

Kapitel 5

Schwarze Löcher

Die wohl spektakulärsten Vorhersagen der Einstein'schen Feldgleichungen beziehen sich auf Schwarze Löcher. Einige Lösungen kennt man in analytischer Form, dazu gehören die bekannte Schwarzschild-Lösungen eines ruhenden ungeladenen Schwarzen Lochs, die Kerr-Lösung für ungeladene rotierende Schwarze Löcher, die Reissner-Nordström-Lösung für ruhende geladene Schwarze Löcher und schließlich die Kerr-Newman-Lösung für rotierende geladene Schwarze Löcher. Außerdem gibt es Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen, die kosmologische Modelle beschreiben – die bekannteste Lösung ist in diesem Fall die Friedman-Lösung bzw. Robertson-Walker-Metrik.

5.1 Isotrope, statische Lösungen

Bevor wir uns konkret mit der Schwarzschild-Metrik beschäftigen, betrachten wir den allgemeineren Fall einer isotropen, statischen Geometrie. Die genauen Lösungen hängen vom Energie-Impuls-Tensor ab. Hier geht es mir jedoch nur um vorbereitende Bemerkungen zur allgemeinen Form solcher Geometrien. Die folgenden Überlegungen sind größtenteils dem Buch von Fließbach entnommen [?].

5.1.1 Standardform einer asymptotisch flachen isotropen und statischen Metrik

Neben „isotrop und statisch“ verlangen wir noch, dass die Lösung asymptotisch für sehr große Werte der Koordinate r (die eine räumlich radiale Achse vom Zentrum der Lösung parametrisiert) gegen die Minkowski-Metrik gehen soll, also in Kugelkoordinaten:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.1)$$

„Isotrop“ bedeutet, dass die Abhängigkeit der Metrik von den Winkeln θ und φ unverändert bleibt. „Statisch“ soll sich in diesem Fall auf den Zeitparameter t beziehen, d.h. auf die physikalische Zeit eines „unendlich“ weit entfernten Beobachters. Die Metrik soll nicht von diesem Zeitparameter abhängen.

Ganz allgemein setzen wir für eine solche Metrik die folgende Form an:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - C(r)r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.2)$$

Wegen der Isotropie kann es keine gemischten Terme in den Winkeln geben, und einen gemischten Term der Form $dt dr$ kann man immer durch eine geeignete Umdefinition $t' = t + \psi(r)$ loswerden. Für $r \rightarrow \infty$ muss $\psi(r)$ verschwinden und damit hat auch t' asymptotisch immer noch die Bedeutung der physikalischen Zeit eines weit entfernten Beobachters. Ebenso hat r in diesem Grenzfall die Bedeutung

einer gewöhnlichen Radialkoordinate. Die Winkel θ und φ sind ohnehin die gewöhnlichen Winkel in Kugelkoordinaten.

Zusätzlich zu diesen Einschränkungen können wir immer noch eine Umparametrisierung von r vornehmen, sodass wir den Term $C(r)$ loswerden. Auch dies ändert asymptotisch an der Interpretation von r nichts. Als *Standardform* einer isotropen, statischen Metrik bezeichnet man daher folgende Parametrisierung:

$$ds^2 = B(r)c^2 dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.3)$$

In dieser Parametrisierung hat eine Kugelschale für einen Abstand, der durch den Parameter r charakterisiert ist, eine Fläche von $4\pi r^2$. Allerdings bezeichnet r nun nicht mehr den physikalischen Abstand vom Ursprung; dieser ist durch

$$R(r) = \int_0^r \sqrt{A(r')} dr' \quad (5.4)$$

gegeben. Insofern verhält sich die Fläche einer Kugelschale als Funktion des Abstands $R(r)$ vom Ursprung nicht wie im Euklidischen. Dadurch kann der dreidimensionale Raum eine Krümmung haben. Betrachten wir eine zweidimensionale Fläche für feste Werte von t und r , also parametrisiert durch θ und φ , so handelt es sich um eine gewöhnliche Kugeloberfläche.

5.1.2 Robertson-Entwicklung

Bei der experimentellen Überprüfung der ART ist man oft an dem Verhalten der Lösungen für große Wert von r interessiert, also an den führenden Korrekturen zur Minkowski-Raumzeit. Dazu betrachtet man eine Entwicklung der Funktionen $A(r)$ und $B(r)$ für große Werte von r . Da $A(r)$ und $B(r)$ dimensionslos sind, können sie nur Funktionen einer dimensionslosen Größe sein, doch aus G , c und r (das sind die Parameter, die uns zunächst zur Verfügung stehen) erhalten wir keine dimensionslose Größe. Die Lösung muss durch mindestens einen weiteren Parameter, den wir mit M bezeichnen und der sich im Prinzip aus dem Energie-Impuls-Tensor ergeben sollte, charakterisiert sein. M ist ein Massenparameter, der durch die führende Korrektur, die der Newton'schen Gravitation entspricht, definiert ist. (Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass sich die Schwarzschild-Lösung als Lösung der Vakuumgleichungen $-T_{\mu\nu} = 0$ ergibt. Trotzdem enthält die Lösung einen Parameter M . Dies ist ähnlich wie in der Newton'schen Mechanik, wo das Gravitationspotenzial zu einer Punktmasse bei $r = 0$ nicht definiert ist, aber außerhalb von $r = 0$ eine Lösung der Vakuumgleichungen ist. Die „Stärke der Singularität“ bei $r = 0$ definiert den Massenparameter.)

