# Kapitel 7

# ART-Kosmologie

Außerdem gibt es Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen, die kosmologische Modelle beschreiben – die bekannteste Lösung ist in diesem Fall die Friedman-Lösung bzw. Robertson-Walker-Metrik.

## 7.1 Kosmologische Modelle

Eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen entspricht einer vollständigen Raum-Zeit, d.h. einem Modell eines Kosmos. Zum ersten Mal hat die Physik mit der Allgemeinen Relativitätstheorie somit ein Modell an der Hand, mit dem sich kosmologische Fragen, insbesondere auch zur Entstehungsgeschichte des Universums, wissenschaftlich angehen lassen.

Einstein ging zunächst davon aus, dass unser Universum auf großen Skalen im Wesentlichen statisch sei. Er musste jedoch rasch feststellen, dass seine Feldgleichungen ein solch statisches Universum nur in sehr unphysikalischen Situationen ($T_{\mu\nu} = 0$) zulassen. Um auch für realistischere Materieverteilungen Lösungen zu einem statischen Universum zu erhalten, erweiterte Einstein seine Feldgleichungen um einen sogenannten kosmologischen Term mit einer kosmologischen Konstanten $\Lambda$, sodass Gl. **??** zu folgender Gleichung wird:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} \; = \; -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \; . \tag{7.1}$$

Geometrisch könnte man $\Lambda$ als eine „negative Raumkrümmung" des Vakuums interpretieren, die durch die vorhandene Materie nahezu ausgebügelt wird. Schlägt man den kosmologischen Term der rechten Seite der Gleichung zu, so kann man ihn als eine Art Energiedichte des Vakuums interpretieren, die zu einer negativen Raumkrümmung führt.

Durch die kosmologische Konstante hoffte Einstein, statische Lösungen der Feldgleichungen mit Materiefeldern zu erhalten. Er wurde aber rasch enttäuscht. Angeblich (die einzige Quelle für dieses Zitat scheint der Physiker George Gamow zu sein) hat Einstein bei späterer Gelegenheit die Einführung dieses Terms als seine „größte Eselei" bezeichnet.

### 7.1.1 Das Olbers'sche Paradoxon

Im Rahmen der klassischen Kosmologie war schon bekannt, dass die Annahme eines homogenen, seit unendlichen Zeiten in gleicher Form bestehenden Kosmos zu einem Widerspruch führt. Heute bezeichnet man dieses Paradoxon meist nach dem Astronom und Arzt Heinrich Wilhelm Matthias Olbers (*geb. 11.10.1758 in Arbergen bei Bremen; gest. 2.3.1840 in Bremen*), obwohl entsprechende Überlegungen bereits von Edmund Halley (1656–1742) angestellt wurden.

Olbers argumentierte, dass der Himmel in alle Richtungen dieselbe Helligkeit wie die Sonne haben müsste. Insbesondere müsste es auch Nachts „taghell“ sein. Das Argument basiert auf der Annahme eines unendlich ausgedehnten, homogenen Universums (d.h. die Sternendichte ist überall nahezu konstant), das in dieser Form auch seit unendlicher Zeit existiert hat. In diesem Fall müsste nämlich aus jeder Raumrichtung das Licht eines Sterns auf die Erde treffen.

Olbers selber glaubte das Paradoxon dadurch umgehen zu können, dass er Wolken im Kosmos annahm, die das Licht von sehr weit entfernten Sternen verdecken. Man weiß heute jedoch, dass sich diese Wolken durch die einfallende Strahlung hätten erwärmen müssen, bis sie schließlich ins thermische Gleichgewicht mit dieser Strahlung gekommen wären, d.h. ebenfalls die Strahlung emittieren würden. Auch die Annahme einer endlichen Lebensdauer der Sterne umgeht das Paradoxon nicht, wenn man zusätzlich fordert, dass die mittlere Sterndichte konstant bleibt, also auch ständig neue Sterne entstehen.

Aus heutiger Sicht gibt es zwei Lösungen dieses Olbers’schen Paradoxons (vgl. [**?**], S. 347):

1. Für ein endliches Weltalter gibt es den Ereignishorizont, jenseits dessen wir nichts sehen. Auch in einem unendlich ausgedehnten Universum erreicht uns nur Licht aus einem Bereich, der in unserer kausalen Vergangenheit liegt.

2. Bei einer Expansion des Universums nimmt die Fluchtgeschwindigkeit mit dem Abstand zu. Geht diese Fluchtgeschwindigkeit gegen die Lichtgeschwindigkeit, so muss die Rotverschiebung des wahrgenommenen Lichtes gegen Unendlich gehen. Auch hierdurch wird die empfangene Helligkeit begrenzt. Diese Schranke der Wahrnehmbarkeit ist für Robertson-Walker-Universen (s.u.) mit dem Ereignishorizont identisch.

