1. Introdução

Autor: Luã do Carmo Ribeiro

Data de impressão: 15/07/2025

> 🐝 Esse documento são as minhas anotações e descrições que fiz ao longo da leitura do livro. Salvo esse documento como uma forma segura de manter registrado os pensamentos, ideias e escritas que tive ao longo desse capítulo.
> O conteúdo desse texto não deve ser usado como material didático ou de consulta, pois o mesmo pode estar sujeito a erros…

▼ 1.1 - Alguns Modelos Matemáticos Básicos; Campos de Direção

Ao construir uma malha de pontos no plano `ty`, e em cada ponto desenhar um pequeno segmento de reta com a inclinação calculada por `f(t,y)`, o conjunto desses segmentos forma o **campo de direções**. O campo de direções nos permite ver para onde as **soluções tendem**, se elas **crescem** ou **decrescem** e onde estão os **pontos de equilíbrio**.

▼ Exemplo - Objeto em queda

Teoria: Suponha que um objeto está caindo na atmosfera, perto do nível do mar. Formule uma equação diferencial que descreva o movimento.

Para descrever essa equação, vamos usar a **segunda lei de newton**, que diz que a massa do objeto multiplicado por sua aceleração é igual a força total atuando sobre o objeto.

$$F = ma,$$

Onde `m` é a massa do objeto, `a` é sua aceleração e `F` é a força total agindo sobre o objeto. Suponhamos que `t` é o tempo, denotado em um intervalo de tempo, e `v` é a velocidade de um objeto em queda. Como essa velocidade pode variar com o tempo, vamos considerar `v` como uma função de `t`, ou seja, `t` é a variável independente e `v` é a variável dependente. Como `a` e `v` estão relacionadas por `a = dt/dv`, podemos reescrever a fórmula como,

$$F = m * \frac{dv}{dt},$$

Consideramos agora as forças que agem no objeto em queda. A gravidade exerce uma força igual ao peso do objeto, ou `mg`. Já a força resultante do ar, vamos chamar uma constante `yv`.

$$F = mg - \gamma v$$

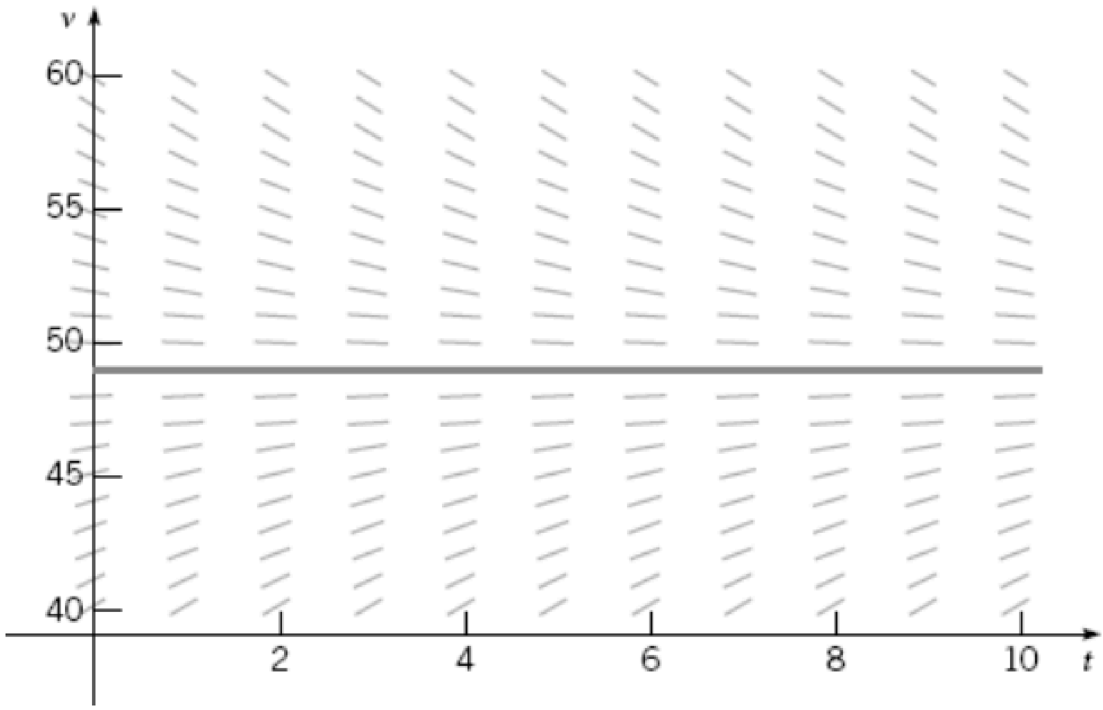
Como temos outra definição para a força, podemos modificar a fórmula novamente para,

