Kapitel 1

Axiomatischer Zugang zur Physik

In der Mathematik ist ein Axiomensystem ein minimaler Satz von Aussagen,[1] die als wahr definiert werden und aus denen durch festgelegte Schlussfolgerungsregeln weitere Aussagen als wahr oder falsch bewiesen werden können. Die wesentlichen Bedingungen an ein Axiomensystem sind

(a) die Widerspruchsfreiheit, d.h., es soll keine Aussage geben, von der man beweisen kann, dass sie sowohl wahr als auch falsch ist, und

(b) die Unabhängigkeit der Axiome, d.h., es soll nicht möglich sein, für eines oder mehrere der Axiome unter Verwendung der anderen Axiome beweisen zu können, dass sie richtig sind.

Eine dritte Eigenschaft, die Vollständigkeit, kann nach den Unvollständigkeitssätzen von Gödel nicht immer garantiert werden. „Vollständig“ bedeutet dabei, dass von jeder formulierbaren Aussage bewiesen werden kann, ob sie richtig oder falsch ist. Darüber hinaus spielt gelegentlich in der Praxis eine Rolle, ob ein Axiomensystem reichhaltig bzw. interessant ist, d.h., ob sich viele nicht selbstverständliche Aussagen daraus ableiten lassen und ob diese Aussagen zur Definition von interessanten Strukturen Anlass geben.

Es gibt viele Axiomensysteme in der Physik: die drei Newton'schen Postulate der Newton'schen Mechanik, die Maxwell-Gleichungen zusammen mit der Lorentz-Kraft in der Elektrodynamik, die Axiome der speziellen Relativitätstheorie (insbesondere die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in allen Inertialsystemen unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle) und der allgemeinen Relativitätstheorie, die Hauptsätze der Thermodynamik etc. Oft spricht man in der Physik eher von Postulaten als von Axiomen, obwohl die Bedeutungen dieser beiden Terme kaum zu trennen sind.

Allgemein sind Postulate Aussagen, die man nicht mehr auf einfachere Aussagen zurückführen kann und die man als gegeben und richtig annimmt. In der Physik sollen diese Aussagen und die aus ihnen ableitbaren Schlussfolgerungen nicht im Widerspruch zum Experiment stehen. Oftmals handelt es sich sogar um Erfahrungstatsachen (z.B. die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit in der SRT oder die Existenz einer Zustandsgröße ‚Temperatur‘ in der Thermodynamik), die nicht unbedingt in jeder denkbaren Welt gelten müssten. Außerdem sollen diese Aussagen untereinander nicht widersprüchlich sein.

In dieser Form können Aussagen im Laufe der Zeit durchaus ihren Charakter als Postulate verlieren: Aus heutiger Sicht könnte man sagen, dass zu Keplers Zeit die Kepler'schen Gesetze den Charakter von Postulaten hatten - aus der Empirie gewonnenen Regelmäßigkeiten, die sich nicht weiter begründen lassen. Nachdem Newton seine Gesetze formuliert hatte (die nun den Charakter von

[1] Ich setze hier voraus, dass man entscheiden kann, ob eine Folge von Symbolen eine wohl definierte Aussage bildet oder nicht. In der Mathematik wird dies im Rahmen der Symbollogik geklärt.

Postulaten hatten), konnte man die Kepler'schen Gesetze aus den Newton'schen Gesetzen sowie dem Newton'schen Gravitationsgesetz ableiten. Das Newton'sche Gravitationsgesetz lässt sich wiederum aus den Grundgleichungen der Relativitätstheorie ableiten.

