

ECONOMÉTRIE FINANCIÈRE

Etude de la volatilité du WTI : modèles GARCH et VaR

Laurianne MORICEAU
Lucas AUROUET

Enseignant : Mr. DARNE
Année universitaire : 2020-2021

Résumé

Dans ce travail, nous nous intéressons à la modélisation de la volatilité du WTI sur la période 2015-2019. La modélisation est effectuée à l'aide de différents modèles GARCH et les prévisions fournies servent à alimenter un calcul de la VaR sur l'année 2019. Nous commençons par vérifier que les modèles GARCH sont appropriés puis après avoir conclu qu'ils le sont, nous estimons 6 modèles différents qui sont comparés afin de choisir les meilleurs modèles valides. Nous concluons que EGARCH est le modèle le mieux ajusté et aussi le plus précis out of sample, indiquant la présence de réactions asymétriques aux chocs sur les rendements du WTI. EGARCH, IGARCH et RiskMetrics sont conservés pour calculer une VaR à 5%. Après un Backtesting de la VaR, nous concluons que cette dernière n'est que partiellement efficace. L'hypothèse de couverture non-conditionnelle est vérifiée mais la VaR ne parvient pas à vérifier l'hypothèse de couverture conditionnelle indiquant la présence de dépendance des hits dans la série.

Sommaire

1	Introduction	3
2	Etude descriptive sur 2015-2019	4
3	Estimation des modèles de volatilités sur 2015-2018	8
4	Prévision de la volatilité sur 2019	15
5	Prévision de la VaR	17
6	Conclusion	21

1 Introduction

On observe parallèlement au phénomène de financiarisation des matières premières et notamment des actes de spéculation, un accroissement de la volatilité des prix du pétrole. Ces variations du prix ont des conséquences sur les économies des pays et particulièrement ceux en voie de développement. De plus, ces variations soulèvent la question de l'interdépendance des marchés physiques et financiers¹. Le risque étant un élément inhérent aux actifs financiers, comprendre ses dynamiques est essentiel pour quiconque s'expose au marché. Etre capable de l'estimer, voire de le prédire est une discipline qui gagne en popularité depuis les années 1980. Que ce soit pour trader directement, ou pour se couvrir des risques de marché, toutes les institutions financières contemporaines s'intéressent de très près à la modélisation de la volatilité, définie comme la magnitude des mouvements de prix. Qui plus est, les régulateurs requièrent que les institutions financières puissent anticiper les pires scénarios possibles. La Value-at-Risk (VaR) que nous utiliserons ici a été rendue obligatoire par les accords de Bâle II en 1988. La recherche en finance quantitative est riche en modèles, méthodes d'estimation et évaluations du risque de marché. Les travaux d'Engle en 1982², qui lui vaudront une prix Nobel d'économie en 2003 marquent un tournant décisif dans l'estimation de la volatilité. Avec le modèle GARCH (Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity) Engle met au point un modèle capable de modéliser les dynamiques du risque, puis à terme de prévoir les futures valeurs de la volatilité. Le modèle d'Engle a été très largement étudié et modifié par ses successeurs, permettant de prendre en compte de plus en plus de phénomènes empiriques, comme la non-normalité des rendements, l'asymétrie des réactions du marchés aux chocs positifs et négatifs ou encore l'impact de variables exogènes sur la volatilité. La famille de modèles GARCH est désormais extrêmement extensive et contient bon nombre de modèles d'estimation de volatilité.

Bien que GARCH ne soit pas le seul modèle qui existe, ni même le meilleur, nous nous limiterons ici à 5 de ses dérivés : IGARCH, EGARCH, RiskMetrics (qui constitue un cas à part), TGARCH et GJR-GARCH, ainsi que le modèle GARCH tel qu'il a été formulé par Engle en 1982. Ces modèles nous serviront à modéliser la volatilité du WTI sur la période 2015-2018, nous détaillerons ces modèles ultérieurement. Notre but sera de déterminer lequel de ces dérivés permet la meilleure estimation de la volatilité sur la période et les meilleures prédictions sur l'année 2019. Ces prédictions seront ensuite incluses dans une mesure de la VaR qui sera backtestée pour vérifier son efficacité. La VaR, au delà d'avoir été rendue obligatoire, permet à une institution financière d'anticiper le pire scénario possible et de gérer ses fonds propres en conséquence. Son estimation est essentielle pour prévenir au maximum le risque d'effondrement du marché. Bien que très sommaire, la VaR est un outil capital dans la prise en compte du risque sur les marchés financiers. Le travail suivant se décompose en trois parties ; la première est destinée à l'étude de la série sur la période, la seconde partie est dédiée à l'estimation des 6 modèles mentionnés précédemment et les deux dernières sections sont respectivement dédiées à la prévision à un pas de la volatilité sur l'année 2019 et à la construction de la VaR sur ces estimations.

1. Melhem S. et Melhem S., "Spéculateurs hétérogènes et volatilité excessive dans le prix du pétrole : une approche dynamique non linéaire.", LAMETA, DR n°2012-16.

2. Engle R., "Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation, *Econometrica*, Volume 50, 82

2 Etude descriptive sur 2015-2019

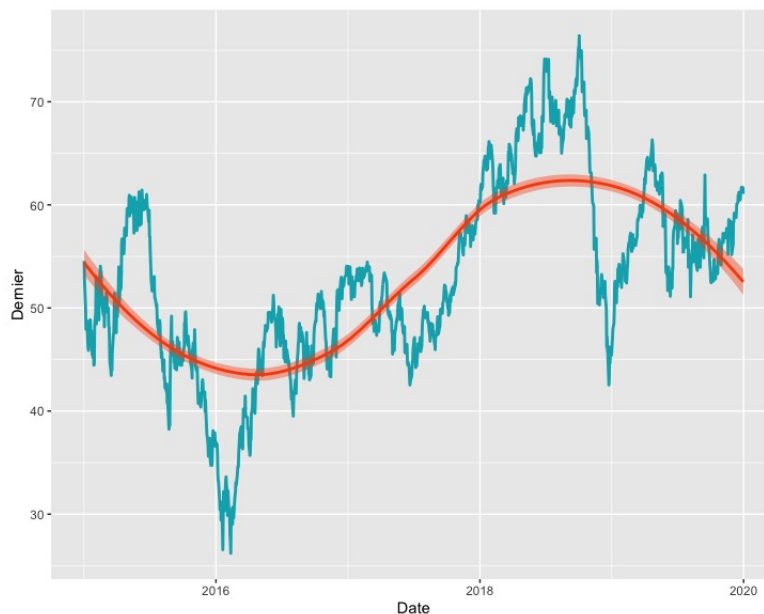
2.1 Analyse graphique

Dans cette première partie de l'analyse, nous présenterons nos données, qui représentent le cours du WTI du 1 janvier 2015 au 31 décembre 2020. Nos données sont journalières ce qui résulte en une base de données de 1319 observations. Elles proviennent du site **Yahoo finance** qui stocke les données historiques de nombreux actifs financiers. La partie statistiques descriptives portera sur l'ensemble de la période tandis que nous retirerons la dernière année (2019) pour les modélisations afin de pouvoir utiliser cet échantillon résiduel pour valider les prédictions.

2.1.1 Evolution des prix

Le graphique ci-dessous représente l'évolution des prix journaliers du pétrole. A priori, le prix semble stationnaire en moyenne puisque le prix fluctue globalement autour de sa valeur moyenne, sans trend significatif. En revanche, on observe de fortes variations du prix à certaines périodes et faibles à d'autres, ce qui laisse penser que cette série du WTI n'est pas stationnaire en variance. On observe trois chutes brutales en 2015, 2016 et 2019, entourées de périodes de faibles volatilité. Cette inconsistance de la variance invalide l'hypothèse de stationnarité selon laquelle la variance est constante dans le temps. A noter que les prix semblent augmenter sur la période, tandis qu'en réalité le prix du pétrole a connu une baisse sans précédent sur la période 2014-2016 avec un prix passant de 110 à 35 dollars le baril³. Nous pouvons voir sur le graphique que suite à cette période, le prix semble s'être stabilisé autour de 50 dollars pour finalement connaître un rebond postif avec de légères phases de consolidations jusqu'à la fin 2018, revenant ainsi à son niveau de 2017.

