Kapitel 1

Die ART – Allgemeine Vorbemerkungen

Bei der speziellen Relativitätstheorie kann man noch darüber streiten, welchen Beitrag Albert Einstein zu ihrer Entwicklung wirklich geleistet hat und ob sie nicht vielleicht auch ohne ihn kurz vor ihrer Entdeckung stand. Die wichtigen Formeln waren alle bekannt und insbesondere Henri Poincaré hatte schon wesentliche Fortschritte hinsichtlich der Interpretation dieser Formeln erzielt. Selbst die transformierte Zeit war als „lokale Hilfsgröße“ schon aufgetaucht und in Gebrauch.

Bei der allgemeinen Relativitätstheorie ist aber unbestritten, dass ihre grundlegenden Ideen das Werk von Einstein alleine sind. Es gab zwar hinsichtlich der Formulierung der korrekten Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie für lange Zeit einen Prioritätsstreit mit David Hilbert (vgl. [10], S. 418/19 und 424), der allerdings in weiten Zügen mittlerweile zugunsten von Einstein entschieden ist.

1.1 Die Motivationen für die allgemeine Relativitätstheorie

Einstein (*geb. 14.3.1879 in Ulm; gest. 18.4.1955 in Princeton (New Jersey)*) hatte sicherlich eine besondere Fähigkeit zu spüren, wann er etwas nicht genau verstanden hatte, wo die Ursachen dafür lagen, und wie er das Problem mit einfachen Überlegungen und Gedankenexperimenten angehen konnte. Gerade im Zusammenhang mit der Entwicklung der ART hat er das immer wieder unter Beweis gestellt. Welche Überlegungen genau Einstein zur allgemeinen Relativitätstheorie geführt haben, ist schwer nachzuvollziehen. Die folgenden, eng zusammenhängenden Argumente gehörten sicherlich dazu.

1.1.1 Das Äquivalenzprinzip

Eine erste, vereinfachte Form des Äquivalenzprinzips lautet

- Schwere und träge Masse sind gleich.

Die träge Masse $m_{\rm t}$ ist hierbei über das zweite Newton'sche Gesetz bei *bekannter* Kraft F definiert:

$$m_{\rm t} \;=\; \frac{F}{a}\,. \qquad (1.1)$$

Die schwere Masse steht im Gravitationsgesetz. Zwischen zwei Körpern mit den schweren Massen $m_{\rm g}$ und $m'_{\rm g}$ im Abstand r wirkt die Kraft:

$$F = G\frac{m_{\rm g}m'_{\rm g}}{r^2} . \tag{1.2}$$

Hierbei ist G die Newton'sche Konstante. Insbesondere erfährt ein Körper (nahe der Erdoberfläche) der Masse $m_{\rm g}$ im Gravitationsfeld der Erde (schwere Masse M, Radius R) die Schwerkraft

$$F = m_{\rm g}g \qquad \text{mit} \qquad g = G\frac{M}{R^2} , \tag{1.3}$$

wobei g die Erdbeschleunigung (meist als $9{,}81\,\mathrm{ms}^{-2}$ angenommen) bezeichnet.

Experimentell überprüfbar ist nur, dass träge und schwere Masse zueinander proportional sind. Ihre Gleichheit ist unter diesen Bedingungen eine Konvention. Üblicherweise wählt man die Newton'sche Konstante bzw. die Erdbeschleunigung so, dass der Proportionalitätsfaktor zwischen träger und schwerer Masse eins wird. Diese Proportionalität wurde mittlerweile mit einer Genauigkeit von rund 10^{-15} überprüft (vgl. z.B. [9, 5]). Derzeit ist ein weiteres Experiment geplant - STEP, Satellite Test of the Equivalence Principle -, mit dem eine Genauigkeit von 10^{-18} angestrebt wird.

Die obige Formulierung des Äquivalenzprinzips ist in mehrfacher Hinsicht vereinfacht. In erster Linie liegt das daran, dass wir die träge wie auch die schwere Masse durch nicht-relativistische Gleichungen definiert haben. In einer veralteten Sprechweise (wie sie Einstein noch verwandte) könnte man sagen, dass wir das Äquivalenzprinzip für „ponderable Materie“ definiert haben. Es ist damit noch nicht eindeutig geklärt, inwiefern auch für andere Energieformen das Äquivalenzprinzip gilt.

Experimentell zeigt sich, dass eine allgemeinere Formulierung des Äquivalenzprinzips gilt, die sich weniger auf die Massen als auf die Kräfte bezieht:

- Gravitationskräfte sind äquivalent zu Beschleunigungskräften.

In der Formulierung von Einstein ([2]) heißt es sogar: „Trägheit und Schwere sind wesensgleich.“ Doch was bedeutet hier „äquivalent“ oder „wesensgleich“?

Üblicherweise drückt man diese Äquivalenz folgendermaßen aus: Die Wirkung eines konstanten Gravitationsfeldes lässt sich durch den Übergang zu einem beschleunigten Bezugssystem eliminieren. Für ein nicht homogenes Gravitationsfeld muss man sich auf ein *lokales Bezugssystem* beschränken. Die Abmessungen eines solchen lokalen Bezugssystems (das schließt auch die Zeitdauer für Experimente ein) müssen klein genug sein, dass bei vorgegebener Messgenauigkeit keine Effekte der Inhomogenität des Feldes nachgewiesen werden können. Sie hängen somit sowohl vom Inhomogenitätsgrad des Feldes als auch von dem zulässigen Messfehler ab. Ein lokales Bezugssystems ist daher nur approximativ realisierbar, ähnlich wie die „nicht-relativistische Mechanik“ oder die „klassische Mechanik“ (im Sinne von Nicht-Quantenmechanik).

