

# Kapitel 4

## Gravitationswellen und Newton'sche Näherung

Ebenfalls kurz ansprechen werde ich die Beschreibung von Gravitationswellen, den Newton'schen Grenzfall sowie das Verhalten von Drehimpuls bzw. Spin im Gravitationsfeld.

### 4.1 Gravitationswellen

Auch ohne „Materie“ – ausgedrückt durch den Energie-Impuls-Tensor  $T_{\mu\nu}$  – haben die Einstein'schen Feldgleichungen nicht-triviale Lösungen. Eine Klasse von Lösungen der freien Feldgleichungen bilden die Gravitationswellen. In diesem Fall interessiert man sich für Metriken, die sich nur wenig von der Metrik der flachen Raum-Zeit – der Minkowski-Metrik  $\eta_{\mu\nu}$  – unterscheiden. Daher bietet sich die Aufspaltung

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \quad (4.1)$$

an. Man interessiert sich nun für die sogenannten linearisierten Einstein-Gleichungen, d.h. es werden nur Terme in linearer Ordnung in  $\epsilon$  berücksichtigt.

In dieser Näherung ergibt sich für die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu} h_{\kappa\nu} + \partial_{\nu} h_{\mu\kappa} - \partial_{\kappa} h_{\mu\nu}) \quad (4.2)$$

(Dieses Ergebnis ist sogar exakt, wenn man  $\eta^{\lambda\kappa}$  durch  $g^{\lambda\kappa}$  ersetzt.) Für den Riemann'schen Krümmungstensor erhalten wir:

$$R_{\mu\gamma\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} (\partial_{\mu\gamma}^2 h_{\kappa\nu} + \partial_{\kappa\nu}^2 h_{\mu\gamma} - \partial_{\mu\nu}^2 h_{\kappa\gamma} - \partial_{\kappa\gamma}^2 h_{\mu\nu}) . \quad (4.3)$$

(Hier ergeben die in den Christoffel-Symbolen quadratischen Terme in der linearen Näherung keinen Beitrag.) Die Verkürzung über den mittleren unteren Index mit dem oberen führt auf den Ricci-Tensor:

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\lambda\kappa} \left( \frac{\partial^2 h_{\kappa\nu}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} + \frac{\partial^2 h_{\mu\lambda}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\kappa}} - \frac{\partial^2 h_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} \right) . \quad (4.4)$$

Wie in Abschnitt ?? gezeigt wurde, muss für eine Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen im Vakuum der Ricci-Tensor verschwinden. Man erhält so eine lineare Differentialgleichung für  $h_{\mu\nu}$ :

$$\square h_{\mu\nu} + \frac{\partial^2 h_{\rho}^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\mu}^{\rho}}{\partial x^{\rho} \partial x^{\nu}} - \frac{\partial^2 h_{\nu}^{\rho}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\rho}} = 0 . \quad (4.5)$$

Eine infinitesimale Koordinatentransformation

$$y^\mu = x^\mu + \epsilon f^\mu(x) \quad \text{bzw.} \quad dy^\mu = dx^\mu + \epsilon \frac{\partial f^\mu(x)}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (4.6)$$

soll die Metrik natürlich nicht ändern, d.h.

$$\hat{g}_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (4.7)$$

Die Funktion  $h_{\mu\nu}$  transformiert sich in diesem Fall wie

$$\hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \frac{\partial f^\mu}{\partial x^\nu} + \frac{\partial f^\nu}{\partial x^\mu}. \quad (4.8)$$

Die Funktionen  $f^\mu(x)$  sind dabei (im physikalischen Sinne) beliebig, und die obige Gleichung beschreibt die Auswirkung einer solchen *Eichtransformation* auf die Funktion  $h_{\mu\nu}$ . Ähnlich wie in der Elektrodynamik können wir also eine Eichung wählen, für die die Feldgleichungen eine besonders einfache Form annehmen. Hier wählt man üblicherweise

$$2 \frac{\partial h^\mu_\nu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial h^\mu_\mu}{\partial x^\nu}. \quad (4.9)$$

Durch eine geeignete Wahl von  $f_\mu$  lassen sich diese vier Bedingungen immer erfüllen. In dieser Eichung lauten die linearisierten freien Feldgleichungen:

$$\square h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.10)$$

Dies ist eine gewöhnliche Wellengleichung für die Komponenten  $h_{\mu\nu}$ . Die Eichbedingung führt allerdings zu Einschränkungen zwischen den verschiedenen Komponenten.