Wir nehmen nun an, dass für große Abstände vom Zentrum der Verteilung nur dieser eine Parameter M relevant ist. Dann ist $GM/c^2 r$ dimensionslos und wir können schreiben:

$$A(r) = 1 + 2\beta \frac{GM}{c^2 r} + \dots \quad (5.5)$$

$$B(r) = 1 - 2\alpha \frac{GM}{c^2 r} + 2(\gamma - \beta) \left(\frac{GM}{c^2 r} \right)^2 + \dots \quad (5.6)$$

(Die seltsame Kombination der Parameter α, β, γ hat historische Gründe.) Diese Entwicklung bezeichnet man als *Robertson-Entwicklung*. Wie wir schon in Abschnitt ?? gesehen haben, gilt für den Newton'schen Grenzfall:

$$\text{Newton: } \alpha = 1, \beta = \gamma = 0. \quad (5.7)$$

Im nächsten Abschnitt werden wir sehen, dass die Schwarzschild-Lösung der ART folgende Werte liefert:

$$\text{ART: } \alpha = \beta = \gamma = 1. \quad (5.8)$$

Diese Parameter haben wir auch schon im Zusammenhang mit der Lichtablenkung (Abschnitt ??) und der Periheldrehung (Abschnitt ??) betrachtet.

5.1.3 Der Ricci-Tensor als Funktion von $A(r)$ und $B(r)$

Wir können nun aus der Metrik (5.3) bzw.

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} (B(r), -A(r), -r^2, -r^2 \sin^2 \theta) \quad (5.9)$$

die Christoffel-Symbole, den Riemann'schen Krümmungstensor und den Ricci-Tensor berechnen. Man benötigt dazu noch, dass die Metrik mit oben stehenden Indizes das Inverse der normalen Metrik ist, also

$$g^{\mu\nu} = \text{diag} \left(\frac{1}{B(r)}, -\frac{1}{A(r)}, -\frac{1}{r^2}, -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (5.10)$$

Die Rechnung ist in [?] durchgeführt. Hier beschränke ich mich auf das Ergebnis für den Ricci-Tensor:

$$R_{00} = R_{tt} = -\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{B'}{rA} \quad (5.11)$$

$$R_{11} = R_{rr} = \frac{B''}{2B} - \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{A'}{rA} \quad (5.12)$$

$$R_{22} = R_{\theta\theta} = -1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{A} \quad (5.13)$$

$$R_{33} = R_{\varphi\varphi} = R_{22} \sin^2 \theta. \quad (5.14)$$

Alle gemischten Terme verschwinden: $R_{\mu\nu} = 0$ für $\mu \neq \nu$.

5.2 Schwarze Löcher – Schwarzschild-Metrik

Eine der ersten nicht-trivialen Lösungen der materiefreien Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie fand 1916 der deutsche Astronom Karl Schwarzschild (*geb. 9.10.1873 in Frankfurt am Main; gest. 11.5.1916 in Potsdam*). Diese Schwarzschild-Metrik beschreibt nicht nur schwarze Löcher, sondern auch das Gravitationsfeld in der Umgebung von Sternen oder Planeten. Daher kann man diese Lösung zur Berechnung der Periheldrehung des Merkur oder der Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne heranziehen.

5.2.1 Klassische Berechnung des kritischen Radius

Schon im Jahre 1783 entwickelte der Geologe John Michell die Vorstellung „Dunkler Sterne“, von denen wegen ihrer Masse kein Licht entweichen kann. Seine Überlegungen basierten auf der Newton'schen Mechanik und setzten voraus, dass sich Licht wie jede andere Materie verhält (im Sinne der Korpuskeltheorie des Lichts von Newton). Ausgangspunkt seiner Überlegungen war die klassische Fluchtgeschwindigkeit.

Ein Probekörper der Masse m , der im Unendlichen in Ruhe ist ($v = 0$) und frei fallend auf einen schweren Körper der Masse M zufällt, hat im Abstand r die kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{mM}{r} \quad (5.15)$$

und damit die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2G\frac{M}{r}}. \quad (5.16)$$

Dies ist umgekehrt die Fluchtgeschwindigkeit beim Radius r aus dem Feld eines Körpers der Masse M . Nach klassischen Überlegungen hat er somit die Lichtgeschwindigkeit c bei einem Abstand:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}. \quad (5.17)$$

Wenn der Radius des schweren Körpers der Masse M kleiner als R_S ist, kann somit selbst Licht diesem Körper nicht entweichen, da die Fluchtgeschwindigkeit größer als c wäre. Wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden, ist diese Gleichung für einen kritischen Radius (dem Radius des Horizonts eines schwarzen Lochs – dem Schwarzschild-Radius) auch in der Relativitätstheorie exakt.

Ein solcher Körper benötigt nicht unbedingt eine sehr hohe Dichte, sofern er nur groß genug ist. Ausgedrückt durch die Dichte ist die Masse eines Körpers vom Radius R

$$M = \rho V = \rho \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (5.18)$$

Setzen wir dies in Gleichung 5.17 für den kritischen Radius ein, erhalten wir die Bedingung:

$$R = \frac{2G}{c^2} \rho \frac{4\pi}{3} R^3 \quad \text{oder} \quad R = c \sqrt{\frac{3}{8\pi\rho G}}. \quad (5.19)$$

Mit

$$G = 6,6738 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \quad (5.20)$$

und der Dichte von Wasser, also $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, kommen wir zu einem Radius von rund $R = 4 \cdot 10^8 \text{ km}$ oder dem rund 2,5-fachen des Abstands Erde–Sonne. Ein Körper dieser Größe mit der Dichte von Wasser hätte einen Radius, der gleich seinem Schwarzschild-Radius ist.

