**Мінімальна правильна розфарбовка ребер графа**

**Означення 3.** Граф $G = (V, E)$ називається графом з розфарбованими ребрами (colored edges), якщо задане відображення множини ребер $E$ на множину натуральних чисел:

$$\psi : E \to \mathrm{N}.$$

Натуральні числа можна вважати номерами кольорів за якоюсь таблицею. Тоді кожне ребро фарбується у якийсь колір. Як і при фарбуванні вершин, будемо для зручності позначати кольори натуральними числами – їхніми номерами.

**Означення 4.** Розфарбовка ребер графа називається правильною (regular edge coloring), якщо суміжні ребра фарбуються різними кольорами.

Мінімальною правильною розфарбовкою ребер графа (minimum regular edge coloring) називається правильна розфарбовка мінімальною кількістю фарб. Кількість фарб у мінімальній правильній розфарбовці ребер графа називається хроматичним індексом графа (chromatic index).

Якщо максимальний ступінь вершин графа позначити як $\delta$, то, вочевидь, хроматичний індекс не може бути меншим за $\delta$. Дійсно: всі ребра, що є інцидентними до вершини з максимальним ступенем, повинні бути розфарбовані різними кольорами, а таких ребер як раз $\delta$.

З іншого боку, має місце теорема Візінга,поява якої мала революційне значення в цих дослідженнях.

**Теорема 1. Теорема Візінга (Vizing)**. Хроматичний індекс графа не перевищує $\delta + 1$.

Згідно з теоремою Візінга усі графи можна розбити на два класи за хроматичним індексом: клас $\delta$ та клас $\delta + 1$. На жаль, визначення, до якого саме класу належить конкретний граф, є досить складною задачею.

Спробуємо розв’язати задачу про мінімальну правильну розфарбовку ребер за допомогою жадібного алгоритму (greedy algorithm). Для цього знайдемо у графі максимальне паросполучення. Його ребра є несуміжними між собою, тому їх можна пофарбувати одним кольором. Пофарбуємо їх кольором номер 1. Вилучимо з графа ці ребра. В тому графі, що залишився, знову знайдемо максимальне паросполучення, та пофарбуємо його ребра у колір номер 2, і т. д. до повного вичерпання ребер. Такий алгоритм, безумовно, буде давати правильну розфарбовку: суміжні ребра завжди будуть пофарбовані різними кольорами.Але чи завжди ця правильна розфарбовка буде мінімальною?

На дошці розглянуто граф граф з $n$ = 5 вершинами та $m$ = 4 ребрами.

Як видно, в залежності від вибору максимальної незалежно множини вершин можна отримати як оптимальний розв'язок, так і не оптимальний.

Розглянемо алгоритм, який дає правильне розв'язання нашої задачі. Сформулюємо її як задачу ЦЛП. Номер фарби – це натуральне число, тому введемо до розгляду цілочисельні змінні $e_k$, асоційовані з ребрами. Усього маємо $m$ таких змінних, і кожна з них може приймати значення від 1 до $m$ (або від 0 до $m-1$, якщо так зручніше для програмування): це номер фарби ребра $e_k$. В найгіршому випадку кожне ребро буде мати свій колір, тому максимальне значення кожної змінної $e_k$ – це $m$:

$$e_k \in \{1, 2,\ldots,m\}\ ;\ \ k = 1, 2,\ldots, m.$$

Насправді за теоремою Візінга можна стверджувати, що кожна $e_k$ не буде перевищувати $\delta + 1$. Нам треба мінімізувати максимальне $e_k$:

$$t = \max e_k \rightarrow \min .$$

$$k=1, 2,\ldots.,m.$$

Зручніше за все ввести для цього до розгляду ще одну додаткову змінну $e_0$ (теж цілочисельну), і пов'язати її з усіма іншими $e_k$ системою лінійних нерівностей:

$$e_k \le e_0;$$

$$k = 1, 2,\ldots.,m.$$

Тоді цільова функція – це:

$$t = e_0 \rightarrow \min .$$

У задачі про мінімальну правильну розфарбовку суміжні ребра повинні мати різні кольори (номери фарб). Це означає: для кожної вершини $v_i \in V$ змінні $e_k$,що відповідають ребрам, інцидентним до цієї вершини, повинні відрізнятися хоча б на одиницю:

$$|e_{i1} - e_{i2}| \ge 1;$$

$$\forall v_i \in V\ ;$$

де $e_{i1}$, $e_{i2}$ – будь-яка пара ребер, інцидентних до вершини $v_i$.

