Kapitel 10

Das Zwillingsparadoxon

Das Zwillingsparadoxon gehört zu den bekanntesten Gedankenexperimenten der Physik, wobei dieser Effekt in abgewandelter Form auch experimentell überprüft bzw. beobachtet wurde. Die Idee: Eine Person bleibt hier auf der Erde (die wir näherungsweise als Inertialsystem ansehen), eine zweite, gleich alte Person - daher betrachtet man gerne Zwillinge - macht mit einem Raumschiff eine ausgedehnte Weltraumreise mit nahezu Lichtgeschwindigkeit. Nach einiger Zeit treffen die beiden Personen wieder zusammen und es stellt sich heraus, dass die Person, die auf der Erde geblieben ist, deutlich mehr gealtert ist als die Person, die den Weltraumflug gemacht hat.

An dieser Situation sind zwei Dinge paradox: (1) Wie können Zwillinge sich in ihrem Alter um viele Jahre unterscheiden? - hier liefert die Relativitätstheorie eine unmittelbare Erklärung - und (2) Was unterscheidet das Bezugssystem der Person, die auf der Erde geblieben ist, von dem Bezugssystem der Person, die die Weltraumreise gemacht hat? Es muss ja einen physikalischen Grund geben, welche der beiden Personen jünger geblieben ist. Befänden sich z.B. beide in einem Inertialsystem, müsste die Physik auch für beide Personen dieselbe sein. Mindestens eine der beiden Personen befand sich also nicht in einem Inertialsystem; dies ist die Person, welche die Weltraumreise gemacht hat und irgendwann mindestens einmal beschleunigen musste, um wieder an den Ausgangsort zurückzukommen. Gelegentlich heißt es deshalb, die Beschleunigung sei dafür verantwortlich, dass die eine Person jünger geblieben ist. Diese Aussage - insbesondere die Sprechweise „dafür verantwortlich sein“ - ist irreführend und führt zu vielen Fehlvorstellungen: Die Beschleunigung hat keinen kausalen Einfluss auf den Gang von Uhren, aber sie unterscheidet ein allgemeines Bezugssystem von einem Inertialsystem.

In diesem Kapitel klären wir zunächst den Begriff der Eigenzeit und wie man die Eigenzeit entlang einer Weltlinie berechnen kann. Hierbei bezeichnet eine Weltlinie die Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ in einer vierdimensionalen Raumzeit bzw. den Graph der Abbildung $t \mapsto \boldsymbol{x}(t)$. Anschließend wird das Zwillingsparadoxon nochmals genauer beschrieben und erörtert. Begriffe wie Koordinatensystem, Bezugssystem, Inertialsystem sowie auch das Konzept der Einstein-Synchronisation von Uhren werden vorausgesetzt.

10.1 Die Eigenzeit entlang einer Weltlinie

Eines der Grundpostulate der Speziellen Relativitätstheorie ist die Aussage, dass die Lichtgeschwindigkeit für einen inertialen Beobachter unabhängig vom Bewegungszustand der Lichtquelle immer denselben Wert hat. Seien A und B zwei Ereignisse, die durch einen Lichtstrahl verbunden werden können (z.B. (A) der Moment, in dem ein Lichtstrahl durch eine Blende tritt und (B) der Moment, in dem dieser Lichtstrahl an einem Spiegel reflektiert wird). Solche Ereignisse bezeichnet man als *lichtartig*. Dann gilt für jeden inertialen Beobachter:

$$\frac{|\Delta \boldsymbol{x}|}{\Delta t} = c \qquad \text{oder} \qquad (\Delta \boldsymbol{x})^2 - c^2(\Delta t)^2 = 0\,. \tag{10.1}$$

Hierbei sind $\Delta \boldsymbol{x}$ bzw. Δt der in einem inertialen Bezugssystem gemessene Abstand (genauer der Differenzvektor, dessen Betrag der Abstand ist) bzw. die Zeitdauer zwischen den beiden Ereignissen A und B. c bezeichnet die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und ist somit eine universelle Konstante. Aus dieser Gleichung wird oft gefolgert, dass

$$(\Delta \boldsymbol{x})^2 - c^2(\Delta t)^2 = (\Delta \boldsymbol{x}')^2 - c^2(\Delta t')^2\,, \tag{10.2}$$

wobei sich nun $\Delta \boldsymbol{x}$ bzw. Δt auf die räumliche Differenz und die Zeitdauer zwischen zwei beliebigen Ereignissen A und B bezieht, also nicht unbedingt nur lichtartige Ereignisse. $\Delta \boldsymbol{x}'$ und $\Delta t'$ bezeichnen den entsprechenden Differenzvektor bzw. die Zeitdauer zwischen denselben Ereignissen in einem anderen inertialen Bezugssystem.

Dieser Schluss ist allerdings zu begründen, denn ganz allgemein kann man natürlich aus der Gleichheit zweier Ausdrücke an der Stelle 0 nicht auf die Gleichheit allgemein schließen und was für lichtartige Ereignisse gilt, muss nicht unbedingt für beliebige Ereignisse gelten. Die wesentlichen weiteren Annahmen, die hier eingehen sind: (1) der Übergang für räumliche und zeitliche Abstände von einem inertialen Bezugssystem in ein anderes inertiales Bezugssystem wird durch eine lineare Transformation beschrieben, und (2) unser Raum ist homogen und isotrop.