Auch wenn es noch keine zufriedenstellende Quantentheorie der Gravitation gibt, so kann man doch vermuten, dass im Grenzfall kleiner Raum-Zeit-Fluktuationen die Quantentheorie der Gravitation durch eine quantisierte Form obiger Wellengleichung gegeben ist. Die zugehörigen Teilchen bezeichnet man als Gravitonen. Als Quantenzahlen zum Eigendrehimpuls  $\hbar$  der Gravitonen treten zunächst die Werte  $h = 0, \pm 1, \pm 2$  auf, was Gravitonen als Spin-2-Teilchen kennzeichnet. Die Helizitäten zu  $h = 0$  und  $h = \pm 1$  gibt es jedoch nicht (ähnlich, wie es auch die Helizität  $m = 0$  für das Photon als Spin-1-Teilchen nicht gibt – da das Photon keine Masse hat, gibt es auch keine transversalen Freiheitsgrade). Lediglich die Helizitäten  $h = \pm 2$  entsprechen daher der physikalischen Polarisation einer Gravitationswelle bzw. dem Zustand eines Gravitons (vgl. [?], Kap. 29 und 38).

Man versucht heute mit Hilfe von Laserinterferenzexperimenten (im Wesentlichen riesige Michelson-Morley-Interferometer) Gravitationswellen nachzuweisen. Bisher ist ein direkter Nachweis noch nicht geglückt, allerdings gibt es indirekte Hinweise auf Gravitationswellen: An Doppelpulsarsystemen (das bekannteste ist das System PSR 1913+16) beobachtet man über die Jahre hinweg eine Verkürzung der Umlaufzeiten (Abb. 4.1). Diese beruht auf einem Energieverlust, der nach der ART berechnet werden kann und im Wesentlichen in einer Abstrahlung von Gravitationswellen besteht.

## 4.2 Die Newton'sche Näherung

Die Geodätengleichung (??) entspricht der Bewegungsgleichung für ein Teilchen unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes. In der Newton'schen Näherung sollte diese Gleichung somit in

$$\frac{d^2 \vec{x}(t)}{dt^2} = -\vec{\nabla} \phi(x) \quad (4.11)$$

übergehen, wobei

$$\phi(x) = -G \frac{M}{|\vec{x}|} \quad (4.12)$$

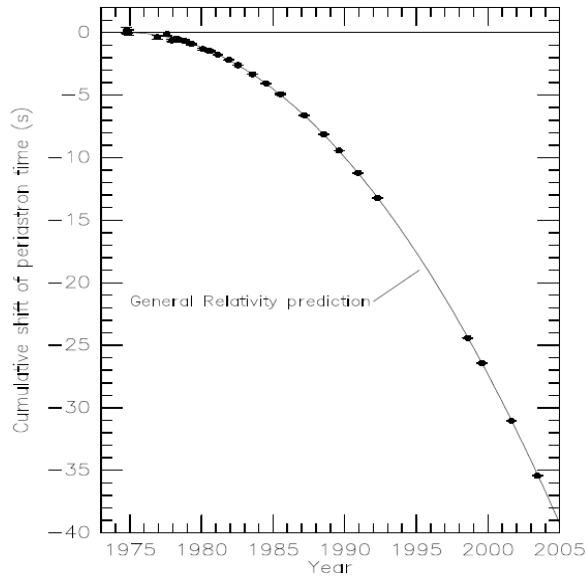


Abbildung 4.1: Periodenverkürzung des Periastrons (der Punkt, bei dem ein Stern eines Doppelstern-Systems seinem Partner am nächsten ist) bei dem Doppelstern-System PSR 1913+16. Die Verkürzung beruht im Wesentlichen auf einer Abstrahlung von Gravitationswellen. (Aus [?])

das Gravitationspotential eines Massepunktes bzw. Zentralkraftfelds (dividiert durch die Probemasse) ist. Für den Minkowski-Raum verschwinden die Christoffel-Symbole und man erhält die freie Bewegungsgleichung. Also muss für die Newton'sche Näherung eine nicht-triviale Metrik angenommen werden.

