

## Kapitel 2

# Differentialgeometrische Grundlagen der ART

In diesem Kapitel behandeln wir die mathematischen Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie. Damit sind insbesondere die differentialgeometrischen Konzepte gemeint, die in die Einstein'schen Feldgleichungen eingehen bzw. zur Formulierung der Theorie benötigt werden. Es geht mir dabei weder um mathematische Vollständigkeit noch um mathematische Strenge. Der Schwerpunkt soll in einer Veranschaulichung der Konzepte bestehen. Wie so oft, ist gerade der Einstieg – das bedeutet die Definition von Mannigfaltigkeiten und ihren Tangentialräumen, insbesondere wenn man keinen Bezug auf eine Einbettung dieser Mannigfaltigkeit nehmen möchte – am schwierigsten.

### 2.1 Mannigfaltigkeiten

Etwas vereinfacht ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  ein topologischer Raum (also eine Menge mit einer Topologie, für die wir im Folgenden immer eine gewöhnliche Hausdorff-Topologie nehmen wollen), der lokal (also in offenen Umgebungen von jedem Punkt) isomorph zu offenen Umgebungen im  $\mathbb{R}^n$  ist. Eine solche Isomorphie bezeichnet man als *Karte* und die Menge aller Karten als einen *Atlas*. Dies wird im Folgenden etwas genauer behandelt.

Zu einer Mannigfaltigkeit können wir an jedem Punkt ihren Tangentialraum definieren als „Raum der Geschwindigkeiten von parametrisierten Bahnkurven durch diesen Punkt“.

#### 2.1.1 Karten und Atlanten

Die Metapher von Karten in einem Atlas werden wir oft zur Veranschaulichung verwenden, da sie den Sachverhalt sehr gut trifft. Sämtliche geometrischen Eigenschaften von  $M$  werden über diese Karten definiert, und letztendlich werden wir es immer nur mit offenen Umgebungen im  $\mathbb{R}^n$  zu tun haben, aus denen wir die geometrischen Eigenschaften von  $M$  ablesen können.

Etwas genauer definieren wir eine Karte  $(U, \phi)$  als eine offene Teilmenge  $U$  der Mannigfaltigkeit  $M$  und eine stetige, injektive Abbildung (also einen lokalen Isomorphismus)

$$\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (2.1)$$

Da  $\phi$  injektiv (lokal bijektiv) sein soll, gibt es auch eine Umkehrabbildung  $\phi^{-1}$  von dem Bild von  $\phi$  im  $\mathbb{R}^n$  zurück in die Mannigfaltigkeit. Wir können also bei einer Karte nahezu beliebig zwischen offenen

Umgebungen in  $M$  und den zugehörigen offenen Umgebungen im  $\mathbb{R}^n$  – den eigentlichen Karten – wechseln.

Eine Menge von Karten  $\{U_i, \phi_i\}$  bezeichnen wir als *Atlas*, sofern  $\bigcup U_i = M$  und für je zwei Abbildungen  $\phi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  und  $\phi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ , sodass  $U_1 \cap U_2$  nicht leer ist, die Abbildung

$$\phi_2 \circ \phi_1^{-1} : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

eine beliebig oft differenzierbare Abbildung von der offenen Teilmenge  $\phi_1(U_1 \cap U_2) \subset \mathbb{R}^n$  in den  $\mathbb{R}^n$  ist. Diese Eigenschaft ist sehr intuitiv: In einem Atlas findet man möglicherweise mehrere Karten, auf denen dasselbe Gebiet (Land oder Gegend) dargestellt ist. Diese beiden Darstellungen sollen natürlich „isomorph“ sein und zwar beliebig oft ableitbar.<sup>1</sup>

Über die Karten sind wir also in der Lage, auf der Mannigfaltigkeit so etwas wie Differential- und Integralrechnung zu betreiben. Dies wäre auf einem einfachen topologischen Raum nicht möglich (dort ist nur der Begriff der Stetigkeit definiert). In der Mathematik spricht man daher auch schon mal von einer *differenzierbaren Struktur*, die auf  $M$  definiert wurde (es müssen noch bestimmte Konsistenzbedingungen erfüllt sein, auf die ich hier nicht eingehe).

Haben sämtliche Abbildungen  $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ , die sich konstruieren lassen, die Eigenschaft, dass ihre Jacobi-Determinante positiv ist (wegen der lokalen Bijektivität kann die Jacobi-Determinante an keinem Punkt verschwinden, sodass sie im gesamten Definitionsbereich entweder positiv oder negativ sein muss), dann spricht man auch von einem *orientierungserhaltenden Atlas*. Gibt es einen solchen Atlas, so nennt man die Mannigfaltigkeit  $M$  orientierbar. Bekannt ist das Möbius-Band, das in diesem Sinne nicht orientierbar ist.

### 2.1.2 Der Tangentialraum

An jedem Punkt  $p$  einer Mannigfaltigkeit  $M$  können wir den Tangentialraum  $T_p M$  definieren. Auch diese Konstruktion ist eigentlich sehr anschaulich: Der Tangentialraum ist der Raum aller Geschwindigkeiten, die Bahnkurven durch den Punkt  $p$  haben können.

Ein parametrisierter Weg  $\gamma : I \rightarrow M$  ist eine stetige Abbildung von einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  in die Mannigfaltigkeit  $M$ , oft schreiben wir  $t \mapsto \gamma(t) \in M$ . Im Folgenden soll das Intervall  $I$  den Punkt 0 enthalten und wir betrachten parametrisierte Wege  $\gamma$ , für die  $\gamma(0) = p$ , die also bei  $t = 0$  durch den Punkt  $p$  gehen.

Wir würden nun gerne die Ableitung des Weges nach  $t$  an der Stelle  $t = 0$  als eine Tangente an die Mannigfaltigkeit  $M$  im Punkte  $p$  definieren, doch wir können auf  $M$  nicht ableiten. Daher bedient man sich eines Tricks: Wir betrachten sämtliche beliebig oft ableitbaren<sup>2</sup> Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  (wobei  $U$  eine Umgebung von  $p$  sein soll; man beachte, dass auch die Kartenabbildungen  $\phi$ , eingeschränkt auf eine ihrer Komponenten im Bildraum, solche Funktionen definieren). Jeder Weg  $\gamma$  und jede solche Funktion  $f$  definiert eine Funktion  $f \circ \gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Diese Funktion können wir nach dem Argument  $t$  ableiten. Nun definieren wir auf der Menge aller Wege (durch  $p$ ) eine Äquivalenzrelation: Zwei Wege  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  bezeichnen wir als äquivalent, wenn für alle stetigen Funktionen  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma_1(t)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f(\gamma_2(t)) \right|_{t=0}. \quad (2.3)$$

<sup>1</sup>In der Mathematik schränkt man den Grad der Ableitbarkeit manchmal ein und verlangt nur  $r$ -mal stetig differenzierbar etc. Umgekehrt kann man noch stärker auch Formen von Analytizität fordern, beispielsweise dass sich die Abbildungen beliebig genau durch ihre Taylor-Reihen annähern lassen. Im Folgenden setzen wir immer alle notwendigen Ableitbarkeitseigenschaften voraus.

<sup>2</sup>Streng genommen können wir von Funktionen von einem topologischen Raum  $M$  nach  $\mathbb{R}$  nur entscheiden, ob sie stetig sind. Ableitbarkeit bezieht sich immer auf die differenzierbare Struktur auf  $M$ , die durch die Karten gegeben ist, sie bezieht sich also auf Funktionen  $f \circ \phi^{-1}$ , die Abbildungen von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  sind.