Ganz allgemein wird man in der Physik zwei Arten von Postulaten unterscheiden: Zum Einen sind dies die Anforderungen, die man überhaupt an eine physikalische Theorie bzw. ein physikalisches Modell stellen muss, damit man diese Theorie als widerspruchsfreie Theorie bezeichnen und in dieser Form akzeptieren kann. In Anlehnung an die Philosophie (und die Kategorientheorie der Mathematik) könnte man hier auch von Kategorien sprechen, die erfüllt sein müssen, damit wir überhaupt von Physik sprechen können. Zum anderen sind das Beobachtungstatsachen, die man nicht mehr weiter erklären kann und daher einer Theorie als Postulat zugrunde legt. Zur ersten Gruppe kann man beispielsweise das Postulat zählen, was überhaupt (reine) physikalische Zustände sind, zur zweiten Klasse kann man das Postulat der Speziellen Relativitätstheorie zählen, dass sich Licht für jeden inertialen Beobachter unabhängig vom Bewegungszustand der Quelle mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet.

In diesem Kapitel geht es hauptsächlich um die erste Klasse von Postulaten, die allen Theorien in der Physik gemein sind bzw., die jede Theorie spezifizieren muss, damit man sie als Theorie bezeichnen kann.

1.1 Allgemeiner Formalismus

In jeder physikalischen Theorie gibt es zwei Konzepte, auf denen die Theorie beruht: (1) das Konzept der Observablen und (2) das Konzept des Zustands. Neben der Spezifizierung dieser Konzepte muss ein allgemeiner Formalismus angeben, wie man aus diesen beiden Objekten zu physikalischen Vorhersagen gelangt, und wie man ein System in einem bestimmten Zustand präpariert bzw. woher man weiß, durch welchen Zustand ein System zu beschreiben ist. Schließlich muss eine Theorie noch angeben, wie die zeitliche Entwicklung des Systems beschrieben werden kann.

1.1.1 Observable

Definition: *Observable sind physikalische Größen, die man an einem physikalischen System messen kann.*

John von Neumann definiert ein physikalisches System durch die Menge der Observablen, die an diesem System beobachtet werden können [1]. Welche Observablen das sind, ist eine Erfahrungstatsache. Erst durch das Ergebnis des Stern-Gerlach-Experiments 1922 erkannte man, dass es neben Ort und Impuls noch einen weiteren Freiheitsgrad gibt, den man an einem Elektron messen kann, nämlich seine Spinorientierung entlang einer vorgegebenen Achse. Man kann daher nie behaupten, sämtliche an einem System messbaren Observablen zu kennen, bzw. es kann nie ausgeschlossen werden, dass in Zukunft noch weitere Observablen bekannt werden. Ein allgemeiner physikalischer Formalismus muss für eine Theorie zunächst klären, welche Observablen es gibt bzw. bekannt sind und wie diese Observablen mathematisch repräsentiert werden sollen. Observablen bilden jedoch nicht einfach nur eine strukturlose Menge, sondern es gibt auch Beziehungen zwischen den Observablen, die bekannt sein sollten und sich in der mathematischen Darstellung widerspiegeln müssen.

Die physikalische Realisierung einer Observablen erfolgt durch die Angabe des Messprotokolls, wie eine Messung dieser Observablen durchzuführen ist. Es ist eine Abfolge von Schritten, die angeben, in welcher Form ein System mit einer Messapparatur in Wechselwirkung tritt und wie die Veränderungen an der Messapparatur (z.B. die Zeigerstellung) abgelesen wird. Aus diesen Veränderungen muss sich eine Zahl bestimmen lassen, die man als das Ergebnis der Messung bezeichnet, und die eine Aussage über den Zustand eines Systems - wie es präpariert wurde - macht. In diesem

Kapitel bezeichne ich die physikalische Observable als Messvorschrift in Anlehnung an von Neumann [1] mit gotischen Buchstaben, z.B. $\mathcal{R}$, die zugehörige mathematische Darstellung dieser Observablen kennzeichne ich durch R. Sehr oft wird aber nicht zwischen diesen beiden Objekten unterschieden und es wird erwartet, dass man im Einzelfall entscheiden kann, ob die physikalische Messvorschrift oder die mathematische Darstellung gemeint ist.