Die erste Annahme, die Linearität der Transformation, bedeutet, dass sich die linke und die rechte Seite von Gleichung 10.2 nur um einen Faktor unterscheiden können. Die Annahme begründet sich daraus, dass unter den Transformationen Inertialsysteme wieder in Inertialsysteme übergehen sollen, sodass in einem Raum-Zeit-Diagramm gerade Linien wieder in gerade Linien transformiert werden. Aus der Isotropie und Homogenität des Raumes folgt dann, dass dieser Faktor 1 sein muss.[1]

Seien nun A und B zwei Ereignisse, sodass das Ereignis B durch das Ereignis A kausal beeinflusst werden kann. Das bedeutet:

$$c^2(\Delta t)^2 > (\Delta \boldsymbol{x})^2\,. \tag{10.3}$$

Gilt diese Eigenschaft für zwei Ereignisse in einem Inertialsystem, dann gilt sie in allen Inertialsystemen. Man bezeichnet die Ereignisse A und B in diesem Fall als *zeitartig*. Zu zwei zeitartigen Ereignissen gibt es immer ein Inertialsystem, sodass diese beiden Ereignisse am Ort $x = 0$ (oder allgemeiner am selben Ort) stattfinden. Für dieses Inertialsystem ist $\Delta \boldsymbol{x} = 0$ und somit wird der Abstand zwischen diesen beiden Ereignissen ausschließlich durch die Zeitdauer $\Delta\tau$ zwischen ihnen in diesem ausgezeichneten Inertialsystem charakterisiert. Diese spezielle Zeitdauer bezeichnet man als die *Eigenzeit* des Streckenabschnitts der inertialen Weltlinie, die die beiden Ereignisse verbindet.

Man beachte, dass die Eigenzeit nicht einfach zwei Ereignissen, sondern einer Weltlinie, die die Ereignisse verbindet, zugeschrieben wird. Handelt es sich bei dieser Weltlinie um die Weltlinie des Ursprungs eines Inertialsystems, wie oben angenommen, bezeichnet man diese Eigenzeit auch als Abstand der beiden Ereignisse. Handelt es sich bei den Ereignissen um *raumartige* Ereignisse, gilt $c^2(\Delta t)^2 < (\Delta \boldsymbol{x})^2$. In diesem Fall gibt es immer ein Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse gleichzeitig stattfinden, d.h. in diesem Inertialsystem ist $\Delta t = 0$ und der räumlich Abstand der Ereignisse ist $|\Delta \boldsymbol{x}|$. Man beachte, dass diese Zuordnungen - Eigenzeiten zu zwei zeitartigen Ereignissen

[1] Die inverse Transformation muss wegen der Isotropie denselben Faktor haben wie die Transformation selbst, daher kommt für den Faktor nur noch ± 1 in Frage. Da man aber (in mehr als einer Raumdimension) eine Transformation stetig in ihre inverse überführen kann, muss der Faktor $+1$ sein.

und Abstand zu raumartigen Ereignissen - ein spezielles Inertialsystem voraussetzen. Andererseits ist beispielsweise die Eigenzeit zwischen zwei Ereignissen A und B eine Lorentz-Invariante: Alle Beobachter sind sich darin einig, dass eine (ideale) Uhr, die sich im Ursprung eines Inertialsystems befindet und deren Weltlinie die Ereignisse A und B verbindet, diese Eigenzeit anzeigt.

Wir können den Begriff der Eigenzeit von einer geraden Strecke in einem Inertialsystem zu einer beliebigen Weltlinie verallgemeinern. Sei $\boldsymbol{x}(t)$ die Weltlinie eines Beobachters. Wir können diese Weltlinie in kleine Abschnitte unterteilen, die geradlinig verbunden werden. Die Weltlinie wird also durch einen Polygonzug angenähert. Für jede infinitesimale Teilstrecke ist

$$(\Delta\tau(t))^2 = (\Delta t)^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta\boldsymbol{x})^2 \qquad \text{bzw.} \qquad \Delta\tau(t) = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t \tag{10.4}$$

die Eigenzeit. Hierbei sind Δt und $\Delta\boldsymbol{x}$ die Zeitdifferenz und die räumliche Differenz in einem beliebigen Inertialsystem. Im Sinne eines Riemann'schen Integrals können wir schreiben

$$\tau(\gamma) = \int_\gamma \mathrm{d}\tau = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t\,. \tag{10.5}$$

γ ist hierbei eine Weltlinie, die in einem beliebigen Inertialsystem durch die Zeit t in diesem System parametrisiert und durch $\boldsymbol{x}(t)$ beschrieben wird. $\tau(\gamma)$ ist die Eigenzeit zwischen den beiden Ereignissen $\boldsymbol{x}(t_0)$ und $\boldsymbol{x}(t_1)$ entlang der Weltlinie γ.

An dieser Stelle wurde eine wesentliche Annahme gemacht: Durch die Beschleunigung in nicht-inertialen Systemen wird der Gang einer Uhr nicht zusätzlich beeinflusst. Es trägt nur die Eigenzeit bei, die sich aus einer Summe der geraden (inertialen) Abschnitte der durch einen Polygonzug angenäherten Weltlinie ergibt. Die „Knicke“ geben keinen zusätzlichen Beitrag.

Außerdem beachte man, dass die direkte Verbindungsweltlinie zwischen zwei Ereignissen, also die Verbindung in einem Inertialsystem, die größte Eigenzeit hat - alle anderen Weltlinien, die dieselben beiden Ereignisse verbinden, haben kürzere Eigenzeiten. Dies ist umgekehrt zur euklidischen Geometrie, wo die direkte Verbindung die kürzeste Verbindung ist. Der Unterschied beruht auf dem Minuszeichen in Gl. 10.5: Je schneller ein Weg durchlaufen wird, umso kürzer ist die Eigenzeit; und jeder Weg, der zwei Ereignisse nicht direkt verbindet, muss insgesamt schneller durchlaufen werden.

10.2 Die Euklid- und Minkowski-Schablone

Wenn wir in der euklidischen Ebene den Abstand von zwei Punkten A und B bestimmen möchten, legen wir ein Lineal (mit Abstandsmarkierungen) an, sodass die beiden Punkte von dem Lineal verbunden werden, und bilden die Differenz zwischen den Abstandsmarkierungen der beiden Punkte. Das bedeutet einerseits, dass wir die Länge der kürzesten Verbindungsstrecke zwischen den beiden Punkten - einer Geraden - ausmessen und nicht die Länge einer anderen Verbindungslinie, und andererseits setzen wir voraus, dass die Länge eines Lineals nicht davon abhängt, an welchem Punkt und unter welcher Orientierung wir das Lineal anlegen.