FIGURE 1 – Evolution du prix sur la période



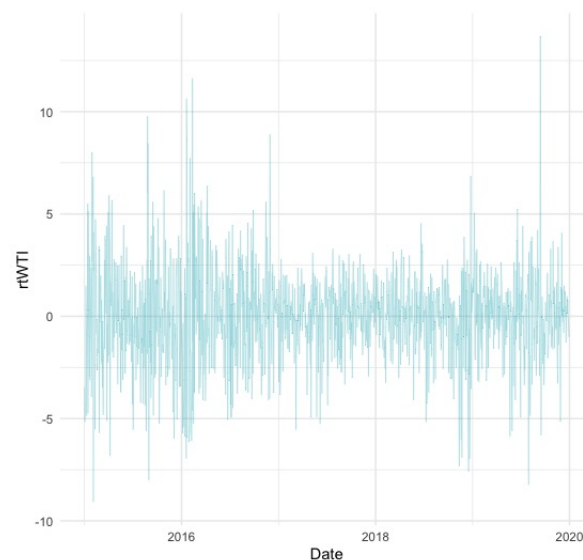
3. « Insee - Indicateur - Prix du pétrole et des matières premières importées

2.1.2 Rentabilités logarithmiques

Le graphique ci dessus représente la série brute, à savoir le cours du WTI, notre étude en revanche, porte sur les rentabilités. Nous utilisons les rendements logarithmiques journaliers du prix du WTI définis tels que : $R_t = \log \frac{p_t}{p_{t-1}}$. Nous pouvons visualiser cette série dans le graphique ci-dessous. Il est important de noter que dans la suite de ces travaux, la volatilité sera approximée par les rendements au carré.

Nous pouvons voir que la série semble stationnaire, les valeurs fluctuent autour de la moyenne. Nous pouvons observer cependant quelques valeurs extrêmes autour de 2016 et une valeur extrême autour de fin 2019 notamment. Ces observations atypiques seront étudiées et traitées par la suite afin qu'elles n'influencent pas les résultats de nos modèles.

FIGURE 2 – Evolution du prix sur la période



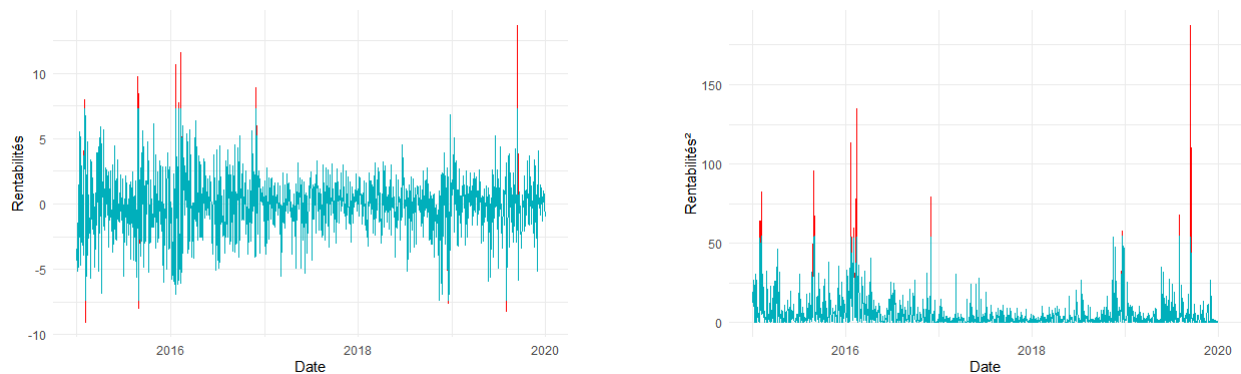
La série étant très volatile nous privilégions la méthode de Boudt & Ali pour corriger notre série financière plutôt que l'ajustement auto-arima. Les valeurs atypiques de 2015 et 2016 s'expliquent d'après nos recherches, par une baisse de la demande mondiale et une augmentation de la production entraînant de facto une baisse des prix. Cette chute, particulièrement drue au début de l'année 2016, se resorbera en automne avec les négociations de L'OPEP qui retabliront les prix à un niveau normal. En septembre 2019, le prix du baril augmente brusquement (+7.6% après -6.9% en août) après la destruction des infrastructures de Saudi Aramco, compagnie nationale saoudienne d'hydrocarbures, entraînant un arrêt de la production qui fait flamber les prix. Ces deux périodes particulières pour le prix du WTI contiennent les 11 valeurs atypiques que la méthode de Boudt & Ali a identifiées. Ces outliers seront donc corrigés⁴ et nous pouvons voir ces corrections apportées en rouge sur la figure 3.

4. Boudt & Ali remplace automatiquement les outliers par un quantile de la série, c'est le principe d'imputation par winsorsation.

TABLE 1 – Points atypiques

Numéro	Observation atypique	Type
22	29 janvier 2015	TC
25	3 février 2015	AO
173	26 août 2015	TC
176	31 août 2015	AO
278	20 janvier 2016	TC
280	22 janvier 2016	AO
285	29 janvier 2016	TC
287	2 février 2016	AO
294	11 février 2016	AO
505	29 novembre 2016	AO
1242	13 septembre 2019	AO

FIGURE 3 – Rentabilités et rentabilités au carré corrigées



2.2 Statistiques descriptives

Avant de procéder aux modélisations, nous procédons aux statistiques descriptives afin de déceler les caractéristiques de notre série. Dans un premier temps, nous pouvons voir que la moyenne des rentabilités est négative pour la série corrigée. Cela s'explique par le fait que nous avons des valeurs très grandes (hauts pics sur le graphique) dans la série brute. Ainsi, les valeurs extrêmes ayant été corrigées, le minimum et le maximum de la série corrigée sont plus petits, ce qui entraîne également une réduction de l'écart-type. Nous pouvons voir également que la normalité de la distribution de nos série ne semble pas vérifiée avec une valeur Skewness éloignée de 0. La valeur Skewness des rentabilités étant positive, nous savons que la distribution est étalée sur la gauche, ce qui indique davantage de mouvements des rentabilités à la baisse. De plus, la valeur Kurtosis de notre série suppose une distribution leptokurtique des rentabilités. En outre, une distribution aplatie avec des queues épaisses qui rendent l'occurrence de valeurs extrêmes plus fréquente.

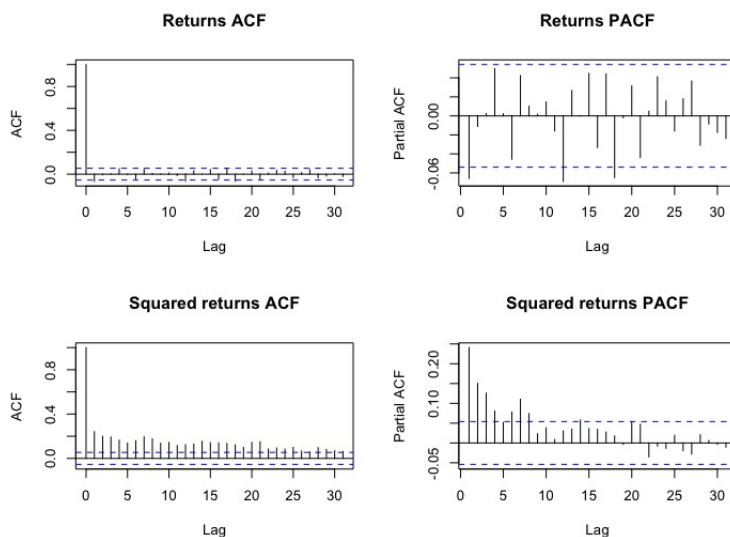
TABLE 2 – Statistiques descriptives de la série brute et corrigée

	Série brute	Série brute au carré	Série corrigée	Série corrigée au carré
Moyenne	0.009	5.451	-0.005	5.108
Minimum	-9.070	0.000	-7.368	0.000
Maximum	13.694	187.537	7.326	54.281
1. Quartile	-1.219	0.285	-1.219	0.285
3. Quartile	1.234	5.707	1.234	5.707
Median	0.119	1.515	0.119	1.515
Variance	5.455	139.226	5.112	81.323
Ecart-type	2.336	11.799	2.261	9.018
Skewness	0.197	6.494	-0.092	3.142
Kurtosis	2.671	67.106	1.108	11.258

2.3 Etude de l'auto-corrélation

Avant de pouvoir entamer quelque réalisation nous procédons à l'étude de l'autocorrélation à l'aide des fonctions d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle. La littérature suggère qu'il n'y a pas d'autocorrélation dans les rendements mais que cette autocorrélation existe dans les rendements au carré (la volatilité).

