Kapitel 1

Die Zeitgleichung

wahren Sonnentage

Die Tage, ~~und hier ist~~ (die Zeitdauer von Sonnenhöchststand bis zum nächsten Sonnenhöchststand) ~~gemeint,~~ sind nicht immer gleich lang. Dafür sind in erster Linie zwei Einflüsse verantwortlich: die elliptische Form der Erdbahn und die Neigung der Erdachse gegen die Ekliptik.* Dies führt zu einer Differenz zwischen der wahren Sonnenzeit (bei der die Sonne um 12 Uhr ihren Höchststand in Richtung Süden erreicht) und der sogenannten mittleren Sonnenzeit, wie sie auf einer gleichmäßig gehenden Uhr angezeigt wird.[1] Diese Zeitgleichung war schon im Altertum bekannt. Sie konnte auf der Basis der Kepler'schen Gesetze Anfang des 16. Jahrhunderts auch theoretisch begründet werden.

* (Die Bahnebene der Erde)

Diese Differenz, auch Zeitgleichung genannt,

In Tabelle 1.1 sind die wichtigsten Größen zusammengefasst, die in diesem Kapitel benötigt werden.

große Halbachse Erde-Sonne	$a = 149\,598\,023\,\text{km}$
Datum des Perihels	derzeit am (3 ± 2). Januar
Neigung der Erdachse zur Ekliptik	$\varepsilon = 23,44°$
numerische Exzentrizität der Erdbahn	$\epsilon = 0,0167$
Abstand Erde-Sonne im Perihel	$r_{\text{min}} = 147,10 \cdot 10^6\,\text{km}$
Abstand Erde-Sonne im Aphel	$r_{\text{max}} = 152,10 \cdot 10^6\,\text{km}$
Dauer eines tropischen Jahres	$365,24219$ Tage

Vereinheitlichung #Nachkommastellen
evtl. digitale Verlinkung auf Kalendertext?

Tabelle 1.1: Die wichtigsten physikalischen Größen im Zusammenhang mit der Zeitgleichung.

1.1. Zeitsysteme
1.1.1 MEZ

1.1 ~~Wahrer und mittlerer Sonnentag~~

Andreas + Malte finden Halbsatz zu Südhalbkugelinfo bzw. Äquatorstreifen sinnvoll

Evtl. Animation

Die wahre Sonnenzeit an einem bestimmten Ort auf der Erde ist definiert durch den Sonnenhöchststand, der den Zeitpunkt 12 Uhr festlegt. Auf der nördlichen Halbkugel (nördlich des 23,5. Breitengrads) befindet sich die Sonne in diesem Augenblick genau im Süden. Etwas anders ausgedrückt handelt es sich bei 12 Uhr mittags (wahre Sonnenzeit) um den Augenblick, an dem die Verbindungslinie Erdmittelpunkt-Sonnenmittelpunkt den Längengrad des jeweiligen Orts schneidet. ~~Ein wahrer Sonnentag ist dann der Zeitraum zwischen Sonnenhöchststand zum nächsten Sonnenhöchststand.~~

[1] Hinzu kommt noch, dass die Ortszeit heute nicht mehr die wahre Ortszeit ist, sondern einer Zeitzone zugeteilt wurde. Je nach Längengrad, an dem sich ein Ort befindet, muss zur lokalen Zeit entsprechend der Zeitzone noch ein Korrekturterm hinzugefügt werden werden. Diese Korrektur wird in Abschnitt 1.1 kurz erwähnt und ansonsten nicht berücksichtigt.

Da die wahre Uhrzeit (bezüglich der Sonne) vom Längengrad eines Orts abhängt, ~~ist eine solche Zeitrechnung sehr kompliziert~~, da sie lokal von Ort zu Ort verschieden sein kann. Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts war das tatsächlich der Fall: Jede größere Stadt hatte ihre eigene Ortszeit. Insbesondere ~~als Folge des~~ durch den zunehmenden Eisenbahnverkehr, ~~wurde~~ führte ~~ein solches~~ dieses System ~~jedoch zu umständlich~~, und so wurde per Erlass im Jahre 1893 in Deutschland als gesetzliche Zeit die Zeit am 15. Längengrad eingeführt. Diese Zeit bezeichnet man allgemein auch als „Mitteleuropäische Zeit (MEZ)“, da sie in den meisten europäischen Ländern gilt.