$$m * \frac{dt}{dy} = mg - \gamma v$$

Vamos assumir para o nosso exemplo, `m = 10 kg`, `g = 9,8 m/s^2` e `y = 2 kg/s`, nossa fórmula final fica:

$$\frac{dt}{dy} = 9,8 - \frac{v}{5}$$

O próximo passo é construir os **campos de direções**. Por exemplo, se $v = 40$, a equação tem como resultado $1,8$, para $v = 49$, temos 0, que é a nossa **solução de equilíbrio** e por fim, se $v = 60$, temos $-2,2$. Agora é importante planejar como a construção do campo de direção ficaria. Note que para $v > 49$, temos $v(t) < 0$ e para $v < 49$, temos $v(t) > 0$. O gráfico a seguir demonstra o campo amostral acima.



Para valores maiores que a nossa solução de equilíbrio ($v = 49$), temos que $v(t) < 0$, e para valores menores, temos $v(t) > 0$. Concluímos que as soluções parecem estar convergindo para a solução de equilíbrio quando `t` aumenta. Nesse contexto, a solução de equilíbrio é muitas vezes chamada de **velocidade terminal**.

Exemplo - Ratos do campo e corujas

Teoria: Olhando para um exemplo diferente, temos um caso de crescimento populacional. Considere uma população de ratos do campo que habitam certa área rural. Vamos supor que, na ausência de predadores, a população cresce a uma taxa proporcional à população atual, note que essa hipótese não é uma lei da física muito bem estabelecida, mas é uma hipótese inicial usual em um estudo de crescimento populacional.

$$\frac{dp}{dt} = rp$$

Onde a derivada é um a população de ratos no instante t e r é chamado de **taxa constante** ou de **crescimento.**

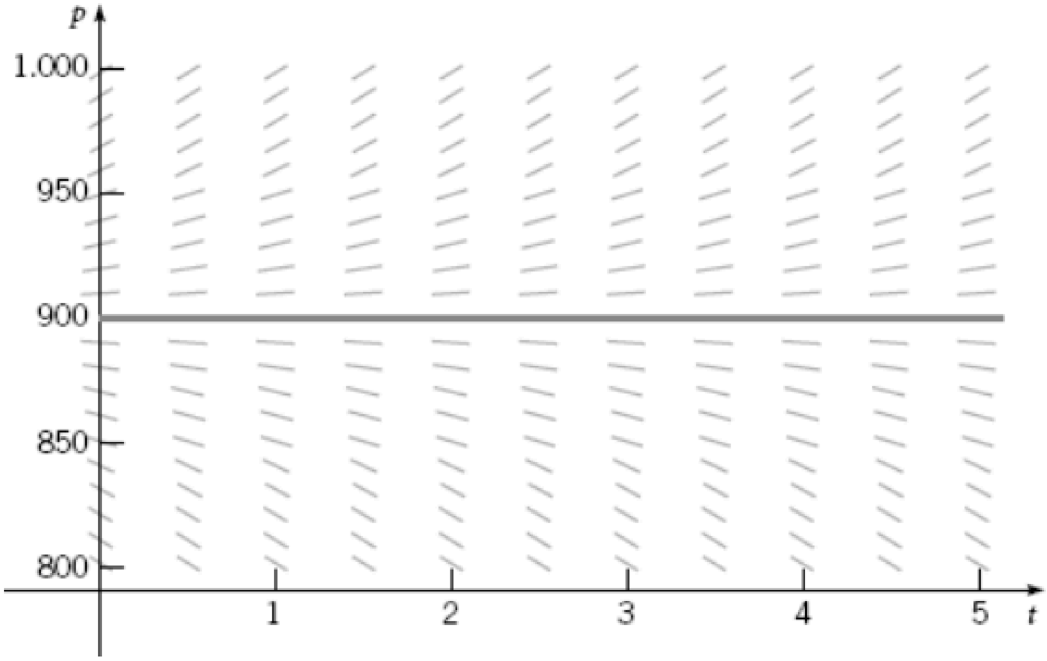
Assumindo o tempo sendo calculado por mês e a taxa constante sendo 0.5 por mês, vamos supor que as corujas na vizinhança matam 15 ratos por dia. Em um mês teríamos a seguinte fórmula

