Практичне завдання 2.

Гіпотези про параметри розподілу N_{a,σ^2}

1. Перевірка гіпотези H_0: $a=a_0$

Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))$ – реалізація вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з нормального розподілу N_{a,σ^2}. Параметри a та σ^2 невідомі. Відносно значення невідомого, але цілком визначеного a, висувається гіпотеза

$$H_0\colon a=a_0, \tag{1}$$

або, що те саме, гіпотеза $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))$ – реалізація вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з нормального розподілу N_{a,σ^2}.

Гіпотеза H_0: $a=a_0$ може мати альтернативи:

а) $a\neq a_0$, тобто якщо рівність $a=a_0$ не справджується, то $a>a_0$ або $a<a_0$ (двобічна альтернатива);

б) $a>a_0$ тобто якщо рівність $a=a_0$ не справджується, то $a>a_0$ (однобічна альтернатива); однобічна альтернатива може бути й такою: $a<a_0$.

Та чи інша альтернатива вибирається дослідником і в кожній задачі вона своя.

Мета – за реалізацією вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ зробити висновок про гіпотезу H_0, а саме: відхиляти її чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0: $a=a_0$, для вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з N_{a,σ^2}

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i \tag{2}$$

є консистентною та незміщеною оцінкою параметра a. Звідси маємо, що відхилення $(\bar{\xi}-a)$ оцінки $\bar{\xi}$ від a (принаймні в середньому) мінімально можливе порівняно з відхиленням $\bar{\xi}$ від інших сталих a_0, відмінних від a. Тобто $\bar{\xi}$ мінімально відрізняється від константи a_0, що збігається з a. Тому при побудові критерію для перевірки гіпотези H_0: $a=a_0$ природно виходити з величини відхилення $\bar{\xi}$ від a_0: якщо гіпотеза H_0 справджується, то відхилення $(\bar{\xi}-a_0)$ дорівнює $(\bar{\xi}-a)$ і, отже, є мінімально можливим серед відхилень $\bar{\xi}$ від константи (малим). Якщо ж гіпотеза H_0: $a=a_0$ не справджується (a_0 відмінне від a), то відхилення $(\bar{\xi}-a_0)$ оцінки $\bar{\xi}$ від a_0 велике – більше за мінімальне можливе відхилення ($\bar{\xi}-a$). Тому гіпотезу H_0 природно не відхиляти, якщо відхилення ($\bar{\xi}-a_0$) мале, і відхиляти в противному разі.

Межі, які відокремлюють великі значення відхилення. ($\bar{\xi}-a_0$) від малих, знаходяться на підставі того факту, що для вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з N_{a,σ^2} випадкова величина

$$\frac{(\bar{\xi}-a)}{s/\sqrt{n}} \tag{3}$$

– мінімально можливе відхилення, нормоване величиною має розподіл Стьюдента з (n–1) ступенями вільності. Нагадаємо, що

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2. \tag{4}$$

Критерій Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a=a_0$. вибірка $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з нормального розподілу N_{a,σ^2}, $t_{\alpha,(n-1)}$ – верхня α-границя t-розподілу з (n–1) ступенями вільності.

Якщо гіпотезу H_0: $a=a_0$ відхиляти при

$$\frac{|\bar{\xi}-a|}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha,(n-1)} \tag{5}$$

і не відхиляти в противному разі, то з імовірністю 2α гіпотеза H_0 буде відхилятися, коли вона справджується (це критерій Стьюдента за двобічної альтернативи). Якщо альтернатива однобічна, наприклад $a>a_0$, то $\frac{(\bar{\xi}-a)}{s/\sqrt{n}}$ порівнюємо з $t_{\alpha,(n-1)}$: при

$$\frac{(\bar{\xi}-a)}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha,(n-1)} \tag{6}$$

гіпотеза H_0 відхиляється, у противному разі – ні (рівень значущості цього однобічного критерію дорівнює α).

Помилки при перевірці гіпотези H_0: $a=a_0$. Для вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з нормального розподілу N_{a_0,σ^2}, (незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0:$a=a_0$) випадкова величина $\bar{\xi}$ розподілена за законом N_{a,σ^2}. Тому, коли гіпотеза H_0:$a=a_0$ справджується, оцінка $\bar{\xi}$ може (хоча й зрідка) набувати значень, які істотно відрізняються від a_0 (тобто $\frac{|\bar{\xi}-a|}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha,(n-1)}$); при цьому гіпотезу H_0, що справджується, відхиляємо і тим самим припускаємо помилку першого роду.

Далі. Коли гіпотеза $H_0{:}a=a_0$ не справджується, тобто $a\neq a_0$, знову-таки, оскільки $\bar{\xi}$ розподілена за законом N_{a,σ^2}, оцінка $\bar{\xi}$ може (хоча й зрідка), набуваючи значень, які істотно відрізняються від a, набути значення, що мало відрізняється від a_0 (тобто $\frac{|\bar{\xi}-a|}{s/\sqrt{n}} \leq t_{\alpha,(n-1)}$); при цьому гіпотезу $H_0{:}a=a_0$ не відхиляємо (хоча вона й не справджується) і тим самим припускаємо помилку другого роду.

Приклад 2.1. **Ефект від використання спеціальної сівалки.** *Для того щоб дослідити ефект від використання спеціальної сівалки, 10 ділянок землі засіяли за допомогою звичайної сівалки і 10 ділянок – за допомогою спеціальної, а потім порівняли одержані врожаї. 20 ділянок однакової площі були поділені попарно, причому пару становили суміжні ділянки. Питання про те, яка з двох суміжних ділянок мала оброблятися спеціальною машиною, вирішувалося підкиданням монети. У таблиці подано різниці врожаїв з пар суміжних ділянок, засіяних спеціальною сівалкою і звичайною.*

Номер пари	Різниця врожаїв	Номер пари	Різниця врожаїв
1	2,4	6	1,6
2	1,0	7	-0,4
3	0,7	8	1,1
4	0,0	9	0,1
5	1,1	10	0,7

Чи підтверджують наведені дані наявність ефекту від використання спеціальної сівалки, інакше кажучи, чи дає вона надбавку врожаю?

