Adrian Zanoschi
Gheorghe Iurea
Gabriel Popa
Petru Răducanu
Ioan Șerdean

Bacalaureat 2024

MATEMATICĂ

M_mate-info

_ Teme recapitulative
_ 65 de teste rezolvate, după modelul M.E.
_ Breviar teoretic

Editura Paralela 45

Cuprins

Clasa a XII-a

Teme recapitulative

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. Se consideră intervalele $A = (-4, 4]$ și $B = (-2, 7)$. Determinați $(A \cap B) \cap \mathbb{Z}$.

2. Ordonați crescător numerele $a = 2{,}5(1)$, $b = \frac{5}{2}$, $c = 2{,}(51)$ și $d = 2{,}51$.

3. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{168} + 4\sqrt{\frac{21}{2}} - 6\sqrt{\frac{14}{3}}\right)\left(\sqrt{4\frac{2}{3}}\right)^{-1}$ este natural.

4. Arătați că numărul $b = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}+\sqrt{9}}$ este natural.

5. Se consideră numerele $a = \sqrt{98} - \sqrt{32} - \sqrt{8}$ și $b = \sqrt{162} + \sqrt{18} + \sqrt{72}$. Calculați media aritmetică și media geometrică ale numerelor a și b.

6. Determinați numerele raționale a și b, știind că $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = a - b\sqrt{3}$.

7. Demonstrați că, dacă $x \in [0, 51]$, atunci numărul $a = \sqrt{x+49} + \sqrt{x+625}$ se află în intervalul $[32, 36]$.

8. Fie $E(x, y) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + \sqrt{y^2 + 6y + 10}$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Arătați că $E(x, y) \geq 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

9. Stabiliți câte numere iraționale conține mulțimea $\left\{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots, \sqrt{199}, \sqrt{200}\right\}$.

10. Calculați:

a) $\left[\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{5}{2}\right]$; b) $\{1{,}64\} - \{-2{,}36\}$;

c) $\left[\sqrt{2}\right] + \left[\sqrt{3}\right] + \left[\sqrt{2}+\sqrt{3}\right]$; d) $\left\{\sqrt{2}\right\} + \left\{\sqrt{3}\right\} - \left\{\sqrt{2}+\sqrt{3}\right\}$.

1.6. Trigonometrie

1. Calculați: a) $\sin\frac{5\pi}{6}$; b) $\cos\frac{7\pi}{4}$; c) $\text{tg}\frac{5\pi}{3}$; d) $\cos\frac{7\pi}{6}$.

2. Calculați: a) $\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$; b) $\cos\frac{117\pi}{4}$; c) $\text{tg}\,\frac{53\pi}{3}$; d) $\text{ctg}\left(\frac{1007\pi}{6}\right)$.

3. Aflați $\cos a$, $\sin b$, $\sin(a+b)$ și $\cos(a-b)$, știind că $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $b \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, $\sin a = \frac{3}{5}$ și $\cos b = \frac{12}{13}$.

4. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos a = -\frac{5}{13}$, calculați $\sin a$, $\sin 2a$ și $\cos 2a$.

5. Fie $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Se cer $\cos x$ și $\sin x$.

6. Dacă $x \in \mathbb{R}$ pentru care $\sin x = \frac{1}{4}$, se cere $\sin 3x$.

7. Fie $x \in \mathbb{R}$, astfel încât $\text{ctg}\, x = 6$. Calculați $\sin^2 x$.

8. Dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, astfel încât $\text{tg}\, t + \text{ctg}\, t = 2$, calculați $\sin 2t$.

9. Fie t și $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin\alpha + t\cos\alpha = 1$.

a) Dacă $t = 1$, calculați $\text{tg}\, 2\alpha$.
b) Dacă $t = -1$, calculați $\sin 2\alpha$.

10. Calculați $\text{tg}\frac{a}{2}$, știind că $\sin a = \frac{4}{5}$ și $a \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

11. Calculați: a) $\sin\frac{\pi}{12}$; b) $\cos 75°$; c) $\text{tg}\, 15°$; d) $\cos\frac{11\pi}{12}$.

12. Calculați $\frac{\sin 75°}{\sin 15°} - \frac{\cos 75°}{\cos 15°}$.

13. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, astfel încât $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Calculați $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$.

14. Fie $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $a - b = \pi$. Arătați că are loc relația $\cos a \cdot \cos b \le 0$.

15. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Calculați $\cos(a-b)$.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. Arătați că:

a) $2\sqrt{14}-\sqrt{\frac{7}{2}}-5\sqrt{\frac{8}{7}}=\frac{1}{\sqrt{14}}$; b) $\sqrt{3}+\sqrt{11-6\sqrt{2}}-\sqrt{5-2\sqrt{6}}=3$;

c) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

2. Se consideră numerele $a=\sqrt{3-\sqrt{3}}$ și $b=\sqrt{3+\sqrt{3}}$. Arătați că $\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\in\mathbb{Q}$.

3. Arătați că numărul $a=\sqrt{17+12\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{6+4\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$.

4. Calculați $\left[\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right]$ ($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x).

5. Aduceți la o formă mai simplă:

a) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}-\sqrt{2}$; b) $\sqrt{6}\cdot\sqrt[3]{18}:\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$;

c) $\sqrt{\sqrt{2}-1}\cdot\sqrt[4]{3+2\sqrt{2}}$; d) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{3}}\cdot\sqrt[3]{9\sqrt{3}}$.

6. a) Aduceți la forma cea mai simplă: $E(x, y)=\sqrt[4]{\frac{x\sqrt[3]{y}}{y^2\sqrt{x}}}:\left(\frac{\sqrt[12]{y}}{\sqrt[8]{x}}\right)^7$, unde $x, y\in(0, +\infty)$.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt[3]{\frac{4\sqrt[4]{27}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[9]{16}}{3\sqrt[12]{3}}}$ este rațional.

7. Se consideră $E(x)=x\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$, unde $x\geq 0$. Calculați $E(a)$, unde $a=\sqrt[11]{8}$.

8. a) Fie $a=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdot\sqrt[16]{2}$ și $b=\sqrt[16]{2}$. Arătați că $a\cdot b$ este număr rațional.

b) Arătați că numărul $a=\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt[6]{7-3\sqrt{5}}\in\mathbb{Q}$.

9. Determinați numărul natural k, dacă $(\sqrt[5]{x^3})^{7-k}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^k=x$, pentru orice $x>0$.

10. Ordonați crescător numerele:

a) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$ și $\sqrt[4]{5}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}}$, $\sqrt[4]{27\sqrt{3}}$ și $\sqrt[3]{4}$.

2.5. Combinatorică

1. Care este cel mai mic număr natural n pentru care $n! > 1000$?

2. a) Arătați că $\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}=\frac{k}{(k+1)!}$, oricare ar fi $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați suma $S=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+...+\frac{99}{100!}$ și arătați că $S < 1$.

3. Calculați: a) $\frac{C_{20}^{10}}{C_{20}^{9}}$; b) $A_5^3-6C_5^3$; c) $A_4^3-A_3^2-C_4^2$.

4. Calculați:

a) $\frac{n!+(n+1)!}{(n+1)!-n!}$, $n \in \mathbb{N}$; b) $\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 6$; c) $\frac{C_n^3}{C_n^3+C_n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

5. Care este cel mai mare element din mulțimea $A=\{C_7^3, C_7^5, C_7^6\}$?

6. Demonstrați că:

a) $C_{2n}^n=2C_{2n-1}^n$, unde $n \in \mathbb{N}^*$; b) $C_{n+1}^4=C_n^4+C_n^3$, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

7. Rezolvați ecuațiile: a) $C_x^2+A_x^2=30$; b) $C_{2x-3}^2=3$;

c) $A_x^5-3A_x^4=21A_x^3$; d) $6\cdot C_x^1+6\cdot C_{x+2}^3=13C_{x+1}^2$; e) $A_{x-2}^2+C_x^2=41$.

8. Rezolvați inecuațiile:

a) $C_x^{x-1}+C_{x-1}^{x-3}\leq 9$; b) $(x+1)!-x!\leq 100$; c) $C_n^3\geq C_n^5$;

d) $C_7^k\geq C_7^{k-1}$; e) $A_{x-1}^5\leq 12A_{x-1}^3$.

***

9. În câte moduri se poate forma un tren, având la dispoziție 6 vagoane?

10. Câte numere de zece cifre distincte încep cu 20 și se termină cu 14?

11. În câte moduri putem împărți 5 cărți la trei copii?