eignet sie sich nicht für eine standardisierte Zeitrechnung

zu Problemen

evtl. Satz zu Taschenuhren

Eisenbahnen, Funk 1895

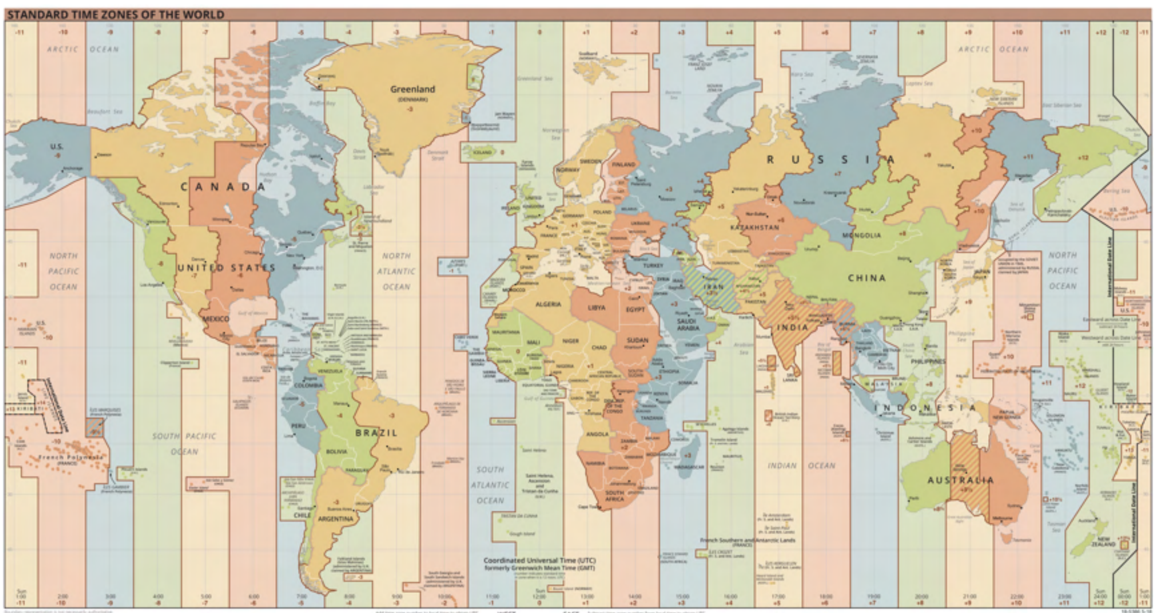


Abbildung 1.1: Die Zeitzonen der verschiedenen Länder. (aus [4])

Die Erdkugel ist in 24 Zeitzonen eingeteilt (Abb. 1.1), jede Zeitzone umfaßt somit $360/24 = 15$ Längengrade. Befindet sich ein Ort nicht auf dem Längengrad seiner Zeitzone, muss man pro Längengraddifferenz 4 Minuten addieren bzw. subtrahieren ⊛, je nachdem ob sich der Ort westlich oder östlich von dem Längengrad seiner Zeitzone befindet. Die Mitteleuropäische Zeit, die in Deutschland und den meisten westeuropäischen Kontinentalgebieten (außer Portugal) gültig ist, hat ihren Längengrad bei 15° Ost. Das ist nahe des östlichsten Punkts der deutschen Grenze. Selbst Frankfurt an der Oder liegt noch etwas weiter westlich. Freiburg liegt beim Längengrad $7,85°$, also $7,15°$ westlich vom 15. Längengrad. Dementsprechend muss man zur MEZ rund 28,6 Minuten addieren, um die wahre Ortszeit zu erhalten (in der Sommerzeit nochmals eine Stunde mehr). Der Sonnenhöchstand im Sommer in Freiburg ist gegen 13:30.

⊛ um von wahrer Sonnenzeit auf MEZ zu kommen

evtl. Referenz zu bekannterer Stadt

Unabhängig von den bisher erwähnten Korrekturen, die zur ~~Bestimmung~~ Unterscheidung ⊛ zwischen der MEZ und der lokalen Ortszeit notwendig sind, kann der wahre Sonnentag, also die Zeitdauer zwischen zwei Sonnenhöchstständen an einem Ort, im Laufe eines Jahres um bis zu fast einer halben Minute schwanken, was sich zu manchen Zeiten kumulativ bis zu einer Viertelstunde aufaddieren kann. Die beiden Hauptursachen dafür - die elliptische Bahn der Erde und die Neigung der Erdachse relativ zur Ekliptik - werden in den Abschnitten 1.3 und 1.4 besprochen. Aus diesem Grund definiert man einen mittleren Sonnentag als die Dauer eines Tages, sodass ein Jahr genau 365, 242 mittlere Sonnentage hat. Dies hat jedoch zur Folge, dass eine Uhr, welche die Uhrzeit nach dem mittleren Sonnentag anzeigt, nicht mit einer Uhr übereinstimmt, welche die wahre Sonnenzeit anzeigt, also z.B. eine Sonnenuhr ⊛. Manche Sonnenuhren berücksichtigen diese Effekte, indem die Stundenlinien die Form eines sogenannten Analemmas haben

⊛ Hier bestimmst du SZ aus MEZ, Korrekturen oben aber andersrum

⊛ Die Differenz dieser beiden Zeiten bezeichnet man als „Zeitgleichung“

1.1 wahrer und mittler Sonnentag

(Abschnitt 1.6.2).

1.2 Zur Mathematik einer elliptischen Bahnkurve

Es gibt zwei bekannte Definitionen einer Ellipse: (1) als die Menge aller Punkte, bei denen die Summe der Abstände zu zwei gegebenen Punkten, den Brennpunkten der Ellipse, konstant ist, und (2) als Schnitt eines Kegelmantels mit einer Ebene. Dass die Lösungen des Zwei-Körper-Kepler-Problems (also das Zwei-Körper-Problem mit einem Potenzial proportional zu $1/r$) Kegelschnitte sind, ist ebenfalls bekannt. Die gebundenen Lösungen bilden dabei Ellipsen, wobei der Kreis ein Spezialfall einer Ellipse ist.

Die sogenannte *lineare Exzentrizität* e einer Ellipse ist gleich dem Abstand vom Mittelpunkt der Ellipse zu einem der Brennpunkte. Sie hat die Dimension einer Länge. Die *numerische Exzentrizität* ϵ ist gleich dem Verhältnis von e zur großen Halbachse a und ist somit dimensionslos (vgl. Abb. 1.2, links):

$$\epsilon = \frac{e}{a} \,. \tag{1.1}$$

Außerdem gilt

$$2a = r_{\max} + r_{\min} \qquad \text{und} \qquad 2e = r_{\max} - r_{\min} \,, \tag{1.2}$$

wobei $r_{\max}$ der maximale Abstand zwischen einem Brennpunkt und der Ellipse ist (also der Abstand zwischen einem Brennpunkt und dem gegenüberliegenden Punkt der Ellipse) und $r_{\min}$ der minimale Abstand. Bei der Erdumlaufbahn um die Sonne bezeichnet man den Punkt mit dem maximalen Abstand zur Sonne als Aphel, den Punkt mit dem minimalen Abstand als Perihel. [Bei der Mondbahn um die Erde bezeichnet man den Punkt der Mondbahn mit dem größten Abstand zur Erde als Apogäum und den Punkt mit dem kleinsten Abstand als Perigäum.] Footnote