Розв'язання. У термінах перевірки статистичних гіпотез задачу можна сформулювати так. Маємо 10 незалежних спостережень випадкової величини (див. таблицю) – реалізацію $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_{10}(\omega))$ вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{10})$ з нормального розподілу N_{a,σ^2} (припущення відносно нормального розподілу результатів вимірювань, як правило, завжди справджується), але параметри a та σ^2 цього розподілу невідомі. Стосовно параметра a розподілу N_{a,σ^2} висувається гіпотеза H_0: $a=0$, або, що те саме, дані (див. таблицю) є реалізацією вибірки з розподілу N_{0,σ^2} (невідхилення гіпотези H_0: $a = 0$ будемо трактувати як відсутність ефекту від використання спеціальної сівалки). Як альтернативу гіпотезі H_0: $a = 0$ будемо розглядати однобічну альтернативу $a > 0$, оскільки за постановкою задачі, якщо $a \neq 0$, то $a > 0$. Відхилення гіпотези H_0: $a = 0$ на користь альтернативи $a > 0$ будемо інтерпретувати як наявність ефекту від використання спеціальної сівалки.

Необхідно перевірити гіпотезу H_0. Згідно з критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ при альтернативі $a > a_0$ обчислюємо значення

$$t = \frac{(\bar{\xi} - a_0)}{s/\sqrt{n}} \tag{7}$$

і порівнюємо його з $t_{\alpha,(n-1)}$ – Верхньою Границею α-розподілу. Якщо

$$t = \frac{(\bar{\xi} - a_0)}{s/\sqrt{n}} > t_{\alpha,(n-1)}, \tag{8}$$

то гіпотезу H_0 відхиляємо, в противному разі – ні (рівень значущості критерію становить α).

У розглядуваному випадку n = 10, так що

$$\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{10}(2{,}4+1{,}0+\ldots+0{,}7) = 0{,}83; \tag{9}$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2 = \frac{1}{9}((2{,}4 - 0{,}83)^2 + (1{,}0 - 0{,}83)^2 + \ldots +$$

$$(0{,}7 - 0{,}83)^2) = 0{,}667; \tag{10}$$

$$t = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{s^2/n}} = \frac{0{,}83}{\sqrt{0{,}667/10}} = 0{,}83/0{,}258 = 3{,}22. \tag{11}$$

Отже,

$$t = \frac{\bar{\xi}}{s/\sqrt{n}} = 3{,}22 > 2{,}26 = t_{0,025;9} \tag{12}$$

і згідно з критерієм Стьюдента гіпотеза H_0: a = 0 на рівні значущості α=0,025 відхиляється. Таким чином, гіпотеза про те, що вибірку одержано з нормального розподілу з середнім 0, суперечить наявним даним (див. таблицю).

Одержаний результат можна інтерпретувати так. Припущення (гіпотеза), що різниця урожаїв з ділянок, засіяних спеціальною сівалкою і звичайною, неістотно відхиляється від нуля, суперечить наявним даним. Порівняно з сівалкою, застосування якої не дає ефекту, відхилення різниці урожаїв від нуля, наведені в таблиці, неможливі (точніше, можливі, але вкрай рідко). Отже, можна вважати, що різниця здобутих урожаїв свідчить про наявність ефекту від використання спеціальної сівалки.

2. Перевірка гіпотези H_0: $a_\xi - a_\eta = a_0$

Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ та $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega),\eta_2(\omega),\dots,\eta_m(\omega))$ є реалізаціями незалежних вибірок $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ і $\eta = (\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m)$ відповідно з розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2}. Середні a_ξ та a_η і дисперсію σ^2 (одну й ту саму для обох вибірок) невідомо.

Щодо параметрів a_ξ й a_η висувається гіпотеза H_0: різниця $a_\xi - a_\eta$ середніх a_ξ та a_η дорівнює константі a_0, тобто

$$H_0\colon a_\xi - a_\eta = a_0. \qquad (13)$$

Зокрема, при $a_0 = 0$ гіпотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = a_0$ полягає в тому, що середні a_ξ й a_η рівні між собою, або, що те саме, $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ і $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ є вибірками з одного й того самого нормального розподілу (альтернатива гіпотезі H_0 може бути як однобічною, так і двобічною).

Мета – за вибірками $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ і $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ з розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} відповідно зробити висновок: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Позначимо $a_\xi - a_\eta = a$, $\overline{\xi} - \overline{\eta} = \Delta$. Незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0: $a_\xi - a_\eta = a_0$ для вибірок $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ і $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ із N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} відповідно, оцінка $\Delta = \overline{\xi} - \overline{\eta}$ є консистентною і незміщеною для $a = a_\xi - a_\eta$, оскільки такими є $\overline{\xi}$ для a_ξ та $\overline{\eta}$ для a_η. Із незміщеності оцінки Δ параметра a випливає, що відхилення $(\Delta - a)$ оцінки Δ від a (принаймні в середньому) мінімально можливе порівняно з відхиленням Δ від інших сталих a_0, відмінних від a. Тому при побудові критерію для перевірки гіпотези H_0: $a = a_0$ природно виходити з величини відхилення Δ від a_0. Гіпотезу H_0 природно не відхиляти, якщо відхилення $(\Delta - a_0)$ мале, і відхиляти, якщо воно велике. Межі, які відокремлюють великі значення відхилення від малих, визначаються на підставі того факту, що випадкова величина

$$(\Delta - a)/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \qquad (14)$$

– мінімально можливе відхилення $(\Delta - a)$, нормоване величиною $s\sqrt{\frac{n+m}{nm}}$, – має розподіл Стьюдента з $n+m-2$ ступенями вільності. Нагадаємо, що

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2\right), \qquad (15)$$

де

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \overline{\xi})^2; \quad s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \overline{\eta})^2. \qquad (16)$$

Критерій Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi - a_\eta = a_0$. Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ і $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ – незалежні вибірки з нормальних розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} відповідно, $t_{\alpha,(n+m-2)}$ – верхня α-границя t-розподілу з $(n+m-2)$ ступенями вільності.

Якщо гіпотезу H_0: $a = a_0$ відхиляти при

$$|t| = |\Delta - a|/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \geq t_{\alpha,(n+m-2)} \qquad (17)$$

і не відхиляти в противному разі, то з імовірністю 2α гіпотеза H_0 буде відхилятися, коли вона справджується (цим критерієм користуємося для перевірки гіпотези H_0 в разі двобічної альтернативи: $a < a_0$ або $a > a_0$)·
Якщо альтернатива однобічна, наприклад $a > a_0$, то t порівнюємо з $t_{\alpha,(n+m-2)}$: при

$$t = (\Delta - a)/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \geq t_{\alpha,(n+m-2)} \qquad (18)$$

гіпотеза H_0 відхиляється, у противному разі – ні (рівень значущості цього однобічного критерію дорівнює α).