In einem kartesischen Koordinatensystem ist der euklidische Abstand $d(A,B)$ zwischen zwei Punkten A und B durch

$$d(A,B) = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \tag{10.6}$$

gegeben. Dieses Abstandsmaß ist offensichtlich invariant unter Transformationen, für die

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 \tag{10.7}$$

gilt, wobei sich $\Delta x'$ und $\Delta y'$ auf die Koordinatendifferenzen zwischen den beiden Punkten in einem anderen kartesischen Koordinatensystem beziehen. Dieses andere Koordinatensystem kann dabei durch eine Verschiebung, Drehung oder Spiegelung aus dem ursprünglichen Koordinatensystem hervorgegangen sein. Und dies sind genau die Transformationen, für die der Ausdruck $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ eine Invariante ist.

Wir können den Abstand zwischen zwei Punkten in der euklidischen Ebene aber auch anders bestimmen: Wir betrachten eine Schablone (siehe Abb. 10.1, links) aus konzentrischen Kreisen mit äquidistanten Radien. Legen wir den Mittelpunkt dieser Scheibe auf einen Punkt A, können wir die Distanz zu B an dem Radius des Kreises ablesen, auf dem B liegt. Hierbei nutzen wir aus, dass die Punkte auf einem Kreis alle denselben Abstand von einem Zentralpunkt haben (das ist eine mögliche Definition eines Kreises).

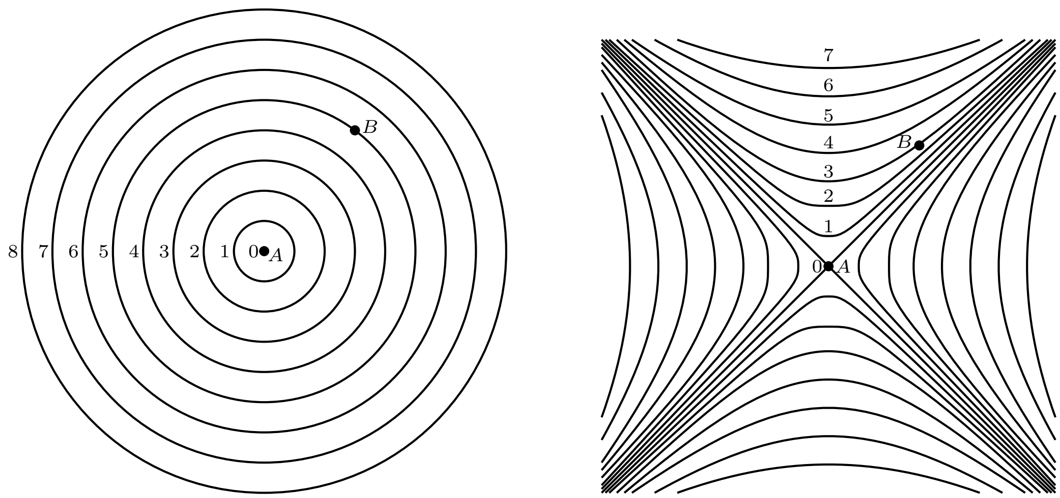

Abbildung 10.1: Die Euklid-Schablone (links) und die Minkowski-Schablone (rechts). Die Punkte A und B im euklidischen Raum (links) haben einen Abstand 5: A liegt im Zentrum und B auf dem Kreis mit der Markierung 5. Die Punkte A und B auf der rechten Seite haben den Abstand 3, da B auf der Hyperbel mit der Markierung 3 liegt. In beiden Fällen bezieht sich „Abstand“ immer auf die Länge einer geraden Verbindungslinie zwischen beiden Punkten.

In ähnlicher Weise können wir auch den Abstand zweier Punkte in einem Minkowski-Diagramm bestimmen. Hierbei nutzen wir aus, dass $(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2$ eine Invariante ist und die Wurzel aus diesem Ausdruck die Länge (Eigenzeit) einer geraden Verbindung zwischen zwei Punkten ist (vgl. Gl. 10.4).[2] Dazu verwenden wir eine Minkowski-Schablone (dies ist ebenso wie Euklid-Schablone kein gängiger Fachausdruck sondern eine von mir gewählte Bezeichnung), bei der Hyperbeln die Punkte konstanten Abstands vom Ursprung anzeigen (siehe Abb. 10.1, rechts).

Um den Abstand zwischen zwei Ereignissen in einem Raum-Zeit-Diagramm zu ermitteln, legen wir die Schablone mit ihrem Zentrum auf eines der Ereignisse und können nun ablesen, auf welcher Hyperbel das andere Ereignis liegt (in Abb. 10.1, rechts, hat Ereignis B den Abstand 3 von Ereignis A). Man beachte, dass „Abstand“ wieder die Länge einer geraden Verbindung zwischen den Ereignissen bezeichnet. Das ist bei zeitartigen Ereignissen die Eigenzeit in dem ausgezeichneten Inertialsystem, in dem die beiden Ereignisse A und B am selben Raumpunkt stattfinden. Bei raumartigen Ereignissen ist das der euklidische Abstand in einem Inertialsystem, in dem die Ereignisse gleichzeitig stattfinden. Zeitartige Ereignisse haben immer den Abstand 0. Da der Lichtkegel für alle Beobachter derselbe ist, kann man die Schablone nun nicht in der Raum-Zeit-Ebene drehen. Andererseits spielt es keine Rolle, welches Inertialsystem man als Ursprung wählt, d.h. welches Inertialsystem die

[2] Hier und in den folgenden Gleichungen verwenden wir Einheiten, in denen c den Wert 1 annimmt.

senkrechte Zeitachse nach oben auszeichnet.