Die „Äquivalenz“ zwischen einem Gravitationsfeld und einer Beschleunigung lässt sich folgendermaßen präzisieren:

- In einem lokalen Bezugssystem lässt sich der Einfluss einer Gravitationskraft nicht von der Wirkung einer Beschleunigung unterscheiden.

Der Begriff des lokalen Bezugssystems ist somit auch auf Beschleunigungskräfte zu übertragen. Eine Rotation des Bezugssystems um eine Achse durch das System ist beispielsweise nicht erlaubt, ebensowenig kann die Wirkung des Gravitationsfeldes von einem Gegenstand *innerhalb* eines Bezugssystems durch Beschleunigungskräfte beschrieben werden.

Für einfache Fälle der nicht-relativistischen Mechanik ist diese zweite Form des Äquivalenzprinzips leicht aus der ersten Formulierung (der Gleichheit von träger und schwerer

Masse) herzuleiten. Für kompliziertere Fälle, beispielsweise der relativistischen Mechanik oder der Elektrodynamik, muss die Wirkung der Gravitation bzw. der Beschleunigung zunächst genau bekannt sein, um das Äquivalenzprinzip überprüfen zu können. Insofern ist die eigentliche Aussage des Äquivalenzprinzips, wie sie der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegt, eher ein Postulat:

- In einem lokalen Inertialsystem gelten die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie.

Durch kein Experiment soll somit die Wirkung der Gravitation in einem lokalen Bezugssystem von der Wirkung einer Beschleunigung unterschieden werden können.

Trotz dieser scheinbar klaren Formulierung des Äquivalenzprinzips gibt es noch weitreichende Feinheiten und Unterteilungen. Insbesondere auf die Unterscheidung zwischen dem sogenannten „starken“ und „schwachen“ Äquivalenzprinzip soll hier nicht eingegangen werden (vgl. beispielsweise [6]).

1.1.2 Das Mach'sche Prinzip

Im Rahmen der Newton'schen Mechanik wie auch der speziellen Relativitätstheorie gibt es keine Erklärung für das Äquivalenzprinzip. Es erhebt sich hier allerdings die Frage, was man als Erklärung bezeichnen kann.

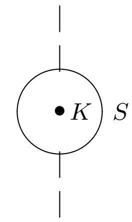
Ernst Mach hat in seiner *Mechanik* das Newton'sche Konzept des absoluten Raums angegriffen, weil es sich seiner Meinung nach dabei um eine unbeobachtbare Entität handelt. Auch Newtons Argumente, dass sich die Wirkung des absoluten Raums durch die Trägheitskräfte bemerkbar macht, wenn Körper relativ zum absoluten Raum beschleunigt werden, hat er nicht gelten lassen. Zu dem berühmten „Eimerexperiment“ von Newton – die Wasseroberfläche in einem Eimer ist gewölbt, wenn sich das Wasser relativ zum absoluten Raum bewegt, wobei die Bewegung relativ zu den Eimerwänden keine Bedeutung hat – bemerkt er, dass man schließlich nicht wüsste, ob sich das Wasser wirklich relativ zum absoluten Raum bewegt oder nur relativ zum Fixsternhimmel. Das entscheidende Experiment – den Eimer in Ruhe lassen und den Fixsternhimmel relativ dazu in Rotation zu versetzen; wobei nach Newton das Wasser nicht gewölbt sein solle – könne man schließlich nicht durchführen.

Mach war der Ansicht, dass das Gravitationsgesetz in seiner bekannten Form nicht vollständig sei, sondern dass ein weiterer Beitrag zu berücksichtigen sei, der sich allerdings nur bei einer beschleunigten Bewegung relativ zu einer großen Massenansammlung (z.B. der Menge aller stellaren Objekte) bemerkbar machen würde. In diesem Fall wäre Trägheit eine besondere Form der Gravitation, das heißt, die Trägheit eines Körpers würde durch dieselbe Wechselwirkung verursacht wie sein Gewicht. Ein solches Gesetz wäre eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip.

Einstein hat lange Zeit geglaubt, dass die allgemeine Relativitätstheorie in diesem Sinne eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip liefere. So schreibt er in einem Brief an Mach vom 25. Juni 1913:

> Hochgeehrter Herr Kollege!
>
> Dieser Tage haben Sie wohl meine neue Arbeit über Relativität und Gravitation erhalten, die nach unendlicher Mühe und quälendem Zweifel nun endlich fertig geworden ist. Nächstes Jahr bei der Sonnenfinsternis soll sich zeigen, ob die Lichtstrahlen an der Sonne gekrümmt werden, ob mit anderen Worten die zugrunde gelegte fundamentale Annahme von der Aequivalenz von Beschleunigung des Bezugssystems einerseits und Schwerefeld andererseits wirklich zutrifft.
>
> Wenn ja, so erfahren ihre genialen Untersuchungen über die Grundlagen der Mechanik – Planck's ungerechtfertigter Kritik zum Trotz – eine glänzende Bestätigung. Denn es ergibt sich mit Notwendigkeit, dass die *Trägheit* in einer Art *Wechselwirkung* der Körper ihren Ursprung hat, ganz im Sinne ihrer Überlegungen zum Newtonschen Eimer-Versuch.

Eine erste Konsequenz in diesem Sinne finden Sie oben auf Seite 6 der Arbeit. Es hat sich ferner folgendes ergeben:



1) Beschleunigt man eine träge Kugelschale S, so erfährt nach der Theorie ein von ihr eingeschlossener Körper eine beschleunigende Kraft.
2) Rotiert die Schale S um eine durch ihren Mittelpunkt gehende Achse (relativ zum System der Fixsterne („Restsystem“)), so entsteht im Innern der Schale ein Coriolis-Feld, d.h. die Ebene des Foucault-Pendels wird (mit einer allerdings praktisch unmessbar kleinen Geschwindigkeit) mitgenommen.