5.2.2 Herleitung der Schwarzschild-Lösung

Wie wir im letzten Kapitel gesehen haben (vgl. Gl. ??), lassen sich die Einstein'schen Feldgleichungen ohne Materie (also für $T_{\mu\nu} = 0$) in der Form

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (5.21)$$

schreiben. Wir verwenden nun die Komponenten des Ricci-Tensors für die Standardform der isotropen, statischen Lösung (Gl. 5.11–5.14), um eine Lösung zu finden. Auch hierbei halte ich mich eng an [?]. Es muss gelten: $R_{00} = R_{11} = R_{22} = 0$. (Wegen Gl. 5.14 folgt aus $R_{22} = 0$ auch $R_{33} = 0$.) Wir bilden die Summe

$$\frac{R_{00}}{B} + \frac{R_{11}}{A} = -\frac{1}{rA} \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = 0, \quad (5.22)$$

was auf

$$\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) = \frac{d}{dr} \ln(AB) = 0 \quad (5.23)$$

führt. Daraus folgt

$$A(r)B(r) = \text{const}, \quad (5.24)$$

und wegen des asymptotischen Verhaltens von $A(r)$ und $B(r)$ für große Werte von r ist die Konstante 1, also

$$A(r) = \frac{1}{B(r)}. \quad (5.25)$$

Wir nutzen diese Beziehung in R_{11} und gelangen zu der Gleichung

$$R_{22} = -1 + rB' + B = 0. \quad (5.26)$$

Da R_{22} identisch verschwinden soll, muss auch die Ableitung verschwinden und damit folgt:

$$\frac{dR_{22}}{dr} = B' + rB'' + B' = rB'' + 2B' = 0. \quad (5.27)$$

Setzen wir Gl. 5.25 in R_{11} ein, erhalten wir

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} + \frac{B'}{rB} = \frac{rB'' + 2B'}{2rB}. \quad (5.28)$$

Wegen Gl. 5.27 verschwindet dieser Ausdruck aber, also ist $R_{11} = 0$ (und damit wegen Gl. 5.22 auch $R_{00} = 0$), sofern R_{22} verschwindet. Wir haben also nur noch Gleichung 5.26 zu lösen. Da $(rB)' = rB' + B$ führt dies auf:

$$\frac{d(rB)}{dr} = 1. \quad (5.29)$$

Aus dieser Gleichung folgt $rB = r - 2a$, wobei wir die freie Integrationskonstante mit $-2a$ bezeichnet haben. Damit erhalten wir als Lösungen:

$$B(r) = 1 - \frac{2a}{r} \quad \text{und} \quad A(r) = \frac{1}{1 - 2a/r}. \quad (5.30)$$

Die Minkowski-Metrik $A(r) = B(r) = 1$ ergibt sich aus dem Spezialfall $a = 0$.

Die physikalische Bedeutung der Integrationskonstanten a ergibt sich aus einem Vergleich mit der Newton'schen Näherung (siehe Abschnitt ??, Gl. ??). Für große Werte von r sollte die Lösung dem Newton'schen Grenzfall entsprechen, und damit erhalten wir

$$a = GM/c^2. \quad (5.31)$$

5.2.3 Die Schwarzschild-Lösung

Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, lässt sich die Schwarzschild-Metrik als statische und rotationssymmetrische Lösung schreiben, d.h. sie hängt in diesem Fall nur von einer Koordinate ab – dem Radius r vom Zentrum der Lösung:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{1 - 2GM/(c^2 r)} - r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2) \quad (5.32)$$

Außerdem enthält die Schwarzschild-Metrik noch einen Parameter M , der die Stärke des Gravitationsfeldes in einem bestimmten Abstand angibt. M wird meist so gewählt, dass die Schwarzschild-Lösung für $r \rightarrow \infty$ einem Newton'schen Gravitationspotential einer Masse M im Abstand r entspricht.

Der winkelabhängige (letzte) Term der Metrik entspricht gewöhnlichen Kugelkoordinaten (vgl. Gl. ??). Die ersten beiden Terme werden bei

$$R_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (5.33)$$

singulär. R_S bezeichnet man auch als Schwarzschild-Radius. Vergleichen wir die Art der Singularität dieser beiden Elemente der Metrik mit der speziellen Kugelprojektion in Gl. ??, so entdeckt man (bis auf das relative Vorzeichen, das durch die Minkowski-Struktur hereinkommt) eine deutliche Ähnlichkeit, was die Vermutung nahelegt, dass es sich hierbei nur um eine Koordinatensingularität handelt.

Obwohl Eddington 1924 schon gezeigt hatte, dass es sich bei dieser Singularität nur um eine Koordinatensingularität handelt, blieb ihre Natur doch unklar. Bis in die sechziger Jahre schien man sich auch wenig dafür zu interessieren, da man sich kaum vorstellen konnte, dass schwarze Löcher wirklich existierten. Erst 1958 untersuchte David Finkelstein die Singularität in der Metrik genauer und „entdeckte“ das alte Ergebnis von Eddington wieder. Bei $r = 0$ gibt es allerdings wirklich eine geometrische Singularität, denn dort wird die Krümmung unendlich.