Wie schon erwähnt, ist die Euklid-Schablone invariant unter Verschiebungen, Spiegelungen und Drehungen. Entsprechend ist die Minkowski-Schablone invariant unter Verschiebungen, Spiegelungen an der Zeit- oder Raumachse und unter Lorentz-Transformationen. (Spezielle) Lorentz-Transformationen lassen den Ursprung fest, ebenso die Lichtkegel. Sie transformierten Geraden wieder in Graden (zeitartige Graden in zeitartige Graden und raumartige in raumartige), sodass jeder Punkt auf seiner Hyperbel bleibt.

Diese Konzepte lassen sich auf mehr Raumdimensionen verallgemeinern: Die Euklid-Schablone wird in drei Dimensionen zu konzentrischen Kugelschalen und die Minkowski-Schablone erhält man, indem man die obige Konstruktion in höheren Dimensionen um die Zeitachse dreht. In 2+1 Raum-Zeit-Dimensionen wird der Lichtkegel zu einem richtigen (Doppel-)Kegelmantel, die zeitartigen Hyperbeln erhalten die Form von Schalen und die raumartigen Hyperbeln die Form von Reifenfelgen.

10.3 Das Zwillingsparadoxon

Wir sind nun in der Lage, das Zwillingsparadoxon der speziellen Relativitätstheorie zu erläutern. Dazu betrachten wir zwei Personen (Zwillinge), die unterschiedliche Weltlinien durchlaufen (siehe Abb. 10.2). Person A befinde sich in einem Inertialsystem, d.h. ihre Weltlinie ist eine Gerade. Diese Gerade durchlaufe die Ereignisse A_0 bis A_4. Person B durchlaufe eine Weltlinie, die sich bei Ereignis $B_0 = A_0$ von Person A trennt und sich von A mit großer Geschwindigkeit entfernt. Bei B_2 bremst die Person B ab und beschleunigt anschließend zurück - dies wird in Abb. 10.2 als Knick dargestellt, könnte aber auch durch eine glatte Kurve beschrieben werden. Bei dem Ereignis $B_4 = A_4$ treffen die beiden Personen wieder zusammen.

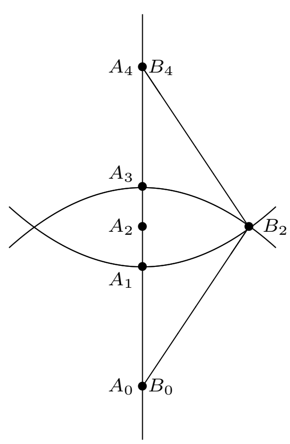

Abbildung 10.2: Zum Zwillingsparadoxon: Die Weltlinie von Zwilling A verläuft entlang der Ereignisse $A_0 = B_0$, A_1, A_2, A_3, $A_4 = B_4$, die von Zwilling B entlang B_0,B_2,B_4. Die Weltlinie von Zwilling A ist länger als die von Zwilling B, d.h., Zwilling A ist bei der Wiedervereinigung in Ereignis $A_4 = B_4$ älter als sein Bruder. Bei B_2 hat Zwilling B dasselbe Alter wie Zwilling A bei A_1. Insgesamt ist Zwilling A um die Zeitspanne zwischen A_1 und A_3 älter.

Legen wir nun unsere Minkowski-Schablone in den Punkt A_0 so erkennen wir, dass die Eigenzeit von A_0 bis A_1 für Person A genauso lang ist wie die Eigenzeit von Person B von $B_0(= A_0)$ bis zum Ereignis B_2. Diese beiden Punkte liegen auf einer zeitartigen Hyperbel. Umgekehrt können wir unsere Schablone in den Punkt A_4 legen und erkennen, dass die Eigenzeit von Ereignis A_3 bis A_4 für Person A genauso lang ist, wie die Eigenzeit von B_2 bis B_4 für Person B. Für Person B haben wir aber damit die gesamte Weltlinie ausgemessen: Sie hat dieselbe Länge (Eigenzeit), wie die beiden Abschnitte der Weltlinie von Person A von A_0 bis A_1 plus A_3 bis A_4. Für Person A kommt aber noch die Eigenzeit von Abschnitt A_1 bis A_3 hinzu. Um diese Eigenzeit ist Person A beim abschließenden Zusammentreffen älter als Person B.

10.4 Die Rolle der Beschleunigung

In seinen berühmten „Feynman Lectures on Physics“ beschreibt Feynman in Kapitel 16-2 auch das Zwillingsparadoxon. Er schreibt dort *... the man who has felt the accelerations ... is the one who would be younger.* Diese (und ähnliche Bemerkungen in anderen Lehrbüchern) haben dazu geführt, dass die Beschleunigung als Ursache dafür angesehen wird, dass der eine Zwilling jünger bleibt. Andererseits haben wir oben betont, dass die Beschleunigung keinen Einfluss auf den Gang einer (idealen) Uhr haben soll und die Länge einer Weltlinie nicht davon abhängt, wie viele Beschleunigungsphasen auftreten, sondern nur davon, wie lang die Summe der infinitesimalen inertialen Abschnitte ist, durch die wir die Weltlinie immer besser annähern können (also das Riemann'sche Integral in Gl. 10.5; in das nur die Geschwindigkeit aber keine Beschleunigung eingeht).

Tatsächlich ist auch die Beschleunigung nicht die Ursache dafür, dass eine Person jünger geblieben ist, aber das behauptet Feynman auch nicht. Die Beschleunigungsphase ist lediglich die physikalisch nachweisbare Eigenschaft, um die sich das Bezugssystem von B von dem Bezugssystem von A unterscheidet (damit ist gemeint, dass man in einem lokalen, abgeschlossenen Labor feststellen kann, dass eine Beschleunigung vorliegt). Wären die beiden Bezugssysteme physikalisch gleichwertig (würde es sich beispielsweise bei beiden Bezugssystemen um Inertialsysteme handeln), würde aus dem Relativitätsprinzip folgen, dass auch die Physik in beiden Systemen die gleiche sein muss und damit kann nicht in dem einen System mehr und dem anderen weniger Eigenzeit vergangen sein. Die Tatsache, dass die Beschleunigungsphase die beiden Bezugssysteme unterscheidet, bedeutet nicht, dass die Beschleunigung auch die unmittelbare Ursache dafür ist, dass diese Person jünger geblieben ist.