Es ist mir eine große Freude, Ihnen dies mitteilen zu können, zumal jene Kritik Plancks mir schon immer höchst ungerechtfertigt erschienen war.

Mit größter Hochachtung grüßt Sie herzlich
Ihr ergebener A. Einstein

Das in diesem Brief angesprochene Experiment zur Bestimmung der Lichtablenkung an der Sonne wurde 1914 wegen des Ausbruchs des ersten Weltkrieges nicht durchgeführt – zum Glück, wie manche meinen. Die allgemeine Relativitätstheorie lag nämlich in ihrer endgültigen Form noch nicht vor, und Einstein hat zur Berechnung des Ablenkungswinkels nur das Äquivalenzprinzip benutzt, ohne die inhomogene Krümmung des Raumes in der Nähe der Sonne korrekt zu berücksichtigen. Der Wert war in diesem Fall um einen Faktor 2 zu klein ([3]). Einstein korrigierte diesen Fehler bevor das Experiment dann 1919 wirklich durchgeführt wurde und seine Vorhersagen bestätigte.

Es zeigte sich später, dass die angesprochenen Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie die Trägheitskräfte nicht erklären können. Zwei umeinander rotierende Kugeln, die durch einen Faden zusammengehalten werden, werden auch in der ART durch Kräfte nach außen getrieben, die sich nicht als Wechselwirkung verstehen lassen. Es erhebt sich somit die Frage, inwieweit die allgemeine Relativitätstheorie wirklich eine Erklärung für das Äquivalenzprinzip liefert, wie es oft behauptet wird.

Dass diese Frage alles andere als trivial zu beantworten ist, hat beispielsweise eine Konferenz zu dem Thema „Mach’s Principle – From Newton’s Bucket to Quantum Gravity“ gezeigt, die vom 26–30 Juli 1993 in Tübingen stattfand (die Proceedings sind als Buch erschienen [1]). Mehrere Sessions und Diskussionsrunden waren auf dieser Konferenz dem Thema gewidmet, inwieweit die allgemeine Relativitätstheorie das Mach’sche Prinzip realisiert.

Abschließend möchte ich noch kurz darauf eingehen, woher der Begriff „Mach’sches Prinzip“ eigentlich stammt und was genau er bedeuten soll. Geprägt wurde dieser Begriff 1918 von Einstein [2]. In diesem kurzen Artikel mit dem Titel „Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie“ will Einstein auf einige Kritikpunkte antworten, die gegen die allgemeine Relativitätstheorie vorgebracht wurden. Er schreibt:

Die Theorie, wie sie mir heute vorschwebt, beruht auf drei Hauptgesichtspunkten, die allerdings keineswegs voneinander unabhängig sind. Sie seien im folgenden kurz angeführt und charakterisiert und hierauf im nachfolgenden von einigen Seiten beleuchtet:

a) *Relativitätsprinzip:* Die Naturgesetze sind nur Aussagen über zeiträumliche Koinzidenzen; sie finden deshalb ihren einzig natürlichen Ausdruck in allgemein kovarianten Gleichungen.

b) *Äquivalenzprinzip:* Trägheit und Schwere sind wesensgleich. Hieraus und aus den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie folgt notwendig, dass der symmetrische „Fundamentaltensor“($g_{\mu\nu}$) die metrischen Eigenschaften des Raumes, das Trägheitsverhalten der Körper in ihm, sowie die Gravitationswirkungen bestimmt. Den durch den Fundamentaltensor beschriebenen Raumzustand wollen wir als „G-Feld“ bezeichnen.

c) *Machsches Prinzip:* Das G-Feld ist *restlos* durch die Massen der Körper bestimmt. Da Masse und Energie nach den Ergebnissen der speziellen Relativitätstheorie das Gleiche sind und die Energie formal durch den symmetrischen Energietensor ($T_{\mu\nu}$) beschrieben wird, so besagt dies, dass das G-Feld durch den Energietensor der Materie bedingt und bestimmt sei.

An den Begriff „Machsches Prinzip“ hat Einstein eine Fußnote angeschlossen:

Bisher habe ich die Prinzipe a) und c) nicht auseinandergehalten, was aber verwirrend wirkte. Den Namen „Machsches Prinzip“ habe ich deshalb gewählt, weil dieses Prinzip eine Verallgemeinerung der Machschen Forderung bedeutet, dass die Trägheit auf eine Wechselwirkung der Körper zurückgeführt werden müsse.

Die Einstein'sche Formulierung aller drei Prinzipien bedarf sicherlich einiger Kommentare. Auf Punkt a) gehen wir im nächsten Abschnitt noch ein. Punkt b) wurde im vorherigen Abschnitt erläutert und wird vielleicht klarer, wenn man die vierte (letzte) dort angegebene Formulierung des Äquivalenzprinzips betrachtet. Auf Punkt c) möchte ich hier kurz eingehen.

Heute verstehen wir unter dem Mach'schen Prinzip meist die Formulierung, die Einstein in der Fußnote gewählt hat: „Trägheit beruht auf einer Wechselwirkung zwischen Körpern.“ Vielleicht hat Einstein zur Zeit des Zitats (1918) noch geglaubt, dass die allgemeine Relativitätstheorie das Mach'sche Prinzip in dieser Form tatsächlich erfüllt. Schon die Bemerkung unter Punkt b) (der Fundamentaltensor legt das Trägheitsverhalten der Körper fest) gilt nicht mehr, wenn man neben der Gravitation noch andere Wechselwirkungen berücksichtigt. Ein Beispiel ist das von Newton beschriebene System zweier umeinander rotierender Kugeln, die durch einen Faden miteinander verbunden sind. Die Kräfte im Faden, die die beiden Kugeln auf konstantem Abstand halten, sind keine Gravitationskräfte. Es treten selbst im flachen Minkowski-Raum die bekannten Fliehkräfte als Trägheitskräfte auf.