Eine solche Äquivalenzklasse definiert einen Tangentialvektor in  $p$  und die Menge aller solcher Äquivalenzklassen ist der Tangentialraum  $T_p M$  an  $M$  im Punkte  $p$ .

Das Verfahren erscheint nur auf den ersten Blick unnötig kompliziert. Der Vorteil der skizzierten Vorgehensweise liegt darin, dass die Mannigfaltigkeit  $M$  nicht in einen  $\mathbb{R}^m$  (mit  $m \geq n$ ) eingebettet sein muss; diesen Fall betrachten wir im nächsten Abschnitt als Beispiel. Die obigen Definitionen (wie auch die weiteren geometrischen Konzepte, insbesondere die Metrik) sind rein intrinsisch. Mathematisch kann man daher von „gekrümmten Räumen“ sprechen, ohne dass es einen (euklidischen) Raum geben muss, in dem die Mannigfaltigkeit gekrümmt ist.

Noch ein Wort zur Notation: Das Bild eines Punktes  $p \in M$  in einer bestimmten Karte ist  $\phi(p)$ , die dadurch induzierten *Koordinaten* von  $p$  bezeichnen wir aber meist mit  $x^\mu$  bzw.  $x^\mu(p)$ . Ein Weg in  $M$  wird durch  $\gamma(t)$  gekennzeichnet, sein Bild in einer Karte meist kurz durch  $x(t)$ . Die Ableitung eines solchen Weges,  $\frac{dx(t)}{dt}$  ist damit ein Element des Tangentialraums. Allgemeine Elemente des Tangentialraums bezeichne ich oftmals mit Großbuchstaben, also  $X$  mit Komponenten  $X^\mu$  oder  $X(p)$  mit Komponenten  $X(p)^\mu$ , da die Kleinbuchstaben schon für die Koordinaten von Punkten verwendet werden.

### 2.1.3 Eingebettete Mannigfaltigkeiten

Wir betrachten nun den Spezialfall, dass die Mannigfaltigkeit  $M$  eine Untermenge eines euklidischen Raumes ist, beispielsweise eine 2-dimensionale Kugeloberfläche, die als Teilmenge des  $\mathbb{R}^3$  aufgefasst wird und durch die Bedingung

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (2.4)$$

definiert ist. Die übliche Karte für die Kugeloberfläche führt zur Parametrisierung Winkel ein:

$$x = R \cos \varphi \cos \theta \quad y = R \sin \varphi \cos \theta \quad z = R \sin \theta. \quad (2.5)$$

Ein Vergleich mit einer Weltkarte zeigt, dass  $\varphi \in [0, 2\pi)$  dem Längengrad und  $\theta \in (-\pi/2, +\pi/2)$  dem Breitengrad entspricht.<sup>3</sup> Die Karte verliert ihre Gültigkeit am Nord- und Südpol (dort bräuchte man andere Karten), da für  $\theta = \pm\pi/2$  die Punkte unabhängig vom Winkel  $\varphi$  bereits festliegen. Anders ausgedrückt, alle Punkte  $(\varphi, \pm\pi/2)$  haben als Bild den Nord- bzw. Südpol, damit wäre hier die Beziehung zwischen den Punkten auf der Kugel und den Punkten auf der Karte (würde man die Werte  $\theta = \pm\pi/2$  zulassen) nicht mehr bijektiv.

Unsere Kartenabbildung lautet somit

$$\phi : (x, y, z) \rightarrow (\varphi, \theta) \quad (2.6)$$

mit

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x} \quad \theta = \arctan \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (2.7)$$

(Die genauen Definitionsbereiche und „Äste“, die man beim inversen Tangens zu nehmen hat, sind technische Details.)

Da die Kugeloberfläche in den  $\mathbb{R}^3$  eingebettet ist, liegen die Ableitungsvektoren, die man von Bahnkurven auf der Kugeloberfläche erhält, ebenfalls im  $\mathbb{R}^3$ . Man kann auf diese Weise den Tangentialraum an einen Punkt der Kugeloberfläche als affinen Teilraum des  $\mathbb{R}^3$  konstruieren. Das ist allerdings etwas irreführend, denn der Tangentenraum an einem Punkt ist ein Vektorraum (und nicht ein affiner Vektorraum), d.h., der Nullpunkt des Tangentenraums ist im Allgemeinen nicht der Nullpunkt des einbettenden  $\mathbb{R}^3$ . Streng genommen handelt es sich um einen anderen Raum:

<sup>3</sup>Gewöhnlich definiert man  $\theta \in (0, \pi)$ , wobei  $\theta = 0$  dem Nord- und  $\theta = \pi$  dem Südpol entspricht; daher unterscheiden sich die Formeln hier von denen in den üblichen Formelsammlung dadurch, dass  $\cos \theta$  durch  $\sin \theta$  etc. zu ersetzen ist.

Die Kugeloberfläche mit all ihren Tangentenräumen ist ein 4-dimensionaler Raum und nicht der einbettende 3-dimensionale Raum.

Statt nun sämtliche Bahnkurven durch einen Punkt zu betrachten, kann man einfach die beiden Kurven durch einen Punkt  $p$  (parametrisiert durch  $(\varphi_p, \theta_p)$ ) betrachten, bei denen eine der Koordinaten festgehalten wird, d.h. man betrachtet die beiden Kurven, die den Koordinatenlinien durch  $p$  entsprechen. Die Ableitungsvektoren sind dann (bei der Kugeloberfläche):

$$\vec{e}_\varphi = \left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{x}(\varphi, \theta_p) \right|_{\varphi=\varphi_p} = R(-\sin \varphi_p \cos \theta_p, \cos \varphi_p \cos \theta_p, 0) \quad (2.8)$$

$$\vec{e}_\theta = \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{x}(\varphi_p, \theta) \right|_{\theta=\theta_p} = R(-\cos \varphi_p \sin \theta_p, -\sin \varphi_p \sin \theta_p, \cos \theta_p). \quad (2.9)$$

Diese beiden speziellen Tangentialvektoren spannen den Tangentialraum am Punkte  $p$  auf. Die Ableitung von einem beliebigen Weg durch  $p$  am diesem Punkt (also ein beliebiger Tangentialvektor) lässt sich immer als Linearkombination dieser beiden Vektoren schreiben.

Wir können das oben Gesagte nun leicht verallgemeinern. Sei der einbettende Raum  $\mathbb{R}^m$  und die Mannigfaltigkeit  $M$  durch eine Abbildung

$$\phi^{-1} : (u_1, \dots, u_n) \mapsto \vec{x}(u_1, \dots, u_n) \quad (2.10)$$

gegeben. Die Koordinaten  $\{(u_1, \dots, u_n)\}$  parametrisieren also die Mannigfaltigkeit  $M$  als Unterraum des  $\mathbb{R}^m$ . An jedem Punkt definieren die Tangentialvektoren

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.11)$$

eine Basis, welche den Tangentialraum aufspannen.

Man beachte, dass diese Basis im Allgemeinen keine normierte oder orthogonale Basis sein muss (siehe Abschnitt 2.2.1).