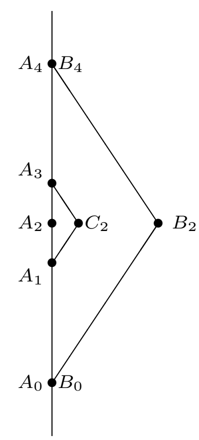

Abbildung 10.3: Erweiterung des Zwillingsparadoxons für Drillinge. Die drei Weltlinien – ($A_0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4$) für Drilling A, ($A_0 \to A_1 \to C_2 \to A_3 \to A_4$) für Drilling C und ($B_0 \to B_2 \to B_4$) für Drilling B – sind unterschiedlich lang. Insbesondere ist die Weltlinie von Drilling B kürzer als die von Drilling C, obwohl beide dieselben Beschleunigungsphasen erlebt haben.

Um dieses Argument zu untermauern, betrachten wir in Abb. 10.3 eine etwas erweiterte Situation. Nun sind drei Personen (Drillinge) gleichen Alters gegeben: A, B und C. Die Personen A und B durchlaufen dieselben Weltlinien wie oben. Die Person C verbleibt jedoch bei Person A bis zum Ereignis A_1. Während A weiterhin in einem Inertialsystem verbleibt, beschleunigt C von A weg bis zum Ereignis C_2, kehrt dort um und trifft bei A_3 wieder mit A zusammen. Wir haben es nun also mit drei Weltlinien zu tun. Wie man in Abb. 10.3 erkennen kann, sind die Beschleunigungsphasen von B und C identisch: Eine Beschleunigung von A weg (bei B_0 und A_1) eine Beschleunigung für die Wende (bei C_2 und B_2) und ein Abbremsen in das Inertialsystem von A (bei A_3 und B_4). Die Beschleunigungen sind auch gleich groß. Doch obwohl Person C dieselben Beschleunigungsphasen mitgemacht hat wie B, ist die Weltlinie von B deutlich kürzer und Person B ist am Ende der Jüngste. Person C ist älter als B (trotz derselben Beschleunigungphasen) aber jünger als A. Der wichtge Unterschied in den Bezugssystemen von C und B sind nicht die Beschleunigungsphasen, sondern die Zeitdauern zwischen den Beschleunigungsphasen bzw. die in diesen Zeitdauern zurückgelegten unterschiedlichen Weltlinien.

Betrachten wir dazu noch ein Beispiel aus der euklidischen Geometrie (siehe Abb. 10.4). Dort gilt die Dreiecksungleichung: $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$. Feynmans Bemerkung könnte man auf diesen Fall übertragen: Der Weg von A nach C, der einen Knick hat, ist der längere. Oder, wenn wir es physikalischer formulieren wollen: Der Weg von A nach C, bei dem man irgendwann beschleunigen muss, ist der längere. Diese Aussage ist sicherlich richtig. Aber es wäre irreführend zu sagen, der Knick sei die Ursache dafür, dass der Weg über den Punkt B der längere sei.

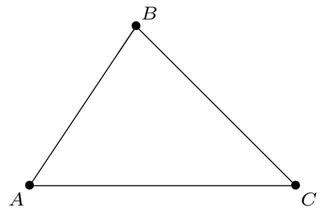

Abbildung 10.4: Ein Dreieck in der Euklidischen Ebene. Der Weg von Punkt A nach Punkt C über den Punkt B ist länger als der direkte Weg. Trotzdem würde man den Knick bei B nicht als Ursache dafür ansehen, dass dieser Weg länger ist, obwohl jeder Weg, der länger als die direkte (gerade) Verbindungslinie ist, einen Knick (oder Bogen) haben muss.

Damit erhebt sich die Frage, welche Rolle die Beschleunigung für das unterschiedliche Alter der Zwillinge denn nun wirklich spielt. Man könnte das Argument von Feynman ja auch folgendermaßen formulieren: In allen Inertialsystemen ist nach dem Relativitätsprinzip die Physik dieselbe, und da es sich bei den Abschnitten B_0 nach B_2 einerseits und B_2 nach B_4 andererseits um inertiale Weltlinien handelt, ebenso wie für Beobachter A die gesamte Weltlinie von A_0 bis A_4, kann der Unterschied in den beiden Weltlinien nur von dem „Knick“ bei B_2, also der Beschleunigungsphase, herrühren.

Vielleicht sollte man hier einen Unterschied machen zwischen „Ursache für etwas sein“ und „Indiz für etwas sein“. Nach den Postulaten der Relativitätstheorie gibt es keine gesonderten Beiträge zur Eigenzeit, wenn ein System beschleunigt wird. Uhren laufen in solchen Phasen bzw. Momenten nicht plötzlich schneller oder langsamer oder machen Sprünge. Aber eine Beschleunigungsphase zu haben ist eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass ein Bezugssystem kein Inertialsystem ist, und damit gilt für ein solches System auch das Relativitätsprinzip nicht mehr. Unter den unendlich vielen Weltlinien, die zwei zeitartige Ereignisse miteinander verbinden, gibt es nur eine, die den Ursprung eines Inertialsystem definiert, und diese Weltlinie hat keine Beschleunigungsphase. Alle anderen Weltlinien haben eine kürzere Eigenzeit und notwendigerweise eine Beschleunigungsphase. Allerdings hängt die Eigenzeit einer Weltlinie nicht davon ab, wie viele Beschleunigungsphasen auftreten oder wie groß die Beschleunigungen sind. Die folgenden Beispiele sollen dies noch einmal verdeutlichen.

