# Kapitel 2

# SRT - Geometrische Konstruktionen

In Kapitel **??** wurden die Lorentz-Transformationen aus den Axiomen der Speziellen Relativitätstheorie auf algebraischen Weg hergeleitet. In diesem Kapitel sollen die wesentlichen Eigenschaften dieser Transformationen sowie insbesondere die Gleichzeitigkeitsflächen und die Hyperboloide zu gleichen Zeitdauern bzw. gleichen räumlichen Abständen nochmals geometrisch hergeleitet werden. Die Einstein-Minkowski'sche Interpretation der Speziellen Relativitätstheorie versteht die Lorentz-Invarianz der Theorie als eine geometrische Eigenschaft der Raumzeit, aus der dann die Effekte der Speziellen Relativitätstheorie abgeleitet werden können.

## 2.1 Der Raum gleichzeitiger Ereignisse

Wir beginnen mit der geometrischen Konstruktion der Ereignismengen, die nach den Axiomen der speziellen Relativitätstheorie von einem gegebenen Inertialsystem als gleichzeitig eingestuft werden. In einem vierdimensionalen Minkowski-Raum handelt es sich dabei um dreidimensionale affine Unterräume. In einer zweidimensionalen Darstellung handelt es sich um Geraden.

Abbildung 2.1 zeigt zwei zweidimensionale Raumzeit-Diagramme mit den Weltlinien zweier Beobachter in verschiedenen Inertialsystemen. Die Weltlinie von Beobachter 1 verlaufe entlang der $t$-Achse (mit der Raumkoordinate $x \equiv 0$), die von Beobachter 2 entlang der $t'$-Achse (mit $x' \equiv 0$). Beide Beobachter haben bei Ereignis O ihre Uhren auf 0 gesetzt. Außerdem hat es bei Ereignis O einen Lichtblitz gegeben, der sich entlang der Diagonalen ausbreitet. Diese Diagonalen bilden den Zukunftslichtkegel zum Ereignis O. (In Abbildung 2.1 sind auch Teile des Vergangenheitslichtkegels zu O dargestellt.)

Für beide Beobachter soll sich das Licht in ihrem jeweiligen Inertialsystem in Vor- und Rückrichtung gleich schnell ausbreiten. Das bedeutet, zu dem Ereignis $B$ (bzw. $B'$) sind auf dem Lichtkegel die Ereignisse $A$ und $C$ (bzw. $A'$ und $C'$) gleichzeitig, da nur für diese Ereignisse der Abstand AB und der Abstand BC (bzw. $A'B'$ und $B'C'$) gleich sind. Offensichtlich sind die Ereignisse $A', B', C'$ für Beobachter 1 nicht gleichzeitig, umgekehrt die Ereignisse $A, B, C$ nicht für Beobachter 2.