### 7.1.2 Expandierende Universen

Im Jahre 1924 zeigte Edwin Powell Hubble (*geb. 20.11.1889 in Marshfield (Missouri), gest. 28.9.1953 in San Marino (Kalifornien)*) die Existenz von Galaxien außerhalb unseres Sternensystems. Fünf Jahre später entdeckte er die Expansion des Weltalls über die Rotverschiebung entfernter Galaxien. Zu dem Zeitpunkt, als Einstein die Allgemeine Relativitätstheorie entwickelt hatte, waren also weder außergalaktische Objekte noch die Expansion des Universums bekannt.

Doch schon im Jahre 1917 fand der sowjetische Kosmologe Aleksandr Alexandrovich Friedmann (1888–1925) Lösungen der Einstein-Gleichungen, die ein expandierendes Universum beschreiben. Er legte so die Grundlagen für unsere heutige Big-Bang- bzw. Urknall-Theorie.

Die wesentliche Annahme, die für kosmologische Lösungen der Einstein-Gleichungen meist gemacht wird, ist die Homogenität und Isotropie unseres Universums. Darunter versteht man, dass auf sehr großen Skalen kein Ort und keine Richtung im Universum ausgezeichnet sind. Diese Annahme bezeichnet man auch als kosmologisches Prinzip. Für den geometrischen Anteil der Einstein-Gleichungen bedeutet dies, dass die dreidimensionale Krümmung räumlich konstant sein muß. Lediglich eine Zeitabhängigkeit dieser Krümmung ist noch erlaubt. Es zeigt sich, dass unter diesen Bedingungen nur noch eine Metrik der Form

$$\mathrm{d}s^2 \;=\; c^2\mathrm{d}t^2 - R(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}r^2}{1-kr^2} + r^2(\mathrm{d}\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,\mathrm{d}\phi^2)\right) \tag{7.2}$$

möglich ist. Diese Metrik bezeichnet man als Robertson-Walker-Metrik.

Zwei freie Parameter kennzeichnen diese Metrik: Der Parameter $k$, der durch geeignete Skalierung von $r$ auf die Werte $k = 0, +1, -1$ beschränkt werden kann, und der Wert $R(t)$, der über die Gleichung

$$K \;=\; \frac{k}{R(t)^2} \tag{7.3}$$

mit dem dreidimensionalen Krümmungsskalar $K$ in Beziehung steht. Der Wert von $k$ unterscheidet somit, ob die dreidimensionale skalare Krümmung positiv, null oder negativ ist. Dem entsprechen drei unterschiedlichen Formen von Universen. Insbesondere ist für $k = 1$ der dreidimensionale Raum endlich, aber ohne Grenze (Kugel).

Das kosmologische Prinzip wird gelegentlich angezweifelt, und man kann zurecht fragen, ob wir wirklich eine Homogenität und Isotropie des Raumes beobachten. Der sichtbare Teil des Universums hat einen Radius von ungefähr $10^{10}$ Lichtjahren. Unsere Galaxie andererseits hat einen Radius von $10^5$ Lichtjahren. Die meisten Galaxien sind in Clustern oder Haufen mit einem Durchmesser von rund $10^7$ Lichtjahren konzentriert. Bis zu dieser Skala beobachten wir somit durchaus reichhaltige Strukturen auch in der Form der Materieverteilung. Es handelt sich also um maximal zwei bis drei Größenordnungen, für die das kosmologische Prinzip gültig sein könnte. Ob das der Fall ist, oder ob es weitere charakteristische Strukturen jenseits der Galaxiencluster gibt, müssen zukünftige Messungen entscheiden.

Noch wurde nichts über die zeitliche Entwicklung des Universums ausgesagt. Diese steckt in der Abhängigkeit des „Radius“ $R(t)$ – genauer sollte man von einer Skala sprechen – des Universums von der Zeit und sollte aus der Einstein-Gleichung bestimmt werden. Dazu macht man üblicherweise Annahmen über den Energie-Impuls-Tensor der Materie, der nach dem kosmologischen Prinzip ebenfalls räumlich konstant und isotrop sein sollte. Die wesentliche Freiheit besteht in der Relation zwischen der Materiedichte $\rho$ und dem „Radius“ $R(t)$. Für „normale“ Materie gilt

$$\rho_m R(t)^3 \;=\; \text{const} \qquad\qquad (\text{materiedominiert}) \,, \tag{7.4}$$

also die bekannte Relation, dass die Dichte umgekehrt proportional zum Volumen ist. Für Strahlung beispielsweise gilt

$$\rho_s R(t)^4 \;=\; \text{const} \qquad\qquad (\text{strahlungsdominiert}) \,. \tag{7.5}$$

Mit diesen Relationen erhält man aus den Einstein-Gleichungen eine einfache Differentialgleichung für $R(t)$,

$$\dot{R}^2 + V(R) \;=\; -k \,, \tag{7.6}$$

mit

$$V(R) \;=\; -\frac{a}{R^2} - \frac{b}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2 \,. \tag{7.7}$$

$a$ und $b$ sind Konstanten, die den Anteil an Strahlung bzw. normaler Materie im Universum angeben, und $\Lambda$ ist die kosmologische Konstante. Modelle, bei denen $R(t)$ der Gl. **??** genügt, bezeichnet man als Friedmann-Modelle.