Aus (1.1) und (1.2) ~~Damit~~ folgt

$$\epsilon = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\max} + r_{\min}} \qquad \text{oder} \qquad \frac{r_{\min}}{r_{\max}} = \frac{1-\epsilon}{1+\epsilon} \,. \tag{1.3}$$

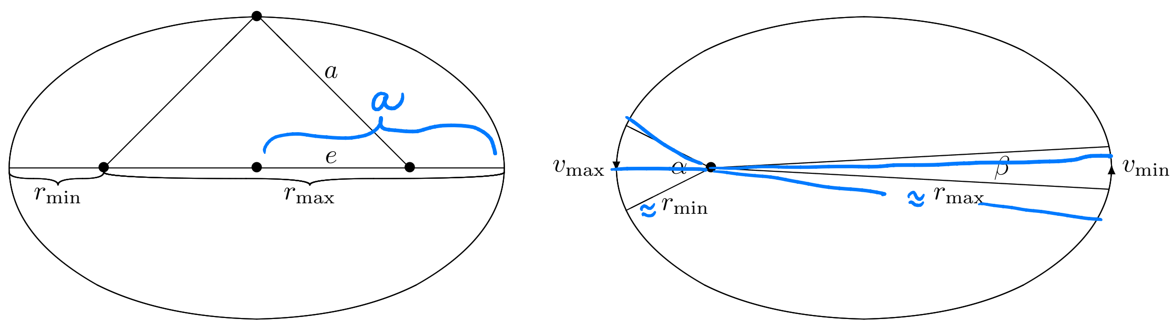


Abbildung 1.2: Beziehungen zwischen den geometrischen Größen (links) und den dynamischen Größen (rechts) in einer Ellipse. Größen $a, e, v_{\min}, v_{\max}, \alpha, \beta$ erklären in Caption?

Nach dem zweiten Kepler'schen Gesetz („In gleichen Zeiten werden gleiche Flächen überstrichen") folgt, dass sich die Geschwindigkeiten im Perihel (dem sonnennächsten Punkt), $v_{\max}$, zur Geschwindigkeit im Aphel (dem sonnenfernsten Punkt), $v_{\min}$, wie die Abstände der Bahn zur Sonne verhalten (siehe Abb. 1.2, rechts):

$$\frac{v_{\min}}{v_{\max}} = \frac{r_{\min}}{r_{\max}} \,. \tag{1.4}$$

Zoom! Herleitung Drehimpulse

Für die Winkel im Perihel α und Aphel β, die in gleichen Zeiten überstrichen werden, bedeutet dies:

später heißen sie α_{min} und α_{max}

$$\frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{v_{\text{min}}}{r_{\text{max}}}\right) \Big/ \left(\frac{v_{\text{max}}}{r_{\text{min}}}\right) = \left(\frac{r_{\text{min}}}{r_{\text{max}}}\right)^2 . \tag{1.5}$$

1.3 Der Einfluss der elliptischen Bahnkurve

In diesem Abschnitt vernachlässigen wir die Neigung der Erdachse zur Ekliptik (diesen Effekt berücksichtigen wir im nächsten Abschnitt) und nehmen an, die Rotationsachse der Erde sei senkrecht zu ihrer Bahnebene.

Würde sich die Erde auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegen, wäre der Winkel, den sie auf ihrer Bahn um die Sonne täglich überstreicht, immer derselbe. Wir bezeichnen diesen Winkel mit α_0. Sein Wert berechnet sich aus der Tatsache, dass ein Jahr rund 365, 2422 Tage hat und in dieser Zeit ein Winkel von 360° überstrichen wird:

space weg

4NKS vs. 3NKS vorhin

$$\alpha_0 = \frac{360°}{365,2422\,\text{d}} = 0,98565°/\text{d} \,. \tag{1.6}$$

Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal ~~um ihre Achse~~ von Sonnenhöhststand zu Sonnenhöchstand. Dabei überstreicht sie einen Winkel von $360° + \alpha$. Der zusätzliche Winkel α rührt daher, dass sich die Erde im Verlauf eines Tages auf ihrer Bahn weiter um die Sonne bewegt hat, und sich somit die Sonne relativ zur Erde um den Winkel α weiterbewegt hat. Auf einer Kreisbahn wäre dieser Winkel $\alpha = \alpha_0$. Um sich um diesen Winkel α zu drehen, benötigt sie ungefähr 4 Minuten.[2] Um diese Zeit ist der ideale Sonnentag (24h) länger als der siderische Tag (23h 56min) (der sich auf eine Umdrehung relativ zum Fixsternhimmel bezieht).