Das Mach'sche Prinzip in der Einstein'schen Formulierung gilt aber noch aus einem anderen Grund nicht, den Einstein selber in der erwähnten Arbeit diskutiert: Es würde verlangen, dass es in einem Universum ohne Materie nur die Minkowski-Metrik $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1,1,1,1)$ als Lösung gibt. Einstein selber zeigt aber, dass $g_{\mu\nu} = \text{konst}$ (für alle Komponenten verschiedene Konstanten) ebenfalls eine Lösung der Gleichungen darstellt. Daher gibt es zum selben Materiezustand des Universums verschiedene Lösungen für das G-Feld, was nach der Einstein'sche Version des Mach'schen Prinzips verboten wäre.

1.1.3 Das Relativitätsprinzip

Wir haben gesehen, dass sowohl in der Newton'schen Mechanik als auch in der speziellen Relativitätstheorie eine bestimmte Klasse von Bezugssystemen dadurch ausgezeichnet ist, dass in ihnen die Newton'schen Gesetze (bzw. die relativistischen Verallgemeinerungen) gelten, insbesondere das Trägheitsgesetz. Diese Bezugssysteme bezeichnet man als Inertialsysteme. Sie sind durch die Poincaré-Gruppe untereinander verbunden, d.h. je zwei Inertialsysteme lassen sich durch ein Element dieser Gruppe ineinander überführen.

Diese Auszeichnung einer bestimmten Klasse von Systemen als Inertialsysteme empfand Einstein als willkürlich. Die Willkür besteht dabei in zwei Aspekten, die von der allgemeinen Relativitätstheorie unterschiedlich gelöst werden.

Eine Willkür liegt in der Auszeichnung der „Gleichförmigkeit“, d.h. der Wahl bestimmter Skalen sowohl hinsichtlich der Zeit als auch hinsichtlich des Raumes. Physikalisch ist keine Zeit- oder Raumskala ausgezeichnet. Wir wählen die Skalen nach dem Gesichtspunkt der Einfachheit bzw. der Bequemlichkeit, nämlich so, dass die Newton'schen Gesetze für die einfachsten Bewegungsformen –

die geradlinig-gleichförmige Bewegung des kräftefreien Körpers oder auch die gleichförmig periodische Bewegung eines Pendels oder Planeten – die einfachste Gestalt annehmen. Physikalisch darf jedoch eine beliebige (nicht notwendigweise gleichförmige) Reparametrisierung von Raum und Zeit die Gesetze nicht abändern.

Auf diese Eigenschaft bezieht sich Einstein in der obigen (Seite 4) Erläuterung des Relativitätsprinzips: „Die Naturgesetze sind nur Aussagen über zeiträumliche Koinzidenzen; sie finden deshalb ihren einzig natürlichen Ausdruck in allgemein kovarianten Gleichungen.“ Statt „zeiträumliche Koinzidenzen“ würden wir vielleicht heute „(lokale) Ereignisse“ sagen. Wie wir diese Ereignisse parametrisieren darf die Gültigkeit der Naturgesetze natürlich nicht beeinflussen. Daher müssen die Gleichungen allgemein kovariant, d.h. reparametrisierungsinvariant, sein. Dieses Prinzip ist in der allgemeinen Relativitätstheorie erfüllt.

Die zweite Willkür liegt in der Auszeichnung der „Geradlinigkeit“. Geradlinigkeit ist nur für eine flache Raumzeit definiert, im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie also für eine Raumzeit, in der es keine Gravitationsfelder gibt. Die allgemeine Relativitätstheorie erweitert den Begriff des Inertialsystems auch auf nicht-flache Raumzeiten: In einem Gravitationsfeld frei fallende Bezugssysteme sind ebenfalls Inertialsysteme. Geometrisch folgen sie ebenso Geodäten wie die herkömmlichen Inertialsysteme in einer flachen, feldfreien Raumzeit. Hierzu schreibt Einstein ([3], S. 899):

> Man kann bei dieser Auffassung ebensowenig von der *absoluten Beschleunigung* des Bezugssystems sprechen, wie man nach der gewöhnlichen Relativitätstheorie von der *absoluten Geschwindigkeit* eines Systems reden kann.

Und als Fußnote fügt er noch an:

> Natürlich kann man ein *beliebiges* Schwerefeld nicht durch einen Bewegungszustand des Systems ohne Gravitationsfeld ersetzen, ebensowenig, als man durch eine Relativitätstransformation alle Punkte eines beliebig bewegten Mediums auf Ruhe transformieren kann.

Diese Aussage, dass in einem Gravitationsfeld frei fallende Systeme ebenfalls Inertialsysteme sind, ist von nicht zu unterschätzender praktischer Bedeutung: Die Newton'schen Inertialsysteme bzw. die Inertialsysteme der speziellen Relativitätstheorie sind kaum zu realisierende Idealfälle, da es in unserem Universum kaum Orte ohne Gravitationskräfte gibt. Frei fallende Systeme hingegen lassen sich vergleichsweise leicht verwirklichen.

In einer Hinsicht bleibt jedoch die allgemeine Relativitätstheorie unbefriedigend, und das hängt natürlich wieder mit dem Mach'schen Prinzip zusammen. In einer flachen Raumzeit ohne Gravitationsfelder folgt ein (auch von anderen Kräften unbeeinflusster) Körper einer geraden Linie. Doch was bedeutet „gerade Linie“, wenn es keine Materie im Raum gibt. Die Minkowski-Metrik erlaubt die Definition einer geraden Linie ohne Bezug auf irgendeinen anderen Körper im Universum. Die Kritik Machs an diesem Konzept wird auch von der allgemeinen Relativitätstheorie nicht beantwortet.