FIGURE 4 – Corrélogramme sur les séries corrigées



Pour les rendements, nous constatons par l'ACF un premier pic pour le premier retard, sortant de l'intervalle de confiance. Cela présage une présence d'autocorrélation. En revanche, nous pouvons voir qu'après ce premier pic, la corrélation diminue directement avec aucun retard hors de l'intervalle de confiance, jusqu'à l'ordre 30. Cela veut dire qu'il n'y a pas d'autres autocorrélations. De plus, le PACF montre de l'autocorrélation pour le premier retard ainsi que pour le 13ème et le 19ème. Concernant les rentabilités au

carré, on observe une très forte présence d'autocorrélation. la volatilité semble très persistente avec des autocorrélations totales et partielles significatives jusqu'à l'ordre 30 (totale) et 8 (partielle). Ces résultats sont en accord avec la littérature et ne sont pas surprenants. Ils nous indiquent au contraire qu'une modélisation de la volatilité par un processus autoregressif comme le GARCH est pertinente. Le test de Ljung-Box sera utilisé pour vérifier la présence d'autocorrélation.

2.4 Conditions du modèle GARCH

Après avoir vérifié l'autocorrélation visuellement, nous pouvons vérifier la normalité de la série avec le test de Jarque-Berra et l'autocorrélation avec le test de Ljung-Box ainsi que l'hétéroscédasticité conditionnelle avec le test ARCH. Le test de Jarque-Berra nous indique que l'hypothèse de normalité est rejetée pour les deux séries avec des p-value inférieures 5%. Le test d'autocorrélation de Ljung-Box nous dit qu'il existe de l'autocorrélation significative à 5% dans les rendements au carré. La statistique est particulièrement élevée pour les rentabilités au carré, indiquant clairement la présence de persistance dans la volatilité. bien que nous n'ayons pas détecté d'autocorrélation visuellement dans la série brute, il s'avère qu'il existe un certain degré d'autocorrélation dans les rendements, avec une p-value associée au test de Ljung-Box inférieure à 0.1. Nous vérifions alors l'existence de clusters de volatilité des rentabilités avec le test LM ARCH d'homoscédasticité. L'hypothèse H_0 valide l'homoscédasticité de la série. Pour les séries de rentabilités et rentabilités au carré, les hypothèses H_0 (absence d'effets ARCH) sont rejetées. Si des effets ARCH sont détectés dans la série des rendements bruts, alors il existe une persistance significative de la volatilité (la série n'est pas homoscédastique donc la variance n'est pas constante) et il est alors pertinent d'utiliser des modèles d'estimation de volatilité.

TABLE 3 – Tests de normalité et d'hétéroscédasticité conditionnelle

	Rentabilités		Rentabilités au carré	
	Stat	P-value	Stat	P-value
Jarque-Berra	402.82000	< 2,2e-16 ***	257374	< 2,2e-16 ***
Ljung-Box	17.87500	0.0571	279.28	< 2,2e-16***
ARCH test	150.94000	< 2,2e-16 ***	35.565	0,017 **

3 Estimation des modèles de volatilités sur 2015-2018

3.1 Les modeles GARCH

Dans la section précédente, nous avons décrit la série que nous utiliserons dans le reste de notre analyse. Comme les séries financières présentent une distribution leptokurtique, de l'hétéroscédasticité conditionnelle ainsi que de l'autocorrélation, nous utiliserons la modélisation GARCH pour étudier la volatilité. Dans cette section, nous procédons à l'estimation de modèles de prévision de volatilité basés sur la modélisation ARCH qui consiste à prendre en compte la volatilité en relâchant l'hypothèse de variance du terme d'erreur constante dans le temps⁵. L'objectif est de modéliser la variance des erreurs de façon autorégressive conditionnellement à son information passée⁶. La majeure partie des modèles employés sont des modèles de la famille GARCH,

5. Racicot F., Théoret R., « Traité d'économétrie financière », Presse de l'université du Québec, 2001.

6. Kuma J., « Modélisation hétéroscédastique : les modèles arch-garch », Centre de recherches économiques et quantitatives, 2018, téléchargeable sur : <https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01770037/document> (consulté le 28 mai 2020).

pour Generalized Auto Regressive Conditional Heteroskedasticity basés eux même sur le ARCH. Parmi cette famille de modèles, les suivants nous intéressent ici :

- **GARCH** : le modèle GARCH classique est un modèle d'estimation de volatilité né dans les années 80. L'idée est d'appliquer une modélisation ARMA sur les innovations du processus de prix. Le modèle se compose d'une partie auto regressive, qui prend en compte les variations explicables par les innovations passées et une partie moving average qui prend en compte les variations explicables par les valeurs de la volatilité aux dates antérieures. Un bon modèle doit donc être capable de capter les impacts du terme d'erreur sur les rendements à la période précédente. On obtient alors un modèle GARCH tel que :

$$\sigma_{i,t}^2 = a_0 + \sum_{j=1}^p a_j \epsilon_{i,t-j}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{i,t-j}^2$$

Où

$$\sum_{i=1}^p a_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

- **IGARCH** : le modèle IGARCH pour Integrated GARCH est une généralisation du modèle GARCH (tout comme GJR, TGARCH et EGARCH) qui permet de poser l'hypothèse que la persistance du processus est infinie. A l'inverse du modèle GARCH standard qui suppose un retour à la moyenne (à la volatilité non conditionnelle) après un choc, le modèle IGARCH suppose que, à la suite d'un choc, les effets de ce dernier se font sentir à l'infini, et impacte donc toutes les valeurs futures de la série.
- **GJR-GARCH** : le modèle GJR-GARCH (Glosten, Jagannathan et Runkle GARCH) permet quant à lui d'inclure une notion d'asymétrie dans la modélisation. En effet, jusqu'ici, nous avons implicitement fait l'hypothèse qu'un choc sur les prix, qu'il soit positif ou négatif aura un effet identique sur la volatilité future. Or, il paraît raisonnable de penser que la volatilité n'est pas impactée de la même manière selon que les prix augmentent brusquement ou baissent brusquement⁷. Pour pouvoir inclure cette subtilité dans le modèle, il faut s'affranchir des restrictions du modèle GARCH. Le modèle GJR-GARCH permet de prendre en compte l'asymétrie observée à l'aide de variables dichotomiques qui activent et désactivent certains coefficients selon si le choc sur les prix est positif ou négatif. De plus, le modèle GJR-GARCH peut poser un coefficient plus élevé si le choc est négatif et un coefficient plus faible si le choc est positif, ce qui revient à poser l'hypothèse que la réaction aux chocs négatifs est plus virulente que la réaction aux chocs positifs.
- **TGARCH** : le modèle TGARCH (Threshold GARCH) repose sur le même principe que GJR-GARCH, avec des coefficients qui s'activent et se désactivent selon le signe et la valeur des chocs passés. La différence entre les deux modèles réside dans le fait que TGARCH ne pose pas de contrainte de positivité sur les coefficients⁸. TGARCH est donc un GJR-GARCH légèrement moins restrictif, la contrainte de positivité des coefficients⁹, de part sa nature, implique qu'un choc dans les prix aura toujours un effet

7. Empiriquement, cette asymétrie est avérée et peut s'expliquer simplement avec l'idée que les investisseurs réagissent différemment, de manière asymétrique, aux bonnes et aux mauvaises nouvelles

8. En utilisant l'écart-type au lieu de la variance, le modèle peut estimer des valeurs négatives. L'écart-type peut être négatif tandis que la variance ne peut être que positive du fait que cette valeur est un carré

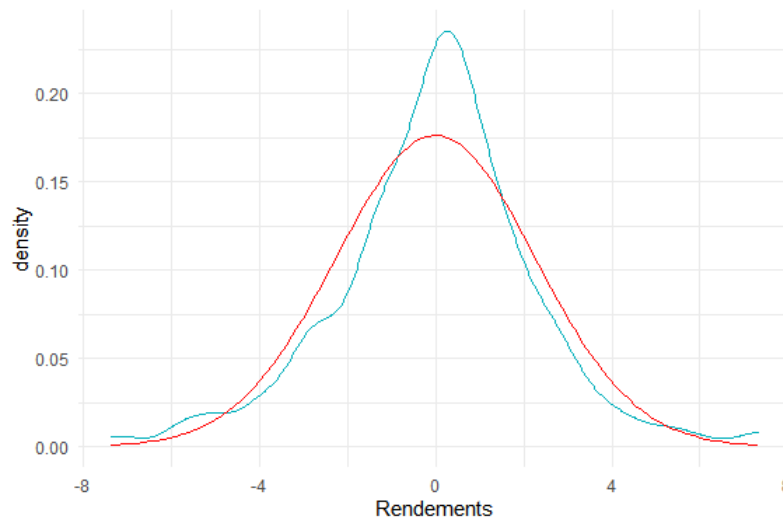
9. La variance conditionnelle ne peut pas être négative, pour nous assurer d'avoir des estimations strictement positives, les coefficients des modèles de volatilité sont contraints à être strictement positifs

positif sur la volatilité. Dans leur fonctionnement, les deux modèles permettent de prendre en compte l'asymétrie empirique observée sur les marchés.