12. Dăm 3 cărți diferite la 5 copii, astfel încât niciun copil să nu primească mai mult de o carte. În câte moduri se poate face împărțirea?

13. Un antrenor are la dispoziție 10 jucători. În câte moduri poate forma o echipă formată din 6 jucători?

14. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Determinați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

15. Într-o clasă sunt 30 de elevi, dintre care 18 fete și 12 băieți. Alcătuim o echipă formată din 6 elevi care să conțină cel puțin 4 fete. În câte moduri putem forma echipa?

16. Aflați numărul diagonalelor unui poligon convex cu 10 laturi.

2.8. Probleme recapitulative din materia claselor a IX-a – a X-a

Varianta 1

1. Arătați că modulul numărului complex $z = 5 - 12i$ este 13.

2. Determinați coordonatele punctelor de intersecție dintre parabola asociată funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 5x + 6$ și axa Ox.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} = 13$.

4. Câte numere de două cifre se divid cu 4 sau cu 5?

5. Scrieți ecuația dreptei ce trece prin $A(1, 2)$ și este paralelă cu dreapta $d: x + y + 1 = 0$.

6. Arătați că $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Varianta 2

1. Arătați că partea imaginară a numărului complex $z = \frac{1}{1+i}$ este $-\frac{1}{2}$.

2. Determinați punctele de pe graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x - 1$ ale căror coordonate au același modul.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\sqrt[3]{x+2} + 2 = 0$.

4. Câte submulțimi ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ conțin numărul 1?

5. Arătați că vectorii $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = -6\vec{i} - 4\vec{j}$ sunt coliniari.

6. În triunghiul ABC avem $AB = 4$, $AC = 6$ și $\sphericalangle A = 120°$. Arătați că $BC = 2\sqrt{19}$.

Varianta 3

1. Demonstrați că numărul $a = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} - \sqrt{2}$ este întreg.

2. Demonstrați că funcția $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, f(x) = x - \frac{1}{x}$ este impară.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $3^{x^2-4x} = \frac{1}{27}$.

4. Câte submulțimi cu trei elemente are mulțimea $\{0, 1, 2, \ldots, 10\}$?

5. Aflați distanța de la punctul $A(1, 3)$ la dreapta $d: x - 2y = 0$.

6. Dacă $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{5}{13}$, calculați tg a.

Clasa a XI-a

3.1. Permutări

1. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. Calculați $\sigma\tau$, $\tau\sigma$, σ^2, τ^{-2}.

2. Fie permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $(\sigma\tau)^{-1}$, σ^{-1}, τ^{-1} și arătați că $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.

3. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_4$. Calculați σ^{2009}.

4. Se consideră permutările $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Determinați $x \in S_3$, știind că $\sigma x \tau = e$.

5. Se consideră următoarele permutări de gradul patru:

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $\sigma^2 = \tau^2 = e$, $\sigma^{-1} = \sigma$, $\tau^{-1} = \tau$ și $\sigma\tau \neq \tau\sigma$.

b) Determinați o permutare $\alpha \in S_4$, astfel încât $\alpha^{-1} \neq \alpha$.

6. Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculați σ^3.

b) Rezolvați ecuația $\sigma^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

7. Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$ și $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$.

a) Calculați $\sigma\tau$ și $\tau\sigma$.

b) Rezolvați ecuația $\sigma x = \tau$.

8. Determinați semnul fiecăreia dintre următoarele permutări:

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

21. Fie matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX\}$.

a) Arătați că $B \in C(A)$.

b) Demonstrați că dacă $X \in C(A)$, atunci există $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

c)* Rezolvați ecuația $X + X^2 = A$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3.3. Determinanți

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Calculați $\det(I_2 + A + A^2 + A^3)$.

2. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Rezolvați ecuația $\det(A - xI_2) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Fie $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Arătați că $\det(X \cdot X^t) = (ad - bc)^2$.

4. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

a) Arătați că $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{pmatrix}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Calculați $\det(A) + \det(A^2) + \ldots + \det(A^{2017})$.

c) Calculați $\det(A + A^2 + \ldots + A^{2017})$.

5. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix} \middle| z, w \in \mathbb{C} \right\}$.

a) Arătați că, dacă $A \in G$, astfel încât $\det A = 0$, atunci $A = O_2$.

b) Demonstrați că, dacă $A, B \in G$ și $A \cdot B = O_2$, atunci $A = O_2$ sau $B = O_2$.

6. Calculați determinanții: $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ și $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

7. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Arătați că:

$\det(A) = (a - b)(a - 1)$ și calculați $\det(A - A^t)$.

3.7. Șiruri

1. Studiați monotonia șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ dacă:

a) $x_n = \dfrac{n+1}{n}$; b) $x_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$;

c) $x_n = \dfrac{2^n}{n!}$; d) $x_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}$.

2. Studiați mărginirea șirului $(x_n)_{n\geq 1}$ al cărui termen general este:

a) $x_n = 1 + (-1)^n$; b) $x_n = \dfrac{2^n + 3^n}{5^n}$;

c) $x_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + ... + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; d) $x_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2}$.

3. Arătați că următoarele șiruri sunt divergente:

a) $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot n}{n+2}$; b) $b_n = \sin\dfrac{n\pi}{2}$;

c) $c_n = n^2 - n$; d) $d_n = 2^n - 3^n$.

4. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri, având termenul general:

a) $a_n = \dfrac{7n+3}{8n-2}$; b) $b_n = \dfrac{n^2 - n + 2}{n+3}$; c) $c_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^3}$;

d) $d_n = \dfrac{(n-1)^2 - (n+1)^2}{2n+1}$; e) $e_n = \dfrac{1+2+...+n}{n^2+2}$; f) $f_n = \left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^3$.

5. Calculați limita șirului cu termenul general a_n în fiecare dintre următoarele situații:

a) $a_n = \dfrac{\sqrt{n} + \sqrt[3]{n}}{n}$; b) $a_n = \dfrac{3\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+7}$; c) $a_n = \dfrac{\sqrt{n+2}}{1+\sqrt[3]{n+1}}$;

d) $a_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$; e) $a_n = \sqrt{3n+1} - \sqrt{2n+3}$; f) $a_n = \sqrt{n^2+1} - n\sqrt{n}$.

6. Calculați limita fiecăruia dintre următoarele șiruri având termenul general:

a) $a_n = \dfrac{\ln n + 3}{\ln n - 2}$; b) $b_n = \ln(n+1) - \ln n$; c) $c_n = \dfrac{\ln(e^n+1)}{n+1}$;

d) $d_n = \dfrac{\ln(4^n+1)}{\ln(2^n+3)}$; e) $l_n = \dfrac{1+\ln n^2}{2+\ln n^3}$; f) $f_n = n - \ln n$.

3.16. Reprezentarea grafică a funcțiilor

1. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axele de coordonate, dacă:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-4x$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{e^x+1}$.

2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=-x^2+5$, $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{4}{x^2}$. Determinați punctele de intersecție a graficelor celor două funcții și rezolvați inecuația $g(x)\le f(x)$.

3. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=3+2x-x^2$; b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=x^3-3x+2$.

4. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{1}{x}$; b) $g:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\{\mathbb{R}\}, g(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

5. Reprezentați grafic funcțiile:

a) $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

b) $f:(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=x\sqrt{x^2-1}$.

6. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x+1)e^x$. Determinați mulțimea valorilor reale ale lui m pentru care ecuația $f(x)=m$ are două soluții reale.

7. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x^2-3)e^x$. Determinați valorile reale ale lui m, știind că graficul funcției f intersectează dreapta de ecuație $y=m$ ($m\in\mathbb{R}$) în exact trei puncte.

8. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Reprezentați grafic funcția f.

b) Câte soluții reale are ecuația $x-2=m\sqrt{x^2+1}$, unde $m\in\mathbb{R}$?

9. Reprezentați grafic funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=xe^{\frac{2}{x}}$.

10. Reprezentați grafic funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

11. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x^3-3x^2+m}{x^2}$, unde $m\in\mathbb{R}$.

a) Determinați m, astfel încât funcția să admită un extrem local în $x=2$.

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2^{x+y}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Calculați $1001 \circ (-1001)$.

b) Rezolvați ecuația $x \circ x^2 = 64$.

c) Demonstrați că, dacă $(x \circ y) \circ z = 2^{z+1}$, atunci $x = -y$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție „$\circ$”, definită prin $x \circ y = x + y + 11$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Găsiți două elemente $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

c) Determinați cel mai mare număr natural n, pentru care $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n < 1000$.

3. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x * y = x^2 - 4xy + 3y^2$.

a) Calculați $300 * 100$.

b) Arătați că $(x * x) * y \geq 0$, oricare ar fi numerele reale x și y.

c) Demonstrați că există o infinitate de numere iraționale a pentru care numărul $a * 1$ este natural.

4. Pe mulțimea numerelor reale definim operația $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, oricare ar fi $x, y, z \in \mathbb{R}$.

b) Calculați $(-1000) \circ (-999) \circ \ldots \circ 1000$.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $x \circ x \circ x \circ x = 12$.

5. Pe mulțimea numerelor reale definim operația „$\circ$” prin $x \circ y = xy + \sqrt{2}(x + y) + 2 - \sqrt{2}$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

a) Demonstrați că $x \circ y = (x+\sqrt{2})(y+\sqrt{2}) - \sqrt{2}$, pentru orice numere reale x și y.

18. În $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{2} \\ \hat{2} & \hat{1} \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$.

a) Calculați A^2 și A^3.
b)* Determinați A^{2002} și A^{2003}.
c) Demonstrați că $A^n \neq I_2$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

19. Fie mulțimea de matrice $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

a) Dați un exemplu de matrice nenulă din mulțimea A care are determinantul egal cu $\hat{0}$.
b) Arătați că există o matrice nenulă $M \in A$, astfel încât $\begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix} \cdot M = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$.
c)* Rezolvați ecuația $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{2} & \hat{1} \\ -\hat{1} & \hat{2} \end{pmatrix}$.

20. Se consideră mulțimea $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & a & \hat{0} \\ b & c & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$.

a) Determinați numărul de elemente din A.
b) Arătați că, pentru orice $X \in A$, $X^2 = I_3$ sau $X^2 = O_3$.
c) Determinați numărul matricelor X din A care au proprietatea că $X^2 = O_3$.

21. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_5)$ se consideră submulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ \hat{2}y & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

a)* Arătați că, dacă $x, y \in \mathbb{Z}_5$ și $x^2 - \hat{2}y^2 = \hat{0}$, atunci $x = y = \hat{0}$.
b) Dacă $A, B \in G$, atunci $A + B \in G$ și $A \cdot B \in G$.
c) Dați exemplu de structură de corp cu 25 de elemente.

4.4. Polinoame

1. Determinați polinomul f de gradul trei, cu coeficienți reali, pentru care $f(1 + i) = -1 + 2i$ și $f(i) = 1 - i$.

2. Se consideră polinomul $f = (X + 1)^{10} + (X - 1)^{10}$, cu forma algebrică $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{10}X^{10}$.

a) Determinați suma coeficienților polinomului f.

b) Calculați $f(i)$ și deduceți că $a_0 + a_4 + a_8 = a_2 + a_6 + a_{10}$.
c) Determinați coeficienții polinomului f.

3. Determinați gradele polinoamelor $f + g$ și fg în fiecare dintre cazurile:
a) $f = X^3 + X + 1$, $g = -X^3 - X - 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = \hat{2}X^2 + \hat{3}X + \hat{1}$, $g = \hat{2}X^2 + X + \hat{2}$, $f, g \in \mathbb{Z}_4[X]$.

4*. Determinați polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ cu $\text{grad}(f) = 1$, $\text{grad}(g) = 2$, în fiecare din următoarele cazuri:
a) $f \cdot g = X^3 - X^2 - 5X + 2$; b) $g(f(X)) = X^2$.

5*. Arătați că polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$ este element inversabil în inelul $(\mathbb{C}[X], +, \cdot)$ dacă și numai dacă f este constantă nenulă.

6. Se consideră polinomul $f = \hat{4}X + \hat{1} \in \mathbb{Z}_8[X]$. Calculați f^2 și deduceți că polinomul f este element inversabil al lui $(\mathbb{Z}_8[X], +, \cdot)$.

7. Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin polinomul g în fiecare dintre următoarele cazuri:
a) $f = X^5 + 2X^3 - 3X + 2$, $g = X^2 + X + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
b) $f = 2X^4 - 2X^3 - 5X^2 - X$, $g = 2X^2 + 1$, $f, g \in \mathbb{R}[X]$;
c) $f = X^3 + X^2 + \hat{2}X + \hat{1}$, $g = \hat{3}X^2 + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_5[X]$;
d) $f = X^5 - 2X^3 + X - 3$, $g = X^2 - 2$, $f, g \in \mathbb{Z}[X]$;
e) $f = X^4 - (2 + i)X^2 + X - i$, $g = X + i$, $f, g \in \mathbb{C}[X]$;
f) $f = X^3 + X^2 + X + \hat{2}$, $g = X + \hat{1}$, $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$.

8. Determinați numerele reale a și b, știind că polinomul $f = X^3 + aX + b$ dă restul 2 la împărțirea prin $X - 1$ și restul -4 la împărțirea prin $X + 1$.

9. Împărțind polinomul f prin $X - 1$ obținem restul 2, iar la împărțirea prin $X + 1$ obținem restul -4. Aflați restul împărțirii lui f prin $X^2 - 1$.

10. Se consideră polinomul $f = (1 + X + X^2)^{1004}$, cu forma algebrică:
$f = a_0 + a_1X + \ldots + a_{2008}X^{2008}$.
a) Calculați $f(-1)$.
b) Arătați că $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}$ este număr întreg impar.
c) Determinați restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

11. Determinați polinomul $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ care prin împărțire la $X^2 - 3X + 1$, dă restul $2X + 1$, iar prin împărțire la $X^2 - 1$ dă restul $-2X + 2$.

4.9. Proprietăți ale integralei Riemann

1. Demonstrați că:

a) $-1 \leq \int_0^1 \sin(x^2+x+1)\,dx \leq 1$; b) $1 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e$.

2. Demonstrați că:

a) $1 \leq \int_1^2 \sqrt{x^2-x+1}\,dx \leq \sqrt{3}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \int_0^1 \sqrt{x^2-x+1}\,dx \leq 1$.

3. Fie $f: [0, 1] \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$. Arătați că $1 \leq \int_0^1 f(x)dx \leq e-1$.

4. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$ se consideră $I_n = \int_e^{e^2} \frac{\ln^n x}{x}dx$. Folosind faptul că $1 \leq \ln x \leq 2$, oricare ar fi $x \in [e, e^2]$, demonstrați că $1 \leq \frac{2^{n+1}-1}{n+1} \leq 2^n$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

5. Se consideră funcția $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x+1}$. Arătați că, dacă $a > 0$, atunci $\frac{1}{a+2} \leq \int_a^{a+1} f(x)dx \leq \frac{1}{a+1}$.

6. Fie funcția $f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$. Arătați că $\int_1^x f(t)dt \leq \frac{x-1}{6}$, oricare ar fi $x \in [1, +\infty)$.

7. a) Arătați că $2^x - x\ln 2 - 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $\int_0^1 2^{x^2}\,dx \geq 1 + \frac{\ln 2}{3}$.

8. a) Arătați că $e^x \geq x + 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b)* Arătați că $\frac{1}{e} \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \frac{\pi}{4}$.

9*. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$. Stabiliți semnul funcției, apoi demonstrați că $\int_0^1 \cos x^2 dx \geq \frac{9}{10}$.

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

Testul 1

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Calculați $\left[\sqrt{2022}\right]-4\cdot\left\{-\frac{1}{4}\right\}$ ($[x]$ = partea întreagă a numărului real x, $\{x\}$ = = partea fracționară a numărului real x).

(5p) **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{1+2^x}$. Calculați $S=f(-2)+f(-1)+$ $+f(0)+f(1)+f(2)$.

(5p) **3.** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x-\sqrt{x-1}=3$.

(5p) **4.** Determinați numărul elementelor mulțimii A, știind că are exact 11 submulțimi cu cel mult două elemente.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $3x+y-1=0$. Arătați că punctele $A(2, 5)$ și $B(-4, 3)$ sunt simetrice față de dreapta d.

(5p) **6.** Arătați că $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=2$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 0 & -3\\ 2 & a & 1\end{pmatrix}$, unde a este un număr real.

(5p) a) Verificați că $\det(A(a))=a+5$.

(5p) b) Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât inversa matricei $A(a)$ să fie matricea $B=$ $=\begin{pmatrix}-12 & -7 & 3\\ -5 & -3 & 1\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

(5p) c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$, știind că $X\cdot A(-4)=C$, unde C este matricea $(-1\quad 0\quad 1)$.