1.1.4 Raum und Zeit nehmen nicht an der Dynamik teil

Die Aymmetrie zwischen einerseits der Wirkung von Raum bzw. Raumzeit auf die Materie, wie sie sich in den Trägheitskräften (z.B. der Fliehkraft) offenbart, und andererseits der fehlenden Wirkung von Materie auf den Raum bzw. die Zeit empfand Einstein immer als unbefriedigend.

Im Vorwort zur Neuauflage von Emil Strauss' deutscher Übersetzung von Galilei's *Dialog* vergleicht Einstein das Konzept eines absouten Raumes mit der aristotelischen Vorstellung eines Weltmittelpunktes ([4], Vorwort, S. XI). Er schreibt zunächst zum Anliegen des Dialogs: „Galileo wendet sich gegen die Einführung dieses ‚Nichts‘ (Weltmittelpunkt), das doch auf die materiellen

Dinge einwirken soll; dies findet er ganz unbefriedigend." Dann geht er ganz explizit auf die Analogie zur Relativitätstheorie ein:

> Ich möchte hier – in Form einer Einschaltung – darauf aufmerksam machen, dass eine weitgehende Analogie besteht zwischen Galileos Ablehnung der Setzung eines Weltmittelpunktes zur Erklärung des Fallens der Körper und der Ablehnung der Setzung des Inertialsystems zur Erklärung des Trägheitsverhaltens der Körper (welche Ablehnung der allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegt). Beiden Setzungen gemeinsam ist nämlich die Einführung eines begrifflichen Dinges mit folgenden Eigenschaften:
>
> 1. Es ist nicht als etwas Reales gedacht, von der Art der ponderablen Materie (bzw. des „Feldes").
> 2. Es ist maßgebend für das Verhalten der realen Dinge, ist aber umgekehrt keiner Einwirkung durch die realen Dinge unterworfen.
>
> Die Einführung derartiger begrifflichen Elemente ist zwar vom rein logischen Gesichtspunkte nicht schlechthin unzulässig, widerstrebt aber dem wissenschaftlichen Instinkt.

Diese Kritik an der absoluten, an der Dynamik nicht beteiligten Form von Raum und Zeit wird durch die allgemeine Relativitätstheorie überwunden. Die Einstein'schen Feldgleichungen beschreiben den Einfluss der Materie auf das metrische Feld der Raumzeit. Darüberhinaus gibt es sogar nichttriviale Lösungen der Einstein'schen Gleichungen, selbst wenn der Energie-Impuls-Tensor der Materie verschwindet, z.B. die so genannten Gravitationswellen. Hierbei handelt es sich um wellenförmige Schwankungen des metrischen Feldes um die Lösung der flachen Minkowski-Raumzeit.

1.2 Geometrisierung des Raumes

Die allgemeine Relativitätstheorie verbindet man oft mit der Vorstellung einer „gekrümmten" Raumzeit. Die Geometrie der Raumzeit denkt man sich dabei meist durch den metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ gegeben, beispielsweise als Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen. Hier gibt es jedoch physikalisch noch einige Interpretationsprobleme. Zunächst ist der metrische Tensor gar nicht experimentell bestimmbar. Beliebige Diffeomorphismen der Raumzeit-Mannigfaltigkeit lassen die Geometrie unverändert, ändern aber die Komponenten des metrischen Tensors. Damit erhebt sich die Frage, ob bzw. wie man experimentell zu geometrischen Größen gelangen kann.

Um Geometrie betreiben zu können, müssen wir Abstände ausmessen können. Selbst wenn wir uns die Punkte als identifiziert denken, haben wir noch keine eindeutige Vorschrift, zwei nahe beieinander liegenden Punkten einen Abstand zuzuordnen. Ein Großteil der folgenden Darstellung entstammt der „Philosophie der Raum-Zeit-Lehre" von Hans Reichenbach [8]. Wir konzentrieren uns zunächst auf die Ausmessung räumlicher Abstände.

Angenommen, gegeben seien zwei Paare von Raumpunkten – (A,B) und (a,b) – und wir wollen den Abstand von (A,B) mit dem Abstand von (a,b) vergleichen. Was machen wir? Wir tragen den Abstand (A,B) auf einem „Lineal" ab, transportieren das Lineal zu den Punkten (a,b) und vergleichen die auf dem Lineal abgetragene Strecke mit dem Punktepaar (a,b). Doch was garantiert uns, dass sich die Länge des Lineals bei dem Transport vom Punktepaar (A,B) zum Punktepaar (a,b) nicht verändert? Dafür gibt es keine Garantie! Wir können nur unter geeigneten Voraussetzungen *definieren*, dass sich dieser Abstand nicht ändert.

Was sind das für Voraussetzungen? Aus der Erfahrung sind wir bereit zu glauben, dass sich das Lineal beim Transport nicht verformt. Wir betrachten das Lineal im Rahmen der üblichen Genauigkeiten als einen „starren Körper". Abgesehen von der Unhandlichkeit des Verfahrens würden wir sicherlich nicht zwei auf einer Wasseroberfläche schwimmende Korken zur Abstandsmessung heranziehen. Wir müssen also zunächst definieren, was wir unter einem starren Körper verstehen wollen. Wir wissen, dass sich ein Körper bei Erhitzung im Allgemeinen ausdehnt. Zug- oder Druckkräfte können ebenfalls die Abmessungen eines Körpers verändern. Auch wenn wir ein Material wählen, bei dem die inneren Kräfte die Form gegenüber solchen äußeren Zug- und Druckkräften nahezu unverändert lassen, wissen wir doch aus der speziellen Relativitätstheorie, dass es keinen idealen starren Körper gibt. Die Wirkung eines plötzlichen Stoßes kann sich nur mit maximal Lichtgeschwindigkeit im Körper ausbreiten, d.h. eine gewisse Verformung lässt sich bei keinem Körper vermeiden. Wir können aber definieren, dass wir einen Körper als *starr* bezeichnen, wenn sich seine Form ohne Einwirkung erkennbarer äußerer Kräfte nicht verändert. Ähnlich wie schon beim Trägheitsprinzip sind wir also darauf angewiesen, über das Vorhandensein äußerer Kräfte Aussagen machen zu können.