Veranschaulichungen der Schwarzschild-Metrik

Als ersten Schritt zum Versuch einer Veranschaulichung betrachten wir einen räumlichen Schnitt durch die Äquatorebene der Schwarzschild-Metrik. Das bedeutet, wir setzen $\theta = 0$ (dieser Winkel wird nicht variiert) und $t = \text{const}$ (diese Koordinate wird ebenfalls nicht variiert). Die verbleibende Metrik in der Äquatorebene ist somit:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - R_S/r} + r^2 d\varphi^2 \quad (5.34)$$

Wir suchen nun eine „Höhenfunktion“ $f(r)$ über der von r und φ parametrisierten Ebene, sodass die Projektion der Fläche $(r, \varphi, f(r))$ im \mathbb{R}^3 auf die Ebene (r, φ) die oben angegebene Metrik liefert. Nach den Überlegungen aus Abschnitt ?? wird die rr -Komponente der Metrik (alle anderen Komponenten werden nicht beeinflusst, da f nicht vom Winkel abhängen soll) zu

$$g_{rr} = \frac{\partial(r, \varphi, f(r))}{\partial r} \cdot \frac{\partial(r, \varphi, f(r))}{\partial r} = (1, 0, f'(r)) \cdot (1, 0, f'(r)) = 1 + (f'(r))^2. \quad (5.35)$$

Wir müssen also die Differentialgleichung

$$\frac{1}{1 - R_S/r} = 1 + f'^2 \quad (5.36)$$

bzw.

$$f'(r) = \sqrt{\frac{R_S}{r - R_S}} \quad (5.37)$$

lösen (zunächst nur für $r > R_S$). Das Ergebnis ist

$$f(r) = 2\sqrt{R_S} \sqrt{r - R_S}. \quad (5.38)$$

Wir erhalten somit einen Trichter von der Form einer Wurzelfunktion (siehe Abb. 5.1). Diesen Trichter bezeichnet man auch als Flamm'schen Paraboloid.

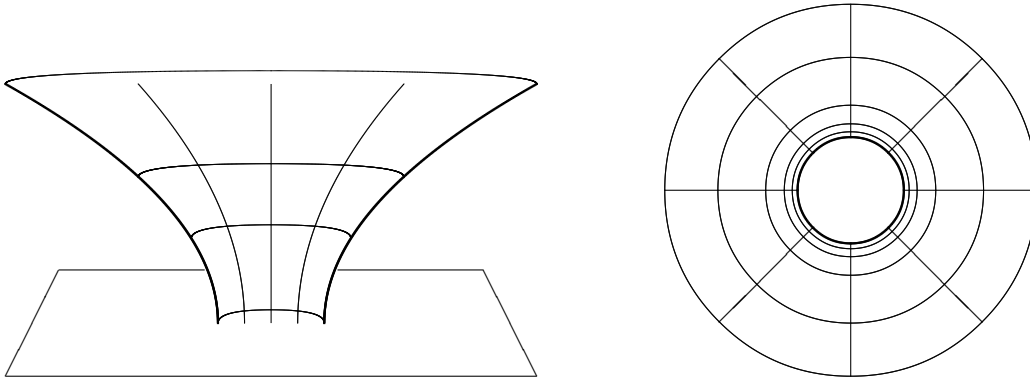


Abbildung 5.1: (links) Projiziert man den Trichter auf die (r, φ) -Ebene so induziert dieser eine Metrik, die gleich der Metrik der Schwarzschild-Lösung in der Äquatorialebene ist. (rechts) Die Dichte der Kreise, die auf dem Trichter einen konstanten Abstand voneinander haben, wird in dieser Karte immer höher, je näher man sich dem Schwarzschild-Radius nähert.

Obwohl $f(r)$ für sehr große Werte von r nicht verschwindet, ist die durch $f(r)$ induzierte Metrik für sehr große Werte von r gleich der Minkowski-Metrik, da die Ableitung von $f(r)$ für $r \rightarrow \infty$ gegen null geht.

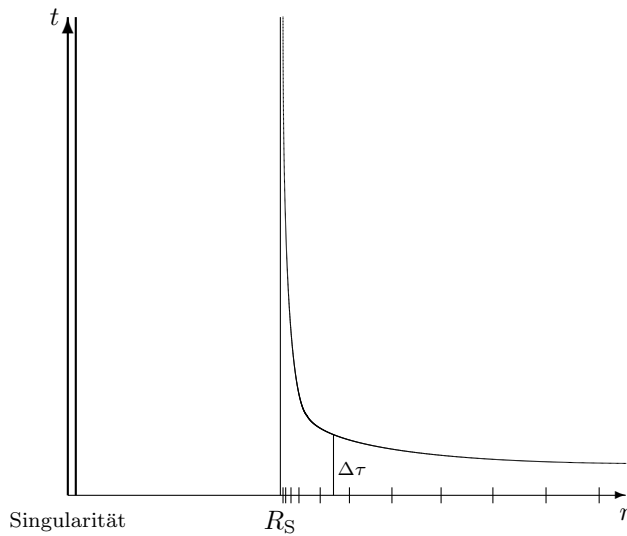


Abbildung 5.2: Schwarzschild-Metrik außerhalb des Schwarzschild-Radius. Physikalisch gleiche räumliche Abstände werden in der Karte durch immer kürzere Abstände dargestellt, wenn r sich dem Schwarzschild-Radius nähert. Andererseits entsprechen physikalisch gleiche Eigenzeitintervalle in t -Richtung immer größere Intervallen in der Karte.