## 2.2 Die Metrik

Die fundamentale Struktur der Allgemeinen Relativitätstheorie ist das metrische Feld  $g_{\mu\nu}(x)$ , wobei  $x$  eine beliebige Parametrisierung der Raumzeit darstellt. Ein solches Feld ordnet somit jedem Punkte  $p$  der Raumzeit (also jedem Ereignis) – dargestellt durch seine Koordinaten  $x = \phi(p)$  – einen Tensor  $g_{\mu\nu}$  zu, mit dem wir „Abstände“ bestimmen können. Technisch gesprochen ist  $g_{\mu\nu}(x)$  eine (nicht-entartete) symmetrische Bilinearform auf dem Tangentenraum (der natürlich ein Vektorraum ist) am Punkte  $p$ . Das bedeutet,  $g_{\mu\nu}$  ist auf zwei Vektoren (Tangentialvektoren, also  $\frac{dx}{dt}$  bezüglich eines Weges  $x(t)$ ) anzuwenden, möchte man einen invarianten, also vom Koordinatensystem unabhängigen Ausdruck erhalten.

Es gibt aber auch eine sehr anschauliche Beziehung: Seien  $p$  und  $p'$  zwei „infinitesimal“ benachbarte Punkte der Mannigfaltigkeit mit den Koordinaten  $x^\mu$  und  $x'^\mu$ . Da die Punkte sehr eng beieinander liegen, unterscheiden sich auch die Koordinaten nur um infinitesimale Ausdrücke  $dx^\mu$ . Der Abstand  $ds$  zwischen  $p$  und  $p'$  – hier handelt es sich um einen Abstand auf der Mannigfaltigkeit – ist dann gegeben durch

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.12)$$

bzw.

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (2.13)$$

In diesen Ausdrücken wurde die Einstein'sche Summenkonvention angewandt, d.h. über doppelt auftretende Indizes (einer oben und einer unten) ist zu summieren. Wir werden diese Beziehung in

Zukunft häufiger verwenden und auch noch genauer untersuchen. Falls es irritiert, dass die Metrix  $g_{\mu\nu}$ , die eigentlich auf Vektoren des Tangentialraums angewandt wird, hier auf infinitesimale Koordinatendifferenzen angewandt wird, kann man diese Gleichung für eine beliebige Kurve  $x(t)$  durch den Punkt  $p$  (bei  $t = 0$ ) und den Punkt  $p'$  (bei  $t = dt$ ) auch in der Form

$$ds = \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt}} dt = \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt \quad (2.14)$$

lesen.

Die Raumzeit hat lokal die Struktur eines Minkowski-Raums, das bedeutet, auch die Metrik hat die Signatur der Minkowski-Metrik:  $\text{sgn}(g) = (1, -1, -1, -1)$ . Man spricht in der Relativitätstheorie daher auch manchmal von einer Pseudometrik. Bei der angegebenen Wahl der Vorzeichen hat ein raumartiger Vektor (der also außerhalb des zukünftigen bzw. auf die Vergangenheit bezogenen Lichtkegels liegt) eine „negative Norm“, d.h. der Ausdruck in Gl. 2.12 wird negativ. Wollen wir einen sinnvollen räumlichen Abstand erhalten, müssen wir daher bei raumartigen Ereignissen das Negative dieses Ausdrucks wählen:

$$dl = \sqrt{-g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} . \quad (2.15)$$

Diese Problematik (dass es sich bei  $g_{\mu\nu}$  nicht wirklich um eine Metrik im mathematischen Sinne handelt) spielt zwar in der Relativitätstheorie eine wichtige Rolle – sie definiert insbesondere die kausale Lichtkegelstruktur – ist aber vom differentialgeometrischen Standpunkt zum Glück nicht so einschneidend, und die meisten Konzepte der gewöhnlichen Differentialgeometrie lassen sich auf die „Pseudo-Riemann’sche Geometrie“ übertragen.

Die Metrik erlaubt es, die (Pseudo)-Länge von Wegen anzugeben. Für einen zeitartigen Weg  $x^\mu(t)$  ergibt sich beispielsweise als Eigenzeit

$$T = \int d\tau = \int \sqrt{g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} dt .$$

Geodäten sind stationäre Punkte dieses Funktionals. Ein Einfluss der Minkowski-Struktur der Raumzeit ist, dass es sich bei Geodäten um Wege mit einer *maximalen* Eigenzeit (im Gegensatz zu den Geodäten der gewöhnlichen Geometrie, die eine *minimale* Länge haben) handelt.

In der Relativitätstheorie legt die Metrik auch die kausale Struktur fest (im Augenblick lassen wir globale topologische Eigenschaften mal beiseite): Zu jedem Ereignis  $p$  gibt es den Zukunfts- und den Vergangenheitslichtkegel. Diese trennen Ereignisse, die mit  $p$  durch physikalische Weltlinien (mit zeitartigen Tangenten, also  $g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu > 0$ ) verbunden werden können, von solchen Ereignissen, für die es solche Wege nicht gibt. Zukunfts- und Vergangenheitslichtkegel unterscheiden sich nochmals durch die Vorzeichen der 0-Komponente solcher Wege. Innerhalb des Zukunftslichtkegels befinden sich die Ereignisse, die von  $p$  kausal beeinflusst werden können (zu diesen Ereignissen gibt es von  $p$  aus Weltlinien mit nicht raumartigen Tangentenvektoren). Umgekehrt liegen innerhalb des Vergangenheitslichtkegels die Ereignisse, die  $p$  kausal beeinflussen können. Zu den Ereignissen außerhalb des Lichtkegels gibt es keine kausale Beziehung. Die kausale Struktur zwischen den Ereignissen einer Mannigfaltigkeit legt die Metrik schon weitgehend fest: Die Freiheit besteht lediglich in einem Skalarfeld, das die Metrik lokal mit einem Faktor multipliziert. Allgemein wird in einer Karte der Lichtkegel nun nicht mehr unbedingt durch gerade Linien dargestellt.

### 2.2.1 Induzierte Metrik bei Einbettungen

Handelt es sich bei der Mannigfaltigkeit  $M$  um eine in den  $\mathbb{R}^m$  eingebettete Untermannigfaltigkeit (vgl. Abschnitt 2.1.3), die durch eine Parameterdarstellung definiert ist, so bilden die Vektoren  $\vec{e}_i$

(Gl. 2.11) eine Basis des Tangentialraums. Wie schon erwähnt, handelt es sich im Allgemeinen nicht um eine Orthonormalbasis. Daher definiert man eine symmetrische Bilinearform

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}(u_1, \dots, u_n)}{\partial u_j}. \quad (2.16)$$

Diese Größe ist die durch die Einbettung in den  $\mathbb{R}^m$  induzierte Metrik im Tangentialraum an jedem Punkt.

Betrachten wir als Beispiel nochmals die Kugel und ihre Parametrisierung durch Längengrad- und Breitengradwinkel  $(\varphi, \theta)$ . Wir hatten die zugehörigen Basisvektoren im Tangentialraum (an einem Punkt, parametrisiert durch  $(\varphi, \theta)$ ) bereits berechnet (Gl.en 2.8 und 2.9) und erhalten daraus für die Metrik:

$$g_{\varphi\varphi} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi = R^2 \cos^2 \theta \quad g_{\varphi\theta} = \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\theta = 0 \quad (2.17)$$

$$g_{\theta\varphi} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\varphi = 0 \quad g_{\theta\theta} = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_\theta = R^2 \quad (2.18)$$

oder

$$g = R^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Statt dessen können wir auch schreiben:

$$ds^2 = R^2 \cos^2 \theta (d\varphi)^2 + R^2 (d\theta)^2. \quad (2.20)$$

### 2.2.2 Projektionen und die Metrik von Landkarten

Die Bedeutung der Metrik kann man sich sehr gut anhand einer Landkarte verdeutlichen. Jede Landkarte hat einen Maßstab, der angibt, wie groß der Abstand zwischen zwei Punkten in Wirklichkeit – d.h. auf der Erdoberfläche – ist, wenn der Abstand der zugehörigen Punkte auf der Landkarte bekannt ist. Eine Angabe von 1:30 000 besagt, dass 1 Zentimeter auf der Landkarte in Wirklichkeit 30 000 Zentimetern oder 300 Metern entspricht. In gewisser Hinsicht entspricht die Metrik einem solchen Maßstabsfaktor.