Наведемо ще **критерій Стьюдента для перевірки гіпотези H_0: $a_\xi - a_\eta = 0$** (гіпотези про рівність середніх нормальних розподілів).
Нехай $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ і $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m$ – незалежні вибірки з нормальних розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} відповідно.

Якщо гіпотезу H_0: $a_\xi = a_\eta$ відхиляти при

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}|/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \geq t_{\alpha,(n+m-2)} \qquad (19)$$

і не відхиляти в противному разі, то з імовірністю 2α гіпотеза H_0 буде відхилятися, коли вона справджується (цим критерієм користуємося для перевірки гіпотези в разі двобічної альтернативи: $a_\xi < a_\eta$ або $a_\xi > a_\eta$).
Якщо альтернатива однобічна, наприклад $a_\xi > a_\eta$ то t порівнюємо $t_{\alpha,(n+m-2)}$: при

$$t = (\overline{\xi} - \overline{\eta})/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \geq t_{\alpha,(n+m-2)} \qquad (20)$$

гіпотеза H_0 відхиляється, у противному разі – ні (рівень значущості однобічного критерію дорівнює α).

Приклад 2.2. *Нижче наведено дані про вимірювання нерівностей поверхні однієї й тієї самої чистоти оброблення за допомогою двох подвійних мікроскопів.*

Чи можна вважати, що між показами приладів немає систематичної розбіжності?

Мікроскоп I: 0,8; 1,9; 3,0; 3,5; 3,8; 2,5; 1,7; 0,9; 1,0; 2,3; 3,3; 3,4.

Мікроскоп II: 1,4; 2,1; 3,1; 3,6; 2,7; 1,7; 1,1; 0,2; 1,6; 2,8; 4,0; 4,7.

Розв'язання. У термінах перевірки статистичних гіпотез цю задачу можна сформулювати так. Маємо реалізації двох незалежних вибірок $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ та $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ (див. дані) з розподілів N_{a_ξ,σ^2} й N_{a_η,σ^2}відповідно (така модель вимірювань, як правило, завжди виправдовує себе). Для визначеності будемо позначати через $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ вимірювань, одержаних за допомогою першого мікроскопа, через $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_m$ – за допомогою другого. Відносно параметрів a_ξ та a_η висувається гіпотеза H_0*:* $a_\xi = a_\eta$. Це гіпотеза про відсутність систематичної розбіжності між показами приладів. Апріорі якщо $a_\xi \neq a_\eta$, то може бути як $a_\xi < a_\eta$, так і $a_\xi < a_\eta$ тому природно визнати двобічну альтернативу. Відхилення гіпотези H_0 на користь цієї альтернативи будемо інтерпретувати як наявність систематичної розбіжності показів приладів.

Згідно з критерієм Стьюдента для перевірки гіпотези H_0*:* $a_\xi = a_\eta$ при двобічній альтернативі треба порівняти значення

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}|/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \qquad (21)$$

з $t_{\alpha,(n+m-2)}$ – верхньою α-границею $t_{(n+m-2)}$-розподілу. Якщо

$$|t| = |\overline{\xi} - \overline{\eta}|/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} \geq t_{\alpha,(n+m-2)} \qquad (22)$$

то гіпотеза H_0 відхиляється, у противному разі – ні (рівень значущості критерію становить 2α).

У розглядуваному випадку n = 12, m = 12, так що

$$\overline{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{1}{12}(0{,}8+1{,}9+\ldots+3{,}4) = 2{,}34; \qquad (23)$$

$$\overline{\eta} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\eta_i = \frac{1}{12}(1{,}4+2{,}1+\ldots+4{,}7) = 2{,}42; \qquad (24)$$

$$s^2 = \frac{1}{n+m-2}\left((n-1)s_\xi^2 + (m-1)s_\eta^2\right) = 1{,}44, \qquad (25)$$

де $s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2$; $s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \bar{\eta})^2$;

$$|t| = |\bar{\xi} - \bar{\eta}|/s\sqrt{\frac{n+m}{nm}} = |2{,}42 - 2{,}34|/\sqrt{\frac{1{,}44(12+12)}{(12\cdot 12)}} = 0{,}16. \quad (26)$$

Отже,

$$|t| = 0{,}16 < 2{,}074 = t_{0{,}025,\,22} \quad (27)$$

і згідно з критерієм Стьюдента гіпотеза H_0 про рівність $a_\xi = a_\eta$ на 5%-му рівні значущості не відхиляється.

Цей результат можна трактувати так. Припущення (гіпотеза) про те, що між показами мікроскопів немає систематичної розбіжності, не суперечить експериментальним даним. (Такі покази типові для одного й того самого приладу.) Отже, можна вважати, що між показами мікроскопів немає систематичної розбіжності.

3. Перевірка гіпотези H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$

Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ – реалізація вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ з нормального розподілу N_{a,σ^2}. Параметри a та σ^2 невідомі. Відносно значення параметру σ^2, висувається гіпотеза

$$H_0\text{: } \sigma^2/\sigma_0^2=1. \quad (28)$$

Альтернативою гіпотезі H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$ може бути як однобічна гіпотеза: якщо $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ (вона може бути й такою: $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$), так і двобічна гіпотеза: якщо $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$, то $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ або $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$. У кожному випадку альтернатива своя, вона визначається конкретною задачею і вибирається дослідником.

Мета – за реалізацією $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,\xi_n(\omega))$ вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$ з N_{a,σ^2} зробити висновок: відхиляти гіпотезу N_{a,σ^2} чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується гіпотеза H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$ чи ні,

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2. \quad (29)$$

є незміщеною та консистентною оцінкою параметра σ^2. Тому $M(s^2/\sigma^2) = 1$ і s^2/σ^2 збігається за ймовірністю до 1 при $n\to\infty$. Отже, відношення s^2/σ^2 (принаймні в середньому) мінімально відрізняється від 1 порівняно з відхиленням від 1 відношень s^2/σ^2, для яких $\sigma^2/\sigma_0^2 \neq 1$. Тому критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$ природно будувати, порівнюючи відношення s^2/σ_0^2 з 1. Якщо це відношення істотно відрізняється від 1, то гіпотезу H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$ природно відхиляти, у противному разі – ні. Межі, що відокремлюють значення s^2/σ_0^2 які істотно відрізняються від 1, від значень s^2/σ_0^2, що мало (допустимо) відхиляються від 1, встановлюються на підставі того факту, що для вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ з N_{a,σ^2} випадкова величина

$$(n-1)\, s^2/\sigma^2 \tag{30}$$

– відношення s^2/σ^2, яке мінімально відрізняється від 1, нормоване величиною $\frac{1}{n-1}$, має розподіл χ^2 з $(n-1)$ ступенями вільності.

Критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$. Нехай $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ є вибіркою з N_{a,σ^2}; $\chi^2_{\beta,(n-1)}$ – верхня β-границя $\chi^2_{(n-1)}$-розподілу.

Якщо гіпотезу H_0: $\sigma^2/\sigma_0^2=1$ відхиляти при

$$s^2/\sigma_0^2 \notin \left(\frac{1}{n-1}\chi^2_{(1-\alpha),(n-1)},\ \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha,(n-1)}\right) \tag{31}$$

і не відхиляти в противному разі, то з імовірністю 2α гіпотеза H_0 буде відхилятися, коли вона справджується (цим критерієм користуємося, якщо альтернатива двобічна: $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$ або $\sigma^2/\sigma_0^2 < 1$).

Якщо альтернатива однобічна, наприклад $\sigma^2/\sigma_0^2 > 1$, то s^2/σ_0^2 порівнюємо з $\frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha,(n-1)}$: при

$$s^2/\sigma_0^2 > \frac{1}{n-1}\chi^2_{\alpha,(n-1)} \tag{32}$$

гіпотеза H_0 відхиляється, у противному разі – ні (рівень значущості цього однобічного критерію дорівнює α).

4. Перевірка гіпотези H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$

Нехай $\xi(\omega) = (\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\ldots,\xi_n(\omega))$ і $\eta(\omega) = (\eta_1(\omega),\eta_2(\omega),\ldots,\eta_m(\omega))$ є реалізаціями незалежних вибірок $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ і $\eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)$ відповідно з розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2}. Середні a_ξ, a_η σ_ξ^2 і σ_η^2 нормальних розподілів невідомо. Щодо значень σ_ξ^2 і σ_η^2 висувається гіпотеза

$$H_0:\ \sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1, \tag{33}$$

або, що те саме, вибірки $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ і $\eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)$ одержано з нормальних розподілів з однією й тією самою дисперсією.

Необхідно за реалізаціями вибірок $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ і $\eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)$ з розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} відповідно зробити висновок: відхиляти гіпотезу H_0 чи ні.

Вибір статистики для побудови критерію. Незалежно від того, справджується чи ні гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$,

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2 \text{ та } s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \bar{\eta})^2 \qquad (34)$$

є консистентними і незміщеними оцінками параметрів σ_ξ^2 і σ_η^2 відповідно. Тому s_ξ^2/s_η^2 збігається за ймовірністю до $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2$. Отже, якщо $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$, то відношення s_ξ^2/s_η^2 мало відрізняється від $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$. Якщо ж $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2\neq 1$, то відношення s_ξ^2/s_η^2, будучи близьким до $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2$, від 1 відрізняється істотно. Тому критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$ природно будувати, порівнюючи відношення s_ξ^2/s_η^2 з 1: якщо це відношення істотно відрізняється від 1, то гіпотезу H_0 природно відхиляти, у противному разі – ні. Межі, що відокремлюють значення s_ξ^2/s_η^2, які істотно відрізняються від 1, від значень s_ξ^2/s_η^2, що мало (допустимо) відхиляються від 1, встановлюються на підставі того факту, що при $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$ (гіпотеза H_0 справджується) випадкова величина s_ξ^2/s_η^2 має F-розподіл з $(n-1),(m-1)$ ступенями вільності.

Критерій для перевірки гіпотези H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$. Нехай $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ і $\eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)$ – незалежні вибірки з розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} відповідно; $F_{\beta,s,k}$ – верхня β-границя F-розподілу з s,k ступенями вільності.

Якщо гіпотезу H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$ відхиляти при

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} \notin \left(\frac{1}{F_{\alpha,(m-1),(n-1)}}, F_{\alpha,(n-1),(m-1)}\right) \qquad (35)$$

і не відхиляти в противному разі, то з імовірністю 2α гіпотезу H_0 будемо відхиляти, коли вона справджується (цим критерієм користуємося, якщо альтернатива двобічна: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$).

Якщо альтернатива однобічна, наприклад $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$, то s_ξ^2/s_η^2 порівнюємо з $F_{\alpha,(m-1)(n-1)}$: при

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} > F_{\alpha,(n-1),(m-1)} \qquad (36)$$

гіпотезу H_0 будемо відхиляти, у противному разі – ні (рівень значущості цього однобічного критерію дорівнює α).

Приклад 2.3. Точність вимірювань. *Визначається границя міцності проти розриву матеріалу на двох різних стендах A та B. Нижче наведено вибірки значень границі міцності проти розриву, одержані на цих стендах.*

З'ясувати, чи можна вважати, що точність вимірювань границі міцності проти розриву на стендах A та B однакова.

Стенд A: 1,32; 1,35; 1,32; 1,35; 1,30; 1,30; 1,37; 1,31; 1,39; 1,39.

Стенд B: 1,35; 1,31; 1,31; 1,41; 1,39; 1,37; 1,32; 1,34.

Розв'язання. У термінах перевірки статистичних гіпотез цю задачу можна сформулювати так. Маємо дві реалізації (див. дані) незалежних вибірок із нормальних розподілів N_{a_ξ,σ^2} та N_{a_η,σ^2} (нехай для визначеності $\xi = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ є вибіркою, одержаною на стенді A, $\eta = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_m)$ на стенді B). Відносно невідомих параметрів σ_ξ^2 та σ_η^2 висувається гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$ (гіпотеза про однакову точність вимірювань на стендах A та B). Природно розглянути двобічну альтернативу: H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$ або $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 > 1$. Оскільки, якщо $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 \neq 1$ (точність вимірювань на стендах різна), може бути як $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2 < 1$, так і навпаки. Відхилення гіпотези H_0 на користь цієї альтернативи будемо інтерпретувати як відмінність у точності вимірювань на стендах A та B.