Якщо позначити ступінь вершини $v_i$ (кількість інцидентних до неї ребер) як $d_i$, то усього для кожної вершини $v_i$ буде $p_i = d_i\,(d_i - 1)/2$ таких нерівностей. Як і в задачі про правильну розфарбовку вершин, ці нелінійні нерівності можна звести до лінійних, якщо ввести до розгляду $p_i$ бінарних змінних для кожної вершини $v_i$

$$v_{ij} = 0 \vee 1;$$

$$j = 1, 2, \ldots, p_i\,;\ \forall v_i \in V.$$

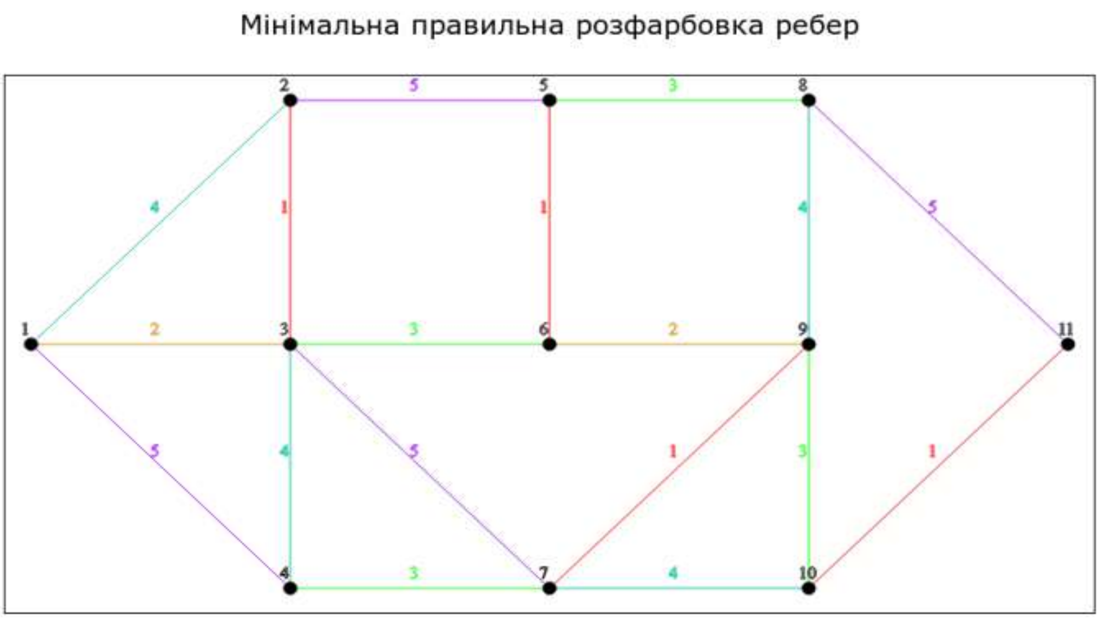
Тоді маємо систему нерівностей:

$$e_{i1} - e_{i2} - m v_{ij} \le -1;$$

$$e_{i2} - e_{i1} + m v_{ij} \le m - 1;$$

$$j = 1, 2, \ldots, p_i\,;\quad \forall v_i \in V.$$

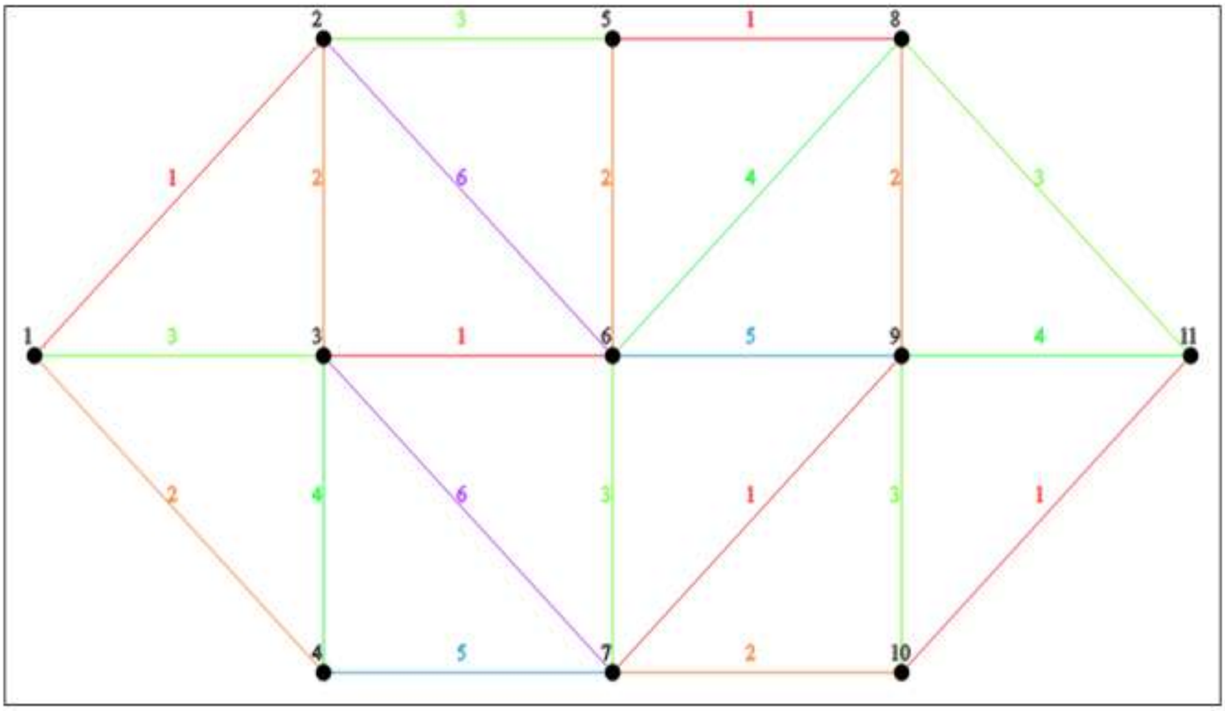
За теоремою Візінга у цих формулах замість $m$ можна поставити $\delta + 1$.




Мал. 3.5. Мінімальна правильна розфарбовка ребер графа за допомогою зведення до задачі ЦЛП

.

Мінімальна правильна розфарбовка ребер



Для досить простого графа з мал. 3.5 будемо мати

3 + 3 + 10 + 3 + 3 + 3 + 6 + 3 + 6 + 3 + 1 = 44 пари, тобто 88 обмежень.

Це – найбільший граф, для якого вдалося правильно розфарбувати ребра за

допомогою пакета Glpk.js .

Для графів більших розмірів можна скористатися наближеним жадібним алгоритмом. При цьому теорема Візінга допоможе зрозуміти, чи правильний розв’язок ми отримали. Якщо ребра графа розфарбувалися $\delta$ фарбами, то розв’язок точно правильний хроматичний індекс не може бути меншим за $\delta$. Якщо для розфарбовки потрібно $\delta + 1$

фарб, то розв’язок, можливо, теж правильний, але не обов’язково. І, нарешті, якщо виявиться, що треба більш ніж $\delta + 1$ фарб, то це точно неправильно, бо протирічить теоремі Візінга. В цьому випадку жадібний алгоритм не підходить.