Als Koordinaten wählt man auf der Erdoberfläche meist die Längen- und Breitengrade. In einer Landkarte entsprechen die Längen- und Breitengrade Linien, die oft horizontal und vertikal verlaufen, insbesondere also senkrecht aufeinander stehen. Seien  $\Delta x$  und  $\Delta y$  die „Koordinatenabstände“ zwischen zwei nicht zu weit voneinander entfernten Punkten auf der Landkarte, also die Abstände entlang der Breiten- und Längengrade, dann ist der physikalische (wirkliche) Abstand zwischen den beiden Punkten gleich

$$\Delta s^2 = m^2 \left( (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \right) \quad (2.21)$$

wobei  $m$  der oben genannte Maßstabsfaktor ist. In diesem Fall wäre  $g_{\mu\nu} = m^2 \delta_{\mu\nu}$ , das heißt, die Metrik ist eine Diagonalmatrix und die Diagonalelemente sind alle gleich und konstant (gleich dem Quadrat des Maßstabsfaktors).

Bei Landkarten, die ein größeres Gebiet darstellen, reicht die Angabe eines festen Maßstabs nicht mehr aus. Die Erdoberfläche ist näherungsweise eine Kugel, die nicht verzerrungsfrei (und, wie wir noch diskutieren werden, auch nicht „singularitätenfrei“) in einer Ebene dargestellt werden kann. Das bedeutet, an unterschiedlichen Punkten der Karte muss ein unterschiedlicher Maßstab angesetzt werden. Bei Karten, bei denen es auf eine genaue Ortsangabe ankommt, beispielsweise bei See- oder Flugkarten, sind daher manchmal Korrekturterme angegeben, denen man entnehmen kann, wie sich der Maßstab verändert, wenn man sich beispielsweise vom Zentrum der Karte entfernt. Außerdem

kann der Maßstab noch von der Richtung abhängen. Bei vielen Weltkarten ist der Maßstab in Nord-Südrichtung nahezu konstant, wohingegen der Maßstab in Ost-West-Richtung gerade in der Nähe der Pole sehr variieren kann. Und wählt man schließlich noch eine Kartendarstellung, bei der die Längen- und Breitengrade nicht senkrecht aufeinander stehen, muss man den allgemeinen Kosinussatz anwenden, um aus den Koordinatendifferenzen den tatsächlichen Abstand berechnen zu können, und damit erhält man in der Formel für  $\Delta s^2$  auch Produktterme der Form  $\Delta x \Delta y$ .

### 2.2.3 Koordinatensingularitäten

Koordinatensingularitäten sind singuläre Bereiche einer Karte, die aber keine Singularität der Mannigfaltigkeit sind. Ein singulärer Kartenbereich tritt auf, wenn die Metrik entweder einen Nullmod oder aber einen singulären Mod (also eine Unendlichkeit) hat.

Ein Beispiel haben wir schon bei der Längen- und Breitengradbeschreibung einer Kugel kennengelernt: Die Metrik wird am Nord- und Südpol singulär, da dort einer der beiden Eigenwerte verschwindet. Anschaulich bedeutet dies, dass am Nord- und Südpol ein endlicher Kartenabstand (also endliche  $dx^\mu$ ) zu einem verschwindenden tatsächlichen Abstand  $ds$  gehört. Bei den Punkten  $\theta = \pm\pi/2$  verschwindet offensichtlich ein Eigenwert der Metrik

$$ds^2 = \cos\theta \, d\varphi^2 + d\theta^2. \quad (2.22)$$

Selbstverständlich sind diese singulären Stellen der Metrik in Wirklichkeit keine Singularitäten: Der Nord- und Südpol sind ebenso regulär auf der Kugel wie jeder andere Punkt.

Es gibt auch noch „schlimmere“ Koordinatensingularitäten. Betrachten wir dazu als Beispiel eine horizontale Zylinderprojektion der Kugel bzw. die Zylinderkoordinaten einer Kugel. Das bedeutet, jeder Längengrad wird wieder auf eine Gerade zu einem Winkel  $\varphi$  abgebildet, aber statt des Breitengrads verwenden wir nun einfach die  $z$ -Koordinate. Wir können also jeden Punkt auf der Kugel durch die Koordinaten  $\varphi$  und  $z$  ausdrücken:

$$\vec{x} = (\sqrt{R^2 - z^2} \cos \varphi, \sqrt{R^2 - z^2} \sin \varphi, z). \quad (2.23)$$

Die Tangentialvektoren zu den Koordinatenlinien sind nun

$$\vec{e}_\varphi = \sqrt{R^2 - z^2} (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) \quad (2.24)$$

$$\vec{e}_z = \left( -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \cos \varphi, -\frac{z}{\sqrt{R^2 - z^2}} \sin \varphi, 1 \right), \quad (2.25)$$

womit wir für die Metrik erhalten:

$$ds^2 = (R^2 - z^2) d\varphi^2 + \frac{R^2}{R^2 - z^2} dz^2. \quad (2.26)$$

In diesem Fall verschwindet ein Eigenwert der Metrik bei  $z = \pm R$  (also am Nord- und Südpol) und der andere Eigenwert wird unendlich. Das Produkt der beiden Eigenwerte bleibt in diesem Fall allerdings konstant. Eine ganz ähnliche Situation werden wir später am Horizont eines Schwarzen Loches wiederfinden.

Abbildung 2.1 zeigt die angegebene Projektion der Kugelfläche auf eine Ebene sowie die resultierende Karte mit einigen Längen- und Breitengraden. Man erkennt, dass die Längengraden in der Karte parallel sind (also einen konstanten Abstand voneinander haben), wohingegen die Abstände zwischen den „tatsächlichen“ Längengraden auf der Kugelfläche Richtung Nord- oder Südpol immer kleiner werden. Der obere und untere Rand der Karte sind singulär, insofern die gesamte Linie nur einem Punkt entspricht, das horizontale Maß dort somit null wird. Die Breitengrade hingegen haben

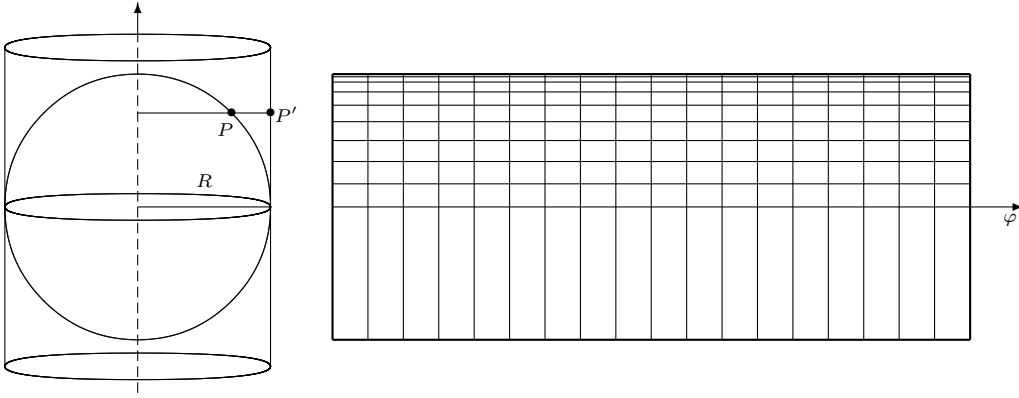


Abbildung 2.1: Spezielle Projektion einer Kugeloberfläche auf einen Zylinder. (links) Jeder Punkt wird von der  $z$ -Achse aus senkrecht in radialer Richtung auf die Zylinderfläche projiziert, z.B. der Punkt  $P$  auf den Punkt  $P'$ . (rechts) Längen- und Breitengrade in dieser Karte.

auf der Kugeloberfläche immer denselben Abstand voneinander, werden in der Karte aber zum Nord- bzw. Südpol hin immer dichter. Das vertikale Maß wird dort beliebig groß.