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 450$$

Concluímos que essa população tem uma solução de equilíbrio para $p = 900$, onde para $p > 900$, temos um crescimento e para $p < 900$ temos um decrescimento. Logo, as soluções se afastam do equilíbrio, diferentemente do exemplo anterior que as soluções convergiam para o equilíbrio.

Logo, uma versão geral dessa fórmula se dá por

$$\frac{dp}{dt} = rp - k$$



▼ 1.2 - Soluções de Algumas Equações Diferenciais

No tópico acima, vimos como identificar equilíbrios e prever qualitativamente se as soluções convergem ou divergem. Agora vamos sair dessa análise qualitativa e ir para uma análise quantitativa para as soluções, o que nos permitirá não só prever o comportamento de um sistema como também calcular seu estado em qualquer instante de tempo.

De modo geral, o livro apresenta a **forma de integração direta** que se aplica a **variáveis separáveis**.

Pegando como exemplo as equações feitas acima, vamos separar as variáveis e integra-las.

$$\frac{dp}{dt} = rp - k$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{2} - 450$$

$$\frac{dp}{\frac{p-900}{2}} = dt$$

$$\int \frac{dp}{\frac{p-900}{2}} = \int dt$$

$$\int \frac{2}{p-900} dp = \int dt$$

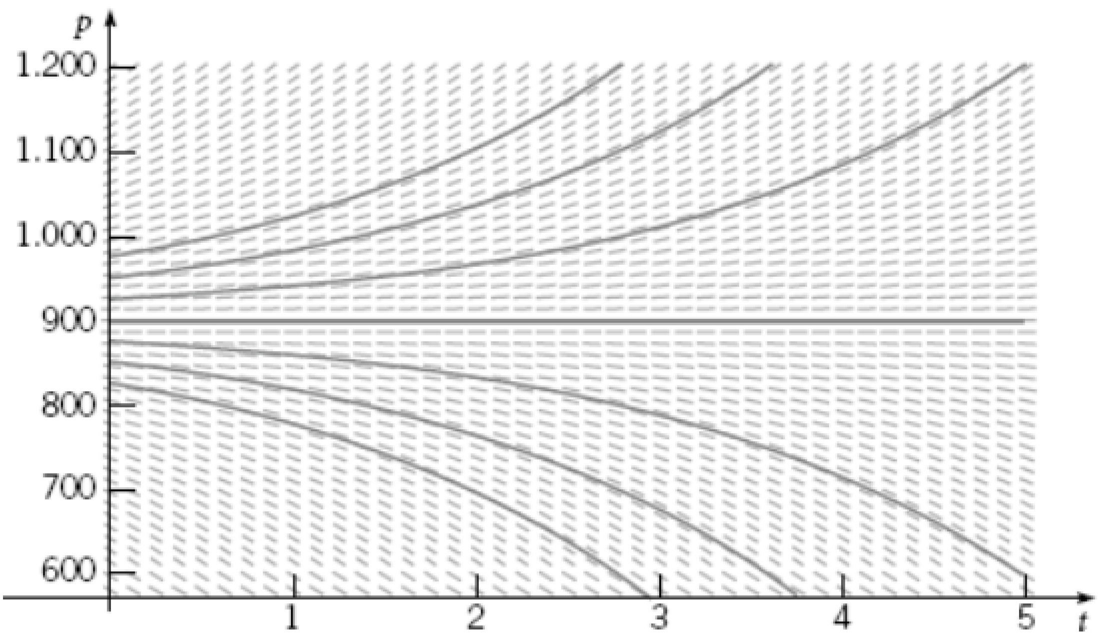
$$2 \ln |p - 900| = t + C$$

$$\ln |p - 900| = \frac{t}{2} + C$$

$$|p - 900| = e^{\frac{t}{2}} + e^{C}$$

$$p = 900 + Ce^{\frac{t}{2}}$$

O que resulta no campo de direções para possíveis valores iniciais sendo:



Em um problema real, raramente estamos interessados em uma família infinita de soluções. Geralmente, conhecemos o estado do sistema em um momento inicial. Essa informação adicional é chamada de **condição inicial**.

Um **problema de valor inicial (PVI)** consiste na equação diferencial mais uma condição inicial, tipicamente na forma $y(0) = y_0$. O propósito da condição inicial é nos permitir encontrar um valor específico para a constante C, selecionando assim uma **única** solução que descreve o nosso problema.

Voltando para a equação geral encontrada do crescimento populacional de ratos