Згідно з критерієм для перевірки гіпотези H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$ в разі двобічної альтернативи гіпотезу H_0 відхиляємо, якщо

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} \notin \left(\frac{1}{F_{\alpha,(m-1),(n-1)}},\, F_{\alpha,(n-1),(m-1)}\right) \qquad (37)$$

і не відхиляємо в противному разі.

У розглядуваному випадку $n = 10$, $m = 8$, $\bar{\xi} = 1{,}34$; $\bar{\eta} = 1{,}35$, так що

$$s_\xi^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i - \bar{\xi})^2 = 12{,}2\cdot 10^{-4};$$

$$s_\eta^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(\eta_i - \bar{\eta})^2 = 14{,}0\cdot 10^{-4};$$

$$\frac{s_\xi^2}{s_\eta^2} = \frac{12{,}2\cdot 10^{-4}}{14{,}0\cdot 10^{-4}} = 0{,}87;$$

$$F_{\alpha,(n-1),(m-1)} = F_{0{,}01,9,7} = 6{,}72;$$

$$\frac{1}{F_{\alpha,(m-1),(n-1)}} = \frac{1}{5{,}61} = 0{,}18.$$

Отже, значення s_ξ^2/s_η^2 належить відрізку

$$\left(\frac{1}{F_{\alpha,(m-1),(n-1)}},\ F_{\alpha,(n-1),(m-1)}\right) = (0{,}17;\ 6{,}72), \qquad (38)$$

і тому на 2%-му рівні значущості гіпотеза H_0: $\sigma_\xi^2/\sigma_\eta^2=1$ не відхиляється.

Цей результат можна інтерпретувати так. Припущення (гіпотеза), що стенди А та В дають однакову точність вимірювань границі міцності проти розриву, не суперечить експериментальним даним. (Такі дані типові для одного й того самого стенда.) Таким чином, можна вважати, що стенди А і В мають однакову точність.

2.2. Задачі

1. Група з 10 школярів протягом літніх канікул перебувала в спортивному таборі. До і після сезону у них визначали місткість легенів (у мілілітрах). За результатами вимірювань необхідно було визначити, чи істотно змінився цей показник під впливом інтенсивних фізичних вправ.

До експерименту: 3400, 3600, 3000, 3500, 2900, 3100, 3200, 3400, 3200, 3400.

Після експерименту: 3800, 3700, 3300, 3600, 3100, 3200, 3200, 3300, 3500, 3600.

2. Щоб порівняти відбивну здатність двох видів фарби, провадили такий експеримент: з 10 вибраних навмання пробних зразків п’ять пофарбували однією фарбою, а решту – іншою. Одержані за допомогою оптичного приладу результати вимірювань наведено нижче.

Фарба А: 195, 150, 205, 120, 160.

Фарба В: 200, 115, 220, 185, 170.

Чи свідчать ці дані про відмінність відбивної здатності фарб?

3. Один із методів кількісного аналізу міри спрацювання шини полягає у вимірюванні глибини проникнення щупа в певному місці шини. Є підозра, що поява значної частки дисперсії вимірювань пов’язана з діями контролерів. Щоб виділити із загальної дисперсії вимірювань зазначену частину, двом контролерам запропонували провести по 12 вимірювань в одній і тій самій точці шини. Результати вимірювань наведено нижче.

Контролер X: 121, 121, 126, 130, 127, 131, 127, 124, 125, 119, 126, 123.

Контролер Y: 120, 129, 128, 136, 117, 138, 124, 119, 136, 136, 134, 132.

Чи істотно відрізняються дисперсії вимірювань, проведених різними контролерами?

4. На виробництві електричні лічильники, що мають обертовий диск, були відрегульовані так, що їх робота стала синхронною з роботою стандартного лічильника. Перевірка 10 лічильників, яка полягала у визначенні їхньої сталої за допомогою точних ватметрів і секундомірів, дала такі результати:

Номер лічильника	Значення сталої	Номер лічильника	Значення сталої
1	0,983	6	0,988
2	1,002	7	0,994
3	0,998	8	0,991
4	0,996	9	1,005
5	1,003	10	0,986

Стандартний лічильник характеризує стала 1,000.

Чи можна відхилення від стандарту розглядати як випадкові, чи, навпаки, результати вказують на те, що сталі відрегульованих лічильників систематично відрізняються від сталої стандартного лічильника?

Відповісти на це запитання, перевіривши гіпотезу про те, що 10 вимірювань утворюють вибірку, одержану з нормального розподілу з середнім 1,000.

5. Порівнюють два сорти сталі за здатністю до глибокого відпуску. Для цього виготовили по сім зразків кожного сорту сталі й випробували їх за методом Еріксона, згідно з яким у зразок вдавлюється конус з кульковим наконечником. Глибину проникнення кульки вимірюють у міліметрах. Результати випробувань наведено нижче.

Сталь I: 10,85; 10,24; 10,48; 10,35; 11,07; 9,54; 11,18.

Сталь II: 11,05; 10,07; 10,03; 10,57; 10,27; 9,97; 9,92.

Чи можна вважати, що ці сорти сталі мають однакову здатність до глибокого відпуску?

Розв’язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез.

6. Маса пакунка з природним барвником мас становити 50 кг, а дисперсія розсіювання маси не повинна перевищувати 0,01 кг^2. При обстеженні 10 пакунків одержано такі результати (маса в кілограмах): 50,10; 50,07; 49,93; 49,81; 49,70; 49,76; 50,08; 50,18; 49,79; 51,02.

Чи свідчать наведені дані, що зазначені вимоги виконуються?

7. Подані нижче дані характеризують твердість 14 зразків сплаву в умовних одиницях: 12,1; 13,7; 11,0; 11,6; 11,9; 13,4; 12,2; 12,5; 11,9; 11,5; 12,9; 13,0; 10,5; 11,7.

Припустимо, що твердість сплаву розподілена нормально. Чи можна вважати, що параметр a нормального розподілу дорівнює 12,0?

8. Досліджувалась можливість зменшення видатків на розвідування покладів золота на одній з ділянок розсипного родовища. Для цього замість частини запланованих для закладення шурфів пробурили свердловини ударно-канатного свердління (видатки на свердління менші).

Результати випробування зразків порід з шурфів і свердловин наведено нижче (вміст Au в міліграмах на кубічний метр породи).