Wenn wir den Grenzfall  $v \ll c$  oder

$$\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} \quad (4.13)$$

betrachten (das bedeutet, die Vierergeschwindigkeit hat praktisch nur eine Zeitkomponente), folgt für die Beschleunigung:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \approx -\Gamma_{00}^\mu \left( \frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \quad (4.14)$$

Außerdem sind wir an statischen Lösungen interessiert, bei denen die Metrik keine explizite Zeitabhängigkeit hat. In diesem Fall ist  $\Gamma_{00}^0 = 0$  und  $\Gamma_{00}^k = \frac{1}{2} \partial^k h_{00}$ . Das bedeutet, in unserer Näherung ist

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = c. \quad (4.15)$$

Weiterhin folgt

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = \frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x_k} c^2 \quad (4.16)$$

oder

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{1}{2} \vec{\nabla} h_{00} c^2. \quad (4.17)$$

Ein Vergleich mit Gl. 4.11 gibt uns

$$h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2} \quad \text{oder} \quad g_{00} = 1 - \frac{2\phi}{c^2} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (4.18)$$

Damit die Einstein'sche ART im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten und kleiner statischer Variationen der Metrik (d.h. für große Abstände von einer Massenkonzentration) mit der Newton'schen Theorie übereinstimmt, muss in diesem Grenzfall die Komponente  $g_{00}$  der Metrik die Form

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad (4.19)$$

haben. Der Parameter  $M$  hat die Interpretation der Newton'schen Masse. Über die anderen Komponenten der Metrik können wir nichts aussagen. Insbesondere können wir nicht annehmen, dass diese in irgendeinem Sinne klein im Vergleich zu  $g_{00}$  sind. Zur Bewegungsgleichung tragen sie in dem Grenzfall  $v^i \ll c$  nicht bei.

Nahe der Erdoberfläche können wir näherungsweise  $\phi = gh$  setzen ( $h$  parametrisiert die Höhe über dem Erdboden) und erhalten

$$g_{00} = 1 - \frac{2gh}{c^2}. \quad (4.20)$$

### 4.3 Gravity B Probe

Am 20. April 2004 wurde mit einer Rakete ein Satellit in die Erdumlaufbahn gebracht, dessen Ziel die Messung der Raumkrümmung in der Nähe der Erde war. Das als „Gravity B Probe“ bekannte Experiment wurden in der Zeit bis Ende 2005 durchgeführt, die Auswertung der Daten dauerte mehrere Jahre. Zur Ausmessung der Raumkrümmung bediente man sich mehrerer hoch empfindlicher Gyroskope.

Die Idee des Experiments beruhte darauf, dass der Drehimpuls ein Vektor ist, der – sofern andere Einflüsse als die Gravitation ausgeschaltet werden können – entlang einer Weltlinie parallel verschoben wird. Den 4-Vektor  $s^\mu$  erhält man aus der Forderung, dass der Vektor im Bezugssystem des Gyroskopes durch  $(0, s^i)$  (eine verschwindende Zeitkomponente und die drei räumlichen Komponenten des Drehimpulses) gegeben ist. Die Präzession im Gravitationsfeld erfolgt daher nach der Gleichung

$$\frac{ds^\mu}{d\tau} = -\Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu s^\lambda, \quad (4.21)$$

wobei  $u^\nu(\tau)$  die Komponenten des Tangentialvektors (in der Eigenzeitparametrisierung) an die Bahnkurve der Verschiebung sind. Damit kann man aus einer Rotation der Drehimpulsachse auf bestimmte Komponenten der Metrik schließen.

Gravity B Probe sollte zwei Effekte der Raumkrümmung messen:

1. Die Raumkrümmung durch die Masse der Erde, wie sie sich beispielsweise aus einer Schwarzschild-Metrik (siehe nächstes Kapitel) für große Abstände vom Horizont ergibt. Der zu erwartende Effekt aufgrund dieses Einflusses war pro Jahr rund 6600 Millibogensekunden, um den die Drehachse verschoben wird.
2. Den so genannten *Lense-Thirring-Effekt*, wonach die Raumzeit in der Umgebung eines rotierenden Körpers von diesem „mitgezogen“ wird, was zu einer schwachen Verdrillung der Raumzeit in der Umgebung eines rotierenden Körpers führt. Man kann diesen Effekt z.B. aus der Kerr-Lösung (siehe ebenfalls nächstes Kapitel) für ein rotierendes Schwarzes Loch in großem Abstand erhalten. Hier betrug der zu erwartende Effekt rund 40 Millibogensekunden pro Jahr.

Insbesondere der Lense-Thirring-Effekt ist in der Umgebung der Erde winzig und erforderte eine sehr große Präzision sowohl bei den Gyroskopen als auch bei den Geräten zur Messung der Rotation der Drehimpulsachsen. Trotzdem konnte der Effekt mit rund 1% Genauigkeit nachgewiesen werden.

# Literaturverzeichnis