Dies ist sicherlich nicht immer der Fall. Angenommen, eine Kraft wirkt auf alle Körper gleichermaßen und zwar so, dass sämtliche Abstandsverhältnisse zwischen den Körpern und an den Körpern im Vergleich mit dem kräftefreien Fall unverändert bleiben, dann kann die Wirkung einer solchen Kraft nicht nachgewiesen werden. Reichenbach spricht in diesem Zusammenhang von einer „kongruenzerhaltenden, universellen Kraft“. Dass sich solche Kräfte physikalisch nicht nachweisen lassen, hat Newton schon in seiner *Principia* (Korrolar 6) beschrieben.

Wir müssen also verschiedene Arten von Kräften unterscheiden. Reichenbach führt zunächst die Unterscheidung zwischen einer *universellen* Kraft und einer *differentiellen* Kraft ein. Eine universelle Kraft wird durch folgende zwei Eigenschaften definiert:

1. Sie wirkt auf jede Form von Materie gleichermaßen.

2. Es gibt keine Abschirmung gegen sie.

Die bekannten Kräfte – Zug- und Druckkräfte, elektromagnetische Kräfte, Wärme – sind differentielle Kräfte: Sie wirken auf verschiedene Materialien unterschiedlich. Außerdem gibt es in den meisten Fällen eine Abschirmung gegen diese Kräfte. Anders ist es mit der Gravitation. Sie wirkt materialunabhängig auf alle Körper gleichermaßen – das ist eine Form des Äquivalenzprinzips – und es gibt keine Abschirmung gegen die Gravitation. Gravitation zählt nach Reichenbach also zu den universellen Kräften.

Unter den universellen Kräften bilden die kongruenzerhaltenden Kräfte noch einen Spezialfall. Hierzu zählt beispielsweise ein überall homogenes Gravitationsfeld. Solche Kräfte lassen sich durch keinen beobachtbaren Effekt nachweisen. Im Folgenden sei „keine Kraft“ immer gleichbedeutend mit „keine Kraft oder universelle, kongruenzerhaltende Kraft“. Ein *in*homogenes Gravitationsfeld entspricht einer universellen, aber *nicht* kongruenzerhaltenden Kraft. Betrachten wir beispielsweise vier Massepunkte. Zwei dieser Massepunkte seien durch eine Feder miteinander verbunden, die anderen beiden Massepunkte seien frei. Im kräftefreien Fall können wir die Anfangsbedingungen so einrichten, dass sich die Abstände zwischen den vier Massepunkten nicht verändern. Das Gleiche gilt auch in einem kongruenzerhaltenden, universellen Kraftfeld. In einem inhomogenen Gravitationsfeld, beispielsweise dem Zentralfeld eines Planteten, werden die Massen relativ zu einander jedoch bewegt: Die beiden freien Massen werden ihren Abstand rascher verringern als die beiden durch eine Feder auf einen bestimmten Abstand gehaltenen Massen. Dieser Effekt lässt sich nachweisen.

Wir wollen nun den Abstand zwischen Raumpunkten durch starre Körper definieren. Dass dies überhaupt sinnvoll ist, hängt von einer wesentlichen Tatsache der Erfahrung ab: Ohne differentielle Kräfte hängt die Länge eines starren Körpers weder vom Transportweg (im Zustandsraum des Körpers, d.h. Drehungen sind mit eingeschlossen) noch von seinem Material ab. Wenn überhaupt, so ist seine Länge nur eine Funktion des Ortes und der Orientierung des starren Körpers. Hier hilft uns aber keine experimentell überprüfbare Beobachtung weiter – die Länge eines starren Körpers an einem Ort mit einer bestimmten Orientierung ist eine sogenannte „Zuordnungsdefinition“ ([8]), die wir frei wählen können.

Eine mögliche Definition ist, die Länge eines starren Körpers ohne differentielle Kräfte als konstant anzunehmen. In diesem Fall kann es sich aber herausstellen, dass wir eine Geometrie finden, die nicht euklidisch ist. Wir können aber auch umgekehrt für den Raum eine euklidische Geometrie *definieren*. Dann werden wir Abweichungen von einer euklidischen Geometrie, wie sie mit einem scheinbar starren Körper festgestellt werden, auf universelle Kräfte zurückführen müssen, die den Körper deformieren.

Das ist auch der Grund, warum wir zwischen differentiellen und universellen Kräften unterscheiden. Der Unterschied zwischen diesen beiden Kraftarten liegt nämlich darin, dass wir die universellen Kräfte durch eine Umdefinition der geometrischen Abstände eliminieren können. Die Wirkung einer universellen Kraft können wir als Eigenschaft des Raumes auffassen, wohingegen die Wirkung differentieller Kräfte ohne Willkür nicht als Eigenschaft des Raumes formuliert werden kann.

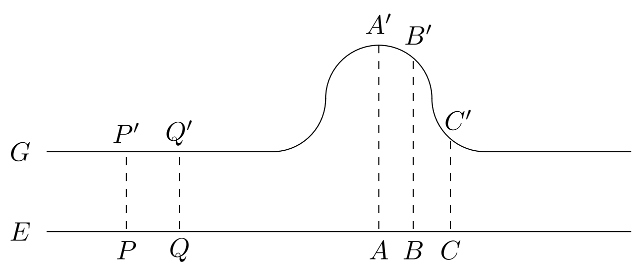


Abbildung 1.1: Projektion einer nichteuklidischen Geometrie G auf eine Ebene E.