Selbstverständlich gilt nach wie vor, dass die Kugel am Nord- und Südpol nicht singulär ist, sondern lediglich eine schlechte Karte gewählt wurde. Es gibt natürlich auch Karten, die am Nord- und Südpol singularitätenfrei sind (siehe jeden Weltatlas).

Es gibt natürlich auch tatsächliche Singularitäten bei Mannigfaltigkeiten, beispielsweise im Zentrum eines Schwarzen Loches. Bei solchen Singularitäten wird auch die Metrik bzw. die Karte singulär, allerdings lässt sich diese Singularität nicht durch die Wahl einer anderen Karte beheben. Den Komponenten der Metrik sieht man nicht sofort an, ob es sich um eine Koordinatensingularität oder eine echte Singularität handelt. Dazu muss man geometrische Größen betrachten, die nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängen, beispielsweise die skalare Krümmung, die wir in Abschnitt 2.4 kennen lernen werden.

## 2.3 Der Levi-Civita-Zusammenhang

Der nächste Schritt beschreibt, wie man einen Vektor (also ein Element eines Tangentialraums) entlang eines Weges auf der Mannigfaltigkeit parallel verschiebt. Eine solche Parallelverschiebung ist aus zwei Gründen wichtig: (1) Wir werden im nächsten Abschnitt die Krümmung über infinitesimale Parallelverschiebungen entlang geschlossener Wege definieren, und (2) möchten wir die kräftefreie Bewegung definieren als eine Bahnkurve, deren Tangentialvektor (also die Geschwindigkeit) im Sinne einer Parallelverschiebung konstant bleibt.

### 2.3.1 Die Christoffel-Symbole

In einem flachen euklidischen Raum mit kartesischen Koordinaten können wir einfach sagen, zwei Vektoren sind parallel, wenn sie dieselben Komponenten haben. Bei einer parallelen Verschiebung in eine beliebige Richtung  $dx^\mu$  ändert der Vektor  $X^\nu$  also seine Komponenten nicht, oder

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} X^\mu = 0. \quad (2.27)$$



Anders ausgedrückt ändern sich die Komponenten eines Vektors nicht, wenn man ihn in eine Richtung  $dx^\nu$  verschiebt, d.h.:

$$\delta X^\mu(p) = X^\mu(p + dx^\nu) - X^\mu(p) = 0. \quad (2.28)$$

Die etwas unmathematische Notation  $p + dx^\nu$  soll Folgendes andeuten: Der Punkt  $p$  habe die Koordinaten  $x^\mu(p)$  und der infinitesimal benachbarte Punkt  $q$  die Koordinaten  $x^\mu(q)$ . Die Koordinaten dieser beiden Punkte unterscheiden sich um  $dx^\nu$ .

Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit werden sich die Komponenten von einem Vektor  $X^\mu$  verändern, wenn er parallel zu einem Nachbarpunkt verschoben wird. Seien nun  $p$  und  $q$  zwei infinitesimal benachbarte Punkte, sodass für die Koordinaten gilt:  $x^\mu(p) - x^\mu(q) = dx^\mu$ . Die Komponenten des Vektorfelds am Punkte  $p$  seien  $X^\mu(p)$  und die am Punkte  $q$  entsprechend  $X^\mu(q)$ . Wir wollen nun definieren, unter welcher Bedingung die beiden Vektoren, ausgedrückt durch ihre Komponenten, parallel sind. Diese Vorschrift lässt sich durch eine lineare Abbildung angeben, die nicht nur vom Punkte  $p$  sondern auch noch von der Richtung abhängt, in welche die parallele Verschiebung erfolgt. Diese Größe hat somit drei Indizes und man bezeichnet sie mit  $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu(p)$ .

Die folgende Gleichung definiert nun eine Parallelverschiebung:

$$\delta X^\mu = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu dx^\lambda. \quad (2.29)$$

Sie bedeutet Folgendes:  $\delta X^\mu$  ist die Differenz zwischen der  $\mu$ -Koordinate des Vektors am Punkte  $p$  und der  $\mu$ -Koordinate des zweiten Vektors am Punkte  $q = p + dx^\lambda$ , also  $\delta X^\mu = X^\mu(p + dx^\lambda) - X^\mu(p)$ . Diese Differenz soll eine lineare Funktion der Komponenten von  $X^\mu$  sein und ebenfalls linear von der Verschiebung  $dx^\lambda$  abhängen. Wenn die obige Bedingung erfüllt ist, bezeichnet man die beiden Vektoren, deren Komponenten sich um  $\delta X^\mu$  unterscheiden, als parallel.

Wir müssen uns nun überlegen, welche Bedingungen wir an diese Abbildung, die man auch als *Zusammenhang* bezeichnet, stellen. Bei allgemeinen Vektorräumen ist man hier vollkommen frei, d.h., es kann sich um eine vollkommen beliebige (allerdings umkehrbare) lineare Abbildung handeln. Sind jedoch auf dem Vektorraum zusätzliche Strukturen definiert, sollte die Parallelverschiebung diese Strukturen nach Möglichkeit erhalten. In unserem Fall ist auf der Mannigfaltigkeit eine Metrik definiert und man wird von einer Parallelverschiebung erwarten, dass sie das Skalarprodukt von Vektoren nicht verändert. Einen solchen Zusammenhang bezeichnet man auch als *metrischen Zusammenhang*. Wenn also *zwei* Vektoren  $X$  und  $Y$  definiert sind, dann soll ihr Skalarprodukt am Punkte  $p$  dasselbe sein, wie das Skalarprodukt ihrer Parallelverschiebungen am Punkte  $q$ . Das führt auf folgende Bedingung:

$$g_{\mu\nu}(p)X^\mu(p)Y^\nu(p) = g_{\mu\nu}(q)X^\mu(q)Y^\nu(q). \quad (2.30)$$

Diese Gleichung ist zunächst nur für infinitesimal benachbarte Punkte (mit der Verschiebungsrichtung  $dx^\mu$ ) sinnvoll, da im allgemeinen eine Parallelverschiebung von dem Weg abhängt, entlang dem die Vektoren verschoben wurden (siehe auch den Anhang zu Faserbündeln in dem Skript zur QFT).