Свердловини: 322, 250, 225, 315, 399, 348, 192, 375, 381, 538, 198, 317, 293.

Шурфи: 478, 299, 541, 457, 251, 221, 548, 431, 397, 462, 457, 251, 221, 548.

Чи можна вважати, що результати випробування зразків, узятих із свердловин, і зразків, узятих із шурфів, різняться неістотно?

9. На верстаті-автоматі виробляється однакова продукція. Критичним розміром виробів є зовнішній діаметр. Після налагодження верстата відібрали 20 виробів. При цьому виявилося, що вибіркова дисперсія розміру зовнішнього діаметра становить 0,84 мм^2. Через певний проміжок часу з метою контролю точності роботи верстата (і, при потребі, для його налагодження) добирається вибірка обсягом 15 виробів. Виявилося, що вибіркова дисперсія, обчислена за нею, дорівнює 1,07 мм^2.

Чи свідчать наведені дані про зміну точності роботи верстата?

10. Швидкість полімеризації перевірили на кількох зразках полімеру. Розрахункова швидкість полімеризації становить 24% за годину. У восьми експериментах одержано такі результати: 23,6; 22,8; 25,7; 24,8; 26,4; 24,3; 23,9; 25,0.

Чи є достатні підстави вважати, що розрахункова швидкість полімеризації узгоджується з цими даними?

11. Щоб перевірити, чи впливає на міцність бетону спеціальний спосіб його виготовлення, провели експеримент. Із партії сировини було взято шість вибірок, причому однорідних, наскільки це можливо. Потім вибірки навмання поділили на дві групи по три в кожній. Після цього вибірки з другої групи піддали спеціальному обробленню і з кожної виготовили пробний куб. Після 28-денної витримки шести пробних кубів визначили їх опір стиску. Одержали такі результати:

Бетон 1	290	311	284
Бетон 2	309	318	318

Примітка. Наведено граничні значення навантаження, при яких відбувається руйнування зразків.

Чи свідчать ці дані про наявність ефекту спеціального оброблення бетону?

12. Щоб зменшити вихід небажаного побічного продукту, застосовували каталізатори А та В. При використанні кожного з них були одержані вибірки, подані нижче. Величиною, що спостерігалася, був вихід небажаного продукту у відсотках.

Каталізатор *A:* 41, 52, 29, 43, 38, 45, 52, 42, 36.

Каталізатор *B:* 40, 27, 59, 42, 25, 58, 42, 26, 37.

Чи можна вважати, що стабільність виходу небажаного продукту (характеризується дисперсією) при використанні каталізаторів А та В однакова?

13. На комп’ютері моделюється нормально розподілена випадкова величина. Реалізація вибірки цієї випадкової величини: 2,41; 2,26; 2,10; 2,53; 1,96; 1,31; 2,32; 2,66.

Чи можна стверджувати, що вибірку одержано з нормального розподілу з середнім 2,5?

Вказівка. Скористатися критерієм Стьюдента, спочатку сформулювавши відповідну задачу перевірки статистичних гіпотез.

14. В одному класі з 20 дітей навмання були відібрані 10, яким щоденно почали давати апельсиновий сік. Решта 10 школярів щодня одержували молоко. Через певний час зафіксували збільшення маси дітей у фунтах (один фунт становить 453,6 г):

Сік	4,0	2,5	3,5	4,0	1,5	1,0	3,5	3,0	2,5	3,5
Молоко	1,5	3,5	2,5	3,0	2,5	2,0	2,0	2,5	1,5	3,0

Середнє збільшення маси одного школяра становить у першій групі 2,9 фунта, у другій – 2,4. Чи є істотною ця різниця в середній масі дітей?

15. Нижче наведено дані про вимірювання нерівностей поверхні з регулярним профілем (одного й того самого зразка чистоти) за допомогою подвійних мікроскопів.

Мікроскоп I: 0,8; 2,0; 3,1; 3,5; 2,1; 1,7; 0,9; 1,1; 3,3.

Мікроскоп II: 0,7; 2,1; 3,1; 0,9; 3,6; 2,7; 0,8; 4,7; 0,3; 4,1; 2,8; 0,6.

З’ясувати, чи можна вважати точність вимірювання кожним мікроскопом однаковою?

16. Номінальний опір резистора 2000 Ом. Для контролю відібрано партію з 12 резисторів. Після вимірювання опору кожного з точністю до 5 Ом одержано такі значення: 2130, 2090, 2030, 2080, 1920, 2020, 2015, 2000, 2045, 1940, 1980, 1970.

Чи можна відхилення від номіналу (2000 Ом) розглядати як випадкові (допустимі), чи, навпаки, результати вимірювань свідчать про те, що опір резисторів істотно відрізняється від номіналу?

Розв’язати поставлену задачу, сформулювавши її як задачу перевірки статистичних гіпотез.

17. На сталеливарному заводі з метою контролю вмісту марганцю в одній із марок сталі зробили 10 відливків з конвертора I й стільки ж із конвертора II. Нижче наведено процентний вміст марганцю в кожному відливку.

Конвертор I: 1,20; 1,17; 1,15; 1,21; 1,14; 1,17; 1,18; 1,21; 1,25; 1,14.

Конвертор II: 1,39; 1,29; 1,28; 1,34; 1,32; 1,30; 1,28; 1,35; 1,35; 1,30.

Чи можна вважати вміст марганцю в сталі, виплавленій в цих конверторах, однаковим?

18. Для зменшення дисперсії відбивної здатності фарби внесені зміни в технологію її виготовлення. Щоб переконатися, що такі зміни справді дають ефект, виготовили 10 пробних зразків. Нижче наведено дані (у відносних одиницях) про відбивну здатність фарби, виготовленої при використанні звичайної (А) та нової (В) технологій, одержані за допомогою спеціального оптичного приладу.

Технологія *А:* 40, 45, 195, 65, 145.

Технологія *В:* 110, 55, 120, 50, 80.

Чи свідчать ці дані про зміну дисперсії відбивної здатності фарби?

19. Для контролю напруги в освітлювальній мережі (стандарт 220 В) щогодини протягом доби реєстрували напругу (у вольтах): 220, 222, 220, 220, 220, 222, 220, 218, 218, 220, 220, 222, 222, 220, 218, 220, 222, 216, 218, 214, 210, 218, 223, 215.