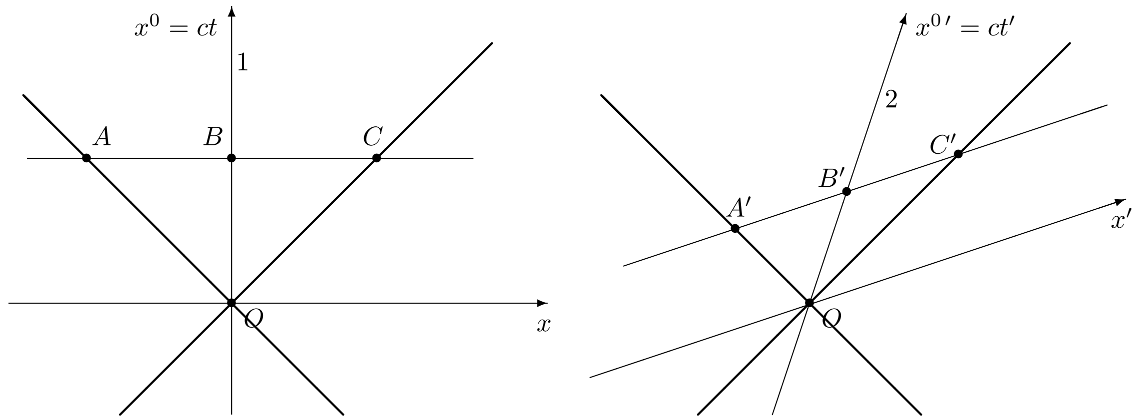


Abbildung 2.1: Die gleichzeitigen Ereignisse für einen ruhenden (links, Weltlinie 1) und einen relativ dazu bewegten Beobachter (rechts, Weltlinie 2) ergeben sich aus der Forderung, dass für beide der Lichtkegel zentriert ist, d.h. die Distanz $AB$ ($A'B'$) muss gleich der Distanz $BC$ ($B'C'$) sein. Diese Bedingung legt in beiden Fällen die Linie ABC (bzw. $A'B'C'$) eindeutig fest. Die Ereignisse auf dazu parallelen Linien (beispielsweise durch den Ursprung) sind für die Beobachter jeweils gleichzeitig.

## 2.2 Die Einstein-Synchronisation und Lichtuhren

Auf dem genannten Verfahren beruht auch die Einstein-Synchronisation von Uhren. Da nach Axiom 3 das Licht für jedes Inertialsystem in alle Richtungen dieselbe Ausbreitungsgeschwindigkeit hat, können zwei entferne Beobachter in konstantem Abstand (beide bewegen sich auf parallelen Weltlinien) ihre Uhren dadurch synchronisieren, dass sie ein Lichtsignal austauschen (vgl. Abb. 2.2): Beobachter 1 sendet bei Ereignis A das Signal zu Beobachter 2, der es sofort reflektiert (Ereignis B) und zu Beobachter 1 zurückschickt, der es bei Ereignis C empfängt. Beobachter 1 kann nun davon ausgehen, dass das Licht für Hin- und Rückweg dieselbe Zeit braucht. Bei der Hälfte dieser Zeit sollte die Uhr von Beobachter 1 also dieselbe Zeit angezeigt haben (Ereignis D), wie die Uhr von Beobachter 2 bei Ereignis B.

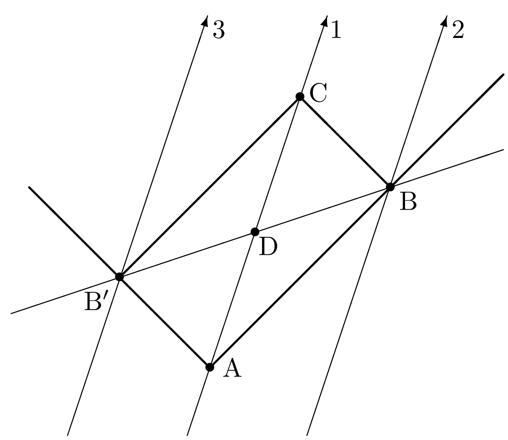


Abbildung 2.2: Die Einstein-Synchronisation. Durch Austausch von Lichtsignalen können die Beobachter 2 und 3 ihre Uhren mit der von Beobachter 1 synchronisieren.

Das gleiche Verfahren erlaubt auch eine Synchronisation der Uhren in umgekehrter Richtung zwischen Beobachter 1 und 3 und führt auf Ereignis $B'$, das zu Ereignis $D$ gleichzeitig ist. Man beachte, dass die gleichzeitigen Ereignisse $B'$, $D$ und $B$ auf einer Geraden liegen.

## 2.3 Die relativen Skalen in verschiedenen Inertialsystemen

Wir müssen noch die relativen Skalen festlegen. Dazu verlegen wir die beiden Koordinatensysteme in dasselbe Bild (Abb. 2.3). Außerdem stellen wir uns die Abbildung senkrecht zur Papierebene in eine zweite Raumdimension erweitert vor: Den Lichtkegel erhält man durch Rotation um die $t$-Achse, die Gleichzeitigkeitsebenen von Beobachter 1 durch Ereignis $B$ und von Beobachter 2 durch Ereignis $B'$ stehen senkrecht auf der Papierebene.