Was passiert für $r < R_S$? In diesem Fall dreht sich das Vorzeichen in der rr -Komponente der Metrik um. Wir erhalten also für den Bereich innerhalb des Schwarzschild-Radius eine kausale Struktur in r -Richtung. Dies werden wir später noch diskutieren.

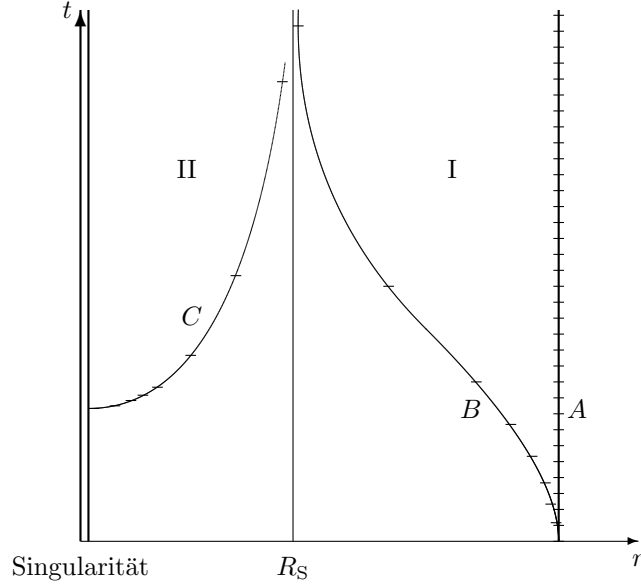
Nun betrachten wir die Schwarzschild-Metrik in (t, r) -Koordinaten (vgl. Abbildung 5.2). Wir haben in der Abbildung gleiche physikalische räumliche Distanzen auf der r -Achse markiert. In der Karte entsprechen diesen Distanzen immer kürzere Abstände. Man vergleiche dieses Verhalten mit den Abständen der Breitengraden auf einer Kugeloberfläche in einer senkrechten Zylinderprojektion auf die z -Achse (Abb. ??). Umgekehrt werden gleiche Eigenzeiten in t -Richtung in der Karte durch immer größere Abstände wiedergegeben (die Punkte auf der durchgezogenen Kurve haben von der r -Achse immer denselben senkrechten Abstand $\Delta\tau$). Dies entspricht den Verhältnissen für horizontale Abstände (entlang von Breitengraden) in Abb. ?. Dieselbe physikalische Distanz auf der Kugeloberfläche wird in der Karte durch immer größere Abstände in horizontaler Richtung wiedergegeben, wenn man sich den Polen nähert.

Weltlinien von Beobachtern

Abb. 5.3 skizziert die Verhältnisse zweier Beobachter im Feld der Schwarzschild-Metrik, ausgedrückt in den Koordinaten (t, r) , entsprechend der obigen Form (Gl. 5.32). Die Winkelvariable interessieren uns im Folgenden nicht weiter, da die Lösung rotationssymmetrisch ist. Die Koordinate t entspricht der Eigenzeit eines Beobachters in konstantem „unendlichen“ Abstand vom Schwarzen Loch und ist proportional zur Eigenzeit eines Beobachters A , der einen konstanten Abstand außerhalb vom Schwarzschild-Radius hält. Nähert sich dieser Abstand dem Schwarzschild-Radius, so wird dieser Proportionalitätsfaktor kleiner, d.h. umso weiter liegen in diesen Koordinaten Takte konstanter Eigenzeit auf der Weltlinie auseinander. Am Schwarzschild-Radius wird dieser Faktor null. Die senkrechte Linie an diesem Punkt entspricht einer „Null-Linie“, d.h. zwei Punkte auf dieser Linie haben den Minkowski-Abstand Null.

Für einen Beobachter B , der sich von A trennt und „frei“ auf das schwarze Loch zufällt, werden die Intervalle gleicher Eigenzeit durch immer größere Abstände wiedergegeben. Dies wird durch die Markierungen in Abb. 5.3 symbolisiert. Integriert man die Länge der Weltlinie von B bis zum Wert $t = \infty$ (d.h. unendlicher Eigenzeit des Beobachters A) auf, so findet man einen endlichen

Abbildung 5.3: Schwarzschild-Metrik. Beobachter A hält einen konstanten Abstand von der Singularität; Beobachter B trennt sich von Beobachter A und fliegt frei auf das schwarze Loch zu. Die Markierungen auf den jeweiligen Weltlinien entsprechen (qualitativ) gleichen Taktzeiten. Bereich I entspricht $r > R_S$, Bereich II ist der Bereich innerhalb des Horizonts. Eine Weltlinie hinter dem Horizont (C) „kommt von oben“ und endet unweigerlich in der Singularität.



Wert. Beobachter B erreicht somit den Schwarzschild-Radius nach einer für ihn endlichen Eigenzeit. Sein weiteres Schicksal wird aus dieser Darstellung zunächst nicht deutlich. Man kann jedoch seine Geodäte vervollständigen und erhält dabei eine Trajektorie C innerhalb des Schwarzschild-Radius, die in den angegebenen Koordinaten „von oben“ kommt und in der Singularität bei $r = 0$ endet.

