt Beobachter B eine unendliche Zeitspanne in der Vergangenheit von Beobachter A wahr.

Hinsichtlich seiner Wahrnehmung sieht Beobachter B den beschleunigten Beobachter A in einer beliebig kurzen Zeit eine unendliche Strecke auf ihn zukommen. Diese scheinbare Wahrnehmung widerspricht natürlich nicht der Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit eine Grenzgeschwindigkeit darstellt. Da Beobachter B in beliebig kurzer Zeit eine unendliche Vergangenheit von A wahrnimmt, sind die eintreffenden Lichtwellen auch unendlich blau-verschoben. In gewisser Hinsicht ist dieses Ereignis für Beobachter B wie eine Singularität.

Solange sich der inertielle Beobachter B im Bereich I befindet, kann er mit dem beschleunigten Beobachter A Information austauschen. Für Beobachter B ändert sich auch nicht viel, wenn er in den Bereich II tritt. Für ihn hat die Grenze zwischen Bereich I und II keinerlei Bedeutung und er hat an dieser Grenze auch keine besondere Wahrnehmung. Er kann den beschleunigten Beobachter A bis in eine beliebige Zukunft weiter beobachten. Allerdings werden die Zeitabstände zwischen Signalen, die A in gleichen Eigenzeitabständen aussendet, für B immer größer. Der inertielle Beobachter B sieht also den beschleunigten Beobachter A immer stärker rot-verschoben. Diese Rotverschiebung entspricht im Wesentlichen dem Doppler-Effekt eines sich zunehmend rasch entfernenden Senders.

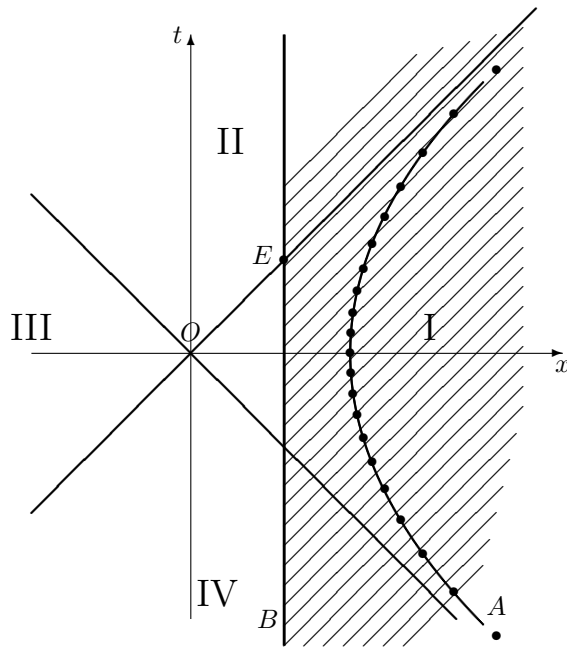


Abbildung 4.7: Was sieht der beschleunigte Beobachter A von dem inertialen Beobachter B ? Nun sendet B in regelmäßigen Eigenzeitabständen Signale aus, die A empfängt. Wegen der unterschiedlichen relativen Geschwindigkeit sowie zusätzlich den unterschiedlichen Skalen für die Eigenzeiten von A relativ zu B (Ereignisse in gleichen Eigenzeitabständen wurden auf der Weltlinie von A wieder gekennzeichnet) empfängt auch A die Signale in unterschiedlichen Zeitabständen.

Nun untersuchen wir, was der beschleunigte Beobachter A von dem inertialen Beobachter B sieht. In Abb. 4.7 sind wieder die beiden Weltlinien dargestellt, diesmal sendet aber B in regelmäßigen Abständen Lichtsignale aus. Auf der Weltlinie von A sind in äquidistanten Eigenzeitabständen Ereignispunkte eingetragen – der Eigenzeitabstand entspricht dem zeitlichen Abstand, mit dem B die Lichtsignale abschickt.

In beliebig ferner Vergangenheit kann A den Beobachter B schon wahrnehmen, allerdings treffen die Lichtsignale bezüglich seiner Eigenzeit sehr viel rascher bei ihm ein, sodass er Beobachter B blau-verschoben wahrnimmt, wiederum wie bei einem Doppler-Effekt. Je weiter man in die Vergangenheit von A zurückgeht, umso blauverschobener sieht A den inertialen Beobachter B . Sobald B auch in den Bereich I eingedrungen ist, können A und B Signale austauschen und sich gegenseitig verständigen.

Wenn die beiden Weltlinien von A und B für einen Augenblick parallel sind, sieht A die Signale von B mit derselben Frequenz, wie B sie aussendet. Ab dann empfängt A die Signale seltener, d.h. A sieht B rotverschoben.

Offenbar kann A keinerlei Signale mehr aus dem Bereich II empfangen. Das bedeutet, kein Signal, das B nach dem Ereignis E verschickt, wird A jemals erreichen. Für A endet die Weltlinie von B an dem Ereignis E . Der Lichtstrahl, der die Bereiche I und II trennt, ist für Beobachter A ein Horizont, hinter den er nicht blicken kann. Man bezeichnet diesen Horizont auch als *Ereignishorizont*.