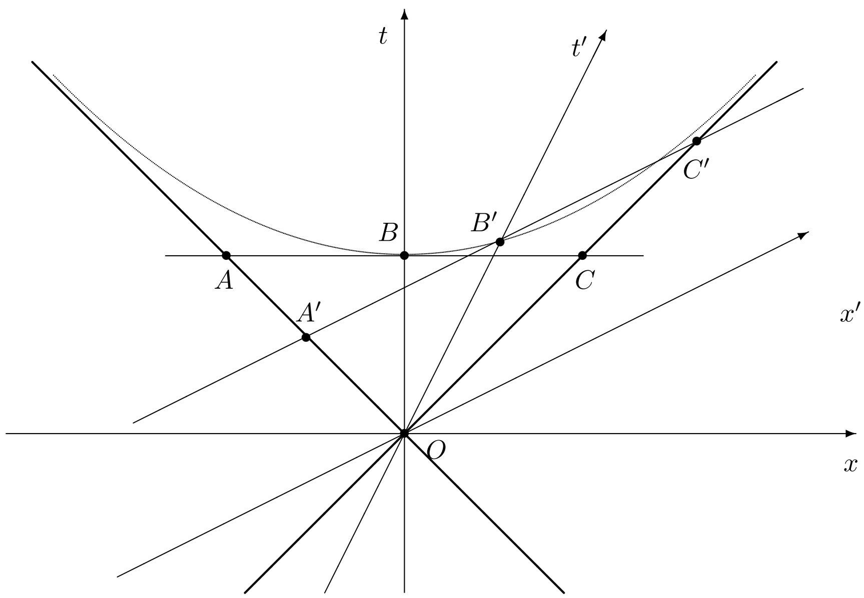


Abbildung 2.3: Für Beobachter 1 sind die Ereignisse $A, B, C$ gleichzeitig, für Beobachter 2 die Ereignisse $A', B', C'$. Der Einfachheit halber wurde $c = 1$ gesetzt (bzw. $t$ entspricht $x^0$). Daher ist die Strecke $OB$ gleich $AB$ bzw. $BC$. Aus demselben Grund ist $OB' = A'B' = B'C'$. Die Strecke $OB$ ist aber auch gleich $OB'$, da das Licht in der Richtung senkrecht zur Papierebene für diese beiden Ereignisse dieselbe Strecke zurückgelegt hat.

Die Ereignisse $A$ und $C$ gehören in $(2+1)$-Raumzeitdimensionen zu einem Kreis mit Zentrum $B$. Der Radius dieses Kreises ist $AB = BC = OB$. Entsprechend gehören die Ereignisse $A'$ und $C'$ (in unserer euklidischen Geometrie) zu einer Ellipse (der Schnittmenge des Kegels mit einer Ebene), in deren Zentrum sich $B'$ befindet. Die große Halbachse dieser Ellipse ist $A'B' = B'C'$. Nach unserer Forderung, dass sich Licht in alle Richtungen mit derselben Geschwindigkeit ausbreitet, hat diese große Halbachse in der Minkowski-Geometrie dieselbe Länge wie die kleine Halbachse (senkrecht zu $B'$). Doch die Mittelpunkte aller Ellipsen, deren große Halbachse in der Zeichenebene liegen und deren kleine Halbachsen dieselbe Länge haben, liegen auf der Hyperbel $t^2 - x^2 = \text{const}$ (dazu schneide man den Kegel einfach mit einer senkrechten Ebene parallel zur Zeichenebene). Also ist in der Zeichnung die Strecke $OB'$ gleich der Strecke $OB$, wodurch wir auch die Skala festgelegt haben.