- **EGARCH** : le dernier modèle GARCH qui nous intéresse, Exponential GARCH, permet également de traiter l'asymétrie des réactions aux chocs de prix positifs et négatifs. On inclut dans le modèle un effet amplitude et un effet signe qui prennent en compte respectivement, la magnitude du choc et son signe. Les deux effets s'additionnent ou s'annulent en fonction du signe du choc ce qui permet d'inclure l'asymétrie dans la modélisation.

Outre la famille GARCH, nous utiliserons également RiskMetrics développé par J.P. Morgan. Ce modèle est un cas particulier du IGARCH où tous les paramètres sont fixés à priori. Le tableau suivant récapitule les résultats obtenus avec les différentes estimations. Les estimations des modèles se font par maximum de vraisemblance. Cette méthode d'estimation repose sur une hypothèse de distribution des rendements. En général, on pose l'hypothèse que ces rendements sont normalement distribués, la MLE¹⁰ va donc chercher les paramètres μ et σ d'une loi normale¹¹ de sorte à ce qu'elle corresponde au mieux à la distribution des rendements. Si les rendements ne sont pas distribués normalement, même la loi normale qui colle le mieux aux données ne sera qu'une représentation approximative et inefficace. L'hypothèse de distribution que l'on fait est donc déterminante pour la qualité d'estimation des modèles mentionnés ci-dessus. Or il s'avère que les rendements sont rarement distribués normalement. Les études empiriques montrent que les rendements possèdent des queues de distribution plus épaisses¹² qui rendent l'occurrence de valeurs extrêmes plus probable. Une distribution de Student pourrait, en fonction des actifs étudiés, permettre d'obtenir des estimations plus justes. Ici, nous estimerons donc les modèles en posant l'hypothèse que les rendements sont distribués normalement, puis une seconde fois en posant l'hypothèse que les rendements sont distribués selon une loi de Student.

FIGURE 5 – Distribution des rendements (bleu) contre une loi normale (rouge)



10. Maximum Likelihood Estimation

11. moyenne et variance

12. Une distribution leptokurtique

Nous pouvons d'ores et déjà constater que les rendements semblent être leptokurtiques et légèrement asymétriques. Ce graphique confirme d'une part les remarques faites après observations des statistiques de la série, et d'autre part qu'une distribution de Student pourrait d'avantage représenter nos données. les queues de distribution sont plus épaisses, faire l'hypothèse d'une loi normale reviendrait à sous-estimer l'occurrence de valeurs extrêmes donc à sous-estimer le risque. Surtout si l'on utilise les prévisions des modèles GARCH pour calculer la VaR, qui est supposée rendre compte de ces mêmes valeurs extrêmes.

3.2 Estimations de la volatilité

3.2.1 Comparaison des modèles

Nous retrouvons ci-dessous les résultats pour chaque modèle. Le modèle TGARCH est impossible à estimer sous R pour des raisons inconnues, nous n'avons donc pas pu obtenir les coefficients pour ce modèle.¹³

FIGURE 6 – Résultats obtenus avec MLE supposant une distribution Normale des rendements

	Coefficient		t-value > 1.64	persistence	half-life	log-likelihood	Akaike	H-Q
GARCH	Cst(V) > 0	0.0767	2.1311	0.9855	47.5812	-2299.1810	4.3662	4.3734
	alpha ≥ 0	0.0663	4.4501					
	beta ≥ 0	0.9192	48.1091					
	alpha + beta < 1	0.9855						
EGARCH	Cst(V)	0.0158	6.6219	0.9895	65.7125	-2280.8850	4.3352	4.3442
	beta < 1	0.9895	34210.4766					
	theta1 (gamma)	0.0897	10.6619					
	theta2 (alpha)	-0.0810	-7.6841					
GJR-GARCH	Cst(V) > 0	0.0362	2.5060	0.9919	85.5434	-2289.5070	4.3498	4.3587
	alpha	0.0000	0					
	beta ≥ 0	0.9529	107.9739					
	gamma	0.0780	4.5289					
	alpha + gamma ≥ 0	0.0780						
	alpha + beta + (gamma/2) < 1	0.9919						
IGARCH	Cst(V) > 0	0.0320	1.9953	1.0000	inf	-2301.26	4.3683	4.3736
	alpha ≥ 0	0.0690	4.4747					
	beta	0.9310	NA					
Riskmetrics	alpha	0.0600	NA	1.0000	inf	-2306.7920	4.375	4.3767
	beta	0.9400	NA					

Nous pouvons dans un premier temps classer les modèles du moins bien ajusté au mieux ajusté grâce à la valeur du log-likelihood qui mesure la qualité d'ajustement aux données. Le modèle riskMetrics semble avoir la plus faible qualité d'ajustement derrière IGARCH, GARCH GJR-GARCH, tandis que le modèle EGARCH semble être le plus adapté. Ces résultats ne sont pas particulièrement suprenants, au contraire ; RiskMetrics est un modèle dont les paramètres sont fixés¹⁴. Ces paramètres ne sont donc pas optimisés pour correspondre aux données. Par conséquent ce modèle sera automatiquement moins bien ajusté que les autres, si tant est

13. Le package rugarch parvient bien à estimer le modèle mais les résultats sont "NULL"

14. $\alpha = 0.06$, $\beta = 0.94$

que 0.06 et 0.94 ne sont pas les paramètres optimaux pour nos données. Les deux meilleurs modèles sont les modèles qui prennent en compte l'asymétrie, EGARCH et GJR-GARCH avec une performance légèrement meilleure pour EGARCH. On peut donc supposer que le marché réagit de manière asymétrique aux chocs sur les futures du WTI, et qu'il faut un modèle capable de modéliser cette asymétrie pour correctement représenter les phénomènes en jeu. On peut éventuellement faire l'hypothèse que le EGARCH est meilleur du fait qu'il modélise le logarithme de la variance et non pas la variance, ce qui permet d'avoir des paramètres moins restreints et donc mieux ajustés. De plus, tous les coefficients de EGARCH sont largement significatifs tandis que GJR-GARCH possède un paramètre alpha non-significatif avec une t-stat égale à 0.

La qualité des modèles peut aussi être constatée à l'aide des deux critères d'information que nous avons utilisé : Akaike et Hannan-Quinn. Ces critères étant construits sur la log-likelihood, on retrouve le même résultat que précédemment avec RiskMetrics considéré comme le moins bon modèle et EGARCH comme le meilleur. Il est cependant à noter que bien qu'il soit possible d'identifier un modèle comme étant plus performant, les différences restent minimales et tous les modèles offrent une qualité d'ajustement relativement similaire. Nous pouvons également considérer la persistance des modèles et leur half-life. Les modèles à persistance infinie ont bien une persistance de 1 et une half-life infinie, tandis que les autres modèles ont une persistance inférieure à 1 et une half-life comprise entre 47 jours pour le GARCH et 85 jours pour le GJR-GARCH. Ainsi, si l'on se base sur le modèle GARCH, le marché met 47 jours à se rétablir d'un choc avant que la variance retourne à sa valeur non-conditionnelle. On constate deux phénomènes supplémentaires ; plus la persistance est élevée, plus la half-life est longue. La persistance étant une représentation de la vitesse à laquelle la variance retourne à sa valeur non-conditionnelle, plus cette vitesse est élevée, plus la half-life, qui elle représente le temps nécessaire avant retour à la variance marginale, est faible¹⁵. Les deux sont résolument liés et ce lien se constate ici. Le deuxième phénomène concernant la persistance que nous pouvons observer est que l'ajustement semble être fonction de la persistance¹⁶. Plus la persistance augmente, meilleur est l'ajustement. La raison que nous pouvons trouver pour rationaliser cette information est la suivante : la série est fortement persistente, notamment lors d'un choc négatif sur le prix de l'actif, ce sont donc les modèles avec la persistance la plus longue qui sont le mieux adaptés pour modéliser nos données.

Les modèles de modélisation de volatilité, comme toute modélisation de séries temporelles, sont soumis à certaines conditions mathématiques d'existence et de stationnarité, si ces conditions ne sont pas remplies, le modèle doit être rejeté. Tout d'abord, la persistance doit être inférieure à 1, sauf pour les modèles à persistance infinie. Ce critère est respecté comme nous l'avons évoqué plus haut. Cette condition assure la stationnarité du modèle, si elle n'est pas remplie, le modèle est invalidé. RiskMetrics est toujours défini, il n'est donc contraint à aucune condition. Le modèle IGARCH respecte la contrainte de positivité ($\alpha > 0$ et $\beta > 0$) et nous avons bien $\alpha + \beta = 1$ qui résulte en une persistance infinie. Les modèles respectent tous la condition de stationnarité ; $\alpha + \beta < 1$ pour le GARCH, $\alpha + \beta + \frac{\gamma}{2} < 1$ pour le GJR-GARCH et $|\beta| < 1$ pour EGARCH. $\gamma > 0$ et $\gamma + \alpha > 0$ dans le modèle GJR-GARCH indiquent que l'asymétrie est bien prise en compte et que les chocs négatifs ont d'avantage d'impact que les chocs positifs.