Чи можна відхилення від стандарту (220 В) розглядати як випадкові? Чи, навпаки, наведені дані вказують на систематичне відхилення напруги від стандарту?

20. Дослідження, що проводилися протягом кількох років після того, як у практиці лижного спорту почала застосовуватися техніка ковзної ходи, дають підставу припустити, що вона, за умов спеціально підготовленої траси, забезпечує на дистанції 15 км у чоловіків виграш порівняно з традиційною технікою в середньому 2 хв. Нижче наведено результати (у хвилинах) змагань (дистанція 15 км) двох груп лижників: одні проходили дистанцію традиційною ходою, а інші – ковзною.

Традиційна хода: 37,02; 36,74; 37,82; 38,12; 36,91; 37,98; 38,21; 37,51; 37,56; 38,03.

Ковзна хода: 35,81; 35,61; 35,02; 35,53; 35,84; 35,12; 36,12; 36,49; 35,62; 36,28.

Чи можна за результатами цих змагань дійти висновку, що середня різниця результатів становить 2 хв?

21. Значення незміщеної оцінки дисперсії вибірки *А* становить 55,4 кг^2, а вибірки *В* – 87,3 кг^2.

Чи можна стверджувати, що вибірки одержано із сукупності з одним і тим самим значенням дисперсії, якщо їх обсяги становлять відповідно 15 та 12?

Які припущення при цьому необхідно зробити?

22. Досліджувалась корозійна стійкість нержавіючої сталі 18Cr10Ni2Mo (сталь, що містить 18% хрому, 10% нікелю, 2% молібдену). Експеримент проводили на 12 зразках. Перш ніж дослідити їх на корозійну стійкість, визначили якість сталі, з якої були виготовлені зразки (відповідність стандарту). Вміст хрому (у масових відсотках) у досліджуваних зразках був такий: 17,4; 17,9; 17,6; 18,1; 17,6; 18,9; 16,9; 17,5; 17,8; 17,4; 24,6; 21,0.

Перевірити, чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що вміст хрому в сталі становить 18%?

23. У лабораторії, де вивчається вплив довкілля на людину, для визначення кімнатної температури, за якої найбільш комфортне почувають себе чоловіки й жінки, були обстежені 10 чоловіків і стільки само жінок. Одержані значення температури найбільшої комфортності (за Фаренгейтом) наведено нижче.

Чоловіки: 74, 71, 77, 76, 72, 75, 73, 74, 75, 72.

Жінки: 75, 77, 78, 79, 77, 73, 78, 78, 80, 76.

Чи свідчать ці дані про те, що температура, за якої людина почуває себе комфортне, для чоловіків та жінок однакова? t°F=(9/5)t°C+32, де t°F – температура за Фаренгейтом, t°C – температура за Цельсієм.

24. При вимірюванні опору дроту двох типів (А та В) одержано дані, наведені нижче.

Дріт *A:* 0,126; 0,131; 0,126; 0,127; 0,124; 0,130; 0,128; 0,124.

Дріт *B:* 0,121; 0,121; 0,124; 0,122; 0,120; 0,124; 0,125; 0,120.

Стверджується, що між розсіюваннями опорів дроту типів А та В немає різниці.

Чи не суперечить це твердження наведеним даним?

25. Готується гумова суміш, з якої потім виготовляються зразки для випробувань. Очікувана (розрахункова) міцність на згин гуми в умовних одиницях становить 11.

Чи можна за наведеними нижче даними дійти висновку, що одержано гуму з очікуваною міцністю на згин?

Міцність на згин: 10,3; 11,1; 11,8; 12,0; 10,8; 13,6; 12,0; 12,5; 11,6; 12,2; 12,3; 12,5; 12,6; 13,7; 13,3; 10,5.

26. На двох верстатах одного класу точності виготовляють однакову продукцію. Критичним розміром виробу є його зовнішній діаметр. Нижче наведено значення оцінок зовнішнього діаметра та оцінок його дисперсії, обчислені за вибірками обсягом 15 та 10, одержаними відповідно з верстатів А і В:

$\overline{\xi}_{\text{A}} = 45{,}3;\quad s_{\text{A}}^2 = 1{,}07;$

$\overline{\xi}_{\text{В}} = 46{,}1; \quad s_{\text{В}}^2 = 0{,}84.$

Чи можна за цими даними дійти висновку, що зовнішній діаметр виробів, виготовлених на верстатах *A* та *B,* однаковий?

27. Пропонується нова методика визначення вмісту марганцю в одній з марок сталей, яка, ймовірно, дає менше розсіювання результатів порівняно з традиційною. Нижче наведено процентний вміст марганцю в 10 відливках, визначений за традиційною методикою, та у 8 – за новою.

Традиційна методика: 1,22; 1,15; 1,17; 1,22; 1,26; 1,27; 1,19; 1,22; 1,20; 1,15.

Нова методика: 1,21; 1,24; 1,18; 1,17; 1,15; 1,18; 1,17; 1,17.

Чи є підстава вважати, що нова методика визначення вмісту марганцю дає менше розсіювання порівняно з традиційною?

28. Сталевий дріт, що йде на виготовлення канатів, повинен мати середнє граничне значення зусилля на розрив 6720 кг/см^2 (у середньому розрив дроту настає при такому зусиллі).

Раніше проведена серія спостережень дає підставу вважати, що значення граничного зусилля на розрив, яке витримують окремі зразки дроту, має нормальний розподіл.

З метою контролю якості з кожної партії дроту, що надходять на завод, 20 зразків випробовують на розрив. Результати одного з таких випробувань наведено нижче (фіксувалися граничні значення зусилля на розрив, за яких відбувається руйнування зразка, коротко: границя міцності).

Границя міцності: 6300, 6870, 6720, 6980, 6780, 6780, 6780, 6720, 6630, 6660, 6900, 7130, 6690, 6750, 6560, 6700, 6930, 6720, 6950, 6960.

Чи можна на підставі наведених даних стверджувати, що для цієї партії дроту границя міцності не менша ніж 6720 кг/см^2?

29. Два підприємства (А та В) виготовляють цегляну футерівку для кисневих конверторів. Споживач хоче з'ясувати, чи відрізняється футерівка підприємств за своїми характеристиками, щоб надалі закуповувати продукцію з кращими показниками. Для цього він реєструє кількість плавок, які можна зробити в конверторі до того, як з'явиться потреба замінити футерівку. Одержані дані наведено нижче.