In Abbildung 10.5 sind verschiedene Abwandlung des Zwillingsparadoxons dargestellt. In Abb. 10.5 (a) ist nochmals das Drillingsparadoxon aus Abb. 10.3 wiedergegeben, allerdings hat Person B nun vergleichsweise schwache Beschleunigungsphasen wohingegen Person C stärkeren Beschleunigungen unterliegt. Allein durch Variation der Abstände zwischen den Ereignissen (z.B. den Ereignissen A_1 und A_3, bei denen Person C zur Weltreise ansetzt) kann man erreichen, dass entweder die Weltlinie von C kürzer ist als die von B oder aber länger. Die Weltlinie von Person A, die keine Beschleunigungen erfährt, bleibt natürlich die längste. Dieses Beispiel zeigt, dass die Stärke der Beschleunigungen nicht darüber entscheidet, welche Weltlinie länger und welche kürzer ist.

In Abb. 10.5 (b) hat Person C mehrere Beschleunigungsphasen, die der Beschleunigung von Person B im Punkt B_2 entsprechen. Person C fliegt kürzere Strecken im Zickzack und beschleunigt bei C_1, A_1, C_2, A_3 und C_3 (abgesehen von den Beschleunigungsphasen bei B_0 und B_4, die Person C mit Person B gemeinsam hat). Trotzdem sind die Weltlinien von C und B gleich lang. Das zeigt, dass die Anzahl der Beschleunigungsphasen nicht darüber entscheidet, welche Weltlinie kürzer oder

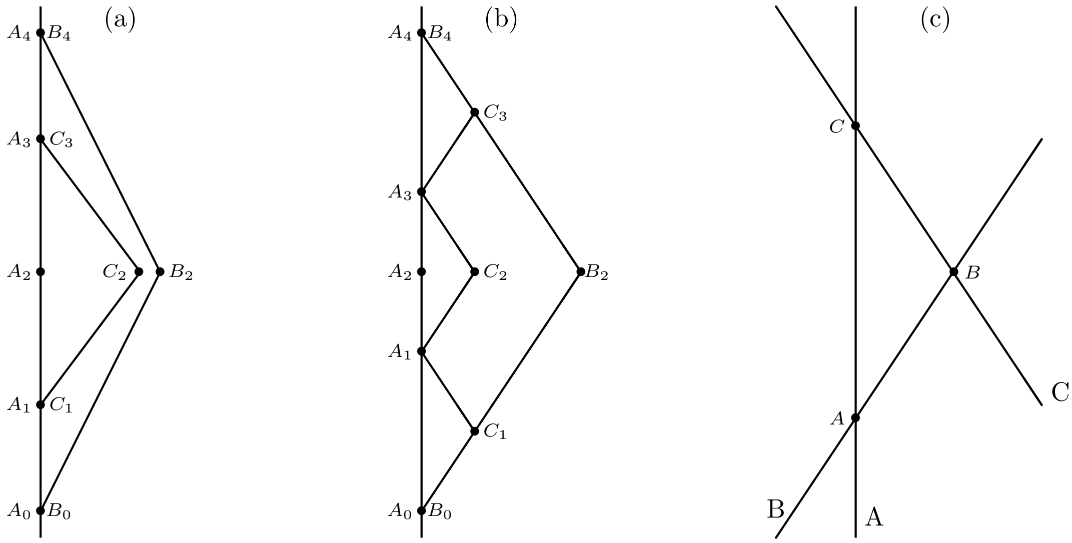

Abbildung 10.5: Verschiedene Beschleunigungsphasen im Zwillings- bzw. Drillingsparadoxon. (a) Eine Abwandlung des Drillingsparadoxons: Person C hat stärkere Beschleunigungsphasen als Person B. Durch geeignete Verschiebung der Abstände - ohne Veränderung der Beschleunigungen - kann man erreichen, dass die Weltlinie von C länger oder kürzer ist als die von B. (b) Person C beschleunigt nun mehrfach und bewegt sich entlang einer Zickzacklinie, wohingegen Person B nur einmal beschleunigt (in Ereignis B_2). Trotzdem sind B und C beim Wiedersehen in Ereignis A_4 gleich alt. (c) Die drei Intertialsysteme (A, B, C) treffen sich paarweise in den Ereignissen A, B und C und synchronisieren in diesen Momenten ihre Uhren. Es finden keine Beschleunigungen statt. In C treffen A und C zusammen und vergleichen ihre Uhren. Die Uhr von A zeigt mehr verflossene Zeit an als die Uhr von C.

länger ist.

Schließlich haben wir es in Abb. 10.5 (c) mit drei intertialen Weltlinien A, B und C zu tun. Hier finden überhaupt keine Beschleunigungen statt, allerdings werden bei den Ereignissen A und B Uhren synchronisiert. Bei Ereignis A synchronisierten Person A und B ihre Uhren, bei Ereignis B synchronisieren nochmals Person B und C ihre Uhren und zwar derart, dass C seine Uhr auf die Uhr von B einstellt.

Es werden also verschiedene Uhren entlang der Weltlinie von A über B nach C so synchronisiert, dass die jeweilige Uhr die Eigenzeit entlang dieser Weltlinie anzeigt. Andererseits zeigt die Uhr von Person A die Eigenzeit der Weltlinie A an. Wenn sich bei C die Personen A und C mit ihren Uhren treffen, zeigt die Uhr von C weniger Zeit an als die Uhr von A und zwar in demselben Maß, in dem ein Zwilling entlang der Weltlinie über B jünger geblieben wäre.

Dieses letzte Beispiel ist gleichzeitig ein Beweis, dass bei einer Beschleunigung keine zusätzliche Beeinflussung einer Uhr und damit der Eigenzeit entlang einer Weltlinie stattfindet. Die Uhren selbst werden nicht beschleunigt, sondern lediglich an den Treffpunkten, wo auch keine Laufzeitverzögerungen der Signalübertragung berücksichtigt werden müssen, synchronosiert. Die Uhr von Person C, die letztendlich bei Ereignis C wieder mit A zusammentrifft, zeigt dieselbe Zeit an, die auch eine Uhr angezeigt hätte, die bei den Ereignissen A und B beschleunigt worden wäre.