15. Plus précisément la persistance est la somme des paramètres associés aux chocs de cours et long termes, plus ces coefficients sont élevés, plus les chocs perdurent dans le temps. Ainsi une persistance élevée signifie des chocs qui vont impacter la série pendant une plus longue durée

16. Pour les modèles à persistance finie

Nous pouvons voir que la t-stat associée au paramètre α du modèle GJR-GARCH vaut 0 et indique que le coefficient n'est pas significatif. Le modèle doit donc être rejeté dans sa totalité. C'est le seul coefficient non-significatif parmi l'ensemble des tous les coefficients des différents modèles. Pour le IGARCH, la t-stat associé à ω est à la limite de la valeur critique de 1.64 mais reste significative à 5%. En résumé ; tous nos modèles, à part GJR-GARCH, sont valides et exploitables. Si certaines t-stats sont manquantes, c'est parce que les coefficients associés ne sont pas estimés. Par exemple, le paramètre β du modèle IGARCH n'a pas à être estimé puisqu'il est égal à $(1 - \alpha)$, α est le seul paramètre inconnu et donc le seul à avoir un écart-type. De même pour RiskMetrics, α & β sont pré-définis.

Nous allons désormais effectuer les mêmes estimations en supposant que la distribution sous-jacente de l'actif suit une loi de Student. Si nous obtenons des coefficients différents ainsi qu'un meilleur ajustement, nous pourrions confirmer l'hypothèse que les rendements de notre actif ne sont pas normalement distribués. La littérature existante laisse penser que nous obtiendrons de meilleurs résultats avec la loi de Student ; comme nous l'avons mentionné plus haut, les rendements des actifs financiers sont souvent non-normaux et dans notre cas le test de Jarque-Berra et le graphique des fonctions de densités semblent appuyer ce consensus.

FIGURE 7 – Résultats obtenus avec MLE supposant une distribution de Student des rendements

	Coefficient		t-value > 1.64	persistence	half-life	log-likelihood	Akaike	H-Q
GARCH	Cst(V) > 0	0.0500	1.5855	0.9921	87.8158	-2292.6660	4.3558	4.3647
	alpha ≥ 0	0.0669	4.0804					
	beta ≥ 0	0.9252	48.9952					
	alpha + beta < 1	0.9921						
	shape	11.2714	3.0821					
EGARCH	Cst(V)	0.0123	5.0804	0.9908	75.4296	-2279.1820	4.3321	4.3428
	beta < 1	0.9908	61356.5000					
	theta1 (gamma)	0.0466	11.3658					
	theta2 (alpha)	-0.0791	-6.8815					
	shape	19.4761	1.8070					
GJR-GARCH	Cst(V) > 0	0.0290	2.0469	0.9929	97.7952	-2286.3920	4.3458	4.3565
	alpha	0.0024	0.1999					
	beta ≥ 0	0.9533	108.9310					
	gamma	0.0743	3.9042					
	alpha + gamma ≥ 0	0.0767						
	alpha + beta + (gamma/2) < 1	0.9929						
	shape	15.1267	2.2566					
IGARCH	Cst(V) > 0	0.0282	1.6569	1.0000	inf	-2292.028	4.3549	4.362
	alpha ≥ 0	0.0697	4.2248					
	beta	0.9302	NA					
	shape	10.0886	3.4465					
Riskmetrics	alpha	0.0600	NA	1.0000	inf	-2296.2370	4.3568	4.3604
	beta	0.9400	NA					
	shape	10.9934	3.8465					

Les résultats obtenus sont idéaux dans le sens où la majeure partie des observations faites plus haut reposent sur l'hypothèse que les rendements sont distribués selon une loi de Student. Les contraintes d'identi-

fiabilité sont remplies, Les modèles asymétriques sont les mieux ajustés mais GJR-GARCH doit être éliminé car son coefficient α est non-significatif. Le modèle GARCH qui a une t-stat pour son coefficient ω inférieure à la valeur critique peut cependant être gardé puisque "omega" représente la constante sur la variance. Le modèle EGARCH est donc le meilleur modèle parmi ceux qui figurent ici. Les persistences sont bien inférieures à 1 quand elles doivent l'être.

Un point intéressant à noter est l'amélioration des log-likelihood, et par extension des critères d'information, entre une estimation MLE qui suppose une loi Normale et une estimation qui suppose une loi de Student. En effet, les modèles sont mieux ajustés¹⁷ lorsque l'on suppose que les rendements sont distribués selon une loi de Student. De plus, la t-stat associée aux degrés de libertés de la loi (shape) est supérieure à la valeur critique de 1.64. Ces deux éléments nous confortent dans l'idée d'utiliser une loi de Student plutôt qu'une loi normale.

3.2.2 Diagnostiques des résidus

Pour conclure cette section, nous rappelons que tous les modèles sont valides, à l'exception du GJR-GARCH et GARCH. EGARCH semble être le plus performant, RiskMetrics à l'inverse est le moins bien ajusté. Nos résultats semblent confirmer deux hypothèses supplémentaires ; les rendements sont non-normaux et une distribution de Student est plus adaptée. De plus, nos données semblent exhiber une certaine asymétrie qui est bien captée par le modèle EGARCH. Nous retenons donc 3 modèles estimés avec une MLE qui suppose une distribution de Student des rendements et pour lesquels nous vérifierons les hypothèses sur les résidus.

TABLE 4 – Tests sur les résidus

Modèle	Q(5)	p-value	Q ² (5)	p-value	LM-ARCH(5)	p-value	Engle-Mg sign test	p-value
GARCH	2.176	0.577	2.471	0.842	0.365	0.923	2.794	0.425
EGARCH	2.652	0.474	1.527	0.733	0.363	0.923	4.358	0.225
IGARCH	1.986	0.622	2.571	0.827	0.280	0.946	3.888	0.274

La première colonne représente le test de Ljung-box sur l'autocorrélation. Nous pouvons voir que pour l'ensemble des modèles la p-value associée est supérieure à 0.05, ce qui veut dire que l'hypothèse H0 est acceptée : les résidus suivent un bruit blanc. L'homoscedasticité conditionnelle est vérifiée à travers les tests de Ljung-Box sur les résidus au carré, ainsi que sur le test ARCH d'Engle utilisé précédemment. Nous pouvons voir que l'indépendance des résidus est validé par les deux tests. Le test d'Engle et Ng sur la mauvaise spécification de la variance conditionnelle montre que les tests joints sont supérieurs à 0.05, on conclut que les modèles sont adaptés pour traiter l'asymétrie des résidus standardisés. En outre, les paramètres sont constants et les modèles sont bien spécifiés.

3.2.3 Interprétation du modèle eGARCH

Comme nous l'avons dit précédemment, le modèle eGARCH avec une distribution de Student a tous ses paramètres significatifs. Le terme ARCH signifiant la persistance de court terme des chocs α est significatif au seuil de 5%. Le paramètre β est égal à 0.99, ce qui nous indique que la volatilité mettra du temps à

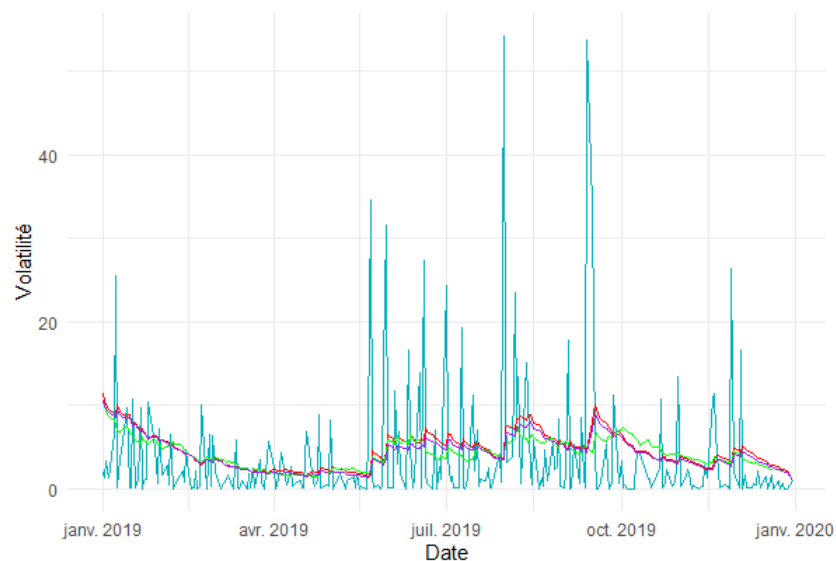
17. Log-likelihood inférieure

disparaître suite à un choc sur le marché. Ainsi, les chocs passés ont une influence importante sur la volatilité conditionnelle observée à l'instant t . Celui-ci nous donne également une information sur l'effet asymétrique des chocs. En outre, selon le signe du choc, l'impact sur la volatilité ne sera pas le même selon le fait que celui-ci soit dû à une bonne ou mauvaise nouvelle. La somme étant très proche de 1, les chocs ont tendance à être très persistants. De plus, β confirme la stationnarité du modèle EGARCH(1,1).