Kennt man eine Observable $\mathcal{R}$, also die Vorschrift, wie man diese Observable an einem System messen kann, so kennt man auch die Observable $f(\mathcal{R})$ für eine Funktion f: Man misst die Observable $\mathcal{R}$ an einem physikalischen System und bildet von dem erhaltenen Messwert r die Funktion $f(r)$. Insbesondere ist die Observable $\alpha\mathcal{R}$ (für eine beliebige reelle Zahl α) durch die Messvorschrift von $\mathcal{R}$ gegeben, wobei jeder gemessene (an einer Zeigerstellung abgelesene Messwert) mit α multipliziert wird. Lassen sich zwei Observable $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$ gleichzeitig an einem System messen (das bedeutet, es gibt ein Protokoll, bei dem man gleichzeitig einen Messwert sowohl für $\mathcal{R}$ als auch für $\mathcal{S}$ erhält - diese Werte seien r und s), dann ist die Observable $f(\mathcal{R},\mathcal{S})$ definiert als die Messvorschrift, bei der von den Messwerten die Funktion $f(r,s)$ gebildet wird.

Bei Observablen $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$, die sich nicht gleichzeitig an einem System messen lassen - solche Observable bezeichnet man als nicht kompatibel -, sind allgemeine Funktionen $f(\mathcal{R},\mathcal{S})$ zunächst nicht definiert. Insbesondere sind auch Ausdrücke der Art $\mathcal{R} + \mathcal{S}$ oder $\mathcal{R} \cdot \mathcal{S}$ als Messvorschriften nicht definiert.

Die mathematische Darstellung (Repräsentation) einer Observablen hängt von der Theorie ab, die wir verwenden. In der klassischen Mechanik handelt es sich bei Observablen um Funktionen von Ort und Impuls (bzw. Geschwindigkeit), d.h. Funktionen auf dem Phasenraum. In der Quantenmechanik werden Observable durch sogenannte selbst-adjungierte bzw. hermitesche Operatoren auf einem Hilbert-Raum - einem Vektorraum mit einem Skalarprodukt - dargestellt.

An dieser Stelle sollte man betonen, dass die mathematische Darstellung einer Observablen nicht den Messprozess repräsentiert, also den dynamischen Vorgang der Messung, sondern eher die Informationen, die man durch solche Messungen erlangen kann: die Menge der möglichen Messwerte sowie die Zustände, die mit diesen Messwerten verbunden sind. In diesem Sinne (und in Anlehnung an einen Ausdruck von Schrödinger [2] zum Begriff der Wellenfunktion) kann man von einer Observablen als einem „Katalog von möglichen Ergebnissen“ sprechen.

1.1.2 Zustand

Auch bei den Zuständen sollte man zwischen der physikalischen Realisierung und der mathematischen Darstellung unterscheiden. Sehr oft definiert man einen Zustand als ein „Erwartungswertfunktional auf der Menge der Observablen“. Diese zunächst mathematische Definition kann man durchaus wörtlich interpretieren: Wenn wir ein System durch einen Zustand beschreiben, erlaubt es dieser Zustand, jeder Observablen eine Zahl - ihren Erwartungswert in diesem Zustand - zuzuordnen. Ein Zustand beschreibt also unsere Erwartungen in Bezug auf die Ergebnisse, die bei einer Messung an einem System auftreten. Schrödinger bezeichnet einen Zustand als einen „Katalog von Erwartungen“ [2].