10.5 Vergleich der Bezugssysteme

Nachdem wir in den vergangenen Abschnitten festgestellt haben, dass die Beschleunigung keinen unmittelbaren Einfluss auf den Gang einer Uhr hat und somit nicht die Ursache für die unterschiedlichen Eigenzeiten entlang der verschiedenen Weltlinien ist, kommen wir nochmals auf die Frage zurück, welche Rolle die Beschleunigung bei dem Zwillingsparadoxon spielt. Insbesondere interessiert in diesem Zusammenhang, was der Zwilling in einem Bezugssystem von den Ereignissen auf der Weltlinie des Zwillings in dem jeweils anderen Bezugssystem beobachtet. Es zeigt sich, dass die Beschleunigung in diesem Fall eine sehr große Rolle spielt.

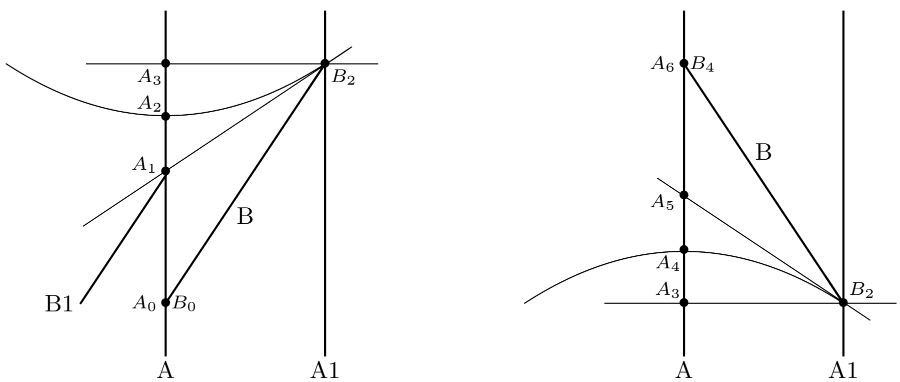

Abbildung 10.6: Die verschiedenen Phasen des Zwillingsparadoxons. (links) Der erste Teil der Reise von Zwilling B bis kurz vor dem Umkehrpunkt B_2. (rechts) Der zweite Teil der Reise nach dem Umkehrpunkt B_2. (Erläuterungen siehe Text.)

Betrachten wir zunächst den ersten Teil der Reise, bis Zwilling B das Ereignis B_2 erreicht. In Abb. 10.6, links, sind die Weltlinien von vier Beobachtern dargestellt: (A) die Weltlinie von Zwilling A, (A1) eine zweite Weltlinie in dem Bezugssystem von A (also parallel zur Weltlinie von A), allerdings geht diese Weltlinie durch das Ereignis B_2; (B) die Weltlinie von B und (B1) die Weltlinie eines zweiten Beobachters in dem Bezugssystem von B. Außerdem ist eine waagerechte Linie durch die Ereignisse A_3 und B_2 dargestellt: Sie repräsentiert alle Ereignisse, die in dem Bezugssystem von A zum selben Zeitpunkt wie das Ereignis B_2 stattfinden. Eine weitere Gleichzeitigkeitslinie durch die Punkte A_1 und B_2 repräsentiert alle Ereignisse, die im Bezugssystem von B gleichzeitig zum Ereignis B_2 sind.

Man erkennt nun Folgendes: Rein objektiv, ohne auf die unterschiedlichen globalen Gleichzeitigkeitsdefinitionen von A und B Bezug zu nehmen, zeigen die Uhren von A und B in den Ereignissen A_2 und B_2 dieselbe Zeit an - sie liegen auf derselben Hyperbel der Minkowski-Schablone. Wenn jedoch Zwilling B das Ereignis B_2 erreicht, hat Zwilling A bezüglich seiner Gleichzeitigkeitsdefinition das Ereignis A_3 erreicht. Auf der Uhr von A ist aber bei diesem Ereignis mehr Zeit vergangen, als auf der Uhr von B. Daher hat A den Eindruck, die Uhr von B gehe langsamer (entsprechend der bekannten Zeitdilatation in der Speziellen Relativitätstheorie). Dies wird allerdings nicht direkt von A gemessen, sondern in seinem Bezugssystem von A1, dessen Uhren mit A synchronisiert sind. Für den Beobachter B bzw. in seinem Bezugssystem hat A aber erst das Ereignis A_1 erreicht, wenn B bei B_2 ankommt. Von dem Beobachter B1, der sich im Bezugssystem von B befindet und dessen Uhr mit der von B synchronisiert ist, wird registriert, dass bei diesem Ereignis auf der Uhr von A weniger Zeit vergangen ist. Insofern hat man in dem Bezugssystem von B den Eindruck, die Uhren in dem System A gingen langsamer.

Abb. 10.6, rechts, zeigt die gleiche Situation für den zweiten Teil der Reise, nachdem Beobachter B bei B_2 beschleunigt hat und sich nun wieder auf A zubewegt. Die Ereignisse A_3 und B_2 sind für A gleichzeitig (wie vorher), nun sind für B aber die Ereignisse A_5 und B_2 gleichzeitig. Die Eigenzeit, angezeigt von der Uhr von B, zwischen den Ereignissen B_2 und $A_6 = B_4$, ist dieselbe, wie die Eigenzeit in dem System von A zwischen den Ereignissen A_4 und A_6. Insgesamt kommen wir wieder zu dem Ergebnis, dass die Gesamtzeit, die im Bezugssystem von B vergangen ist, gleich den beiden Zeitdauern A_0 bis A_2 plus A_4 bis A_6 im Bezugssystem von A ist, und in diesem Bezugssystem die Zeitdifferenz zwischen A_2 und A_4 zusätzlich vergangen ist.