4 Prédiction de la volatilité sur 2019

Nous pouvons désormais passer à la prédiction de la volatilité sur l'année 2019, sur laquelle les modèles n'ont pas été entraînés. Nous effectuons des prévisions récursives à un pas, où chaque nouvelle observation est ajoutée aux données et les modèles sont constamment ré-estimés. Les prévisions concernent l'année 2019 soit 265 valeurs à prédire. EGARCH, IGARCH et RiskMetrics seront utilisés, avec une estimation par MLE supposant une loi de Student.

FIGURE 8 – Rendements au carré contre prévisions des modèles EGARCH, IGARCH et RiskMetrics



Sur le graphique ci-dessus, IGARCH figure en rouge, EGARCH en vert et RiskMetrics en violet. Les deux modèles à persistance infinie sont très proches comme on pourrait s'y attendre. IGARCH semble légèrement au dessus des autres modèles lors des périodes de volatilités élevées. D'une manière générale les trois courbes délivrent toutes une information relativement similaire et cette similitude se retrouve dans les différentes mesures qui figurent plus bas.

4.1 Mesure des erreurs de prédiction

Nous utilisons la MSE¹⁸ comme mesure de précision et pour tenter de trouver un modèle statistiquement meilleur que les autres, nous employons le test de Diebold & Mariano univarié et multivarié, ainsi que le test de Hansen. Ce second test qui repose sur la procédure Model Confidence Set (MCS) a l'avantage de ne pas nécessiter de modèle de référence lors de la comparaison. MCS repose sur l'élimination itérative des modèles les moins performants afin de ne garder qu'un ensemble de modèles avec une précision de prédiction comparable. A l'inverse du DM test qui lui compare les modèles deux à deux¹⁹. Le tableau suivant montre les capacités prédictives de chaque modèle sur l'année 2019.

TABLE 5 – MSE des prévisions sur l'année 2019 et erreur prédite 'out of sample'

Modèle	MSE		MSE	RMSE	MAE
eGARCH	7.480	eGARCH	8.274	2.876	2.346
iGARCH	7.993	iGARCH	8.606	2.934	2.409
Riskmetrics	7.636	Riskmetrics	8.235	2.870	2.344

Le modèle EGARCH a la meilleure qualité de prédiction avec une MSE de 7.480 contre 7.993 pour IGARCH et 7.636 pour RiskMetrics. C'est donc EGARCH qui est définitivement le meilleur modèle de prédiction de volatilité, parmi ceux que nous avons testés. bien que le modèle IGARCH eut été légèrement mieux ajusté que RiskMetrics c'est tout de même ce dernier qui l'emporte en terme de prédictions out of sample. La supériorité de EGARCH sur les deux jeux de données nous confortent dans l'hypothèse que les réactions aux chocs sur le marché sont asymétriques. La moins bonne performance des deux modèles à persistance infinie semble indiquer que ce type de modèle ne convient pas pour modéliser nos données. Comme nous l'avons décélé précédemment, les modèles sélectionnés offrent des qualités d'ajustement comparables, cette similitude tend à se perdre lorsque nous évaluons les erreurs de prédiction out of sample.

4.2 Précision prédictive des modèles

Pour nous assurer qu'il existe une différence significative entre ces modèles, nous allons utiliser les tests DM, MDM et MCS (Hansen) évoqués plus haut. Le test de Diebold & Mariano multivarié compare la capacité prédictive de deux modèles basé sur l'hypothèse d'égalité prédictive. Les résultats nous donnent une p-value très proche de 0, on rejette donc l'hypothèse nulle de capacité de prédiction similaire ce qui signifie que au moins l'un des modèles est meilleur. Nous pouvons identifier lequel à l'aide du DM univarié en comparant indépendamment les modèles deux à deux. Le DM test a été effectué de manière unilatérale, ce qui signifie qu'un p-value inférieure à 0.05 indique que le modèle de référence est meilleur que le second modèle.

4.2.1 Test de Diebold & Mariano

TABLE 6 – P-values du DM test pour les modèles deux à deux

	eGARCH vs iGARCH	eGARCH vs RiskMetrics	Riskmetrics vs iGARCH
p-value	6.795e-09	0.021	< 2.2e-16

18. Mean Squared Error

19. Dans le cas univarié. Dans le cas multivarié, les modèles sont comparés entre eux simultanément

Dans notre cas, on constate que EGARCH est bien significativement meilleur que IGARCH et RiskMetrics. RiskMetrics est meilleur que IGARCH ce qui fait logiquement de lui le moins performant des trois modèles. Nous confirmons les résultats obtenus avec le test MCS de Hansen.

4.2.2 Test MCS de Hansen et alii (2011)

La procédure MCS contrairement au DM test ne se base pas sur un modèle de référence mais se base sur un sous-ensemble de modèles afin de déterminer ceux avec des performances de prévisions équivalentes. Les résultats obtenus sont représentés dans le tableau ci-dessous. Nous pouvons constater que le modèle 2 (iGARCH) a été éliminé. Les modèles EGARCH et RiskMetrics présentent alors une capacité de prédiction équivalente selon le test. Cependant, le modèle 1 (EGARCH) présente une perte inférieure par rapport à RiskMetrics qui reste lui plus performant que iGARCH. La p-value associée à la statistique Tmax est égale à 0.214, on ne peut pas rejeter l'hypothèse d'EPA²⁰ entre EGARCH et RiskMetrics.

TABLE 7 – MCS test eGARCH, iGARCH et Riskmetrics

	Rank_M	v_M	MCS_M	Rank_R	v_R	MCS_R	Loss
model_1	1	-1.207	1	1	-1.207	1	7.480
model_3	2	1.207	0.214	2.000	1.207	0.214	7.636
p-value :	0.214						

Pour conclure cette partie, après avoir estimé différents modèles GARCH avec des spécifications différentes, nous avons pu calculer les prévisions de volatilité pour l'année 2019. Ces prévisions sont calculées de manière récursive avec ré-estimation des modèles à chaque pas. En terme d'erreur quadratique moyenne EGARCH apparait comme étant le meilleur modèle, en lien avec les résultats obtenus sur la période 2015-2018. IGARCH est le moins bon modèle derrière RiskMetrics. Pour nous assurer que les différences de précisions sont significatives, nous nous sommes aidé de 3 tests à savoir ; Diebold & Mariano uni et multivarié et le test MCS de Hansen²¹. Le test MDM indique que les modèles ne sont pas statistiquement identiques, le test DM confirme que EGARCH est statistiquement meilleur que les deux autres modèles considérés mais aussi que RiskMetrics est statistiquement plus précis que IGARCH. En revanche MCS donne des résultats partiellement contradictoires, il identifie bien EGARCH et RiskMetrics comme étant meilleurs que IGARCH mais ne parvient pas à rejeter l'hypothèse d'EPA entre EGARCH et RiskMetrics. cependant, aux vues des résultats du DM test et de la qualité d'ajustement sur la période 2015-2018, il nous semble raisonnable de choisir EGARCH comme étant le meilleur modèle de prédiction de volatilité parmi ceux testés. L'inclusion de phénomènes d'asymétrie des réactions aux chocs apparait particulièrement pertinent dans notre analyse.

5 Prédiction de la VaR

5.1 Présentation des méthodes

La VaR, pour Value-at-Risk représente le rendement minimal qu'il est probable de réaliser sur une journée, avec un certain seuil de confiance. Ici le seuil de confiance α choisi est 0.05, ainsi la VaR est la

20. Equal Predictive Ability qui signifie que les précisions des deux modèles considérés ne sont pas statistiquement différentes.