Für $r < R_S$ haben die Koeffizienten von dt und dr ihre Vorzeichen gewechselt, d.h. innerhalb des Schwarzschild-Radius sind die Verhältnisse von „raumartig“ und „zeitartig“ umgekehrt: waagerechte Linien sind zeitartig und senkrechte Linien sind raumartig. Daher liegt die Singularität eigentlich in der zeitlichen Zukunft und ist raumartig.

Das „Universum“ von Beobachter A ist der Bereich I. Er kann Bereich II innerhalb des Schwarzschild-Radius nicht einsehen. Der Schwarzschild-Radius bildet somit für A einen Ereignishorizont. Er sieht einen Beobachter B auf diesen Ereignishorizont zufliegen, allerdings bleibt B für alle Zeiten von A außerhalb dieses Bereichs. Er verschwindet für A im infraroten Bereich des Spektrums.

Eine interessante Darstellung der Verhältnisse an einem schwarzen Loch, die insbesondere das Schicksal von Beobachter B deutlich macht, fanden 1960 Martin Kruskal und unabhängig von ihm George Szekeres (vgl. Abb. 5.5). Der Darstellung 5.3 entsprechen dabei zunächst nur die Bereiche I und II. Die Bereiche III und IV sind eine Erweiterung der Schwarzschild-Metrik zu einem geodätisch vollständigen Universum: Geodäten enden entweder an einer Singularität oder im Unendlichen.

Der wesentliche qualitative Unterschied zwischen Abb. 5.5 und der Darstellung des Rindler-Universums, Abb. ??, liegt in der Existenz einer Zukunfts- und Vergangenheitssingularität. Dort wird die Krümmung singulär, d.h. nach unserem klassischen Verständnis enden dort Raum und Zeit. Ein weiterer Unterschied zum Rindler-Universum ist die Rotationsinvarianz. Erweitert man das Rindler-Universum um zwei räumliche Dimensionen, wird die Struktur der Horizonte dort zu einem Keil, wohingegen es beim Schwarzen Loch ein Kegel ist.

Bereich I entspricht einem äußeren Beobachter A des schwarzen Loches. Er muss eine Kraft aufwenden, um sich dem Einfluss des schwarzen Loches entziehen zu können, und spürt somit das Gravitationsfeld. Aus Bereich IV kann Strahlung in seine Welt dringen, nichts aus seiner Welt kann aber in diesen Bereich hinein. Man bezeichnet diesen Bereich manchmal auch als „weißes Loch“. Die Trennungsfläche zwischen Bereich I und II entspricht dem Ereignishorizont. Nichts, was einmal aus Bereich I in diesen Bereich gelangt ist, kann jemals wieder in den Bereich I zurück. Der äußere

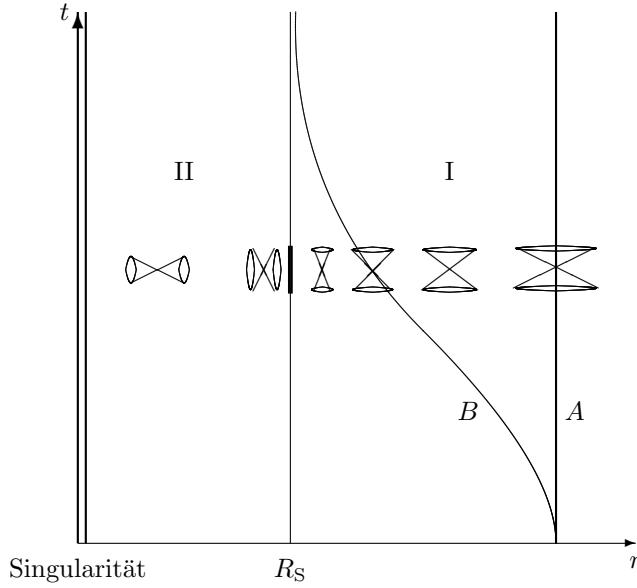


Abbildung 5.4: Lichtkegelstruktur der Schwarzschild-Metrik. Je kleiner r , umso enger wird der Lichtkegel in den Schwarzschild-Koordinaten. Beim Schwarzschild-Radius entartet der Kegel zu einer Linie (Öffnungswinkel null). Innerhalb des Horizonts haben r und t ihre Rollen als „räumliche“ und „zeitliche“ Koordinaten vertauscht.

Beobachter A sieht den Beobachter B an der Oberfläche des Horizonts verschwinden, ganz ähnlich wie im Fall des Rindler-Universums.

Bereich III ist wiederum von Bereich I kausal getrennt. Für eine geodätisch vollständige Lösung – d.h. eine Lösung, für die jede Geodäte entweder fortgesetzt werden kann oder an einer Singularität endet – ist dieser Bereich jedoch notwendig. Er ist wie ein zweites Universum – ebenfalls außerhalb des schwarzen Loches – aber trotzdem mit I durch keine zeitartige Linie verbunden.

Eine ebenfalls elegante Darstellung von Lösungen der Einstein-Gleichungen sind so genannte Penrose-Diagramme. Hierbei handelt es sich um eine konforme Koordinatentransformation, d.h. Winkel werden getreu dargestellt, allerdings sind Längen verzerrt. Durch eine konforme Transformation lässt sich die Kruskal-Szekeres-Raumzeit auf ein Diagramm wie in Abb. 5.6 abbilden.