Wir erkennen jetzt die besondere Bedeutung der Beschleunigung in B_2: Sie verändert in diesem „Moment" die Gleichzeitigkeitslinien von Bezugssystem B und zwar derart, dass kurz vor dem Ereignis B_2 für Beobachter B das Ereignis A_1 gleichzeitig ist, und unmittelbar nach dem Ereignis B_2 ist es das Ereignis A_5. Durch die Beschleunigung verpasst Beobachter B also alle Ereignisse zwischen A_1 und A_5 (bzw., da jede Beschleunigung eine endliche Zeitdauer benötig, werden diese Ereignisse in einem beliebig kurzen Zeitraum erlebt). Man könnte etwas übertrieben sagen, dass für Zwilling B die Ereignisse zwischen A_2 und A_4 im Bezugssystem von A aufgrund der „unendlichen" Beschleunigung keine Zeitzuordnung haben.

In diesem Zusammenhang ist anzumerken, dass die Konstruktion von globalen Gleichzeitigkeitslinien (bzw. in drei Raumdimensionen „Gleichzeitigkeitsräumen") eine Besonderheit der Speziellen Relativitätstheorie ist. Diese Konstruktion ist nur sinnvoll, solange man es mit Inertialsystemen zu tun hat, deren Weltlinien Geraden sind. Rein operational setzt sie voraus, dass sich zwei Beobachter im selben Bezugssystem für die Zeit, während der sie im Sinne der Einstein-Synchronisation ihre Signale austauschen, auf geraden Weltlinien bewegen. Sobald ein Bezugssystem eine Beschleunigung erfährt, machen solche globalen Gleichzeitigkeitslinien keinen Sinn mehr: In manchen Bereichen läuft die Zeit rückwärts, in anderen läuft sie beliebig schnell vorwärts; und operational lässt sich eine Einstein-Synchronisation in diesen Fällen nicht sinnvoll durchführen (sie würde verschiedene Gleichzeitigkeitsdefinitionen für Beobachter im selben Bezugssystem ergeben). Daher betrachtet man in der Allgemeinen Relativitätstheorie auch lieber das, was ein Beobachter von den Ereignissen wirklich sieht, d.h., man berücksichtigkeit die Laufzeitverzögerungen durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von Licht.

10.6 Kuriositäten

10.6.1 Das Zwillingsparadoxon in einem periodischen Universum

In einem räumlich periodischen Universum können zwei verschiedene inertiale Weltlinien dieselben zwei Ereignisse verbinden. Ein solches periodisches Universum kann lokal dem flachen Minkowski-Raum entsprechen und ist somit eine Lösung der Einstein-Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie. Die Einstein-Gleichungen legen keine globalen topologischen Eigenschaften der Raum-Zeit fest.

Wir betrachten wieder zwei Bezugssysteme (Beobachter) A und B. Bezugssystem A ist „in Ruhe" und die zugehörige Weltline verbindet die beiden Ereignisse A und B direkt. Bezugssystem B hat bezüglich A eine bestimmte Geschwindigkeit. Die beiden Bezugssysteme treffen sich bei Ereignis A. Bezugssystem B bewegt sich nun mit seiner Geschwindigkeit weiter, windet sich einmal um das periodische Universum und trifft bei Ereignis B wieder mit Bezugssystem A zusammen (siehe Abb. 10.7).

Legen wir nun wieder unsere Minkowski-Schablone an die Weltlinien, stellen wir fest, dass die Weltlinie zwischen den beiden Ereignissen A und B von Bezugssystem B kürzer ist als die Weltlinie

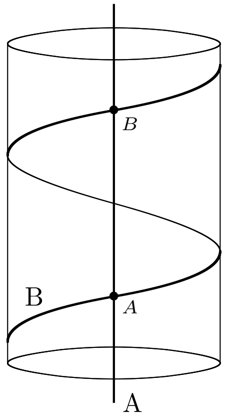

Abbildung 10.7: Das Zwillingsparadoxon in einem räumlich periodischen Universum. Eine Persion bleibt an ihrem Ort, die andere bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit einmal um „das Universum" herum. Beide trennen sich bei Ereignis A, wo sie gleich alt sind bzw. ihre Uhren sychronisiert haben, und treffen bei Ereignis B wieder aufeinander. Person B ist jünger als Person A. Beide befinden sich während der gesamten Zeit in einem Inertialsystem. In diesem Fall gilt jedoch das Relativitätsprinzip nicht.

von A. Doch in diesem Fall sind beide Bezugssysteme Inertialsysteme. Wie kann das sein?

Die Antwort auf diesen scheinbaren Widerspruch lautet: Das Relativitätsprinzip gilt nicht mehr. Wir haben oben schon davon gesprochen, dass sich das Bezugssystem A „in Ruhe" befinde. Dieser Ausdruck ist in diesem Fall sinnvoll: Es gibt nur ein Bezugssystem, für das die Einstein-Synchronisation von Uhren global konsistent ist. Das bedeutet Folgendes: Wir können in einem räumlich periodischen Universum die Synchronisation von Uhren an verschiedenen Punkten in einem Bezugssystem auf zwei Weisen durchführen. Wir können die beiden Punkte wegen der Periodizität des Raums auf verschiedene Weisen verbinden (einmal links um den Torus und einmal rechts um den Torus in Abb. 10.7) und die Einstein-Synchronisation entlang beider Richtungen durchführen. Es gibt nur ein System - und dies bezeichnen wir als das Ruhesystem - bei dem diese beiden Synchronisationsvorschriften dieselbe Gleichzeitigkeitszuordnung liefern. Wenn aber ein absolutes Ruhesystem ausgezeichnet und physikalisch bestimmbar ist, gilt die Lorentz-Invarianz und damit auch das Relativitätsprinzip nicht mehr.