21. Test MCS est un abus de langage, MCS est un algorithme qui implémente le test de Hansen.

valeur de la borne basse d'un intervalle de confiance à 95%, i.e il y a 5% de chance de réaliser des rendements inférieurs à la VaR à 5% calculée. Pour un jour t la VaR doit être estimée en fonction de la volatilité prévue ce jour. La volatilité du jour t quant à elle, est prédite par les modèles GARCH que nous avons mentionnés plus haut. Néanmoins la VaR est construite à partir d'une loi Normale, le α^{ime} quantile d'une loi normale n'est pas forcément le même que celui d'une loi de Student. or nous avons dit plus tôt que nos rendements suivaient une loi de Student, il serait donc préférable de prendre les quantiles d'une loi de Student pour avoir une VaR plus précise²².

5.1.1 Méthodes non paramétriques

Une des manières possibles d'estimer la VaR est de n'imposer aucune distribution paramétrique de pertes et profits. Ainsi, la méthode de '*Simulation historique (HS)*' permet d'estimer le risque en se basant uniquement sur la distribution empirique des données historiques des rentabilités. En outre, on obtient une estimation de la VaR par les fractiles empiriques des rentabilités passées. Cette approche repose donc sur l'hypothèse que les rentabilités sont identiquement et indépendamment distribuées. De plus, elle suppose que la distribution est non conditionnelle du temps et donc que le fractile (VaR) reste le même.

5.1.2 Méthodes paramétriques basée sur les modèles GARCH

Contrairement aux méthodes non paramétriques, on suppose que les rentabilités suivent une loi de distribution mathématique connue sur lesquels on estimera les paramètres GARCH. Dans notre cas, nous supposons une loi de Student. Ainsi, tous les modèles sont estimés avec un seuil de confiance de 5% comme précisé précédemment. Les estimations sont réalisées sur un échantillon de 793 jours avec une mesure de risque sur un horizon de 262 jours. Nous obtenons donc la VaR sur les rentabilités pour la période janvier à décembre 2019. Celle-ci est estimée comme pourcentage de valeur du portefeuille :

22. La loi considérée ici est une loi Normale mais l'idée d'utiliser une loi de Student nous paraissait intéressante

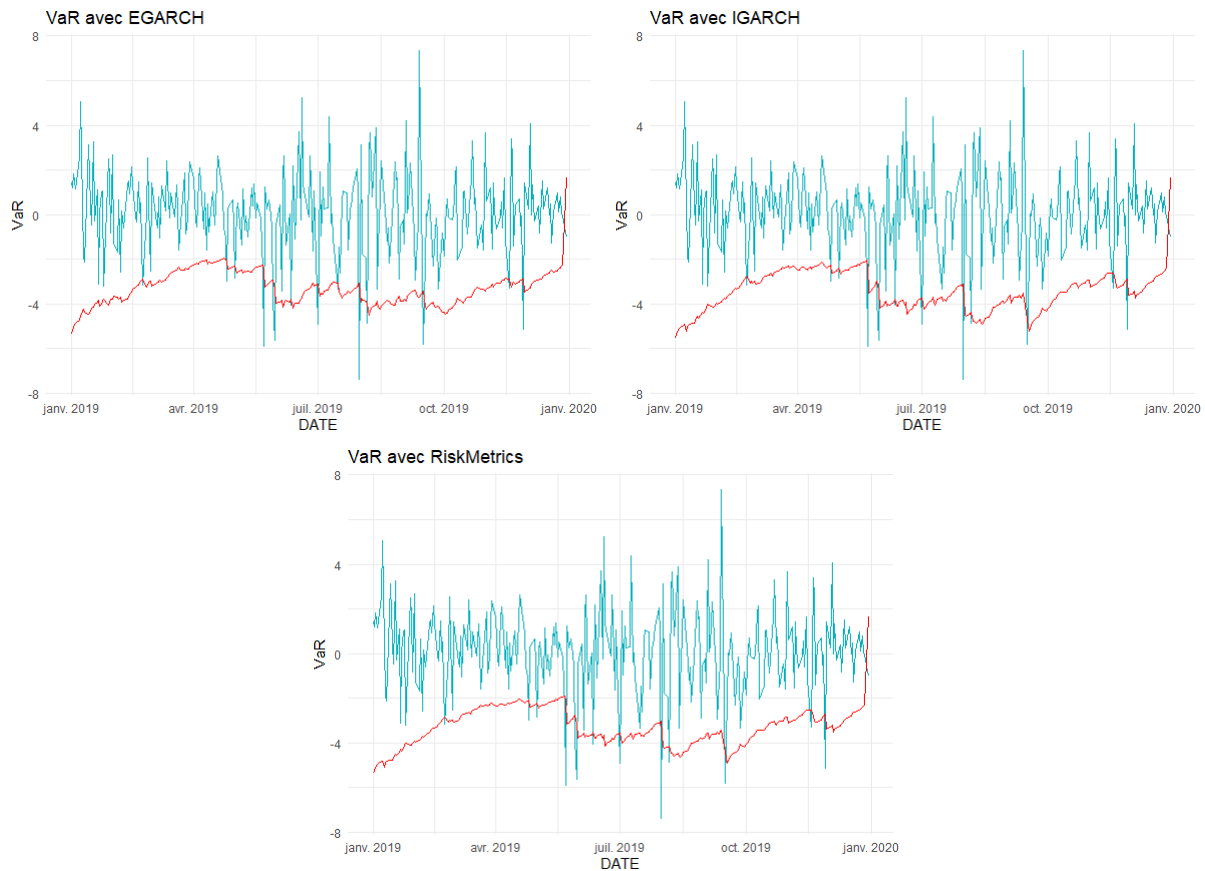


FIGURE 9 – Différentes estimations de la VaR

Les graphiques ci-dessus représentent l'évolution de la série en bleu et de la VaR à 5% en rouge. A première vue les courbes rouges semblent identiques. Bien que nos modèles soient statistiquement différents les uns des autres, comme nous l'avons évoqué plus haut, tous font partie de la même famille de modèles GARCH et reposent sur une conception similaire de l'estimation de la volatilité. Lors de l'estimation, nous avons constaté que les qualités d'ajustement des modèles étaient proches, cette proximité se retrouve ici sur les graphiques avec trois courbes semblables. Elles ne sont pas pour autant identiques, et les tests qui suivent nous permettront de trancher.

5.2 Tests et mesure des erreurs

5.2.1 Le backtesting

Le backtesting permet de vérifier *ex post* que les estimations de la VaR sont pertinentes en comparant les pertes réelles et les pertes prévues. Ainsi, il permet de détecter le nombre de fois où la perte réelle a été surestimée par rapport à la perte prévue par la VaR : *les exceptions*. L'échantillon backtest a été construit sur les périodes consécutives de janvier 2019 à décembre 2019. Sur les 262 observations, nous devrions avoir environ 5% des observations qui dépassent la VaR si celle-ci est correctement calculée. En outre nous devrions

avoir environ 13 exceptions. Cette logique peut être testée et elle constitue l'hypothèse principale de deux des trois tests que nous emploieront.

5.2.2 Les tests

5.2.3 Test de couverture non conditionnelle (Kupiec,1995)

Le test Z_{UC} et le test de Kupiec testent cette hypothèse de couverture non-conditionnelle, qui stipule que l'espérance du nombre de hits²³ est égal à un seuil $\alpha\%$. Si cette hypothèse est rejetée, le nombre de hits est significativement différent de $\alpha\%$ des observations²⁴.

Les résultats obtenus se trouvent dans le tableau ci-dessous. Nous pouvons tout d'abord que pour la VaR calculée à partir des prédictions de iGARCH le nombre de hits *ie.* le nombre de fois où la série a dépassé la VaR est de 15. Idem pour la VaR calculée avec les prévisions de RiskMetrics, et 16 pour le modèle EGARCH, censé être le meilleur. Le modèle avec les meilleures prédictions doit donner la VaR la plus fiable et donc le moins de hits possible. Pourtant notre meilleur modèle engendre un hit de plus que RiskMetrics et IGARCH. On peut supposer que la pertinence infinie de RiskMetrics et IGARCH permet de capter un phénomène que EGARCH ne parvient pas à identifier. Les p-values pour le test de Kupiec sont toutes largement supérieures à 0.05, indiquant que nombre de hits rapporté au nombre d'observations est bien égal à α . L'hypothèse H_0 est acceptée : les modèles sont pertinents avec un nombre de d'excès proche du nombre attendu.