Dieser Katalog von Erwartungen beruht auf unserem Wissen über die Vergangenheit eines Systems bzw. eines Ensembles von Systemen. Im Wesentlichen bezieht sich dieses Wissen auf die Art, wie diese Systeme präpariert wurden. Unsere Erwartungen in Bezug auf mögliche Messergebnisse können nur auf diesem Wissen beruhen, und wenn uns bewusst ist, dass unser Wissen unvollständig ist, verwenden wir sogenannte gemischte Zustände (in der klassischen Mechanik sind das Wahrscheinlichkeitsverteilungen über einem Zustandsraum, beispielsweise dem Phasenraum; in der Quantentheorie sind das sogenannte Dichtematrizen). Unser Wissen über die Vergangenheit eines Systems muss nicht beliebig weit zurückreichen: Es reicht das Wissen über solche Aspekte, die für die Vorhersagen zukünftiger Messungen von Bedeutung sind. Das sind meist die letzten Präparationen, die an einem System vorgenommen wurden.[2] Es gibt aber auch physikalische Systeme mit einem „Gedächtnis“, beispielsweise Spinglassysteme oder neuronale Netzwerke.

Die physikalische Realisierung eines Zustands erfolgt durch ein im Prinzip beliebig großes Ensemble gleichartig präparierter Systeme. Gewöhnlich führen wir ein Experiment nicht nur einmal durch sondern nach Möglichkeit unter denselben Ausgangsbedingungen genügend oft, sodass wir statistische Auswerteverfahren verwenden können. Außerdem können wir auf diese Weise an demselben Zustand verschiedene Observable messen, die sich an demselben System nicht gleichzeitig bestimmen lassen (beispielsweise Ort und Impuls bei quantenmechanischen Systemen oder zwei nicht kompatible Observable $\mathcal{R}$ und $\mathcal{S}$). Man unterteilt dazu das Ensemble gleichartig präparierter Systeme in zwei ebenfalls große Teilensembles und misst an dem einen Teilensemble die Observable $\mathcal{R}$ und an dem anderen Teilensemble die Observable $\mathcal{S}$. Auf diese Weise erhält man für einen Zustand - das Ensemble gleichartig präparierter Systeme - die Erwartungswerte von nicht kompatiblen Observablen in diesem Zustand.

Man bezeichnet einen Zustand - realisiert als Ensemble - als rein, wenn es keine Unterteilung dieses Ensembles in (für statistische Auswertungen ebenfalls genügend große) Subensembles gibt, die andere Erwartungswerte liefert als das gesamte Ensemble. Diese Vorstellung von reinen Zuständen entspricht auch unserer üblichen Vorstellung von reinen Zuständen als maximales bzw. nicht mehr erweiterbares Wissen über ein System. Entspricht ein Ensemble von Systemen einem Gemisch, so lässt es sich in Subensembles aufteilen, die weniger gemischten Zuständen (oder sogar reinen Zuständen) entsprechen. Reine Zustände lassen sich nicht mehr in noch reinere Zustände aufteilen.

Mathematisch wird ein Zustand repräsentiert durch die Angabe einer Abbildung, die jeder Observablen eine Zahl - ihren Erwartungswert in diesem Zustand - zuordnet. Ein Zustand ist somit eine mathematische Kodierung unseres Wissens über die Art, wie ein System präpariert wurde, sodass wir dieses Wissen für die Vorhersage zukünftiger Messungen - die Vorhersage eines Erwartungswerts für beliebige Observable - an diesem System nutzen können.

Elementare Eigenschaften dieser Abbildung sind:

1. Die Identitätsobservable, die immer nur den Messwert 1 als Ergebnis liefert, soll den Erwartungswert 1 haben,

2. eine positive Observable, die immer nur positive Ergebnisse als Messwerte liefert, soll auch einen positiven Erwartungswert haben, und

3. das λ-fache einer Observablen $\mathcal{R}$, die immer das λ-fache eines Messwerts von einer Messung von $\mathcal{R}$ liefert, soll auch das λ-fache des Erwartungswerts haben.

Weitere Eigenschaften hängen davon ab, welche Strukturen auf der Menge der Observablen definiert sind.