Das folgende Beispiel (aus Reichenbach [8], §2 – §8) soll das Gesagte verdeutlichen (vgl. Abb. 1.1). Gegeben seien zwei Flächen, eine euklidische Ebene E und eine Fläche G mit einer „Beule“. Auf diesen Flächen leben zweidimensionale Wesen, die ihre Welt intrinsisch ausmessen wollen. Wir stellen uns nun vor, dass jeder Punkt der Fläche G mit der nicht-euklidischen Geometrie auf die Fläche E senkrecht projiziert wird. Außerdem nehmen wir an, dass eine universelle Kraft (eine Art „universelle“ Erwärmung der Fläche) die Längenmaßstäbe der Wesen auf der euklidischen Fläche E so verformt, dass die Abstände von Punkten auf E genau den Abständen entsprechen, die die Wesen auf G mit ihren unverformten Maßstäben den entsprechenden Punkten zuordnen. Die Wesen auf E ordnen also den Punkten A, B und C untereinander dieselben Abstände zu, die auch die Wesen auf G den Punkten A', B' und C' zuordnen. Würden nicht die Wesen auf der Fläche E dieselbe Geometrie rekonstruieren, die auch die Wesen auf G finden? Gibt es überhaupt einen Unterschied zwischen den beiden Geometrien? Liegt der Unterschied nicht nur in der unterschiedlichen Form der Einbettung der beiden Flächen in einen dreidimensionalen Raum? Diese Einbettung sollte aber mit der intrinsischen Geometrie nichts zu tun haben.

Wir als „außenstehende“ Wesen haben den Eindruck gewonnen, dass es einen Unterschied zwischen der Fläche G und der Fläche E gibt: G entspricht wirklich einer nicht-euklidischen Geometrie, während auf E eben eine Kraft wirkt. Doch was bedeutet hier „wirklich“? Wir haben in der Physik keine Möglichkeit, zwischen einer universellen Kraft und einer nicht-euklidischen Geometrie des Raumes zu unterscheiden. Es bleibt uns überlassen, welche Anschauung wir *für denselben physikalischen Sachverhalt* benutzen wollen. Reichenbach drückt das dadurch aus, dass er für die Verformungen U eines Längenmaßstabes – idealisierte Beispiele für solche „Geometrie-Messer“ sind in Abb. 1.2 skizziert – an jedem Punkt drei Ursachen verantwortlich macht:

$$U \;=\; G + K_{\mathrm{u}} + K_{\mathrm{d}} \;.$$

Hierbei ist G die Geometrie des Raumes, K_{u} eine universelle Kraft und K_{d} eine differentielle Kraft. Die differentielle Kraft können wir durch Vergleich verschiedener Materialien bzw. durch Abschirmung des Maßstabes von dieser Kraft erkennen und entsprechend berücksichtigen. Doch darüberhinaus

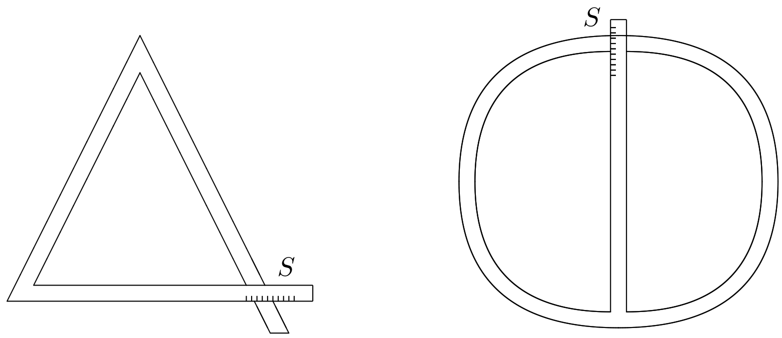


Abbildung 1.2: Zwei Geometrie-Messer. Auf der linken Seite bildet ein starrer Körper ein Dreieck, das am Punkt S offen ist. Auf einer Skala lässt sich dort ablesen, wie sehr das Dreieck von einem euklidischen Dreieck abweicht. Auf der rechten Seite bildet der starre Körper einen Kreis, der noch zusätzlich eine Diagonalverbindung hat. Am Punkt S lässt sich wieder ablesen, wie sehr Umfang und Durchmesser von ihrem euklidischen Verhältnis abweichen.

bemerken wir nur die Wirkung der Summe $G + K_\text{u}$. Es bleibt uns überlassen, welchen Teil wir der Geometrie G des Raumes zuschreiben und welchen Teil wir als universelle Kraft K_u interpretieren. Die Einstein'sche Konvention setzt $K_\text{u} = 0$; es bleibt also ausschließlich die Geometrie. Jemand anders wird vielleicht die Geometrie G gleich der euklidischen Geometrie E wählen und sämtliche beobachteten Abweichungen davon einer universellen Kraft zuschreiben.

Der Vorteil der Einstein'schen Konvention ist ihre Einfachheit. Warum sollen wir irgendeine Geometrie besonders auszeichnen, die von den am starren Körper gemessenen Maßstabsangaben abweicht? Die euklidische Geometrie ist nur in unserer Anschauung ausgezeichnet, weil wir durch unsere Alltagsvorstellung an sie gewöhnt sind. Mathematisch gibt es keine ausgezeichnete Geometrie.