Verwechslung mit siderischem Tag

Animation

Tatsächlich bewegt die Erde sich aber auf einer elliptischen Bahn und ihre Winkelgeschwindigkeit ist im Perihel größer als im Aphel. Das bedeutet, dass an einem Tag in Perihelnähe (dieser Tag liegt derzeit um den 3. Januar) ein größerer Winkel von ihr relativ zur Sonne überstrichen wird als an einem Tag im Aphel (rund 3. Juli). Für die Zeitabhängigkeit dieses Winkels können wir folgenden Ansatz machen

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(1 + A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right) , \tag{1.7}$$

wobei $T = 1$ Jahr ist und die Zeit t am Perihel beginnen soll (also $\alpha(t = 0) = \alpha_{\text{max}}$). Nach Gl. 1.5 besteht folgende Beziehung zwischen der Amplitude A und der Exzentrizität ϵ:

Einheiten?

$$\frac{\alpha_{\text{max}}}{\alpha_{\text{min}}} = \left(\frac{1+\epsilon}{1-\epsilon}\right)^2 \approx 1 + 4\epsilon \text{ und} \tag{1.8}$$

Achtung oben anders

~~Andererseits gilt für die linke Seite:~~

$$\frac{\alpha_{\text{max}}}{\alpha_{\text{min}}} = \frac{\alpha(0)}{\alpha(T/2)} = \frac{\alpha_0(1+A)}{\alpha_0(1-A)} \approx 1 + 2A \,. \tag{1.9}$$

Wir erhalten somit die Beziehung $A = 2\epsilon$. ~~Wie wir gesehen haben, ist~~ Aus obiger Argumentation folgt, dass die Winkelgeschwindigkeit der Eigendrehung der Erde

$$\omega = \frac{360° + \alpha_0}{86400\,\text{s}} \text{ beträgt.} \tag{1.10}$$

Andererseits ist die Zeitdauer $T(\alpha)$, die die Erde benötigt, um sich um den Winkel α zu drehen, gegeben durch

$$T(\alpha) = \frac{\alpha}{\omega} , \tag{1.11}$$

[2] Da sich die Erde in 24 Stunden um rund 360° dreht, dreht sie sich in einer Stunde um 15° und somit in 4 Minuten um 1°.

und damit dauert ein Tag (in Abhängigkeit von der Jahreszeit t):

Wann setzt man welche Werte ein?

$$T(t) = \frac{360^\circ + \alpha(t)}{\omega} = \left(\frac{360^\circ + \alpha_0(1 + 2\epsilon\cos\frac{2\pi}{T}t)}{360^\circ + \alpha_0}\right) \overset{T_0}{\cancel{86400\,\mathrm{s}}} \tag{1.12}$$

$$= T_0 + 2\alpha_0\epsilon\frac{\cos\frac{2\pi}{T}t}{360^\circ + \alpha_0} 86400\,\mathrm{s}, \tag{1.13}$$

Warum hier nicht auch T_0?

wobei $T_0 = 86\,400\,\mathrm{s}$ einem mittleren Sonnentag entspricht. Die Zeitdifferenz zwischen einem mittleren Sonnentag und dem tatsächlichen Sonnentag ist somit

$$\Delta T(t) = T(t) - T_0 = 2\alpha_0\epsilon\frac{\cos\frac{2\pi}{T}t}{360^\circ + \alpha_0} 86400\,\mathrm{s}\,. \tag{1.14}$$

Setzen wir Werte ein, so erhalten wir für die Amplitude dieser Schwankung:

$$\Delta T = 2\alpha_0\epsilon\frac{1}{360^\circ + \alpha_0} 86400\,\mathrm{s} \approx 7,88\,\mathrm{s}\,. \tag{1.15}$$

Um diesen Wert kann ein einzelner Tag also länger oder kürzer sein als ein mittlerer Sonnentag (sofern man nur die elliptische Bahn der Erde berücksichtigt). Ein solcher Effekt für sich genommen wäre vermutlich im Altertum noch nicht aufgefallen, wäre dieser Effekt nicht kumulativ, d.h., wenn viele aufeinanderfolgende Tage um ähnliche Werte zu lang oder zu kurz sind, addieren sich die Effekte auf. Die tatsächliche Zeit geht der gemittelten Zeit voraus bzw. nach. Relevant für die Zeitgleichung ist dieser kumulative Effekt, d.h. die Differenz zwischen der wahren Zeit, die an einem Ort am Stand der Sonne abgelesen wird, und der gemittelten Zeit, die eine Uhr anzeigt.

Bilden wir von Gl. 1.14 ~~das Integral~~ die Summe, erhalten wir:

$$\mathrm{ZG}_1(t) = \sum_{t=0}^{t} \Delta T(t) \approx \frac{T}{2\pi}\Delta T \sin\frac{2\pi}{T}t\,. \tag{1.16}$$

SNKS

Hierbei verläuft die Summe über die Tage t vom Perihel gerechnet und T ist die Dauer eines Jahres in Tagen (also $T = 365,24219$). Die Summe selbst wurde durch ein Integral approximiert. Die Amplitude dieser periodischen Funktion ist schon beträchtlich höher: Sie beträgt rund 7,63 Minuten. Dies ist ein Maß für den kumulativen Effekt: Im Verlauf eines Jahres kann die wahre Zeit an einem Ort der gemittelten Zeit um $\pm 7,63$ Minuten vor bzw. nach gehen. Dieser Effekt ist Anfang April (drei Monate nach dem Perihel) und nochmals Anfang Oktober (sechs Monate später) am größten. Zunächst hinkt die wahre Zeit der gemittelten Zeit hinterher. Die Zeitgleichung gibt an, wie viele Minuten man zur gemessenen wahren Ortszeit addieren muss, um die gemittelte Ortszeit zu erhalten.