Qualitativ lassen sich die Lösungen von Gl. **??** leicht durch die physikalische Analogie mit der Energie eines eindimensionalen Teilchens in einem effektivem Potential $V(R)$ diskutieren. Für $\Lambda = 0$ beispielsweise kann es Universen geben, deren Radius (Skala) nach oben beschränkt ist – in diesem Fall kommt es wieder zu einem Kollaps. Oder aber das Universum expandiert für alle Zeiten.

Der wesentliche Parameter für diese Unterscheidung ist die Materiedichte im Universum. Aus der sichtbaren Materie in unserem Universum würde man auf einen Wert von $\rho$ schließen, der zu einem ewig expandierenden Universum führt. Allerdings deuten genaue Untersuchungen der Bewegungen von Galaxien darauf hin, dass der größte Teil der Materie in unserem Universum unsichtbar ist.

Nachdem vor einigen Jahren aufgrund genauer Beobachtungen und Messugen an Supernovaexplosionen die Entfernungsskalen für Objekte, deren Entfernung nicht mehr durch Paralaxenmessugn möglich ist, revidiert werden mussen, ergibt sich heute (Stand Januar 2015) das Bild, dass sich unser Universum in einem Stadium befindet, in dem die Geschwindigkeit der Expansion wieder zunimmt, nachdem es vor rund 8 Milliarden Jahren eine „minimale Expansionsrate“ durchlaufen hat. Die Beobachtungen lassen sich zwar durch eine positive kosmologische Konstante beschreiben, doch die Natur

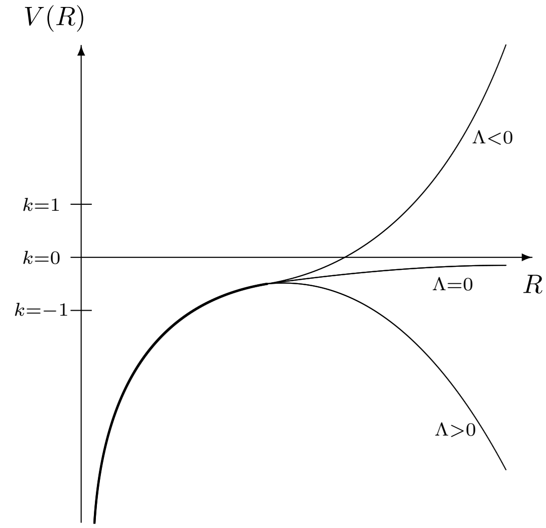


Abbildung 7.1: Das „effektive Potenzial“ für die Dynamik des Skalenfaktors $R(t)$ in einer Friedman-Lösung für verschiedene Werte der kosmologischen Konstanten $\Lambda$. In Abhängigkeit von $k$ verschiebt sich die $V(R) = 0$-Achse nach oben oder untern.

dieser Konstanten bleibt ungewiss. Manche Modelle postulieren eine ganz neue Energie- oder gar Materieform (man spricht auch manchmal von *Dunkler Energie*), die sich durch einen negativen Druck auszeichnet und das Universum zur Expansion „drängt“. In kaum einem Gebiet der Physik ändern sich derzeit die grundlegenden Vorstellungen innerhalb weniger Jahre so oft und so einschneidend wie in der Kosmologie.

### 7.1.3 Das de Sitter-Universum

Sollten sich die augenblicklichen Vorstellungen als richtig erweisen und die Skala des Universums beschleunigt zunehmen, wird der Materiegehalt immer dünner und spielt eine zunehmend geringere Rolle. In diesem Fall ist das Verhalten des Universums durch die Kosmologische Konstante $\Lambda$ dominiert, die bei einem beschleunigt expandierenden Universum positiv sein muss.

Ein Universum ohne Materiegehalt aber mit einer positiven Kosmologischen Konstanten bezeichnet man als *de Sitter-Universum*. Die „Bewegungsgleichung“ für $R(t)$ (Gl. **??**) wird in diesem Fall zu

$$\dot{R}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\Lambda}R(t) = HR(t) \tag{7.8}$$

mit Expansionsrate $H$. Die Lösung lautet:

$$R(t) = R_0 \mathrm{e}^{Ht} . \tag{7.9}$$

Dies ist die *de Sitter-Lösung* der Einstein'schen Gleichungen für einen materiefreien Raum mit einer kosmologischen Konstanten. Sie beschreibt nicht nur möglicherweise das asymptotische Verhalten unseres Universums in der fernen Zukunft, sondern sie hat auch viele interessante mathematische Eigenschaften.

# Literaturverzeichnis