Oft unterscheidet man (insbesondere in der Quantentheorie) den Zustand von dem Erwartungswertfunktional, das dieser Zustand definiert. Der Zustand wird in der Quantentheorie z.B. durch einen normierten Vektor $|\psi\rangle$ in einem Hilbert-Raum dargestellt, wohingegen die Abbildung $\mathcal{R} \to \mathrm{Erw}(\mathcal{R})$ durch $\mathrm{Erw}(\mathcal{R}) = \langle\psi|R|\psi\rangle$ gegeben ist.

[2] Die Physik ist hier in einer glücklichen Lage. Möchte man in der Psychologie den mentalen Zustand einer Person beschreiben, können beliebig weit zurückliegende Ereignisse oder Erfahrungen für die Vorhersage des zukünftigen Verhaltens wesentlich sein.

1.1.3 Vorhersage und Präparation

Der Begriff des Zustands als eine Abbildung, die jeder Observablen einen Erwartungswert zuordnet, beinhaltet schon die Vorschrift, wie man aus einer Theorie zu experimentell überprüfbaren Vorhersagen kommt. Wenn auf Seiten der Theorie der Zustand eines Systems bekannt ist, kann man auch angeben, was man bei der Messung einer bestimmten Observablen für einen Erwartungswert erhält. Der Erwartungswert ist dann der Mittelwert, den man bei der Messung einer Observablen an sehr vielen Systemen erhält. Hierbei ist wichtig, dass der Zustand physikalisch durch ein Ensemble von Systemen repräsentiert wird und nicht nur durch ein Einzelsystem.

Diese Bedingung ist andererseits aber auch problematisch: Der Kosmos als Ganzes lässt sich nicht als Ensemble realisieren, das Gleiche gilt auch für komplexere Systeme wie beispielsweise einen menschlichen Organismus oder ein menschliches Gehirn. Zumindest reine Zustände sind bei solchen Systemen nicht mehr realisierbar (das gilt schon für einfache thermodynamische Systeme).

Etwas problematischer ist die Frage, woher wir wissen, durch welchen Zustand ein physikalisches System zu repräsentieren ist. Wir haben oben gesagt, dass wir die Vergangenheit eines Systems - die Art wie es präpariert wurde - kennen müssen. Wir benötigen somit eine Vorschrift, wie wir aus der Kenntnis der Präparation eines Systems den Zustand erhalten, durch den wir das System beschreiben. Diese Vorschrift ist oftmals ein eigenes Postulat (in der Quantentheorie beispielsweise das sogenannte Kollaps- oder Projektionspostulat).

1.1.4 Die zeitliche Entwicklung eines Systems

Die bisherigen Axiome sind allgemeiner Natur und enthalten noch keinerlei Aussagen darüber, wie sich ein physikalisches System im Verlauf der Zeit verändert. Zunächst einmal muss überhaupt geklärt werden, was „zeitliche Entwicklung“ bedeutet. In fast allen physikalischen Theorien (eine Ausnahme bilden manche Modelle der Quantenkosmologie) wird die Zeit durch einen Parameter t dargestellt und als eindimensionales geordnetes Kontinuum gedacht. In solchen Fällen bedeutet „zeitliche Entwicklung“ meist die Angabe einer Bewegungsgleichung, entweder für die Zustände (in der Quantenmechanik spricht man dann vom Schrödinger-Bild) oder für die Observablen (das Heisenberg-Bild) eines Systems. In vielen Fällen hat die Bewegungsgleichung die Form einer Differentialgleichung, es gibt aber auch Systeme, bei denen es sich um eine Integralgleichung handelt (meist Systeme mit einem Gedächtnis).