gutes Satz, bitte früher

Das war erster Beitrag (Elliptische Bahn)

gemittelte Ortszeit − wahre Ortszeit

1.4 Die Neigung der Erdachse zur Ekliptik

Für die separate Beschreibung des zweiten Einflusses auf die Tageslänge nehmen wir an, dass sich die Erde gleichmäßig auf einer Kreisbahn um die Sonne bewegt. Wir berücksichtigen allerdings nun, dass die Rotationsachse der Erde um 23,44° relativ zur Normalen der Ekliptik (der Bahnebene der Erde) geneigt ist. Außerdem ist es sinnvoll, nicht ein heliozentrisches Koordinatensystem zu verwenden, sondern ein geozentrisches, allerdings soll dieses Koordinatensystem relativ zum Frühlingspunkt (also der Schnittlinie zwischen Äquatorebene und Ekliptik) fest sein (siehe Abb. 1.3). Die z-Achse dieses Systems sei die Rotationsachse der Erde, die x, y-Achsen liegen dann in der Äquatorebene (z.B. sei die x-Achse die Schnittlinie der Ekliptik und Äquatorebene, sie zeige also in Richtung Frühlingspunkt). Es handelt sich also nicht um ein erdfestes Koordinatensystem, das die tägliche Drehung der Erde mitmacht, sondern um ein Koordinatensystem, das bezüglich des Frühlingspunkts fest ist. Dies ist auch das Koordinatensystem, das man in der Astronomie häufig verwendet.

evtl. Satz: Warum kann ich beide Effekte unabhängig voneinander betrachten?

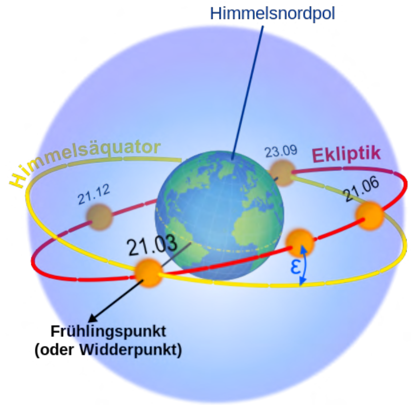


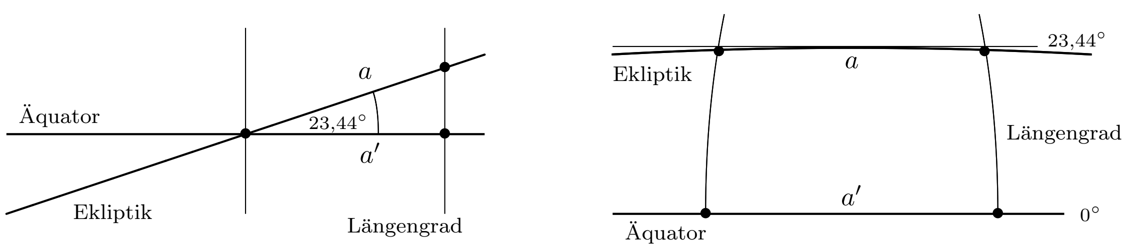
Abbildung 1.3: Äquatorebene und Ekliptik sind um $23,44°$ gegeneinander geneigt (hier mit ε bezeichnet). Eine gleichmäßige Bewegung der Sonne entlang der Ekliptik wird zu einer ungleichmäßigen Bewegung in Bezug auf die Längengrade.

Koordinaten-system einzeichnen

In Bezug auf ein solches Koordinatensystem bewegt sich die Sonne im Verlauf eines Jahres gleichförmig auf einem Kreis, der um $23,44°$ relativ zur Äquatorebene geneigt ist. Die Gleichförmigkeit dieser Bewegung folgt aus der gleichförmigen Bewegung der Erde um die Sonne (da wir eine Kreisbewegung annehmen). Die Längengrade auf der Erde schneiden die scheinbare Bahn der Sonne, die relativ zum Äquator geneigt ist, jedoch nicht gleichförmig. Das bedeutet, dass die scheinbare Bewegung der Sonne relativ zu den Längengraden nicht gleichförmig ist, und das wiederum bedeutet, dass ein Sonnentag zu manchen Zeiten kürzer bzw. länger ist. Genauer sind die Tage um den Frühlings- und Herbstpunkt die kürzesten und die Tage um die Sommer- und Wintersonnenwende die längsten.

Zur Berechnung dieses Effekts für die Zeitgleichung muss man einen gleichmäßig unterteilten Vollkreis, der unter $23,44°$ geneigt ist, entlang der Längengrade auf die Äquatorebene projizieren. Die auf der Ekliptik gleichen Bogenlängen werden auf der Äquatorebene ungleich - etwas dichter am Frühlingspunkt (derzeit 21.3.) und Herbstpunkt (derzeit 23.9.) und etwas weniger dicht bei der Sommersonnenwende (derzeit 21.6.) und der Wintersonnenwende (derzeit 21.12).

Animation



verweis auf Abb 1.6 und 1.7 oder volle 360°-Ansicht

Abbildung 1.4: Projektionen von der Ekliptik auf die Äquatorebene in der Nähe der Äquinoktien (Schnittpunkte zwischen Äquator und Ekliptik; links) und der Sommer- bzw. Wintersonnenwende (rechts). Zwei Punkte, die entlang der Ekliptik eine Bogenlänge a haben, werden entlang der Längengrade auf zwei Punkte auf dem Äquator projiziert, die dort eine Bogenlänge a' haben.

Die folgende Herleitung dieses Beitrags geht davon aus, dass sich der Effekt wieder als eine trigonmetrische Funktion schreiben lässt, was in guter Näherung auch erfüllt ist. Diese Funktion hat im Verlaufe eines Jahres zwei Maxima (an den Sonnenwenden) und zwei Minima (an den Äquinoktien). Damit müssen wir nur noch die Amplitude dieser Funktion bestimmen.