Wir schreiben nun für die Koordinaten von  $q$ :  $x^\lambda(q) = x^\lambda(p) + dx^\lambda$  und entwickeln den Ausdruck auf der rechten Seite bis zu linearen Termen in  $dx^\lambda$ . Die führende Ordnung hebt sich natürlich auf der linken und rechten Seite weg.

$$0 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} dx^\lambda X^\mu Y^\nu + g_{\mu\nu} \Gamma_{\alpha\lambda}^\mu X^\alpha dx^\lambda Y^\nu + g_{\mu\nu} X^\mu \Gamma_{\alpha\lambda}^\nu Y^\alpha dx^\lambda. \quad (2.31)$$

Sämtliche Terme in diesem Ausdruck sind nun als Ausdrücke am Punkt  $p$  zu verstehen. In der folgenden Gleichung sind lediglich die Summationsindizes umbenannt und die gleichen Terme ausgeklammert worden:

$$0 = \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + g_{\alpha\nu} \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\mu\alpha} \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha \right) dx^\lambda X^\mu Y^\nu. \quad (2.32)$$

Da diese Bedingungsgleichung für eine Parallelverschiebung für beliebige Vektorfelder  $X$  und  $Y$  sowie beliebige Verschiebungsrichtungen  $dx^\lambda$  gelten soll, muss der Ausdruck in der Klammer verschwinden:

$$0 = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + g_{\alpha\nu}\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha + g_{\mu\alpha}\Gamma_{\nu\lambda}^\alpha. \quad (2.33)$$

Diese Gleichung ist noch nicht eindeutig nach den  $\Gamma$ -Symbolen, die man auch als *Christoffel-Symbole* bezeichnet, auflösbar. Man fordert für den so genannten Levi-Civita-Zusammenhang noch die *Torsionsfreiheit*, d.h., die  $\Gamma$ -Symbole sollen in den beiden unteren Indizes symmetrisch sein. Anschaulich bedeutet dies, dass die Ableitung der  $\mu$ -Komponente eines Vektorfeldes in  $\nu$ -Richtung gleich der Ableitung der  $\nu$ -Komponente in  $\mu$ -Richtung sein soll. Diese beiden Forderungen – es soll sich um einen metrischen und torsionsfreien Zusammenhang handeln – legen den Levi-Civita-Zusammenhang und damit die Christoffel-Symbole als Funktion der Metrik fest:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\kappa} \left[ \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right].$$

### 2.3.2 Ein paar mathematische Zwischenbemerkungen

Der Mathematiker versucht, geometrische Konstruktionen möglichst unabhängig von einer Wahl der Koordinaten zu definieren. Ausgangspunkt ist meist ein Vektorfeld  $X$ , das entlang bestimmter Richtungen abgeleitet werden soll. Diese Richtungen werden wiederum koordinatenunabhängig durch ein zweites Vektorfeld  $Y$  definiert. Dazu muss zunächst gezeigt werden, dass jedes Vektorfeld  $Y$  (zumindest in einer offenen Umgebung, also einer Karte) Integralkurven besitzt, also eine Lösungsschar von Wegen  $\gamma(t)$ , deren Tangentialvektoren an jedem Punkt  $p$  gleich  $Y(p)$  sind. Dann kann man ein Vektorfeld  $X$  nach dem Vektorfeld  $Y$  ableiten.

Eine spezielle Ableitung, die so genannte *kovariante Ableitung*, gibt nun an, unter welchen Bedingungen ein Vektorfeld  $X$ , abgeleitet nach einem Vektorfeld  $Y$  „konstant“ ist, also in Richtung der Integralkurven von  $Y$  eine Parallelverschiebung von Vektoren darstellt. Diese kovariante Ableitung bezeichnet man oft als  $\nabla_Y$ . Die Bedingung einer Parallelverschiebung lautet dann

$$\nabla_Y X = 0. \quad (2.34)$$

Zum Vergleich mit unserer Notation betrachten wir einen speziellen Weg  $\gamma(t)$  durch den Punkt  $p$ , also  $\gamma(0) = p$ . In einer Karte werde dieser Weg durch  $y^\mu(t)$  beschrieben. Der Tangentialvektor in dieser Karte am Punkte  $p$  ist somit

$$Y^\mu(p) = \left. \frac{dy^\mu(t)}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.35)$$

Nun betrachten wir das Vektorfeld  $X$ , das entlang des Weges  $\gamma(t)$  die Koordinaten  $X^\mu(t)$  haben soll. Wir sagen, dieses Vektorfeld ist entlang des Weges  $\gamma(t)$  (am Punkte  $p$ ) eine Parallelverschiebung, wenn

$$\frac{dX^\mu(t)}{dt} = \frac{\partial X^\mu}{\partial y^\lambda} \frac{dy^\lambda(t)}{dt} = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu(t) \frac{dy^\lambda(t)}{dt} \quad (2.36)$$

ist, bzw.

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial y^\lambda} = \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu. \quad (2.37)$$

Die kovariante Ableitung in Richtung der Koordinate  $\lambda$  ist somit:

$$\nabla_\lambda X^\mu := \partial_\lambda X^\mu - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu X^\nu, \quad (2.38)$$

und das Verschwinden der kovarianten Ableitung ist die Bedingung, dass es sich bei dem Vektorfeld  $X^\mu$  um eine Parallelverschiebung in Koordinatenrichtung  $\lambda$  handelt.

Abschließend möchte ich noch anmerken, dass man auch für Tensoren eine kovariante Ableitung definieren kann. Gleichung 2.33 bedeutet dann, dass die kovariante Ableitung der Metrik verschwindet. Dies ist eine alternative Definition für einen metrischen Zusammenhang.

### 2.3.3 Ein Beispiel aus der klassischen Mechanik – konstant rotierende Bezugssysteme

In diesem Zwischenabschnitt möchte ich darauf hinweisen, dass das Konzept der kovarianten Ableitung schon aus der Mechanik bekannt ist, allerdings meist nicht unter diesem Namen. Bei der Herleitung der Coriolis-Kraft betrachtet man ein ruhendes Inertialsystem und ein konstant rotierendes zweites Bezugssystem, dessen Ursprung mit dem ruhenden System zusammenfallen soll.

Ein Bahnkurve  $x^i(t)$  (hier verwende ich lateinische Indizes, da es sich um rein räumliche Indizes handelt) im ruhenden System ist eine Gerade, wenn die zeitliche Ableitung  $v^i(t) = \frac{dx^i(t)}{dt}$  konstant ist. Im rotierenden System hingegen ändern sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors ständig. Seien

$$x'^i(t) = \sum_j R(t)^i_j x^j(t) \quad (2.39)$$

die Koordinaten der Bahnkurve im rotierenden System (wobei  $R(t)$  eine  $t$ -abhängige Rotationsmatrix darstellt) und entsprechend

$$v'^i(t) = \frac{d}{dt} \sum_j R(t)^i_j x^j(t) = \sum_j \left( \frac{d}{dt} R(t)^i_j \right) x^j(t) + \sum_j R(t)^i_j \frac{d}{dt} x^j(t) \quad (2.40)$$

die Komponenten der Geschwindigkeit im rotierenden System, dann gilt bekanntlich

$$\vec{v}'(t) = R(t) (\vec{v}(t) + \vec{\omega} \times \vec{x}(t)) , \quad (2.41)$$

wobei  $\vec{\omega}$  die Drehung charakterisiert, also die Richtung von  $\vec{\omega}$  die Drehachse und der Betrag die Winkelgeschwindigkeit. Nun definiert man oft die kovariante Zeitableitung

$$\frac{D}{Dt} \vec{x}(t) = \frac{d}{dt} \vec{x}(t) + \vec{\omega} \times \vec{x}(t) \quad (2.42)$$

bzw. in Koordinaten

$$\frac{D}{Dt} x^i(t) = \frac{d}{dt} x^i(t) + \sum_{jk} \epsilon^i_{jk} \omega^j x^k(t) . \quad (2.43)$$

Die Größe  $\Gamma^i_k = \sum_j \epsilon^i_{jk} \omega^j$  definiert den Zusammenhang. Da die „Mannigfaltigkeit“ nur in der Zeitachse besteht, gibt es keinen gesonderten Index für die Richtung der Parallelverschiebung. Die kovariante Ableitung gibt an, wie sich die Komponenten eines Vektors im rotierenden System zeitlich verändern müssen, wenn dieser Vektor im ruhenden System konstant ist. Und die kovariante Ableitung verschwindet, wenn sich die Komponenten genau so verändern, dass es sich bei dem Vektor im Inertialsystem um einen konstanten Vektor handelt.