Nachdem wir die zeitlichen Skalen zu verschieden „geneigten“ Strecken gefunden haben, können wir auch die entsprechenden räumlichen Skalen konstruieren. Wegen der Konstanz der Lichtausbreitung in allen Systemen hatten wir in Abb. 2.3 argumentieren können, dass die zeitliche Distanz $OB'$ gleich der räumlichen Distanz $B'C'$ (jeweils als positive Werte aufgefasst) sein muss. Damit können wir aus Abb. 2.4 auf Abb. 2.5 schließen und feststellen, dass alle zu $O$ raumartigen Ereignisse $A_i$ von $O$ dieselbe Entfernung haben.

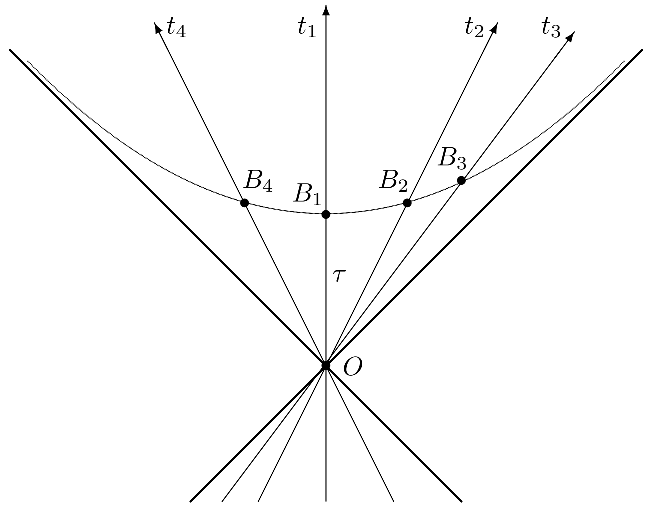


Abbildung 2.4: Für alle inertialen Weltlinien durch das Ereignis $O$ ist bei den Ereignissen $B_i$ auf der Hyperbel dieselbe Zeit vergangen: Alle Uhren entlang dieser Weltlinien, die bei $O$ auf 0 gesetzt wurden, zeigen bei den Ereignissen $B_i$ dieselbe Zeit $\tau$ an.

Wir haben oben die relative Skala durch Vergleich mit einer zweiten Raumdimension, relativ zu der sich zwei Inertialsysteme nicht bewegen, abgeleitet. Es gibt noch eine zweite Möglichkeit, die sich auch in zwei Dimensionen anwenden lässt: Wir integrieren das Vektorfeld, das in jedem Punkt durch die Richtung der Gleichzeitigkeit erzeugt wird. Dies führt auf die Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{x} \qquad \text{oder} \qquad t^2 - x^2 = \text{const.} \quad .$$

Alle Ereignisse auf einer solchen Hyperbel haben denselben Abstand vom Ursprung. Insbesondere gilt

$$t_{\mathrm{B}}^2 - x_{\mathrm{B}}^2 = t_{\mathrm{D}}^2 \, ,$$

und da $x_{\mathrm{B}} = vt_{\mathrm{B}}$ folgt

$$t_{\mathrm{B}}^2 - v^2 t_{\mathrm{B}}^2 = t_{\mathrm{D}}^2$$

oder

$$t_{\mathrm{D}} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} t_{\mathrm{B}} \, .$$

Dieses Verfahren setzt voraus, dass Ereignisse mit einem konstanten Abstand vom Ursprung in gewisser Hinsicht „stetig“ sind, und daß wir infinitesimal annehmen können, dass solche Ereignisse für einen Beobachter, der sich gleichförmig vom Ursprung zu einem dieser Ereignisse bewegt, lokal gleichzeitig sind.