Wie aus Abb. 1.4 ersichtlich, ändert sich eine Bogenlänge a, wenn sie von der Ekliptik entlang der Längengrade auf den Äquator projiziert wird. In der Nähe der Äquinoktien ist die Beziehung durch $a' = a \cos\varepsilon$ gegeben. In der Nähe der Sonnenwendepunkte am $23,44$.ten Breitengrad gilt ungefähr $a = a' \cos\varepsilon$ (genauer ist dies die Beziehung zwischen den Bogenlängen entlang der beiden Breitengrade;

cos kommt von Längengraden

der Abstand zwischen den beiden Punkten entlang der Ekliptik ist etwas kleiner, dies kann man aber in führender Ordnung und wenn die Punkte genügend nahe beieinander liegen vernachlässigen). Machen wir wieder einen Ansatz der Form

$$\alpha(t) = \alpha_0 \left(1 + B \cos\left(\frac{4\pi}{T} t\right)\right) \tag{1.17}$$

folgt

$$\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} = \frac{1-B}{1+B} = \cos^2 \varepsilon \tag{1.18}$$

oder

$$B = \frac{1-\cos^2 \varepsilon}{1+\cos^2 \varepsilon} = 0,0859153\,. \tag{1.19}$$

Dies führt auf maximale Schwankungen in der Tageslänge von $\pm 20,27\,\mathrm{s}$ und auf eine kumulative Zeitverschiebung von

$$\mathrm{ZG}_2(t) = \sum_{t=0}^{t} \Delta T(t) \approx \frac{T}{4\pi} \Delta T \sin \frac{4\pi}{T} t \approx (9,82\,\mathrm{min}) \cdot \sin \frac{4\pi}{T} t\,. \tag{1.20}$$

Wiederum ist T die Zeitdauer von einem Jahr in Tagen gemessen und t die Anzahl der Tage, diesmal vom Frühlingspunkt gemessen.

1.5 Die Zeitgleichung

Gleichung $\boxed{ZG(t) = \qquad}$

Die Zeitgleichung ist die Summe dieser beiden Beiträge. Dabei ist noch zu berücksichtigen, dass die Zeitpunkte $t = 0$ unterschiedlich gewählt wurden. Gibt man t in Tagen an, sollten die Periode für den ersten Anteil (elliptische Erdbahn) am 3. Januar beginnen, also am 3. Tag des Jahres, und die Periode für den zweiten Anteil (Neigung der Erdachse zur Ekliptik) am 21. März, in Jahren, die kein Schaltjahr sind, also am 80. Tag eines Jahres. Abb. 1.5 zeigt die Summe der beiden Beiträge.

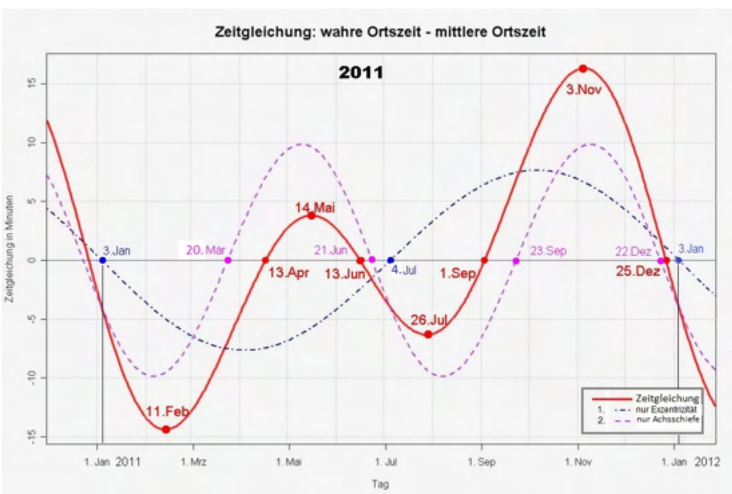


Abbildung 1.5: Die Zeitgleichung. Im Verlaufe eines Jahres kann die wahre Ortszeit von der mittleren Ortszeit um über eine Viertelstunde abweichen. Da sich das Perihel langsam verschiebt (in rund 21 000 Jahren einmal um 360°) verschieben sich im Verlauf der Zeit auch die beiden Beiträge relativ zueinander. (aus [?])

Insgesamt sind die Minuten der Zeitgleichung zur wahren Ortszeit zu addieren, sodass man die mittlere Ortszeit erhält. Diese Wahl des Vorzeichens geht darauf zurück, dass man früher beispielsweise mithilfe eines Sextanten auf hoher See die wahre Ortszeit gemessen hat und nun die mittlere Ortszeit berechnen musste. Ist die Zeitgleichung negativ (beispielsweise zu Beginn des Jahres) müssen die entsprechenden Minuten (Absolutwerte) der Zeitgleichung also von der wahren Ortszeit abgezogen werden, um zur mittleren Ortszeit zu gelangen.

wichtiger Satz

1.6 Kuriositäten

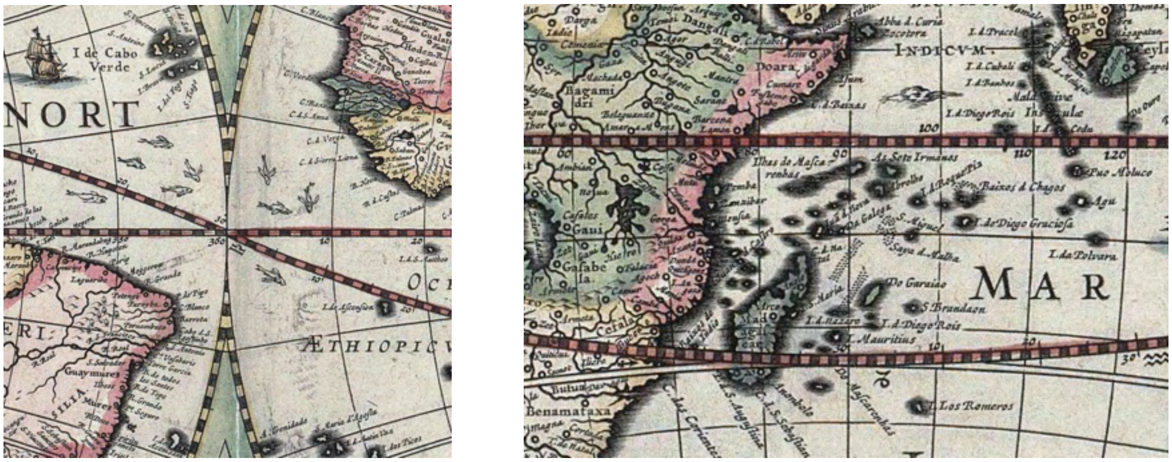
1.6.1 Die Ekliptik auf alten Landkarten und Globen