Der Beobachter A sieht den Beobachter B aber nicht einfach hinter dem Horizont verschwinden. Im Gegenteil: Er kann für alle Zukunft den Beobachter B wahrnehmen, wie er sich immer mehr dem Horizont bzw. dem Ereignis E nähert. Die Abstände, mit denen A aber von B die in gleichen Zeitabständen ausgesandten Signale erhält, werden immer größer. A nimmt die Zeit im B -System immer langsamer wahr. Damit ist eine Rotverschiebung der Strahlung verbunden. B verschwindet also nicht hinter dem Horizont, sondern B verschwindet an der Oberfläche des Horizonts im langwelligen Bereich des Spektrums.

Die Grenzen zwischen den Bereichen I und IV einerseits und den Bereichen I und II andererseits verhalten sich also in gewisser Hinsicht symmetrisch: A kann die Ereignisse in Bereich IV

wahrnehmen, nicht aber die Ereignisse in Bereich II. Umgekehrt hat B keine Kenntnis von A , solange er sich in Bereich IV befindet, er nimmt das Schicksal von A aber durchaus wahr, wenn er sich in Bereich II befindet.

Der Bereich III gehört zu einem Teil des Universums, der mit A überhaupt keine kausale Verbindung hat, weder in der Zukunft noch in der Vergangenheit. In gewisser Hinsicht existiert dieser Bereich für den beschleunigten Beobachter A gar nicht. Trotzdem ist dieser Bereich für den inertialen Beobachter B ein ganz normaler Teil seines Universums. Da andererseits B von diesem Bereich auch erst erfährt, nachdem er den Horizont zwischen I und II durchschritten hat, kann er A keine Mitteilung davon machen.

Literaturverzeichnis

- [1] Peter C. Aichelburg (Hrsg.); *Zeit im Wandel der Zeit*; Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1988.
- [2] *Mach's Principle – From Newton's Bucket to Quantum Gravity*; Julian Barbour & Herbert Pfister (Hrsg.); Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.
- [3] Jacob D. Bekenstein, *Black holes and entropy*, Phys. Rev. D 7 (1973) 2333–2346.
- [4] John Bell; *Speakable and Unspeakable in Quantum Physics*, 2. edition, Cambridge University Press (2004).
- [5] Max Born; *Optik*; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.
- [6] Encyclopaedia Britannica; 15.th edition, 1988.
- [7] Albert Einstein; *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*; Annalen der Physik, Leipzig, 17 (1905) 891.
- [8] Albert Einstein; *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig?* (Ann. Phys., Leipzig, 18 (1905) 639.
- [9] Albert Einstein; *Aus meinen späten Jahren*; Ullstein Sachbuch, Verlag Ullstein, Frankfurt, Berlin, 1993.
- [10] Albert Einstein; *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*; Annalen der Physik 55 (1918) 241.
- [11] Albert Einstein; *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*; Annalen der Physik 35 (1911) 898.
- [12] Torsten Fließbach; *Allgemeine Relativitätstheorie*; BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien Zürich, 1990.
- [13] Galilei; *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische*; Teubner Stuttgart, 1982; aus dem Italienischen übersetzt von Emil Strauss.
- [14] Stephen W. Hawking, *Particle Creation by black holes*, Comm. Math. Phys. 43 (1976) 199–220.
- [15] Hermann von Helmholtz; *Über Wirbelbewegungen, Über Flüssigkeitsbewegungen*, 1858; in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 1; Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1996.
- [16] G.L. Lamb, Jr.; *Elements of Soliton Theory*; Pure & Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 1980.

- [17] Max von Laue; *Geschichte der Physik*; Universitäts-Verlag Bonn, 1947.
- [18] Hendrik Antoon Lorentz; *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*; Proc. Acad. Sci., Amsterdam, 6 [1904], S. 809.
- [19] Ernst Mach; *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch kritisch dargestellt*; Akademie Verlag, Berlin, 1988.
- [20] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler; *Gravitation*; W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.
- [21] Peter Mittelstaedt; *Der Zeitbegriff in der Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.
- [22] Peter Mittelstaedt; *Philosophische Probleme der modernen Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.
- [23] Isaac Newton; *Über die Gravitation...*; Klostermann Texte Philosophie; Vittorio Klostermann, Frankfurt, 1988; übersetzt von Gernot Böhme.
- [24] Wolfgang Pauli; *Theory of Relativity*; Dover Publications, New York, 1981.
- [25] Jules Henri Poincaré; *Sur la dynamique de l'électron*, C.R. Acad. Sci., Paris, 140 (1905) S. 1504; und Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 21 (1906) S. 129.
- [26] Hans Reichenbach; *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*; Hans Reichenbach - Gesammelte Werke Bd. 2; Vieweg-Verlag, Braunschweig; 1977.
- [27] Hans Reichenbach; *Axiomatik der relativistischen Raum-Zeit-Lehre*; in *Die philosophische Bedeutung der Relativitätstheorie*; Hans Reichenbach - Gesammelte Werke Bd. 3; Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1977.
- [28] Carlo Rovelli, *Quantum Gravity*; Cambridge University Press, 2007.
- [29] Schlamming, Choi, Wagner, Gundlach, Adelberger; *Test of the Equivalence Principle using a rotating torsion balance*; Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 041101.
- [30] Roman U. Sexl, Helmuth K. Urbantke; *Relativität, Gruppen, Teilchen*; Springer-Verlag, Wien, New York, 1992.
- [31] Károly Simonyi; *Kulturgeschichte der Physik*; Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990.
- [32] Weisberg, J.M., Taylor, J.H.; *Relativistic Binary Pulsar B1913+16: Thirty Years of Observations and Analysis*; arXiv:astro-ph/0407149v1; 2004.