### 2.3.4 Die Geodätengleichung

Wir formulieren nun eine Geodätengleichung, d.h. eine Gleichung für die kürzeste (in der Relativitätstheorie wegen der Pseudo-Riemann'schen Geometrie die längste) Verbindungskurve zwischen zwei Punkten. Wir leiten diese Gleichung aus physikalischen Überlegungen zur Konstanz der Geschwindigkeit ab.

Gegeben sei eine Bahnkurve  $\gamma(\tau)$  mit ihrer Koordinatendarstellung  $x^\mu(\tau)$ , parametrisiert durch die Eigenzeit  $\tau$ . An jedem Punkt sei

$$u^\mu(\tau) = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau} \quad (2.44)$$

der Geschwindigkeitsvektor an die Kurve. Bei dem Geschwindigkeitsvektor handelt es sich um einen Tangentialvektor.

Gewöhnlich sagen wir, eine Bahnkurve ist eine Gerade (oder Geodäte), wenn die Komponenten der Geschwindigkeit konstant sind, sich also entlang der Bahnkurve nicht ändern. Auf einer Mannigfaltigkeit mit einer Metrik bedeutet dies, dass sich die Änderung der Komponenten von  $u^\mu$  in *Richtung* der Geschwindigkeit nicht ändern, bzw.

$$du^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu dx^\lambda, \quad (2.45)$$

wobei

$$dx^\lambda = u^\lambda d\tau \quad (2.46)$$

in Richtung des Tangentialvektors zeigt. Damit erhalten wir als Geodätengleichung:

$$\frac{du^\mu(\tau)}{d\tau} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu u^\nu u^\lambda. \quad (2.47)$$

Diese Gleichung ist gleichzeitig die Bewegungsgleichung für ein „freies“ Teilchen auf einer Mannigfaltigkeit mit der Metrik  $g_{\mu\nu}$ . Die Geschwindigkeit muss dabei für ein massives Teilchen noch der Bedingung

$$c^2 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \quad m \neq 0 \quad (2.48)$$

genügen, die im Wesentlichen angibt, dass es sich bei  $\tau$  um die Eigenzeit handelt (in der gewöhnlichen Geometrie würde sich  $\tau$  auf die Bogenlänge beziehen). Für ein masseloses Teilchen ist  $d\tau = 0$  und damit folgt für eine beliebige Parametrisierung die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^\mu(\lambda)}{d\lambda^2} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\lambda}{d\lambda} \quad (2.49)$$

mit der Einschränkung

$$0 = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad m = 0. \quad (2.50)$$

Dieselbe Gleichung erhält man auch als Euler-Lagrange-Gleichung aus dem Längenfunktional

$$S = \int L(x(t), \dot{x}(t)) dt \quad \text{mit} \quad L = \sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}. \quad (2.51)$$

Die Ableitungen sind

$$\frac{\partial L}{\partial x^\lambda(t)} = \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \left( \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right) \quad (2.52)$$

und

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{\mu\nu}(x(t)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} g_{\mu\lambda} \dot{x}^\mu \right) \quad (2.53)$$

und die Extrema findet man, indem man die beiden Ausdrücke gleich setzt. Diese Gleichung wird sehr kompliziert, daher geht man auch hier meist zur Eigenzeitparametrisierung (Gl. 2.48 bzw. für masselose Teilchen Gl. 2.50) über, wodurch man nahezu direkt die Geodätengleichung erhält.

## 2.4 Krümmungstensoren

Der Levi-Civita-Zusammenhang bzw. die Christoffel-Symbole erlauben eine Parallelverschiebung eines Vektors in eine bestimmte Richtung. Sie ermöglichen damit den Vergleich zweier Vektoren an verschiedenen Punkten, sofern der eine Vektor entlang eines vorgegebenen Weges zu dem anderen Vektor parallel verschoben wird. Nun wollen wir einen Vektor entlang einer *geschlossenen* Bahnkurve parallel transportieren. Im Allgemeinen wird sich dabei der Vektor verändern. Diese Veränderung entlang geschlossener Bahnkurven ist ein Maß für die geometrische Krümmung der Mannigfaltigkeit.

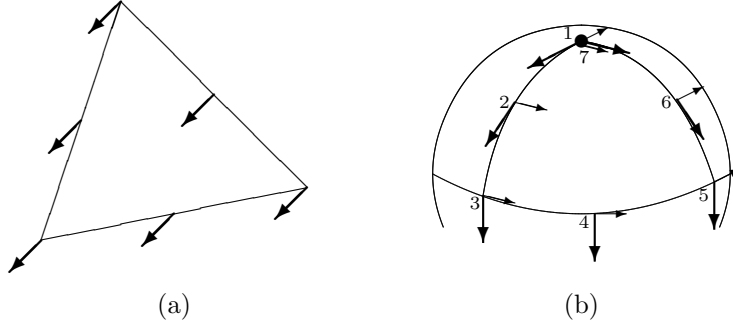


Abbildung 2.2: (a) Wird ein Vektor in einer Ebene entlang der Kanten eines Dreiecks parallel verschoben, ändert sich seine Richtung nicht. (b) Für eine entsprechende Parallelverschiebung entlang von Großkreisen (jeweils um eine Viertel Vollkreislänge) entlang der Positionen 1 bis 7 (Position 7 = Position 1) haben sich die Vektoren um  $90^\circ$  gedreht.

Wir betrachten zunächst ein vertrautes Beispiel auf der Kugeloberfläche: Wird ein Vektor beginnend am Nordpol entlang eines Längengrads parallel zum Äquator transportiert, anschließend entlang des Äquators um einen Viertelkreis parallel verschoben und dann wieder entlang eines Längengrads zum Nordpol, so hat sich dieser Vektor im Vergleich zu Anfangszustand um  $90^\circ$  gedreht (siehe Abb. 2.2). Verkleinert man die Fläche, um die herum ein Vektor parallel verschoben wird, so verkleinert sich auch der Winkel, um den dieser Vektor gedreht wird. Es zeigt sich jedoch, dass der Quotient aus dem Winkel, um den ein Vektor bei einer Parallelverschiebung um eine geschlossene Fläche gedreht wird, und dem Inhalt dieser Fläche gegen eine Konstante geht. Diese Konstante ist ein Maß für die Krümmung an dem Punkt, an dem dieser Weg beginnt und endet.

In Analogie zu Gleichung 2.29 definieren wir den Krümmungstensor  $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$  über eine infinitesimale Parallelverschiebung, diesmal allerdings entlang eines geschlossenen Weges:

$$\delta X^\mu = R^\mu_{\nu\rho\sigma} X^\nu d\sigma^{\rho\sigma}. \quad (2.54)$$

Diese Gleichung bedeutet Folgendes: Wenn ein Vektor  $X$  mit Komponenten  $X^\nu$  um den Rand des infinitesimalen Flächenelements  $d\sigma^{\rho\sigma}$  parallel verschoben wird, dann ändern sich seine Komponenten um  $\delta X^\mu$ . Das infinitesimale Flächenelement  $d\sigma^{\rho\sigma}$  liegt in der durch die Koordinaten  $\rho$  und  $\sigma$  aufgespannten Ebene und hat den Flächeninhalt  $|d\sigma^{\rho\sigma}|$ .