Auf manchen alten Landkarten und Globen ist die Projektion der Ekliptik auf die Erde eingezeichnet. Ein Beispiel ist die bekannte Weltkarte von Hendrik Hondius aus dem Jahr 1630 (Abb. 1.6).

Abbildung 1.6: Weltkarte von Hendrik Hondius aus dem Jahr 1630. Deutlich erkennbar neben der Äquatorlinie ist die Projektion der Ekliptik.

Sowohl die Äquatorlinie als auch die Projektion der Ekliptik sind in äquidistante 360 Einheiten von jeweils 1° unterteilt. In der Nähe der Wendepunkten der Sonne, also in den Bereichen, wo die Ekliptik in der Nähe des $\pm 23,5$. Breitengrads ist, sind die Unterteilungen auf der Ekliptik etwas breiter als am Äquator (siehe Abb. **??**, rechts), da der Maßstab auf der Karte kleiner wird, wenn man sich vom Äquator entfernt. In den Ausschnitten (Abb. **??**, links und rechts) erkennt man, dass beim Schnittpunkt der Ekliptik mit dem Äquator (also den Äquinoktien) die Projektion der Ekliptik auf den Äquator die Bogenlänge schrumpfen lässt (Abb. 1.7, links). An diesen Stellen schneidet die 10° Bogenlänge der Ekliptik den Äquator links von der 10° Marke bzw. dem 10. Längengrad. Andererseits vergrößert wegen des veränderten Maßstabs die Projektion entlang der Längengrade in der Nähe der Wendepunkte die Bogenlänge (Abb. 1.7, rechts): Hier liegt die 10° Marke der Ekliptik (10° neben dem Wendepunkt) rechts neben dem 100. Längengrad (der 90. Längengrad markiert den Wendepunkt) am Äquator.

Im Bild nicht äquidistant, oder?



gut!

Abbildung 1.7: Ausschnitte aus der Weltkarte von Hendrik Hondius. (links) Ausschnitt beim Schnittpunkt von Äquator und Ekliptik, der hier auf einen der damals gebräuchlichen Nullmeridiane durch die Azoren gelegt wurde. Links unten sind Teile von Südamerika erkennbar, rechts oben Teile von Afrika. (rechts) Ausschnitt in der Nähe des südlichen Wendepunkts der Ekliptik (unser Winterpunkt). Der Kontinent links ist Afrika, die Insel rechts daneben Madagaskar; rechts oben erkennt man die Südspitze von Indien und Sri Lanka (damals Ceylon).

1.6.2 Das Analemma

Das Analemma ist eine achtförmige Figur, die ungefähr den Schattenverlauf der Spitze eines Stabes (z.B. eines Obelisken oder der Spitze des Zeigers einer Sonnenuhr) zur selben mittleren Ortszeit (z.B. um 12 Ühr mittags) im Verlauf eines Jahres beschreibt (siehe Abb. 1.8, links). Die beiden Koordinaten dieser Figur entsprechen einmal dem unterschiedlichen Höchstand der Sonne im Sommer und Winter: Im Winter steht die Sonne auch zur Mittagszeit sehr tief und somit ist der Schatten vergleichsweise lang, im Sommer steht die Sonne hoch am Himmel und daher ist der Schatten entsprechend kurz.

Die dazu (fast) orthogonale Richtung entspricht der Zeitgleichung: Da die Position der Schattenspitze immer zur selben mittleren Ortszeit bestimmt wird, geht die wahre Sonne dieser Zeit entsprechend der Zeitgleichung entweder etwas vor oder nach, d.h. der Schatten ist etwas nach links oder rechts versetzt.

Manche Sonnenuhren korrigieren den Effekt der Zeitgleichung. Dazu gibt es unterschiedliche Verfahren. Man kann z.B. die Schattenlinien zu einer festen Uhrzeit nicht als Geraden zeichnen (die einem festen Längengrad entsprechen würden) sondern in Form einer langgestreckten Acht. Hierbei wird, wie bei all diesen Verfahren, ausgenutzt, dass der Schatten im Winter länger ist als im Sommer.

Ein weiteres Verfahren besteht darin, den Schattenstab der Sonnenuhr unterschiedlich dick zu machen und zum Ablesen an einer Skala eine bestimmte Kante des Schattens zu verwenden. Solche Stäbe bezeichnet man auch als Bernhardt'sche Walze (benannt nach dem Techniker Martin Bernhardt, der diese Walze patentieren ließ, ähnliche Ideen hatte aber auch schon der Engländer John Ryder Oliver Ende des 19. Jahrhunderts). Ebenfalls wegen der unterschiedlichen Sonnenhöhe zu den verschiedenen Jahreszeiten würde ein jeweils anderer Teil des Schattenstabs den Schatten auf die Skala werfen. Wegen der unterschiedlichen Dicke erreicht man so, dass diese Schattenkante entsprechend verschoben ist. Da die Zeitgleichung in den beiden Jahreshälften unterschiedlich ist, benötigt man einen Schattenstab für die erste und einen anderen Schattenstab für die zweite Jahreshälfte.