Підприємство А*:* 237, 224, 218, 227, 234, 215, 219, 225, 230.

Підприємство В*:* 216, 202, 205, 200, 207,198, 222, 214, 226, 204.

Чи можна на підставі цих даних дійти висновку про істотну різницю кількості плавок до заміни футеровок, виготовлених на підприємствах А та В?

30. У результаті перевірки коефіцієнта пружності зразків за стандартною процедурою встановлено, що дисперсія коефіцієнта пружності дорівнює 324. Дібрано вибірку обсягом 20 й одержано оцінку дисперсії $s^2 = 530$.

Чи є слушним припущення про нестабільність стандартної процедури перевірки коефіцієнта пружності (стабільність характеризується дисперсією)?

31. Проводилося дослідження шин, що використовуються на автобусах, о метою розроблення модифікації, яка б мала більший пробіг. Зокрема, досліджувалася температура, до якої нагрівалися передні шини під час руху автобуса. За наведеними в таблиці значеннями температури (в умовних одиницях) лівої та правої шин з'ясувати, чи є істотними відмінності в цих показниках.

Автобус	Шина		Автобус	Шина	
	ліва	права		ліва	права
1	36	27	7	41	60
2	42	45	8	40	34
3	55	84	9	100	117
4	59	84	10	58	78
5	79	70	11	38	56
6	108	99	12	73	88

Сформулювати і розв'язати поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез.

32. На автоматичному верстаті обробляються втулки. Після налагодження верстата було дібрано вибірку кількістю 10 виробів. Виявилося, що вибіркове значення $\overline{\xi}$ діаметра втулки становить 2,059 мм, а вибіркова дисперсія s_{ξ}^{2} = 4,4 мкм^2. Через певний проміжок часу з метою контролю рівня налагодження верстата на заданий діаметр втулки знову добиралася вибірка кількістю 10 виробів, для якої вибіркове середнє $\overline{\xi}$ = 2,063 мм, а вибіркова дисперсія s_{ξ}^{2} = 8,6 мкм^2. Припустимо, що протягом зазначеного проміжку часу зміни в роботі верстата можуть позначитися тільки на рівні його налагодження, але точність роботи верстата не зміниться.

Чи свідчать наведені дані про зміну рівня налагодження верстата за проміжок часу, що відокремлює моменти добору вибірок?

33. Дисперсія границі міцності на розрив волокна становить 35,63 фунт^2. Очікується, що внесені в технологічний процес зміни зменшать зазначену дисперсію. Зареєстровано такі значення міцності на розрив (у фунтах): 151, 156, 147, 153, 155, 148, 160, 149, 156, 161, 154, 162, 163, 149, 150.

Чи привела зміна технологічного процесу до (зменшення дисперсії?

1 фунт=453,6 г.

34. Тривалість знеболювальної дії препарату. Порівнюється дія знеболювальних препаратів *A* та *B* (у деяких випадках одним з ліків може бути інертне плацебо (пустушка), що використовується для контролю при дослідженні дії іншого препарату).

Група хворих, які виявили бажання взяти участь в експерименті, налічувала вісім чоловік. Цілком можливо, що в цих хворих вік, стать, загальний стан тощо не однакові. Тому дають обидва препарати кожному хворому і щоразу фіксують тривалість знеболювальної дії кожного з них. Щоб забезпечити чистоту експерименту, вжито всі виправдані застережні заходи: між прийманнями обох препаратів минає час, що виключає перекривання їх дії; четверо хворих одержують спочатку препарат *B,* при цьому жоден із них не знає, який саме препарат він уживає, і т. д. Результати експерименту наведено в таблиці (фіксувалася в годинах тривалість знеболювальної дії препаратів *A* та *B*).

Хворий	Тривалість дії препаратів		Різниця тривалості дії препаратів *B* та *A*
	A	*B*	
1	3,2	3,8	0,6
2	1,6	1,0	-0,6
3	5,7	8,4	2,7
4	2,8	3,6	0,8
5	5,5	5,0	-0,5
6	1,2	3,5	2,3
7	6,1	7,3	1,2
8	2,9	4,8	1,9

Зробити висновок про дію препаратів, вважаючи, що:

1) немає апріорної інформації про ефективність препаратів;
2) фармакологічна активність препарату *B* не менша, ніж препарату *A*.

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

35. Необхідно порівняти границю міцності проти розтягу гумової суміші типів *A* та *B*. Для цього виготовили партію о восьми зразків прямокутної форми, по чотири з кожної суміші, і піддали їх повздовжньому розтягу. Один із зразків суміші А, визнаний дефектним, був вилучений з партії до початку випробувань.

Одержані результати випробувань (фіксувалася границя міцності проти розтягу зразків двох гумових сумішей) наведено нижче.

Суміш *A* : 3210, 3000, 3315.

Суміш *B* : 3225, 3320, 3365, 3145.

Чи можна вважати, що склад гуми не впливає на її міцність?

Відповідь дати в термінах перевірки статистичних гіпотез.

36. Наведені нижче числа є значеннями твердості 10 зразків сплаву в умовних одиницях: 12,1; 13,7; 11 0’ 11,6; 11,9; 13,9; 11,5; 12,9; 13,0; 10,5.

Чи можна вважати, що дисперсія твердості становить 2,25?

37. Дані вимірювання довжини зразків виробів (у міліметрах) до і після відпалювання їх у високочастотній печі такі:

Зразок	До відпалювання	Після відпалювання	Зразок	До відпалювання	Після відпалювання
1	11,94	12,ПО	6	11,96	11,98

2	11,99	11,99	7	11,95	12,03
3	11,98	11,95	8	11,96	12,02
4 I	12,03	12,07	9	11,92	12,01
5 J	12,03	12,03	10	12,00	11,99

Чи привело термооброблення до зміни розмірів виробів?

38. Два оператори провели 14 незалежних експериментів, досліджуючи температуру займання емалі одного складу. Кожен з них випробував 7 зразків. Нижче наведено результати дослідів.

Оператор *A:* 1450, 1425, 1420, 1410, 1370, 1360, 1270.

Оператор *B:* 1430, 1420, 1380, 1320, 1320, 1290, 1280.

Чи є істотною різниця між результатами, одержаними різними операторами?

Сформулювати і розв’язати поставлену задачу в термінах перевірки статистичних гіпотез.