2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = z_1 + z_2 + \dfrac{\overline{z_1 + z_2}}{2}$, pentru orice $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

(5p) a) Verificați dacă $(1 + i) * (1 - i) = 3$.

(5p) b) Demonstrați că mulțimea $M = \{x + i \mid x \in \mathbb{R}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{C}$ față de legea „$*$”.

(5p) c) Arătați că pentru o infinitate de numere complexe z, $(-2 + 3i) * z$ este număr real.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{f(x+1)}$.

(5p) b) Arătați că f are un singur punct de extrem.

(5p) c) Demonstrați că dreapta $y = (e - 1)x$ este tangentă graficului funcției f.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - \dfrac{\ln x}{x}$.

(5p) a) Verificați că $\int_1^2 \left(f(x) + \dfrac{\ln x}{x} \right) dx = \dfrac{7}{3}$.

(5p) b) Determinați $a \in (1, \infty)$, știind că $\int_1^a \left(x^2 - f(x) \right) dx = \dfrac{1}{2}$.

(5p) c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f pe $(0, 1)$ este strict monotonă.

Testul 2

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Arătați că numerele $\log_3 8$, $\sqrt{6}$, $\log_{\sqrt{2}} 3$ sunt în progresie geometrică.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Determinați semnul produsului $P = f(\sqrt{2}) \cdot f(\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{5})$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} - 2^x = \sqrt{2}(2^{x+1} - 1)$.

(5p) **4.** Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $C_7^{x-1} \geq 2C_7^x$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$, $B(8, 1)$ și $C(0, 1)$. Arătați că punctul $H(2, 5)$ este ortocentrul triunghiului ABC.

(5p) **6.** Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin x \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) = \cos x \cdot \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} ax - y - z = -4 \\ 2x + ay + 4z = 25 \\ x + y + 3z = 18 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$ și A matricea sistemului.

(5p) a) Arătați că $\det A = 3a^2 - 3a$.

(5p) b) Determinați $a \in \mathbb{R}$, dacă sistemul are soluție unică.

(5p) c) Pentru $a = 1$ determinați numărul soluțiilor (x_0, y_0, z_0) ale sistemului cu x_0, y_0, z_0 numere naturale.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea $x * y = 2x + 2y - \frac{xy}{2} - 4$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Arătați că $x * y = 4 - \frac{1}{2}(x-4)(y-4)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Arătați că $e = 2$ este elementul neutru al legii date.

(5p) c) Stabiliți dacă $(\mathbb{R}, *)$ are o structură de grup.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1 - \ln(x+1)$.

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x}$.

(5p) b) Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției sunt secante.

(5p) c) Arătați că graficul funcției f nu intersectează axa Ox.

2. Se consideră funcția $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x}{x+1}$.

(5p) a) Arătați că $\int_0^1 \frac{xe^x}{f(x)} dx = \frac{5}{6}$.

(5p) b) Calculați $\int_1^2 \left(f(x) - \frac{e^x}{(x+1)^2} \right) dx$.

(5p) c) Demonstrați că $\int_1^3 f(x) dx \geq e \ln 2$.

Testul 9

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Se consideră numărul complex $z=\frac{1-i}{1+i}$. Arătați că z^{12} este număr real.

(5p) **2.** Aflați numărul real m pentru care graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+mx+4$ intersectează axa Ox în două puncte distincte.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg^2 x-3\lg x+2=0$.

(5p) **4.** Fie x un număr real nenul. Determinați rangul termenului, din dezvoltarea binomului $\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$, care îl conține pe x^4.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\overrightarrow{AB}=4\vec{i}+3\vec{j}$ și $\overrightarrow{BC}=\vec{i}-\vec{j}$. Determinați numărul real m, știind că $\overrightarrow{AC}=(m+1)\vec{i}+(m-2)\vec{j}$.

(5p) **6.** Arătați că $\sin\frac{\pi}{12}\cdot\sin\frac{5\pi}{12}=\frac{1}{4}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m,n)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&m&m^2\\1&n&n^2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\x+my+m^2z=m^3\\x+ny+n^2z=n^3\end{cases}$, unde m și n sunt numere reale.

(5p) a) Arătați că $\det(A(m,n))=(m-1)(n-1)(n-m)$.

(5p) b) Rezolvați sistemul, dacă $m\neq 1, n\neq 1$ și $m\neq n$.

(5p) c)* Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (–1, 1, 1), atunci cel puțin două dintre numerele 1, m, n sunt egale.

2. Fie x_1, x_2, x_3 rădăcinile complexe ale polinomului $f=X^3-3X^2+mX+n$, unde m și n sunt numere reale.

(5p) a) Arătați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2=9-2m$.

(5p) b) Determinați m și n, știind că $x_1=x_2=x_3$.

(5p) c) Pentru $m=1$ și $n=-3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{C}[X]$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x + m)e^x$, unde m este un parametru real.

(5p) a) Determinați m, știind că $f'(0) = 4$.

(5p) b) Demonstrați că, pentru $m = 2$, funcția f este strict crescătoare.

(5p) c) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ și numărul $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{f(x)} dx$, unde n este un număr natural nenul.

(5p) a) Calculați $\int_0^1 2xf(x)dx$.

(5p) b) Calculați $\int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx$.

(5p) c) Demonstrați că $nI_n = \sqrt{2} - (n-1)I_{n-2}$, pentru orice număr natural n, $n \geq 3$.

Testul 10

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Arătați că numărul $a = \log_7 1001 - \log_7 143 + \sqrt[3]{27}$ este pătratul unui număr natural.

(5p) **2.** Dacă g este inversa funcției de gradul întâi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$, calculați $g(21)$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $|2x-1| = |x+7|$.

(5p) **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr oarecare de trei cifre, produsul cifrelor acestuia să fie număr impar.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră vectorii $\vec{u} = 6\vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 8\vec{i} + 48\vec{j}$. Determinați măsura, în radiani, a unghiului format de vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$.

(5p) **6.** Demonstrați că, dacă ctg $x = 2$, ctg $y = 3$ și $x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $x + y = \frac{\pi}{4}$.

Testul 28

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Fie $(a_n)_{n \geq 1}$, o progresie aritmetică astfel încât $a_3 = 3$ și $a_7 = 15$. Calculați $a_1 + a_9$.

(5p) **2.** Determinați numărul real m pentru care punctul $A(m, 2)$ aparține graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 3$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{5-x} = 3x - 1$.

(5p) **4.** Într-o clasă sunt 12 elevi, dintre care 5 sunt fete. Aflați în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(5, 6)$ și $C(-1, 1)$. Determinați ecuația înălțimii duse din vârful C în triunghiul ABC.

(5p) **6.** Calculați $\cos 70° + \cos 110°$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = 3 \\ mx + y + z = 4m + 1 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Arătați că $\det A(m) = 5 - m$.

(5p) b) Arătați că pentru $m = 5$ sistemul nu are soluție.

(5p) c) Determinați numerele naturale m, știind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) formată din numere naturale.

2. Pe mulțimea numerelor reale definim legea $x * y = 6x + 6y - 2xy - 15$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Arătați că $e = \frac{5}{2}$ este elementul neutru al legii date.

(5p) b) Verificați că legea „$*$” este asociativă.

(5p) c) Rezolvați ecuația $x * x * x = x$, $x \in \mathbb{R}$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcțiile $f, g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - x \ln x$ și $g(x) = \frac{\ln x}{x-1}$.

(5p) a) Arătați că $f(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.
(5p) b) Demonstrați că funcția g este strict descrescătoare.
(5p) c) Arătați că $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}-1} > (\sqrt{3})^{\sqrt{2}-1}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n se consideră numărul $I_n = \int_1^e \ln^n x dx$.
(5p) a) Calculați I_1.
(5p) b) Demonstrați că $I_n = e - nI_{n-1}$, pentru orice număr natural $n \geq 2$.
(5p) c) Arătați că $I_3 = 6 - 2e$.

Testul 29

Subiectul I (30 de puncte)

(5p) **1.** Calculați suma primilor cinci termeni ai unei progresii geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = 1$ și $b_2 = -2$.
(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x$. Calculați $(f \circ f)(2)$.
(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+2} - 2^{x-1} = 28$.
(5p) **4.** Se dă dezvoltarea $\left(2\sqrt{x} + \dfrac{3}{x}\right)^6$, $x > 0$. Determinați termenul independent de x.
(5p) **5.** Se consideră un triunghi ABC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{BM} = 2\overrightarrow{MC}$. Determinați numerele reale x, y, știind că $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.
(5p) **6.** Fie $a \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\sin a = -\dfrac{4}{5}$. Calculați $\operatorname{tg}\dfrac{a}{2}$.