Im Verlauf der Zeit verschieben sich die beiden Beiträge zur Zeitgleichung gegeneinander. Während sich der Neigungswinkel zur Ekliptik nur sehr wenig und über einen sehr großen Zeitraum

Animation? Zeitpunkt, Breiten-Längengrad, Planeten
Link auf Wikipedia Seite

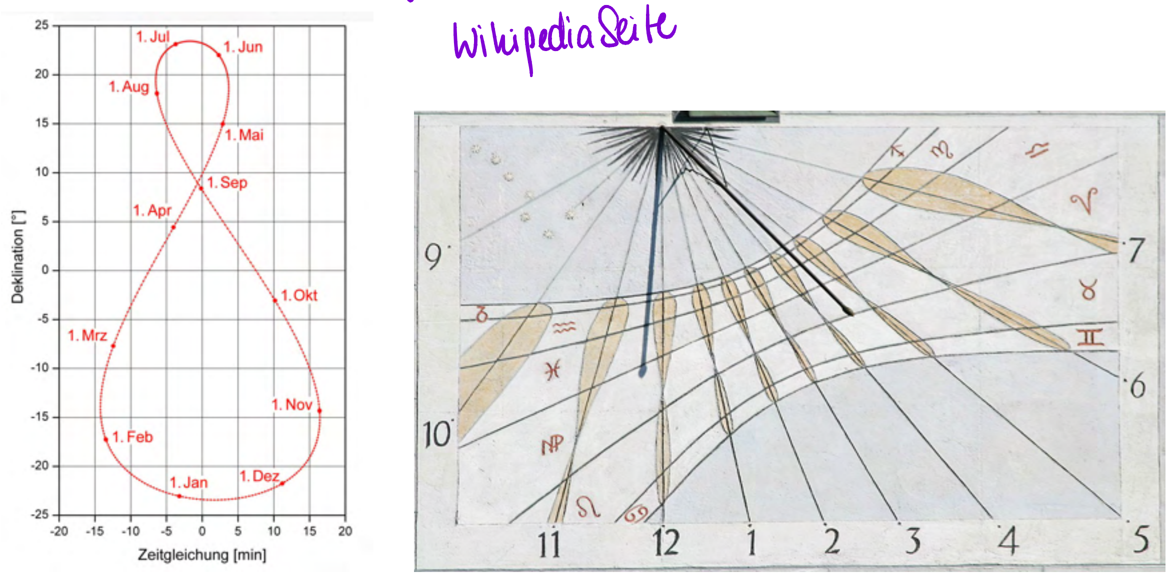


Abbildung 1.8: Das Analemma. (links) Die derzeitige Figure des Analemmas. Die obere Spitze der 8 beschreibt den Sonnenstand im Sommer, wenn die Sonne hoch steht und der Schatten entsprechend kurz ist. Der Zeiger oder Obelisk steht oberhalb der Figur und die Südrichtung ist nach oben (aus [1]). (rechts) Die Sonnenuhr am Alten Rathaus in München mit einem Analemma zur Korrektur der wahren Sonnenzeit auf die mittlere Sonnenzeit. (aus [2])

von über 40 000 Jahren verändert, wandert das Perihel im Verlauf von rund 21 000 Jahren einmal durch das Jahr. Dadurch verändert sich die Zeitgleichung langsam und somit auch die Form des Analemmas. Derzeit ist das Analemma leicht asymmetrisch, weil die Wintersonnenwende und das Perihel nicht auf denselben Tag fallen (das war z.B. im Jahr 1246 der Fall). Außerdem sind die beiden „Handeln“ der Acht unterschiedlich groß. Wenn das Perihel im Frühlings- bzw. Herbstpunkt steht, sind die beiden Teile gleich groß.

1.6.3 Der kürzeste Tag

Die Wintersonnenwende entspricht gemeinhin dem kürzesten Tag. Derzeit liegt dieses Ereignis um den 21. Dezember. Zu diesem Zeitpunkt befindet sich sie Sonne über dem südlichen Wendekreis (dem Wendekreis des Steinbocks). In Freiburg liegen zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang an diesem Tag 8 Stunden, 22 Minuten und 13 Sekunden. Doch kürzester Tag heißt nicht, dass es an diesem Tag am frühesten dunkel wird oder am spätesten hell. Der früheste Sonnenuntergang liegt um den 11. Dezember (in Freiburg um 16:35), der späteste Sonnenaufgang ist um den 2. Januar (in Freiburg gegen 8:18). Alle angegebenen Uhrzeiten beziehen sich natürlich auf die mittlere Sonnenzeit (genauer MEZ) und nicht die wahre Sonnenzeit. Der Grund für den Unterschied ist die Zeitgleichung.

Eine ähnliche Aussage gilt für die Sommersonnenwende. Der längste Tag mit 16 Stunden 2 Minuten und 47 Sekunden in Freiburg ist der 21. Juni. Doch der frühste Sonnenaufgang liegt um den 16./17. Juni (gegen 5:18), der späteste Sonnenuntergang um den 25./25. Juni (gegen 21:32). Genaue Zeiten für die Tageslänge, Sonnenauf- und Untergang sowie weitere interessante Daten für jeden beliebigen Ort der Erde findet man auf der Webseit [3].

Literaturverzeichnis

Quellenangaben einheitlich

[1] aus Wikipedia „Analemm“; S. Wetzel, CC BY-SA 4.0.

[2] Till Niermann - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=21792620

[3] https://www.timeanddate.com/sun/germany/freiburg

[4] Wikipedia „Zeitzone“.