Pour plus de rigueur ; le test Z_{UC} stipule que le nombre de hits suit une loi binomiale, qui converge vers une loi normale, on teste alors cette hypothèse en vérifiant que le nombre de hits centré réduit est inférieur à la valeur critique de 1.96, correspondant à un seuil de risque de 5% pour une loi normale. Le test de kupiec repose sur le même principe mais utilise un test de ratio de vraisemblance pour définir si le nombre de hits est significativement différent de $\alpha\%$ des observations. La statistique Z_{UC} est bien inférieure à 1.96 en valeur absolue, résultat qui confirme l'hypothèse de couverture non-conditionnelle. Comme on peut le voir dans la colonne VaR moyenne, l'espérance n'est pas exactement égale à 0.05 mais leur valeurs sont comprises dans l'intervalle de confiance de 95% hypothétique supposé par le test. Nos VaRs ne sur-estiment, ni ne sous-estiment le risque de manière drastique.

Modèle	Hits	Z_{UC}	Kupiec ²⁵	E-M ²⁶	VaR moyenne	ES ²⁷
IGARCH	15	0.52	0.61(0.26)	0.004(21.01)	0.057	-4.33
EGARCH	16	0.81	0.61(0.43)	0.002(22.89)	0.061	-4.16
RiskMetrics	15	0.52	0.61(0.26)	0.003(21.95)	0.057	-4.16

TABLE 8 – Résultats de la VaR à 5%

23. Rendements inférieurs à la VaR prévue

24. $E[I_t(\alpha)] = \frac{H}{T}$ donc $H = \alpha * T$ si l'hypothèse est respectée, avec $E[I_t(\alpha)]$ l'espérance du nombre de hits, T le nombre d'observations et H le nombre de hits

5.2.4 Test d'efficience conditionnelle (Engle et Manganelli, 2004)

Le troisième test est le test de Engle-Manganelli s'intéresse à l'indépendance des violations courantes de la VaR avec les violations passées. Celui-ci teste si le processus (centré) sous-jacent à l'apparition de hits dans la série satisfait une différence de martingale. Autrement dit, si H_0 est rejetée, l'espérance d'occurrence d'un hit à une période t est dépendant de l'information disponible en $t-1$. Si cette condition est vérifiée en revanche, cela signifie que les hits sont indépendants entre eux. L'indépendance des hits est une conséquence de la différence de martingale, où l'espérance d'une variable est 0, indépendamment des valeurs passées. Un bruit blanc gaussien, par exemple, est une différence de martingale, à chaque date l'espérance du bruit blanc est 0, indépendamment des valeurs obtenues aux dates antérieures. Si l'espérance conditionnelle est constante, alors les observations ne sont pas dépendantes entre elles. Le test Engle-manganelli dit de couverture conditionnelle permet de vérifier l'indépendance des hits²⁸, ces deux types de couvertures réunis permettent de valider la pertinence de la VaR.

Les résultats du test E-M montrent que l'hypothèse H_0 de couverture non-conditionnelle est rejetée au seuil de 5. En outre, la probabilité d'occurrence d'un hit est conditionnelle aux informations passées. En toute logique EGARCH a la VaR moyenne la plus élevée, puisqu'il contient un hit supplémentaire par rapport aux deux autres modèles.

5.2.5 Expected Shortfalls

La dernière colonne représente les *Expected Shortfalls*, représente les plus grandes pertes prévues associé au taux de couverture α . L'ES est considéré comme une bonne méthode de mesure du risque puisqu'il respecte les quatre propriétés proposé par Artzner et alii, par rapport au VaR qui n'en respecte que trois. On dit alors que c'est une mesure du risque 'cohérente' puisque contrairement à la VaR elle permet de considérer l'axiome de sous-additivité. En outre, la diversification du risque doit conduire à une baisse ou au maintien du risque global. Ainsi, EGARCH et RiskMetrics ont un *Expected shortfall* moyen inférieur (-4.16) par rapport à iGARCH (-4.33). Cela indique qu'avec les prévisions de volatilité d'un modèle EGARCH ou RiskMetrics, les plus grandes pertes attendues sont moins importantes qu'avec la volatilité prévue par un modèle IGARCH.

Finalement, le backtesting n'a pas permis de vérifier la robustesse de la VaR. L'hypothèse de couverture non-conditionnelle est bien remplie au seuil de 5 mais la couverture conditionnelle n'est pas avérée, indiquant que les hits ne sont pas indépendants entre eux. De plus, la VaR moyenne nous informe qu'au seuil de 5%, le WTI ne perdrait pas moins de 5,7 en moyenne sur les rentabilités de l'année 2019, si l'on s'en suit aux modèles iGARCH et Riskmetrics. Malheureusement nos trois modèles sélectionnées ne permettent pas de contruire des prévisions de risque suffisamment valides pour être exploitées. Il faudra utiliser d'autres modèles pour obtenir des résultats satisfaisants.

6 Conclusion

Au cours de ce travail, notre but a été de construire des modèles de prévisions de volatilité puis de calculer une VaR à partir de ces estimations. Nous avons utilisé le WTI, sur la période 2015-2019 comme actif de

28. Le test de Engle-Manganelli vérifie que les coefficients d'un modèle linéaire autoregressif sur les hits sont égaux à 0

référence pour nos travaux. Après avoir analysé la série et vérifié son comportement, nous avons observé une forte persistance des rendements au carré, suggérant que la modélisation par processus autoregressif est pertinente. Nous avons également observé la non-normalité des rendements, qui se conclue plus tard par la supériorité des modèles estimés en supposant une distribution de Student des rendements. Après avoir testé 6 modèles GARCH différents, nous avons sélectionné les meilleurs parmi ceux qui respectent leur conditions d'identifiabilité respectives. IGARCH et RiskMetrics sont sélectionnés, indiquant que les modèles à persistance infinie semblent bien calibrés pour modéliser la volatilité du WTI, mais leur qualité d'ajustement est la pire des 6 modèles. Les modèles EGARCH et GJR-GARCH sont les deux mieux ajustés, bien que GJR-GARCH ne respecte pas les conditions d'existence et doit donc être rejeté. Ce résultat nous laisse à penser que notre série exhibe des réactions asymétriques aux chocs positifs et négatifs bien captée par ces deux modèles. A partir de IGARCH, EGARCH et RiskMetrics, nous avons construit des VaR à 5% que nous avons testées à posteriori. Les tests statistiques sur la VaR valident l'hypothèse de couverture conditionnelle (l'espérance de la VaR est bien égal au seuil α choisi) mais nous sommes contraints de rejeter l'hypothèse de couverture conditionnelle ce qui suppose que les hits sont dépendants entre eux. Notre VaR n'est donc pas entièrement valide. D'autres modèles de prévisions de volatilité existent et pourraient fournir des résultats plus robustes, comme le HAR (Heterogenous Auto Regressive) développé en 2009 par F.Corsi par exemple, qui a de plus prouvé sa supériorité en terme de prédiction de volatilité vis-à-vis du modèle GARCH.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Etude descriptive sur 2015-2019	4
2.1	Analyse graphique	4
2.1.1	Evolution des prix	4
2.1.2	Rentabilités logarithmiques	5
2.2	Statistiques descriptives	6
2.3	Etude de l'auto-corrélation	7
2.4	Conditions du modèle GARCH	8
3	Estimation des modèles de volatilités sur 2015-2018	8
3.1	Les modèles GARCH	8
3.2	Estimations de la volatilité	11
3.2.1	Comparaison des modèles	11
3.2.2	Diagnostic des résidus	14
3.2.3	Interprétation du modèle eGARCH	14
4	Prévision de la volatilité sur 2019	15
4.1	Mesure des erreurs de prédiction	16
4.2	Précision prédictive des modèles	16
4.2.1	Test de Diebold & Mariano	16
4.2.2	Test MCS de Hansen et alii (2011)	17
5	Prévision de la VaR	17
5.1	Présentation des méthodes	17
5.1.1	Méthodes non paramétriques	18
5.1.2	Méthodes paramétriques basée sur les modèles GARCH	18
5.2	Tests et mesure des erreurs	19
5.2.1	Le backtesting	19
5.2.2	Les tests	20
5.2.3	Test de couverture non conditionnelle (Kupiec,1995)	20
5.2.4	Test d'efficience conditionnelle (Engle et Manganelli,2004)	21
5.2.5	Expected Shortfalls	21
6	Conclusion	21

Table des matières

Table des figures

1	Evolution du prix sur la période	4
---	--	---

2	Evolution du prix sur la période	5
3	Rentabilités et rentabilités au carré corrigées	6
4	Corrélogramme sur les séries corrigées	7
5	Distribution des rendements (bleu) contre une loi normale (rouge)	10
6	Résultats obtenus avec MLE supposant une distribution Normale des rendements	11
7	Résultats obtenus avec MLE supposant une distribution de Student des rendements	13
8	Rendements au carré contre prévisions des modèles EGARCH, IGARCH et RiskMetrics	15
9	Différentes estimations de la VaR	19