Subiectul al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f_A : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f_A(X) = AXA^{-1}$, unde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ și A este inversabilă.
(5p) a) Calculați $f_A(I_2)$.
(5p) b) Arătați că f_A este o funcție bijectivă.
(5p) c) Arătați că $f_A(X \cdot Y) = f_A(X) \cdot f_A(Y)$, pentru orice $X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 - 3X^2 + 2X + 3 \in \mathbb{R}[X]$, având rădăcinile complexe x_1, x_2, x_3, x_4.
(5p) a) Determinați restul împărțirii lui f prin polinomul $X - 3$.
(5p) b) Arătați că f nu are rădăcini raționale.
(5p) c) Arătați că $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3 + 3\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{x_3} + \dfrac{1}{x_4}\right) = -8$.

Testul 41

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Scrieți sub formă trigonometrică numărul complex $z = -2i$.

(5p) **2.** Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = X^2 - 4X + 5$. Comparați numerele $f(\sqrt{2})$ și $f(\sqrt{3})$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_x (x + 2) = 2$.

(5p) **4.** Stabiliți câte numere naturale de trei cifre se pot forma folosind cifre din mulțimea $\{0, 1, 2, 3\}$.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$ și $B(-3, 2)$. Determinați coordonatele simetricului punctului B față de punctul A.

(5p) **6.** În triunghiul ABC avem: $AB = 6$, $AC = 8$ și $\sphericalangle BAC = 120°$. Calculați lungimea laturii BC.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ m & -1 & 1 \\ x & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(5p) a) Dacă $m = 2$, arătați că $\det A(x) = x^2 + 3x + 2$.

(5p) b) Dacă $m = 2$, demonstrați că există valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(x)$ nu este inversabilă.

(5p) c) Demonstrați că, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, există valori ale lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care matricea $A(x)$ nu este inversabilă.

2. Se consideră inelul $(\mathbb{Z}_8, +, \cdot)$.

(5p) a) Arătați că elementele inversabile ale acestui inel sunt $\hat{1}, \hat{3}, \hat{5}$ și $\hat{7}$.

(5p) b) Dacă $a \in \mathbb{Z}_8$ este element inversabil, arătați că ecuația $\hat{2}x = a$ nu are soluții în $\mathbb{Z}_8$.

(5p) c) Dacă $b \in \mathbb{Z}_8$ este element neinversabil, arătați că ecuația $\hat{2}x = b$ are exact două soluții $x \in \mathbb{Z}_8$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x$.

(5p) a) Calculați $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(5p) b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

(5p) c) Demonstrați că $\sqrt[100]{e} > \dfrac{101}{100}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

(5p) a) Calculați $\int_0^1 f^2(x)dx$.

(5p) b) Calculați $\int_0^1 xf(x)dx$.

(5p) c)* Fie Γ suprafața cuprinsă între graficul funcției f, asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f și dreptele cu ecuațiile $x = 0$ și $x = 1$. Determinați aria suprafeței Γ.

Testul 42

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Arătați că numărul $a = \log_3 2 - \log_9 4$ este întreg.

(5p) **2.** Arătați că, pentru orice număr real m, parabola $y = x^2 + mx - m^2 - 1$ intersectează axa Ox în două puncte.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x + 2^{2-x} = 5$.

(5p) **4.** Aflați câte numere naturale de trei cifre au suma cifrelor egală cu 25.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(1, 2)$ și dreapta d: $y = x - 1$. Calculați distanța de la punctul A la dreapta d.

(5p) **6.** Triunghiul ABC are lungimile laturilor $AB = 9$, $BC = 10$ și $CA = 11$. Calculați aria triunghiului.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1 & 1-x \\ 0 & -1 & 0 \\ 1-x & 1 & x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$.

(5p) a) Arătați că $\det A(2) = -3$.

(5p) b) Determinați $x \in \mathbb{R}$, dacă $A(x) \cdot A(1 - x) = A(0) \cdot A(1)$.

(5p) c) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $A(x)$ este inversabilă și inversa are toate elementele numere întregi.

2. Se consideră polinomul $f = 6X^4 - X^3 - X + 6 \in \mathbb{R}[X]$.

(5p) a) Arătați că polinomul $g = 3X^2 + 4X + 3$ divide polinomul f.

(5p) b) Demonstrați că polinomul f nu are rădăcini reale.

(5p) c) Arătați că toate rădăcinile polinomului f au modulele egale cu 1.

Testul 58

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Dacă $z = -4 + i$, calculați modulul numărului $\bar{z} - 2z$.

(5p) **2.** Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficelor funcțiilor $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2x + 2, g(x) = x + 2$.

(5p) **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4} = \sqrt{8^x}$.

(5p) **4.** Fie mulțimea $A = \{0, 2, 4, 6, 7, 9\}$. Câte submulțimi ale mulțimii A au trei elemente și conțin cel puțin un număr impar?

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 4)$ și $B(4, 2)$. Calculați distanța de la punctul O la dreapta AB.

(5p) **6.** Demonstrați că $\frac{1+\sin 2x}{1+\cos 2x} = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tg} x)^2$, pentru orice număr real x, $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Subiectul al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ 3x + y + mz = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & m \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(5p) a) Arătați că $\det(A) = -5m - 10$.

(5p) b) Determinați numărul real m, dacă sistemul are soluție unică.

(5p) c) Pentru $m = -2$, determinați soluția (x_0, y_0, z_0) a sistemului, știind că $x_0 + 2y_0 + 3z_0 = 20$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 2x + 3y$.

(5p) a) Arătați că legea $*$ nu este asociativă.

(5p) b) Determinați numerele reale x pentru care $(x + 1) * x = 1$.

(5p) c)* Arătați că există numerele $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ astfel încât $a * b \in \mathbb{N}$.

Subiectul al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^3-3x^2+4$.

(5p) a) Calculați $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}$.

(5p) b) Determinați punctele de extrem local ale funcției f.

(5p) c) Comparați numerele $a=f\left(\dfrac{11}{12}\right)$ și $b=f\left(\dfrac{12}{13}\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

(5p) a) Arătați că $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{f^2(x)}dx=\frac{3}{2}$.

(5p) b) Calculați aria cuprinsă între graficul funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$ și axa Ox.

(5p) c) Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}, g(x)=f(x)$.

Testul 59

Subiectul I **(30 de puncte)**

(5p) **1.** Verificați dacă numărul $a=\lg\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\lg\left(1-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\lg\left(1-\dfrac{1}{10}\right)$ este întreg.

(5p) **2.** Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+x+m=0\}$ și $B=\{x\in\mathbb{R}\mid x^2+mx+1=0\}$. Determinați $m\in\mathbb{R}$ dacă $A\cap B=\{1\}$.

(5p) **3.** Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, cu $AB=4$ și $\measuredangle C=30°$. Dacă M este mijlocul laturii BC, calculați $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}$.

(5p) **4.** Notăm cu F mulțimea funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3,4,5\}$. Determinați probabilitatea ca alegând o funcție f din F aceasta să fie injectivă.

(5p) **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(2,-3)$ și dreapta d de ecuație $2x-3y+4=0$. Determinați ecuația perpendicularei din A pe dreapta d.

(5p) **6.** Dacă $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ și $\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x=2$, calculați $\operatorname{tg}2x$.