Durch die konforme Transformation wird der Bereich „unseres“ Universums endlich. Er wird oben rechts von der Zukunftslinie $t = +\infty$ berandet und unten rechts von der Vergangenheitslinie $t = -\infty$. Sämtliche Weltlinien in unserem Universum (die also nie einen Ereignishorizont überschreiten) beginnen auf der Linie unten rechts und enden auf der Linie oben rechts. Weltlinien aus unserem Universum, die den Ereignishorizont zum Schwarzen Loch überschreiten, enden an der Zukunftssingularität.

5.3 Schwarze Löcher mit Ladung und Drehimpuls

Geschlossene Lösungen der Einstein-Gleichung sind noch für Schwarze Löcher mit einer elektrischen Ladung Q und einem Drehimpuls J bekannt. Die Kerr-Newman-Metrik beschreibt eine Lösung mit allen drei Qualitätsmerkmalen. Sie lautet:

$$ds^2 = \frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\varphi)^2 - \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left((r^2 + a^2) d\varphi - a dt \right)^2 - \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 - \rho^2 d\theta^2 \quad (5.39)$$

mit folgenden Abkürzungen:

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad a = \frac{J}{M}. \quad (5.40)$$

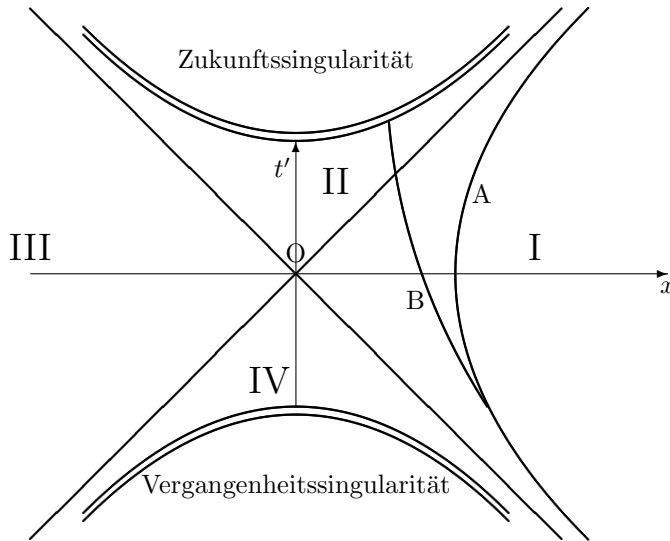


Abbildung 5.5: Kruskal-Szekeres-Darstellung der geodätisch vervollständigten Schwarzschild-Lösung. Beobachter *A* sieht das schwarze Loch nur von außen. Seine Welt ist der Bereich I. Aus dem Bereich der Vergangenheitssingularität IV kann Strahlung in Bereich I dringen. Beobachter *A* sieht diesen Bereich als „weißes Loch“. Andererseits kann ein Beobachter *B* auch von Bereich I hinter den Horizont in Bereich II dringen. Er trifft dann unweigerlich auf die Zukunftssingularität. Bereich II ist für *A* ein schwarzes Loch.

Für den Spezialfall $Q = 0$ und $J = 0$ wird diese Metrik zur Schwarzschild-Metrik (Gl. 5.32). Den Spezialfall $Q = 0$ und $J \neq 0$ bezeichnet man als Kerr-Metrik, und den Spezialfall $Q \neq 0$ und $J = 0$ als Reissner-Nordström-Metrik.

Theoretisch kann ein Schwarzes Loch noch andere Quantenzahlen haben – Baryonenzahl, Leptonenzahl, etc. – aber es gibt zu diesen Quantenzahlen keine weiteren Parameter. Insbesondere gibt es zur Massenverteilung oder Ladungsverteilung keine höheren Momente, oder zum Drehimpuls keinen Trägheitstensor mit unterschiedlichen Trägheitsmomenten. Diese Tatsache bezeichnet man manchmal auch als „No-Hair-Theorem“, womit angedeutet werden soll, dass ein Schwarzes Loch neben diesen angedeuteten Quantenzahlen keine weiteren Freiheitsgrade besitzen kann.

Besonders interessant sind einige Eigenschaften rotierender Schwarzer Löcher, die ich qualitativ kurz ansprechen möchte, da sie einerseits bei Schülern auf großes Interesse stoßen dürften und andererseits mit großer Wahrscheinlichkeit die riesigen Schwarzen Löcher in den Zentren von Galaxien sehr rasch rotieren werden, diese Lösungen also wichtig sind.

Ein rotierendes Schwarzes Loch besitzt zwei Ereignishorizonte (siehe Abb. 5.7). Der innere Ereignishorizont hat Kugelform, und ein Gegenstand, der diesen Horizont überquert hat, kann nicht mehr in den äußeren Bereich, aus dem er gekommen ist, zurück. Zwischen den beiden Horizonten befindet sich die so genannte Ergosphäre. In diesem Bereich kann sich ein Beobachter nur halten, wenn er sich um das Schwarze Loch herum bewegt. Der Raum in diesem Bereich wird durch das rotierende Schwarze Loch derart „mitgedreht“, dass der Lichtkegel so stark in Rotationsrichtung gekippt ist, dass eine Weltlinie innerhalb des Lichtkegels nicht an ihrem Ort bleiben kann, sondern sich ebenfalls um das Schwarze Loch winden muss. Trotzdem kann ein Beobachter diesem Bereich