$$p(t) = 900 + Ce^{\frac{t}{2}}$$

Vamos substituir $t = 0$ e $p = p_0$ na solução geral

$$p_0 = 900 + Ce^{\frac{0}{2}}$$

$$p_0 = 900 + C$$

$$C = p_0 - 900$$

Com a constante encontrada, isso nos leva à uma fórmula explícita para a solução de qualquer PVI desta forma

$$p(t) = 900 + (p_0 - 900)e^{\frac{t}{2}} \text{ OU } p(t) = \frac{k}{r} + (p_0 - \frac{k}{r})e^{\frac{t}{2}}$$

▼ 1.3 - Classificação de Equações Diferenciais

Uma equação diferencial pode ser classificada de diversas maneiras, com base em suas características.

▼ Número de variáveis independentes

Separamos em **equações diferenciais ordinárias (EDO)** as equações que dependem de uma **única variável independente**.

Como exemplo, temos a equação de um circuito elétrico

$$L(d^2\frac{Q(t)}{dt^2}) + R(\frac{dQ(t)}{dt}) + (\frac{1}{C})Q(t) = E(t)$$

E equações que dependem de **duas ou mais variáveis independente**, chamamos de equações **diferenciais parciais (EDP),** por exemplo a equação de calor

$$\alpha^2(\frac{\partial^2(x,t)}{\partial x^2}) = \frac{\partial(x,t)}{\partial t}$$

▼ Ordem

A ordem de uma equação diferencial é dada pela **derivada de maior ordem** que aparece na equação, um exemplo de uma equação de segunda ordem é

$$y´´ + y = 0$$

▼ Linearidade

Uma equação diferencial é **linear** se ela possui a seguinte forma

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_n(t)y = g(t)$$

Portanto, observe que ela deve obedecer duas propriedades:

1. A variável dependente e todas as suas derivadas são de primeiro grau
2. Cada coeficiente depende apenas da variável independente

Por outro lado, se a equação não se encaixa neste formato ela é chamada de **não linear**.

Linear: $y''' + 2e^t y'' + y' = t^4$

Não linear: $y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$**, não linear por causa do** (yy')

▼ Solução

O significado de **solução** para uma equação diferencial em um intervalo é uma função $y = \varphi(t)$, que ao ser substituída na equação, a transforma em uma identidade válida para todos os t naquele intervalo.