Soluții

Clasa a IX-a

1.1. Mulțimi și elemente de logică matematică

1. $\{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. **2.** $b < d < a < c$. **3.** $a = 6 \in \mathbb{N}$. **4.** $b = 2 \in \mathbb{N}$. **5.** $a = \sqrt{2},\ b = 18\sqrt{2},\ m_a = \frac{19\sqrt{2}}{2},\ m_g = 6$. **6.** $a = 8$, $b = -4$. **7.** $\sqrt{x+49} \in [7, 10]$, $\sqrt{x+625} \in [25, 26] \Rightarrow a \in [32, 36]$, $\forall\ x \in [0, 51]$. **8.** $E(x,y) = \sqrt{(x-1)^2+4} + \sqrt{(y+3)^2+1} \geq \sqrt{4} + \sqrt{1} = 3$, $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$. **9.** 186. **10.** a) –2; b) 0; c) 5; d) 1. **11.** a) $x \in \{-3, 7\}$; b) $x \in \{-3, 5\}$; c) $x \in \{-1, 5\}$; d) $x = -1$. **12.** a) $x \in [-1, 2]$; b) $x \in (-\infty, -7] \cup [1, +\infty)$. **13.** 100. **14.** $E(x) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **15.** $|2x - 3| + 2|x - 1| = |2x - 3| + |2x - 2| = |2x - 3| + |2 - 2x| \geq |2x - 3 + 2 - 2x| = 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **16.** $x^2 + 3x + 3 = \left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **17.** b) $E(x) = (x^2 + 1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) > \frac{3}{4}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. **18.** $xy - 2x - 2y + 6 = (x - 2)(y - 2) + 2 \in [2, +\infty)$, $\forall\ x, y \in [2, +\infty)$. **21.** Fie $P(n) = 13^n + 7^n - 2 \vdots 6$, unde $n \in \mathbb{N}$. Pentru $n = 0$ avem $13^0 + 7^0 - 2 \vdots 6$, deci $P(0)$ este adevărată. Presupunem că $P(k)$ este adevărată pentru un număr natural k; atunci $13^k + 7^k - 2 = 6p$, cu $p \in \mathbb{N}$. Rezultă că $13^{k+1} + 7^{k+1} - 2 = 13 \cdot 13^k + 7^{k+1} - 2 = 13(6p + 2 - 7^k) + 7 \cdot 7^k - 2 = 6 \cdot 13p - 6 \cdot 7^k + 24 = 6(13p - 7^k + 4) \vdots 6$, deci P($k$ + 1) este adevărată, drept urmare, $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. **22.** 6. **23.** 192. **24.** 60. **25.** 243. **26.** 171. **27.** 16. **28.** a) 8; b) 25; c) 50.

1.2. Progresii

1. $a_1 = 5$. **2.** $a_1 = -1$. **3.** Fie r rația progresiei; atunci $a_1 + 2r = 5$ și $a_1 + 4r = 9$. Rezultă $a_1 = 1$ și $r = 2$. Prin urmare, $S_7 = \frac{(a_1 + a_7)7}{2} = 49$. **4.** 2007 este al 402-lea termen al progresiei. **5.** $x = 6$. **6.** Este suma primilor 11 termeni ai unei progresii aritmetice cu primul termen 1 și rația 3; avem că $S_{11} = \frac{(1+31)\cdot 11}{2} = 176$. **7.** Termenii sumei formează o progresie aritmetică în care $a_1 = 1$, $r = 4$. Dacă notăm cu m numărul de termeni, atunci $n = a_m = a_1 + r(m - 1)$, deci $n = 4m - 3$. Astfel, $231 = S_m = \frac{m(4m-2)}{2} = 2m^2 - m$ și cum $m \in \mathbb{N}^*$, obținem că $m = 11$, apoi $n = 41$. **8.** $a_{n+1} - a_n = 3$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$, deci (a_n) este progresie aritmetică de rație $r = 3$ și $a_1 = 1$. Apoi

29. Cum sin B = 1, rezultă că $\sphericalangle B = 90°$. Avem că sin $A = \frac{BC}{AC}$, deci $AC = 8$. Aria triunghiului ABC este egală cu $8\sqrt{3}$. **30.** $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin\sphericalangle BAD = 24\sqrt{2}$. **31.** a) Cum $A + B = \pi - C$, rezultă că $\frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \cdot \text{tg } B} = -\text{ tg } C$, deci tg A + tg B + tg C = tg A · tg B · tg C; b) tg$(A + B)$ = $= \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \cdot \text{tg } B} = -1$, deci $A + B = 135°$. Rezultă că tg C = 1. Altfel: Folosind relația de la a), obținem că tg C = 1, deci $C = 45°$.

Clasa a X-a

2.1. Radicali și logaritmi

1. b) Observăm că $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2}$ și $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$; c) Se ridică la pătrat în ambii membri. **2.** Avem: $\frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{6}} + \frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right) = 1 \in \mathbb{Q}$. **3.** $a = 2$. **4.** Se arată că $-4 < \sqrt{2} - 3\sqrt{3} < -3$, deci $\left[\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right] = -4$. **5.** a) 0; b) 6; c) 1; d) 27. **6.** a) $E = \frac{x}{y}$; b) $a = \frac{2}{3}$.
7. Cum $E(x) = x^{\frac{11}{6}}$ și $a = 2^{\frac{3}{11}}$, rezultă $E(a) = \sqrt{2}$. **8.** a) $a = \sqrt[16]{2^{15}}$, deci $a \cdot b = 2$; b) $a = 2$.
9. $k = 2$. **10.** a) Aducând radicalii la ordin comun rezultă $\sqrt{2} < \sqrt[4]{5} < \sqrt[3]{4}$; b) $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} < \sqrt[3]{4} <$ $< \sqrt[4]{27\sqrt{3}}$. **11.** a) Avem: $a^2 = 9 + 2\sqrt{14}$ și $b^2 = 9 + + 2\sqrt{18}$, deci $a < b$; b) Cum $a = \frac{1}{\sqrt{13} + \sqrt{12}}$ și $b = \frac{1}{\sqrt{12} + \sqrt{11}}$, rezultă $a < b$. **12.** Aducem la același ordin, deci $a > b$. **13.** a) $\frac{7}{2}$; b) -3; c) $\frac{7}{3}$; d) $\frac{13}{6}$; e) $\frac{1}{2}$. **14.** $c < a < b$. **15.** a) $a = 1$; b) $b = -1$. **16.** a) 2; b) -24; c) 3; d) 1. **17.** a) 3; b) 2.
18. a) 2; b) 0; c) 0. **19.** a) $a = \frac{1}{2}$; b) Fie $\log_2 3 = x$; atunci $a = (3 + x) \cdot (5 + x) - (6 + x)(2 + x) =$ $= 3 \in \mathbb{Q}$; c) -3. **20.** $a = 3$. **21.** a) $\log_3 5$; b) 2; c) $\log_{0,3} 2$; d) -1; e) $\log_3 5$. **22.** a) Cum $1 < 2 < 3$, rezultă $0 < \log_3 2 < 1$; b) Cum $3 < 4 < \sqrt{27}$, rezultă $1 < \log_3 4 < \frac{3}{2}$; c) Se arată că $\log_3 4 < \frac{3}{2} <$ $< \log_4 9$, deci $\log_3 4 < \log_4 9$. **23.** a) Inegalitatea este echivalentă cu $2\sqrt{2} < 3 < 4$; b) Folosind a), avem $a > 2$ și $a < 2 + \frac{2}{3}$, deci $[a] = 2$. **24.** $\log_{12} 18 = \frac{2 + \log_3 2}{1 + 2\log_3 2} = \frac{2 + a}{1 + 2a}$. **25.** Din $\log_{40} 100 = a$

Clasa a XII-a

4.1. Legi de compoziție

1. a) 1; b) Ecuația este $2^{x+x^2} = 2^6$, adică $x^2 + x - 6 = 0$ și de aici $x = 2$ sau $x = -3$; c) Avem că $(x \circ y) \circ z = 2^{2^{x+y}+z}$; din $2^{2^{x+y}+z} = 2^{z+1}$, rezultă că $2^{x+y} = 1$, deci $x + y = 0$. **2.** b) $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$; c) Prin inducție, $x_1 \circ x_2 \circ \ldots \circ x_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n + (n-1) \cdot 11$, $\forall\, x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ și $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că $1 \circ 2 \circ \ldots \circ n = \frac{n(n+1)}{2} + 11(n-1) < 1000$. Cum n este maxim, atunci $n = 34$. **3.** a) 0; b) Cum $x * x = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că $(x * x) * y = 3y^2 \geq 0$, $\forall\, y \in \mathbb{R}$; c) Avem $a * 1 = a^2 - 4a + 3 = (a-2)^2 - 1$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $n + 1$ nu este pătrat perfect, luăm $a = 2 + \sqrt{n+1}$. Astfel, găsim o infinitate de valori ale lui $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, pentru care $a * 1 = n \in \mathbb{N}$. **4.** a) Folosind faptul că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, avem că $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z = (x+4)(y+4)(z+4) - 4$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$; b) Observăm că $x \circ (-4) = (-4) \circ y = -4$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$ (numărul -4 este element absorbant pentru operația „$\circ$"). Atunci $(-1000) \circ (-999) \circ \ldots \circ 1000 = [(-1000) \circ \ldots \circ (-5)] \circ (-4) \circ [(-3) \circ \ldots \circ 1000] = x \circ (-4) \circ y = -4 \circ y = -4$; c) Ecuația se scrie sub forma $(x+4)^4 - 4 = 12$. Cum $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $(x+4)^2 = 4$, cu soluțiile $x_1 = -2$ sau $x_2 = -6$. **5.** b) Dacă $x, y \in I$, atunci $x + \sqrt{2} > 0$ și $y + \sqrt{2} > 0$, deci $x \circ y > -\sqrt{2}$, adică $x \circ y \in I$; c) Observăm că operația este asociativă. Atunci $\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{13}}\right) = \left[\left(-\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{1}}\right) \circ \ldots \circ \left(-\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{9}}\right)\right] \circ \left(-\sqrt{2}\right) \circ \left[\left(-\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{11}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{12}}\right) \circ \left(-\frac{\sqrt{23}}{\sqrt{13}}\right)\right] = \left[a \circ \left(-\sqrt{2}\right)\right] \circ b = \left(-\sqrt{2}\right) \circ b = -\sqrt{2}$.