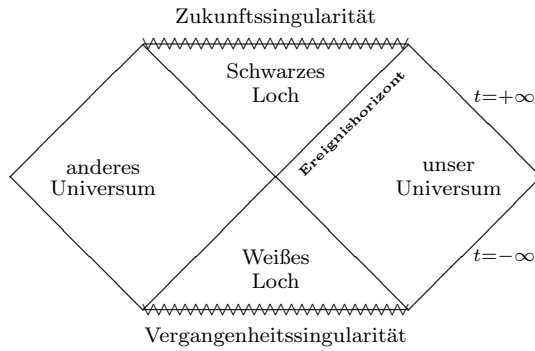


Abbildung 5.6: Penrose-Diagramm einer vervollständigten Schwarzschild-Lösung. Die Zukunftssingularität und die Vergangenheitssingularität entsprechen den horizontanten Linien am oberen und unteren Rand. Topologisch sind die Bereiche ähnlich dargestellt wie bei den Kruskal-Szekeres-Koordinaten. Lokal sind Lichtkegel immer unter $\pm 45^\circ$ geneigt, also wie bei einem gewöhnlichen Minkowski-Diagramm.

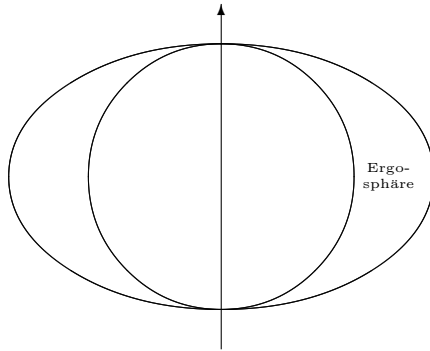


Abbildung 5.7: Ein rotierendes Schwarzes Loch besitzt einen inneren und einen äußeren Ereignishorizont. Den Bereich zwischen den beiden Horizonten bezeichnet man als Ergosphäre.

auch wieder entkommen.

Roger Penrose hat auf einen interessanten Prozess hingewiesen (den so genannten *Penrose-Prozess*), bei dem man an einem rotierenden Schwarzen Loch durch die Entsorgung von Müll Energie gewinnen kann: Eine Rakete mit Müll fliegt in den Bereich der Ergosphäre und trennt sich dort von dem Müll. Dies kann in einer Weise geschehen, dass der Müll in das Schwarze Loch hineinfliegt und gleichzeitig der Rakete ein größerer Impuls übertragen wird, mit dem sie das Schwarze Loch wieder verlassen kann. Insgesamt hat die Rakete nachher eine höhere Energie als vorher, und zwar einschließlich der ursprünglichen Energie des Mülls, und der Müll ist im Schwarzen Loch verschwunden. Bei diesem Prozess verliert das rotierende Schwarze Loch allerdings einen Teil seines Drehimpulses (und damit einen Teil seiner Rotationsenergie, die nun auf die Rakete übertragen wurde), sodass er nicht beliebig oft wiederholt werden kann.

Allgemein sind die Eigenschaften der Lösungen zu rotierenden bzw. geladenen Schwarzen Löchern wesentlich komplizierter als bei der Schwarzschild-Lösung. Abbildung 5.8) zeigt das Penrose-Diagramm zur geodätisch vervollständigten Lösung. Man erkennt die beiden Horizonte, den inneren und äußeren Horizont. Außerdem sind die Singularitäten nun zeitartig und können von einer Weltlinie umgangen werden, so dass es bei diesen Schwarzen Löchern tatsächlich möglich ist, dem Inneren wieder zu entkommen, allerdings in einen anderen Teil des Universums.

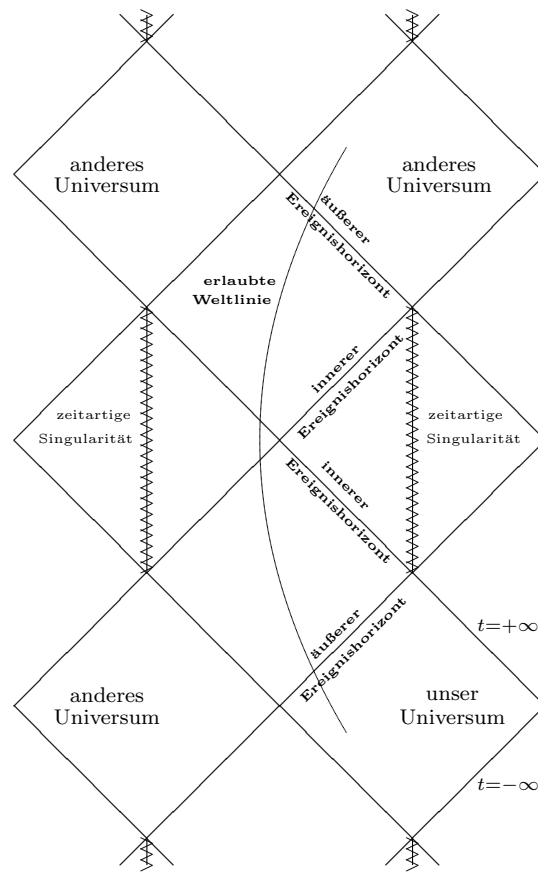


Abbildung 5.8: Penrose-Diagramm einer vervollständigten Kerr-Lösung. Die Singularitäten sind nun zeitartig und können daher von Weltlinien vermieden werden. Das Diagramm wiederholt sich in Zeitrichtung beliebig oft. In dieser Raumzeit gibt es zeitartige Weltlinien, die von unserem Universum in andere Universen führen, ohne auf eine Singularität zu treffen.

Literaturverzeichnis