Embora encontrar uma solução seja difícil, verificar se uma função é uma solução é geralmente simples, basta substituir a função e a suas derivadas na equação e ver se a igualdade se sustenta.

$$y = cos(t) \ \rightarrow \ y'' + y = 0 \ \rightarrow \ y'' = -cos(t) \ \rightarrow \ -cos(t) + cos(t) = 0$$

As três grandes questões do campo

O estudo de equações diferenciais, em sua essência, gira em torno de três perguntas fundamentais:

Existência: Existe alguma solução para a equação dada?

Unicidade: Se uma solução existe, ela é única?

Determinação: Como podemos encontrar a solução? método analítico ou numérico?

1. História

Ao decorrer desse capítulo, temos pequenos trechos que contam a história das equações diferenciais divididos aos poucos nos três tópicos acima. Reuni o conteúdo dos três e os uni em um único tópico geral, que é este aqui.

Parte I: O Alvorecer – O Cálculo e a Descrição do Movimento (Século XVII)

Nossa história começa na efervescência da Revolução Científica. A questão que consumia os maiores intelectos era: como descrever matematicamente o movimento? Como prever a trajetória de um planeta, a queda de uma maçã ou o disparo de um canhão? A resposta exigiu a invenção de uma nova matemática: o Cálculo.

> **Sir Isaac Newton (1643-1727):** Do lado inglês, tínhamos Newton, uma figura monumental e reclusa. Para ele, a matemática era uma ferramenta para entender a física. Em seu esforço para formular suas leis do movimento e da gravitação universal, ele desenvolveu o "método das fluxões" — sua versão do cálculo. Sua obra-prima, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (1687), é talvez o livro científico mais importante já escrito, e está repleto de equações que, em sua essência, são diferenciais. Newton via a derivada como uma "fluxão", ou uma taxa de fluxo, e foi o primeiro a classificar equações de primeira ordem. Curiosamente, ele era extremamente sensível a críticas e demorou décadas para publicar suas descobertas, compartilhando-as apenas com um círculo restrito de amigos.
>
> **Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716):** Do outro lado do Canal da Mancha, na Alemanha, Leibniz, um gênio universal que era filósofo, diplomata e matemático, desenvolveu o cálculo de forma independente. Ao contrário de Newton, Leibniz compreendeu o poder de uma notação clara e poderosa. Devemos a ele os símbolos `dy/dx` e o `∫` para a integral, que tornaram o cálculo acessível e sistemático. Leibniz publicou seu trabalho primeiro, em 1684, o que deu início a uma das mais amargas disputas de prioridade na história da ciência, colocando os matemáticos britânicos

contra os continentais por quase um século. No campo das equações diferenciais, Leibniz foi um pioneiro prático, descobrindo o método da **separação de variáveis** em 1691 e o método para resolver **equações lineares de primeira ordem** em 1694

Os Irmãos Bernoulli: A nova matemática do cálculo precisava de praticantes para testar seus limites, e ninguém fez isso com mais fervor (e rivalidade) do que os irmãos suíços **Jakob e Johann Bernoulli**. Em uma extensa troca de cartas com Leibniz, eles resolveram inúmeros problemas, traduzindo desafios de mecânica em equações diferenciais. 6666 A rivalidade entre eles era lendária. Em 1696, Johann propôs o famoso **problema da braquistócrona**: qual é a forma da curva que permite que um objeto deslize de um ponto a outro no menor tempo possível, sob a ação da gravidade? Ele desafiou os matemáticos da Europa a resolvê-lo. O problema foi resolvido por Leibniz, pelo próprio Johann, por seu irmão Jakob e, anonimamente, por Newton. Conta-se que Newton recebeu o problema no final de um dia cansativo na Casa da Moeda Britânica e o resolveu em uma única noite. Ao ver a solução anônima, Johann Bernoulli teria exclamado:

> *"Tanquam ex ungue leonem"* — "Eu reconheço o leão por sua garra".