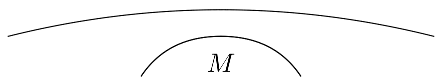
Auch andere Versuche zur Auszeichnung einer euklidischen Geometrie – beispielsweise die Idee von Dingler und Lorenzen, euklidische Ebenen durch „Aneinanderreiben und Abschabung" starrer Körper zu erzeugen (siehe beispielsweise [7]) – kann man heute als fehlgeschlagen betrachten.

Abschließend sollte ich noch anmerken, dass die hier angestellten Überlegungen nicht davon abhängen, dass wir starre Körper zur Ausmessung von Abständen verwendet haben. Auch die Zeitmessungen von Lichtstrahlen, die zwischen Ereignissen hin- und herlaufen, erfordern zum Vergleich, dass die Messung der Zeit an verschiedenen Raumpunkten unabhängig von diesen Raumpunkten ist. Außerdem wird vorausgesetzt, dass Licht zwischen zwei Punkten immer den „geodätisch kürzesten" Weg nimmt, aber damit hat man schon eine Konvention getroffen. Wer garantiert, dass bei universellen Kräften das Licht nicht von einer Geodäten abgelenkt wird?

1.3 Ein Beispiel - das Fermat'sche Prinzip

In der geometrischen Optik kennen wir das Fermat'sche Prinzip: Der von einem Lichtstrahl durchlaufene Weg hat die kürzeste (streng genommen handelt es sich allgemein um eine lokal stationäre) optische Weglänge. Die optische Weglänge l_opt ergibt sich dabei aus der geometrischen Weglänge l multipliziert mit dem Brechungsindex n des Mediums. Bei einem ortsabhängigen Brechungsindex folgt

$$l_\text{opt} = \int_\gamma n(x(l))\,\mathrm{d}l \tag{1.4}$$



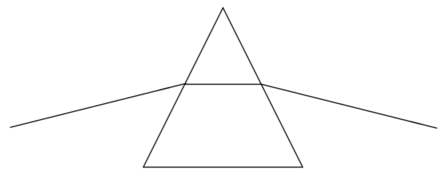


Abbildung 1.3: (Links) Ein Lichtstrahl wird an einer großen Masse – z.B. der Sonne – abgelenkt. (Rechts) Ein Lichtstrahl wird in einem Prisma abgelenkt.

Hierbei ist $x(l)$ ein durch die geometrische Weglänge l parametrisierter Weg γ.

Angenommen, es gäbe nur Photonen. Wäre es dann sinnvoll, die optische Dichte $n(x)$ am Ort x als eine geometrische Eigenschaft zu definieren? Da Elektronen und andere Teilchen von einem Glaskristall, Wasser, etc. vollkommen anders abgelenkt werden als Licht, machen wir hier die Einschränkung auf Photonen.

Abbildung 1.3 zeigt zwei ähnliche Situationen: einmal die Ablenkung von Licht an einer Gravitationsquelle wie der Sonne und einmal die Ablenkung von Licht in einem Prisma. In der ART wird die Lichtablenkung an der Sonne als Beispiel für die nicht-euklidische Geometrie gewertet, d.h. der Lichtstrahl breitet sich entlang einer Lösung der Geodätengleichung aus.

Die Antwort, ob auch im Fall unterschiedlicher optischer Dichten die Geometrie des Raums für die Ablenkung verantwortlich gemacht werden kann, hängt von einer wichtigen Eigenschaft ab: Ob die Ursachen der Ablenkung universell sind. Im Allgemeinen zeigen lichtdurchlässige Körper wie Glas oder Wasser eine Dispersion, d.h., der Brechungsindex hängt von der Wellenlänge ab und somit werden unterschiedliche Wellenlängen auch unterschiedlich gebrochen. Licht unterschiedlicher Wellenlänge nimmt also bei gleichem Anfangs- und Endpunkt unterschiedliche Wege. Insofern wirkt ein Prisma „differentiell“. Die Gravitation hingegen lenkt das Licht unabhängig von seiner Wellenlänge immer gleich ab.[1]

[1] Dies gilt, obwohl Licht mit kürzeren Wellenlängen energiereicher ist als Licht mit langen Wellenlängen. Nach dem Äquivalenzprinzip ist diese Tatsache klar: Die Ablenkung von Licht in einem beschleunigten System hat nichts mit seiner Wellenlänge zu tun, sondern lediglich mit dem Grad der Beschleunigung und der Lichtgeschwindigkeit.

Literaturverzeichnis

[1] *Mach's Principle – From Newton's Bucket to Quantum Gravity*; Julian Barbour & Herbert Pfister (Hrsg.); Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1995.

[2] Albert Einstein; *Prinzipielles zur allgemeinen Relativitätstheorie*; Annalen der Physik 55 (1918) 241.

[3] Albert Einstein; *Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes*; Annalen der Physik 35 (1911) 898.

[4] Galilei; *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische*; Teubner Stuttgart, 1982; aus dem Italienischen übersetzt von Emil Strauss.

[5] Touboul, Pierre, et al. (MICROSCOPE Collaboration); *MICROSCOPE Mission: Final Results of the Test of the Equivalence Principle*; Phys. Rev. Lett. **129** (2022) 121102.

[6] C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler; *Gravitation*; W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973.

[7] Peter Mittelstaedt; *Philosophische Probleme der modernen Physik*; BI-Wissenschaftsverlag, 1989.

[8] Hans Reichenbach; *Philosophie der Raum-Zeit-Lehre*; Hans Reichenbach - Gesammelte Werke Bd. 2; Vieweg-Verlag, Braunschweig; 1977.

[9] Schlamminger, Choi, Wagner, Gundlach, Adelberger; *Test of the Equivalence Principle using a rotating torsion balance*; Phys. Rev. Lett. **100** (2008) 041101.

[10] Károly Simonyi; *Kulturgeschichte der Physik*; Verlag Harri Deutsch, Thun, Frankfurt am Main, 1990.