1.2 Die Postulate der Klassischen Mechanik

In der klassischen Mechanik beschreiben wir einen (reinen Zustand) durch einen Punkt $(x,p) \in P$ im Phasenraum P, also die Angabe eines Ortes x und eines Impulses p. Eine Observable ist eine Funktion $F : P \to \mathbb{R}$ über dem Phasenraum, also eine Funktion von Ort und Impuls. Der Erwartungswert einer Observablen F in einem Zustand (x,p) ist einfach der Wert $F(x,p)$ dieser Observablen an dem Punkt im Phasenraum, der den Zustand beschreibt. Dieser Wert ist eindeutig und sollte (innerhalb der Fehlertoleranz der Messgeräte) immer derselbe sein.

Haben wir umgekehrt an einem System eine Observable F gemessen und einen Wert f erhalten, wissen wir, dass der Zustand ein Punkt im Phasenraum sein muss, der der Bedingung $F(x,p) = f$ genügen muss. Ein vollständiger Satz von Observablen $\{F_1,...,F_n\}$ legt einen Punkt im Phasenraum eindeutig fest. Misst man also diese Observablen und erhält Messwerte $\{f_1,...,f_n\}$, so ist der Punkt (x,p) durch die Bedingungen $\{F_1(x,p) = f_1,...,F_n(x,p) = f_n\}$ festgelegt und somit der reine Zustand des Systems bekannt. In einem minimalen vollständigen Satz von Observablen lässt sich auch keine Observable als Funktion der anderen Observablen ausdrücken. Hat der Phasenraum die Dimension

$6N$ (für N Punktteilchen in 3 Raumdimensionen), so benötigt man auch $6N$ Observable, um einen Zustand eindeutig festzulegen.

1.3 Die Postulate der Quantenmechanik

Observable werden in der Quantenmechanik durch selbst-adjungierte bzw. hermitesche Operatoren auf einem Hilbert-Raum dargestellt. Ein Zustand wird mathematisch durch einen Strahl (einen eindimensionalen Unterraum) in diesem Hilbert-Raum beschrieben. Meist wählen wir zur einfacheren Beschreibung einen auf eins normierten Vektor $|\psi\rangle$ auf diesem Strahl als Repräsentanten, wir können einen Zustand aber auch durch die Angabe eines eindimensionalen Projektionsoperators P_ψ (der jeden Vektor in dem Hilbert-Raum auf diesen eindimensionalen Unterraum projiziert) darstellen. In der Quantenmechanik von Punktteilen verwenden wir zur Beschreibung eines Zustands oft eine sogenannte Wellenfunktion $\psi(x)$, die man aber als Vektor eines unendlich dimensionalen Hilbert-Raums (dem Raum der quadratintegrierbaren Funktionen) auffassen kann. Das Erwartungswertfunktional, d.h. die Vorschrift, nach der wir einer Observablen A eine Zahl $\langle A\rangle_\psi$ - ihren Erwartungswert in dem Zustand ψ - zuordnen, ist dann

$$\langle A\rangle_\psi = \langle\psi|A|\psi\rangle = \mathrm{Spur}\,(P_\psi A) = \int_V \psi(x)^* A\psi(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{1.1}$$

Dies sind drei Darstellungen des Erwartungswertfunktionals, je nachdem, ob man einen Zustand durch einen normierten Vektor, einen Projektionsoperator oder eine normierte Wellenfunktion über einem Volumen V repräsentiert.

Das Kollapspostulat bzw. das von Neumann-Lüders'sche Projektionspostulat gibt an, wie wir in der Quantenmechanik ein System in einem bestimmten Zustand präparieren können. Wurde eine Observable $\mathcal{R}$ an einem System gemessen und hat man den Messwert r erhalten, so ist das System durch einen Strahl zu beschreiben, der dem Eigenraum von R zu dem Eigenwert r entspricht. Ein vollständiger Satz kompatibler Observabler legt durch ihre Messwerte diesen Eigenraum auf einen eindimensionalen Strahl und damit einen reinen Zustand fest.

1.4 Die Postulate in anderen Bereichen der Physik

Literaturverzeichnis

[1] von Neumann, John; *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer ??? 1935.

[2] Schrödinger, Erwin; *???*;