Parte II: A Era dos Gigantes – A Consolidação da Análise (Século XVIII)

O século XVIII foi a era em que as ferramentas criadas por Newton e Leibniz foram aprimoradas e aplicadas de forma massiva, principalmente por três figuras dominantes.

Leonhard Euler (1707-1783): Talvez o matemático mais prolífico de todos os tempos, Euler foi um estudante de Johann Bernoulli. 9Ele passou a maior parte de sua carreira nas academias de São Petersburgo e Berlim, e sua produção foi espantosa: mais de 800 livros e artigos. Mesmo após perder a visão de um olho e, mais tarde, ficar quase completamente cego, ele continuou a trabalhar com uma memória e capacidade de cálculo mental fenomenais. Euler sistematizou o campo. Foi ele quem desenvolveu os métodos para resolver **EDOs lineares com coeficientes constantes**, introduziu o conceito de **fator integrante** para equações exatas e aplicou a análise matemática à mecânica de uma forma tão profunda que Lagrange disse: "A primeira grande obra em que a análise é aplicada à ciência do movimento".

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813): Lagrange era um perfeccionista que trouxe uma elegância e rigor inigualáveis à matemática. Sua obra-prima, *Mécanique analytique* (1788), reformulou toda a mecânica de Newton de forma puramente analítica, sem a necessidade de um único diagrama. No campo das EDOs, ele mostrou que a solução geral de uma equação linear de ordem n é uma combinação linear de n soluções independentes e desenvolveu o poderoso método da **variação de parâmetros**.

Pierre-Simon de Laplace (1749-1827): Conhecido como o "Newton da França", Laplace dedicou-se à mecânica celeste, com o objetivo de provar a estabilidade do sistema solar. Seu nome está associado à **equação de Laplace** ($\nabla^2 u = 0$), uma EDP fundamental na física matemática, e à **Transformada de Laplace**, uma ferramenta que ele investigou, mas cuja utilidade para resolver EDOs só seria plenamente apreciada muito mais tarde.

Parte III: Novos Horizontes – Teoria, Complexidade e Caos (Século XIX ao Presente)

No final do século XVIII, muitos dos métodos elementares de solução já eram conhecidos. O século XIX viu uma mudança de foco: em vez de apenas resolver equações, os matemáticos começaram a fazer perguntas mais profundas sobre a natureza das soluções.

Existência e Unicidade: Questões que antes eram assumidas como certas passaram a ser investigadas rigorosamente. Isso levou ao desenvolvimento de uma teoria mais abstrata e poderosa.

Funções Especiais: Muitas equações importantes na física não podiam ser resolvidas em termos de funções elementares. Suas soluções deram origem a um novo zoológico de "funções especiais", como as funções de Bessel, Legendre e Hermite, cada uma nomeada em homenagem aos matemáticos que as estudaram.

O século XX trouxe duas revoluções:

1. **A Revolução Computacional:** Até a Segunda Guerra Mundial, os métodos numéricos eram impraticáveis devido à necessidade de cálculos manuais. Com o advento do computador, problemas antes intratáveis puderam ser explorados numericamente, revelando comportamentos novos e inesperados.
2. **A Descoberta do Caos:** Em 1961, **Edward Lorenz**, um meteorologista do MIT, estava trabalhando com um sistema simples de três equações diferenciais para modelar a convecção atmosférica. Um dia, para economizar tempo, ele reiniciou uma

simulação no meio, inserindo os dados com três casas decimais de precisão, em vez das seis que o computador armazenava. O resultado foi chocante: a nova simulação, que deveria ser quase idêntica, divergiu radicalmente da original após um curto período. Lorenz havia descoberto a **dependência sensível das condições iniciais**, a marca registrada do **caos**. Essa descoberta, popularizada como o "Efeito Borboleta", mostrou que mesmo sistemas determinísticos (sem aleatoriedade) podem se comportar de maneira imprevisível a longo prazo, estabelecendo um limite fundamental à nossa capacidade de previsão.

Referência:

> Equacoes Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno 12th Edition. William E. Boyce; Richard C. DiPrima; Douglas B. Meade