Damit lässt sich aus den Christoffel-Symbolen der Riemann-Christoffel-Krümmungstensor berechnen:

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\kappa\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\kappa} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}.$$

Bei diesem Ausdruck handelt es sich im Wesentlichen um den Kommutator von zwei kovarianten Ableitungen

$$R^\lambda_{\mu\nu\kappa} = [(\partial_\mu \delta^\lambda_\alpha - \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}), (\partial_\nu \delta^\alpha_\kappa - \Gamma^\alpha_{\nu\kappa})], \quad (2.55)$$

was nochmals zum Ausdruck bringt, dass eine kovariante Ableitung ein Generator einer Parallelverschiebung in eine bestimmte Richtung ist, und der Krümmungstensor als Kommutator zweier solcher Generatoren als Differenz zwischen „erst Richtung  $\kappa$ , dann Richtung  $\nu$ “ und „erst Richtung  $\nu$ , dann Richtung  $\kappa$ “ aufzufassen ist.

Aus dem Riemann-Christoffel-Krümmungstensor erhält man durch Kontraktion den Ricci-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\lambda\nu}^{\lambda}.$$

Eine weitere Kontraktion führt auf den Krümmungsskalar:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}.$$

In der Riemannschen Geometrie – mit positiv definiter Metrik – hat der Krümmungsskalar eine sehr anschauliche Bedeutung. Es ist der führende Korrekturfaktor für das Volumen  $V_d(r)$  einer Kugel vom Radius  $r$  im Vergleich zum Volumen der Kugel in einem euklidischen Raum in  $d$ -Dimensionen (siehe Pauli [1], S. 48):

$$V_d(r) = C_d r^d \left\{ 1 + \frac{R}{6} \frac{r^2}{d+2} + \dots \right\}.$$

Die Ableitung nach  $r$  liefert eine entsprechende Formel für die Oberfläche der Kugel:

$$S_d(r) = d C_d r^{d-1} \left\{ 1 + \frac{R}{6} \frac{r^2}{d} + \dots \right\}.$$

## 2.5 Die Einstein'schen Feldgleichungen

Damit haben wir die rein geometrischen Bausteine der Allgemeinen Relativitätstheorie. Es fehlt noch der Anteil der Materie, ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$ . Lässt sich die Materie in einer durch den metrischen Tensor  $g_{\mu\nu}$  beschriebenen Raum-Zeit durch eine Wirkung  $S[g; \dots]$  beschreiben, so gilt formal:

$$T_{\mu\nu} = \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}.$$

Diese Formel ist besonders nützlich, wenn die Materie durch Felder repräsentiert wird, beispielsweise im Fall der Maxwell-Theorie (in einer gekrümmten Raumzeit), der Dirac- oder der Klein-Gordon-Theorie.

Die Einstein'schen Feldgleichungen lauten nun:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (2.56)$$

( $G$  ist Newtons Gravitationskonstante.) Die linke Seite dieser Gleichung enthält rein geometrische Größen der Raumzeit; die rechte Seite den Materieanteil in der Raumzeit. Der Energie-Impuls-Tensor hängt im Allgemeinen ebenfalls von der Metrik ab. Diese Gleichung ist allerdings nur eine Hälfte des vollständigen Gleichungssystems der Allgemeinen Relativitätstheorie. Es fehlt noch die Bewegungsgleichung der Materie. Lässt sich die Materie durch eine Wirkung beschreiben, so erhält man diese Bewegungsgleichungen durch Variation der Wirkung nach den entsprechenden Freiheitsgraden. Für Punktteilchen ist die Geodätengleichung 2.47 die Bewegungsgleichung eines Teilchens in einer gekrümmten Raum-Zeit.

Die Einstein'schen Feldgleichungen lassen sich auch als Euler-Lagrange-Gleichungen aus einer Wirkung ableiten. Dazu betrachten wir folgenden Ausdruck, die so genannte *Einstein-Hilbert-Wirkung*:

$$S = \kappa \int d^4x \sqrt{-g} R + S[g_{\mu\nu}; \varphi, \psi, \dots] \quad (2.57)$$

Der erste Term beschreibt ein 4-dimensionales Volumenintegral über die skalare Krümmung. Der Faktor  $\sqrt{-g}$  ist die Quadratwurzel aus der Determinante des metrischen Tensors. Das Minuszeichen macht diesen Ausdruck positiv, da in der üblichen Signatur die Determinante der Pseudo-Riemann'schen Metrik negativ ist. Die Kombination  $d^4x\sqrt{-g}$  ist das invariante Volumenmaß. Die Konstante  $\kappa$  hängt über

$$\kappa = \frac{c^3}{16\pi G} \quad (2.58)$$

mit der Newton'schen Gravitationskonstante  $G$  zusammen.

Der zweite Term ist die Wirkung der Materie. Handelt es sich um Felder (Skalarfelder  $\varphi$  oder Dirac-Felder  $\psi$ ) ist dies die übliche Klein-Gordon-Wirkung bzw. Dirac-Wirkung, allerdings koppeln diese Felder nun (minimal) an die Metrik. Wie schon erwähnt, liefert die Funktionalableitung dieser Wirkung nach der Metrik den Energie-Impuls-Tensor der Materie und damit den rechten Teil der Einstein'schen Gleichungen. Die Funktionalableitung des Krümmungsskalars nach der Metrik liefert die linke Seite der Einstein'schen Gleichungen.

Manchmal addiert man zu der angegebenen Wirkung noch einen Term

$$S_\Lambda = -2\kappa\Lambda \int d^4x \sqrt{-g}, \quad (2.59)$$

wobei  $\Lambda$  die so genannte *kosmologische Konstante* ist. Dieser Teil der Wirkung besteht also einfach aus einem Volumenintegral. Die Einstein-Gleichungen werden damit zu

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.60)$$

Den noch fehlenden zweiten Anteil der Bewegungsgleichungen – die Bewegungsgleichungen für die Materie – erhält man aus der Wirkung (Gl. 2.57) durch die Variation nach den Feldern. Betrachtet man freie Punktteilchen, so ist ihre Wirkung durch das Längenfunktional (Gl. 2.51) gegeben und die zweite Bewegungsgleichung ist die Geodätengleichung.

Abschließend wollen wir die Einstein'schen Feldgleichungen noch etwas umformen, was die Lösung insbesondere für den Fall  $T_{\mu\nu} = 0$  einfacher macht. Bilden wir auf beiden Seiten der Gleichung 2.56 die Spur (genauer, ziehen einen der Indizes mit der Metrik hoch und bilden dann die Spur) so erhalten wir

$$R = \frac{8\pi G}{c^4}T. \quad (2.61)$$

Wir können daher den Term mit der skalaren Krümmung auf die andere Seite der Gleichung bringen:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right). \quad (2.62)$$

Man erkennt an dieser Form sofort, dass die Lösungen der Einstein-Gleichungen im Vakuum (also für  $T_{\mu\nu} = 0$ ) durch

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (2.63)$$

gegeben sind. Der Ricci-Tensor (und damit natürlich auch die skalare Krümmung) verschwinden im materiefreien Raum.





# Literaturverzeichnis

- [1] Wolfgang Pauli; *Theory of Relativity*; Dover Publications, New York, 1981.