6. a) $(x+i)(y+i) - i = xy + ix + iy - 1 - i = x \circ y$; b) Demonstrăm inductiv, folosind a); c) Ecuația este $(x+i)^4 - i = 1 - i$, deci $(x+i)^4 = 1$, de unde $x + i \in \{-1, 1, i, -i\}$, adică $x \in \{-1-i, 1-i, 0, -2i\}$. **7.** a) $x \circ y = (x-4)(y-4) = y \circ x$; b) De exemplu, observăm că $2 \circ (3 \circ 4) = 8$, însă $(2 \circ 3) \circ 4 = 0$; c) Avem $(m-4)(n-4) = 7$, cu soluțiile $(m, n) \in \{(5, 11); (11, 5); (3, -3); (-3, 3)\}$. **8.** a) $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z) = \sqrt[3]{x^3 + y^3 + z^3}$, $\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$; b) $e = 0$; c) $x_1 = x_0\sqrt[3]{2}$, $x_2 = x_0\sqrt[3]{3}$, $x_3 = x_0\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. **9.** b) $e = \frac{7}{2}$; c) Se demonstrează prin inducție matematică. **10.** a) Pentru orice $x, y \in (-\infty, 0)$, avem că $x * y \in (-\infty, 0)$, deci $*$ este lege de compoziție pe G; c) Fie $e \in G$ un eventual element neutru; atunci $\frac{xe}{x+e} = x$, $\forall\, x \in G$, sau încă $xe = x^2 + xe$, $\forall\, x \in G$, fals. Rezultă că legea nu are element neutru. **11.** a) Observăm că $x \circ y = e^{3\ln x \ln y} > 0$,

Teste pentru Bacalaureat, după modelul M.E.

• Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

Testul 1

I. 1. 41. **2.** 5. **3.** $x = 2$. **4.** 4 elemente. **5.** $AB \perp d$ și mijlocul $M(-1, 4) \in d$. **6.** $\text{ctg}\frac{\pi}{8} - \text{tg}\frac{\pi}{8} = \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{8} - \sin^2\frac{\pi}{8}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{2\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2$. **II. 1.** b) $A^{-1}(a) = B \Leftrightarrow A(a) \cdot B = I_3$. Rezultă $a = -4$; c) $X = C(A(-4))^{-1} = CB = \begin{pmatrix}16 & 9 & -4\end{pmatrix}$. **2.** b) Dacă $x + i$ și $y + i \in M$, atunci $(x + i) * (y + i) = \dfrac{3(x+y)}{2} + i \in M$; c) $z = a - 3i$, $a \in \mathbb{R}$. **III. 1.** a) $\dfrac{1}{e}$; b) $A(0, 1)$ este punct de minim; c) Dreapta este tangentă graficului funcției f în punctul $M(1, e - 1)$. **2.** b) $\int_1^a \left(x^2 - f(x)\right)dx = \int_1^a \dfrac{\ln x}{x}dx = \dfrac{1}{2}\ln^2 a = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = e$; c) Fie F o primitivă a lui f pe $(0, 1)$. Cum $F'(x) = f(x) > 0$ (deoarece $\ln x < 0$), rezultă că F este strict crescătoare pe $(0, 1)$.

Testul 2

I. 1. $\log_3 8 \cdot \log_{\sqrt{2}} 3 = 3\log_3 2 \cdot 2\log_2 3 = 6 = (\sqrt{6})^2$. **2.** $f(\sqrt{2}) < 0$; $f(\sqrt{3}) < 0$; $f(\sqrt{5}) > 0$. **3.** $x = -1$ și $x = \dfrac{1}{2}$. **4.** $x \in \{6, 7\}$. **5.** $BH \perp AC$ și $CH \perp AB$. **6.** $x = \dfrac{\pi}{3}$. **II. 1.** b) $\det A \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$; c) Pentru $a = 1$ sistemul este compatibil simplu nedeterminat cu soluțiile $(7 - \alpha, 11 - 2\alpha, \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Obținem soluții formate din numere naturale pentru $\alpha \in \{0, 1, 2, ..., 5\}$, deci 6 soluții. **2.** c) Se verifică ușor că „$*$” este asociativă, are element neutru $e = 2$ și orice $x \neq 4$ este inversabil. Rezultă că $(\mathbb{R}, *)$ nu este grup. **III. 1.** a) 1; b) Fie că în $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$ tangentele nu sunt secante, deci sunt paralele. Rezultă $f'(a) = f'(b) \Rightarrow a = b$, fals; c) Folosind șirul lui Rolle, ecuația $f(x) = 0$ nu are soluții. **2.** b) $\int_1^2 \left(f(x) - \dfrac{e^x}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^2 \left(\dfrac{e^x}{x+1} - \dfrac{e^x}{(x+1)^2}\right)dx = \int_1^2 \left(e^x \cdot \dfrac{1}{x+1}\right)' dx = \dfrac{e^x}{x+1}\Big|_1^2 = \dfrac{2e^2 - 3e}{6}$; c) Pentru $x \in [1, 3]$, $e^x \geq e$, deci $\int_1^3 f(x)dx \geq \int_1^3 \dfrac{e}{x+1}dx = e\ln(x+1)\Big|_1^3 = e \ln 2$.

dacă $f'(x_0) = 0$, deci $x_0 \in \{-1, 1\}$. Ecuațiile tangentelor căutate sunt $y = 3$ și $y = -1$. **2.** a) $I_1 = \frac{1}{4}$; b) $I_n - I_{n+1} = \int_0^1 x^n(1-x)\ln(1+x)dx \geq 0$, $n \in \mathbb{N}^*$; c) $I_n \leq I_1 = \frac{1}{4}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 40

I. 1. $a = 3 \in \mathbb{N}$. **2.** $A(2, 1)$. **3.** $x \in \{-1, 0, 1, 2\}$. **4.** $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$. **5.** $a \in \{-5, 3\}$. **6.** $\text{tg}\, B = \frac{3}{4}$.
II. 1. a) Se arată că $A^2B = BA^2$; c) Pentru orice $X \in M$, avem: $A^2X = XA^2 \Leftrightarrow (5A - 5I_2)X = X(5A - 5I_2) \Leftrightarrow AX - X = XA - X \Leftrightarrow AX = XA$. **2.** b) $x \in [-1, 2]$; c) Ecuația $x \circ y = 7$ este echivalentă cu ecuația $(x - 1)(y - 1) = 2$ ale cărei soluții sunt $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(2, 3)$ și $(3, 2)$.
III. 1. a) $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = f(1) = 2$; b) $f_s'(1) = 1 \neq -1 = f'_d(1)$; c) Funcția f are maximul absolut $f(1) = 2$, deci $f(x) + f(x^2) + f(x^3) \leq 3f(1) = 6$, $x \in \mathbb{R}$. **2.** a) $I_1 = 1$; b) $I_3 = \frac{2}{3}$; c) Integrând, de la 0 la $\frac{\pi}{2}$, inegalitatea $\sin^{n+1} x \leq \sin^n x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, obținem $I_{n+1} \leq I_n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Testul 41

I. 1. $z = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. **2.** f este descrescătoare pe $(-\infty, 2)$, deci $f(\sqrt{2}) > f(\sqrt{3})$. **3.** $S = \{2\}$. **4.** $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$. **5.** $B'(7, 0)$. **6.** $2\sqrt{37}$. **II. 1.** b) Pentru $x \in \{-2, -1\}$, $\det A(x) = 0$, deci $A(x)$ nu este inversabilă; c) $\det A(x) = x^2 + (m + 1)x + m$; ecuația $x^2 + (m + 1)x + m = 0$ are discriminantul $\Delta = (m - 1)^2$ și $(m - 1)^2 \geq 0$, $\forall\, m \in \mathbb{R}$, deci vor exista valori ale lui x pentru care $\det A(x) = 0$. **2.** c) Dacă $b = \hat{0}$, atunci $S = \{\hat{0}, \hat{4}\}$; dacă $b = \hat{2}$, atunci $S = \{\hat{1}, \hat{5}\}$; dacă $b = \hat{4}$, atunci $S = \{\hat{2}, \hat{6}\}$; dacă $b = \hat{6}$, atunci $S = \{\hat{3}, \hat{7}\}$. **III. 1.** a) $f'(x) = e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$; b) f este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și crescătoare pe $[0, +\infty)$; c) Din $f\left(\frac{1}{100}\right) > f(0)$, obținem că $\sqrt[100]{e} - \frac{1}{100} > 1$, deci $\sqrt[100]{e} > \frac{101}{100}$. **2.** a) $\frac{4}{3}$; b) $\frac{2\sqrt{2}-1}{3}$; c) Asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f are ecuația $y = x$. Cum $\sqrt{x^2+1} > x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, avem $A(\Gamma) = \int_0^1 \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)dx = \frac{\ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1}{2}$.