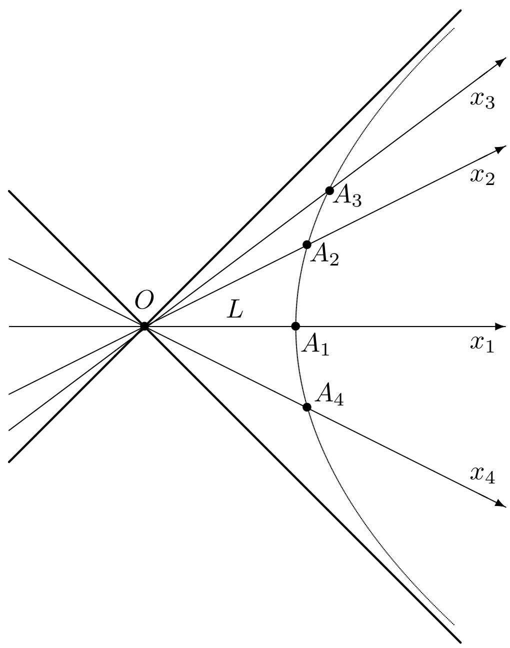


Abbildung 2.5: Alle Ereignisse $A_i$ haben von $O$ denselben invarianten räumlichen Abstand $L$. Das bedeutet, zu jedem Ereignis $A_i$ gibt es ein Inertialsystem, sodass $O$ und $A_i$ gleichzeitig stattfinden. Die räumliche Differenz in diesem Inertialsystem ist gleich dem invianten räumlichen Abstand der Ereignisse.

Abbildung 2.6: (links) In zwei Raumdimensionen schneidet die Gleichzeitigkeitsebene zu einem Beobachter 2 den Lichtkegel in einer Ellipse. Die große Halbachse entspricht dem gesuchten Abstand $A'B'$ bzw. $B'C'$, die kleine Halbachse ist senkrecht zur relativen Bewegung und hat daher für Beobachter 1 und 2 dieselbe Länge. Andererseits soll sich für Beobachter 2 das Licht in alle Richtungen gleich schnell ausbreiten, d.h. für Beobachter 2 haben die große und die kleine Halbachse der Ellipse dieselbe Länge. (rechts) Die Punkte mit einem konstanten Abstand von der $(x, t)$-Ebene schneiden den Lichtkegel in einer Hyperbel, d.h. alle Punkte auf dieser Hyperbel haben von der $(x, t)$-Ebene denselben Abstand.

# Literaturverzeichnis


[1] Peter C. Aichelburg (Hrsg.); *Zeit im Wandel der Zeit*; Verlag Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1988.

[2] Max Born; *Optik*; Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1972.

[3] Encyclopaedia Britannica; 15.th edition, 1988.

[4] René Descartes; *Die Prinzipien der Philosophie*; Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1992; übersetzt von Artur Buchenau.

[5] Albert Einstein; *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*; Annalen der Physik, Leipzig, 17 (1905) 891.

[6] Hermann von Helmholtz; *Über Wirbelbewegungen, Über Flüssigkeitsbewegungen*, 1858; in Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 1; Verlag Harri Deutsch, Frankfurt, 1996.

[7] Max von Laue; *Geschichte der Physik*; Universitäts-Verlag Bonn, 1947.

[8] Hendrik Antoon Lorentz; *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity smaller than that of light*; Proc. Acad. Sci., Amsterdam, 6 [1904], S. 809.

[9] Peter Mittelstaedt; *Der Zeitbegriff in der Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.

[10] Peter Mittelstaedt; *Philosophische Probleme der modernen Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.

[11] Isaac Newton; *Über die Gravitation...*; Klostermann Texte Philosophie; Vittorio Klostermann, Frankfurt, 1988; übersetzt von Gernot Böhme.

[12] Isaac Newton; *Optik oder Abhandlung über Spiegelungen, Brechungen, Beugungen und Farben des Lichts*; I., II. und III. Buch (1704); aus dem Englischen übersetzt von W. Abendroth; Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften, Verlag Harri Deutsch 1998.

[13] Wolfgang Pauli; *Theory of Relativity*; Dover Publications, New York, 1981.

[14] Jules Henri Poincaré; *Sur la dynamique de l'électron*, C.R. Acad. Sci., Paris, 140 (1905) S. 1504; und Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 21 (1906) S. 129.

[15] Roman U. Sexl, Helmuth K. Urbantke; *Relativität, Gruppen, Teilchen*; Springer-Verlag, Wien, New York, 1992.

[16] Károly Simonyi; *Kulturgeschichte der Physik*; Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990.