Testul 42

I. 1. $a = 0 \in \mathbb{Z}$. **2.** $\Delta = 5m^2 + 4 > 0$, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$. **3.** $S = \{0, 2\}$. **4.** 6 numere. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $30\sqrt{2}$. **II. 1.** b) $x = 0$ sau $x = 1$; c) $A(x), A^{-1}(x) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \Rightarrow \det A(x), \det A^{-1}(x) \in \mathbb{Z}$. Cum $A(x) \cdot A^{-1}(x) = I_3 \Rightarrow \det A(x) \cdot \det A^{-1}(x) = 1 \Rightarrow \det A(x) = 1$ sau $\det A(x) = -1 \Rightarrow 1 - 2x = 1$ sau

Considerăm funcția $g : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \ln\frac{x+2}{x} - \ln\frac{x+1}{x-1} + 1$. Cum $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} g(x) = -\infty$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, rezultă că există $c \in (1, +\infty)$ astfel încât $g(c) = 0$. **2.** a) Dacă F este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x) = f(x) \le 0$, $\forall\ x \in [1, 3]$, deci F este descrescătoare; b) $3 \ln 3 - 4$; c) Obținem ecuația $a^3 - 6a^2 + 9a - 2 = 0$, $a \in (1, 3)$. Soluția este $a = 2$.

Testul 57

I. 1. 64. **2.** $2\sqrt{2}$. **3.** $x = 8$. **4.** Sunt 90 de numere de două cifre; 22 se divid cu 4, 19 se divid cu 5, 4 se divid cu 4 și cu 5. Divizibile cu 4 sau cu 5 sunt 37 de numere. Probabilitatea cerută este egală cu $\frac{37}{90}$. **5.** 3. **6.** –3. **II. 1.** c) $\mathcal{A}_{AOC_n} = \frac{3}{2}|2n-3|$ și este minimă pentru $n = 1$ sau $n = 2$. **2.** a) 8; c) De exemplu, $A = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{1} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$. **III. 1.** a) Avem $f'(x) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = 0$, $x = 4$. Punctele căutate sunt $A\left(0, -\frac{7}{2}\right)$; $B\left(4, \frac{3}{2}\right)$; b) $(-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$; c) e^{-3}. **2.** a) $\frac{5}{12}$; c) $A = \int_{-2}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = \int_{-2}^{1} (-x + 2 - x^2)dx = \frac{9}{2}$.

Testul 58

I. 1. 5. **2.** $A(0, 2)$; $B(3, 5)$. **3.** $\frac{8}{5}$. **4.** 16. **5.** $3\sqrt{2}$. **II. 1.** b) $m \ne -2$; c) (3, 1, 5). **2.** a) De exemplu, $(0 * 1) * 2 \ne 0 * (1 * 2)$; b) $x = -3$ sau $x = 1$; c) Fie $n \in \mathbb{N}$, $a * b = n \Rightarrow a = \frac{n-3b}{b-2}$. Alegem $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$, astfel încât $a \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$; de exemplu, $n = 0$, $b = \frac{1}{3}$, $a = \frac{3}{5}$. **III. 1.** a) 9; b) $A(0, 4)$ punct de maxim, $B(2, 0)$ punct de minim; c) $\frac{11}{12} < \frac{12}{13}$; $\frac{11}{12}, \frac{12}{13} \in [0, 2]$. Cum f este strict descrescătoare pe $[0, 2]$, rezultă că $a > b$. **2.** b) $\sqrt{2} - 1$; c) $\pi\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.

Testul 59

I. 1. $a = -1$. **2.** $m = -2$. **3.** 8. **4.** $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6^3} = \frac{5}{9}$. **5.** $3x + 2y = 0$. **6.** 1. **II. 1.** a) $\det(2I_2 - 3A) = -17 \ne 0$; c) Inductiv, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, cu $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$. **2.** a) $e = 4$; c) $x = 3$. **III. 1.** a) $\frac{1}{3}$;

Breviar teoretic

1. ALGEBRĂ

1.1. Formule de calcul prescurtat

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$; $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$;
$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$;
$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$; $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1.2. Sume remarcabile

$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.3. Modulul unui număr real

Definiție. $|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$.

Proprietăți: 1) $|x| \geq 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 3) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$;

4) $|x : y| = |x| : |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$; 5) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$; egalitatea are loc dacă și numai dacă $xy \geq 0$; 6) $|x| \leq a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$, $a > 0$; 7) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, $a > 0$.

1.4. Partea întreagă și partea fracționară

Definiție. *Partea întreagă* a unui număr real x este cel mai mare număr întreg, mai mic sau egal cu x și se notează cu $[x]$. *Partea fracționară* (*zecimală*) a unui număr real x se notează cu $\{x\}$ și este definită astfel: $\{x\} = x - [x]$.
Proprietăți: 1) $[x] \in \mathbb{Z}$ și $\{x\} \in [0, 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$; 2) $[x] \leq x < [x] + 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$;

3) $[x + k] = [x] + k$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$; 4) $\{x + k\} = \{x\}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

sunt: $x_P = \dfrac{x_A + kx_B}{1+k}$, $y_P = \dfrac{y_A + ky_B}{1+k}$. Coordonatele centrului de greutate G al triunghiului ABC sunt $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

2.2. Vectori în plan

Fie $\{O, \vec{i}, \vec{j}\}$ o bază ortonormată asociată unui reper cartezian ortogonal din plan. *Vectorul de poziție* al punctului $A(x_A, y_A)$ este $\vec{r_A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$. Coordonatele vectorului $\overrightarrow{AB}$ sunt $(x_B - x_A,\ y_B - y_A)$, adică $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$. Suma vectorilor $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$ este $(\vec{u}+\vec{v})(a+a', b+b')$. Produsul dintre vectorul $\vec{v}(a,b)$ și scalarul t este $(t\cdot\vec{v})(ta, tb)$.

Panta direcției vectorului $\vec{v}(a,b)$ este $m_{\vec{v}} = \dfrac{b}{a}$, iar a vectorului $\overrightarrow{AB}$ este $m_{\overrightarrow{AB}} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Condiții de paralelism (coliniaritate) pentru vectorii $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$: $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow (\exists)\, t \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u} = t\cdot\vec{v} \Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \Leftrightarrow m_{\vec{u}} = m_{\vec{v}}$.

2.3. Produsul scalar a doi vectori

Produsul scalar al vectorilor $\vec{u}$ și $\vec{v}$ este numărul real:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}), & \text{dacă } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ și } \vec{v} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{dacă } \vec{u} \neq \vec{0} \text{ sau } \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases}$$

Dacă $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j}$ și $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j}$, atunci $\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb'$. Condiții de perpendicularitate pentru vectorii $\vec{u}(a,b)$ și $\vec{v}(a',b')$: $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$. Măsura unghiului dintre doi vectori nenuli se poate afla cu ajutorul formulei $\cos\sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \dfrac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a'^2+b'^2}}$.

2.4. Teoreme remarcabile în triunghi

Teorema lui Thales: Dacă M și N sunt puncte pe laturile AB, respectiv AC ale triunghiului ABC, atunci dreptele MN și BC sunt paralele dacă și numai dacă $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{AN}{NC}$.

Teorema bisectoarei: Semidreapta AD, $D \in (BC)$, este bisectoare a triunghiului ABC dacă și numai dacă $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Teorema lui Menelaus: Pe dreptele suport BC, CA, AB ale laturilor triunghiului ABC se consideră punctele M, N, respectiv P (două puncte pe laturi și al treilea pe prelungirea laturii