Завдання для самостійної роботи з РМФ для групи ПА-20-1з

2022/11/30

Зміст

	Варіант
Квятковська Катерина Михайлівна	1
Кондик Єлизавета Олександрівна	2
Мовсісян Лаура Ростомівна	3
Моісеєнков Данило Валерійович	4
Розенко Єгор Дмитрович	5

1 Канонічний вид лінійного рівняння в частинних похідних другого порядка з двома незалежними змінними

Для однорідного лінійного рівняння з частинними похідними другого порядка

$$a_{1,1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_1\,\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial u}{\partial y} + a_\star\,u = 0\,,$$

де коефіцієнти $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, a_1, a_2 та $a_\star$ суть відомі функції декартових ортогональних координат x, y на площині, знайти області, в яких рівняння зберігає тип, та привести рівняння до канонічного виду в кожній такій області.

1. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 5\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$

2. $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$

3. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$

4. $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 6u = 0$

5. $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 8\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 4u = 0$

6. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 8\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 2u = 0$

7. $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 8xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 6\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 8\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$

8. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 4\,\dfrac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0$

9. $\mathtt{sign}\,y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathtt{sign}\,x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 5\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 7u = 0$

10. $y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$

2 Задачі *Діріхле* для рівняння *Лапласа*

1. Розв'язати внутрішню задачу *Діріхле* для рівняння *Лапласа*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y) \in \mathcal{D} = \Big\{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < c^2\Big\}\,, \\ u(x,y) = g_{0,k}(x,y)\,, & (x,y) \in \mathcal{C} = \Big\{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = c^2\Big\}\,. \end{cases}$$

Розв'язки подати в полярній та декартовій системах координат. Обгрунтувати розв'язки, для чого показати, що вони задовільняють: 1) рівнянню *Лапласа* в декартовій та полярній системах координат; 2) умови на колі $\mathcal{C}$ в декартовій системі координат.

2. Розв'язати зовнішню задачу *Діріхле* для рівняння *Лапласа*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y) \in \mathcal{D} = \Big\{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 > c^2\Big\}\,, \\ u(x,y) = g_{0,k}(x,y)\,, & (x,y) \in \mathcal{C} = \Big\{(x,y) \mid (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = c^2\Big\}\,, \end{cases}$$

Розв'язки подати в полярній та декартовій системах координат. Обгрунтувати розв'язки, для чого показати, що вони задовільняють: 1) рівнянню *Лапласа* в полярній системі координат; 2) умови на колі $\mathcal{C}$ в декартовій системі координат.

Умови на колі $\mathcal{C}$ наведені в табл. 2.1.

Табл. 2.1. Варіанти умов

№	$g_{0,1}(x,y)$	$g_{0,2}(x,y)$	$g_{0,3}(x,y)$	$g_{0,4}(x,y)$	$\mathcal{C}$
01	x^2	$x^3+y^3+x^2y+xy^2$	x^4	x^5	$x^2+y^2+x+3y-\frac{3}{2}=0$
02	y^2	$x^3+y^3+x^2y+xy^2$	y^4	y^5	$x^2+y^2+x+5y-\frac{5}{2}=0$
03	xy	$x^3+y^3+x^2y+xy^2$	x^3y	x^4y	$x^2+y^2+3x-2y-\frac{3}{4}=0$
04	x^2+x	$x^3+y^3+x^2y$	xy^3	xy^4	$x^2+y^2-3x-3y+\frac{1}{2}=0$
05	y^2+x	$x^3+y^3+xy^2$	x^2y^2	x^3y^2	$x^2+y^2+3x+4y+\frac{9}{4}=0$
06	$xy+x$	$x^3+x^2y+xy^2$	x^4	x^2y^3	$x^2+y^2-4x+y+\frac{1}{4}=0$
07	x^2+y	$y^3+x^2y+xy^2$	y^4	x^5	$x^2+y^2+5x-3y+\frac{9}{2}=0$
08	y^2+y	$x^3+y^3+x^2y$	x^3y	y^5	$x^2+y^2-x-2y-1=0$
09	$xy+y$	$x^3+y^3+xy^2$	xy^3	x^4y	$x^2+y^2+x+6y+7=0$
10	x^2+xy	$x^3+x^2y+xy^2$	x^2y^2	xy^4	$x^2+y^2-2x+3y+1=0$

3 Крайова задача для рівняння теплопровідності

Розв'язати крайову задачу для рівняння теплопровідності

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t \leqslant T\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} u(t,0) = \psi_1(t) \\ u(t,\ell) = \psi_2(t) \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \end{cases}$$

де $f(t,x) \equiv 0$, а початкова умова є такою (побудувати графік!)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [\,0, x_1]\,, \\ h_1 \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}\,, & x \in [x_1, x_2]\,, \\ h_1 + (h_2 - h_1) \dfrac{x - x_2}{x_3 - x_2}\,, & x \in [x_2, x_3]\,, \\ h_2 \dfrac{x_4 - x}{x_4 - x_3}\,, & x \in [x_3, x_4]\,, \\ 0\,, & x \in [x_4,\ \ell\,]\,, \end{cases}$$

а функції $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ та значення параметрів a, ℓ, x_{1-4}, $h_{1,2}$ наведені в табл. 3.1.

Довести, що розкладання початкової умови $u_0(x)$ в тригонометричний ряд *Фурьʼє* є правильним, побудувавши на графіку початкової умови скінчений ряд *Фурьʼє* цієї умови.

Табл. 3.1. Варіанти умов

№	a	ℓ	x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	$\psi_1(t)$	$\psi_2(t)$	T
1	2	5	2	3	4	5	$+1$	-1	0	0	8
2	4	7	2	3	5	6	$+3$	$+1$	0	0	9
3	1	5	2	3	4	5	-1	$+1$	0	0	7
4	3	6	1	3	4	6	-2	-1	0	0	8
5	2	5	1	2	3	5	$+2$	0	0	0	6
6	3	7	2	3	4	6	-2	-2	0	0	8
7	1	5	1	2	3	4	$+3$	$+1$	0	0	5
8	2	6	0	1	2	3	0	$+2$	0	0	7
9	4	6	1	2	3	4	$+2$	$+3$	0	0	9
10	2	5	1	2	3	5	$+2$	0	0	0	6

4 Крайова задача для рівняння коливань струни

Розв'язати крайову задачу для рівняння коливань струни

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ \left.\begin{aligned} u(0,x) &= u_0(x) \\ \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} &= u_1(x) \end{aligned}\right\}, & 0 < x < \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} u(t,0) &= \psi_1(t) \\ u(t,\ell) &= \psi_2(t) \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{cases} \tag{4.1}$$

де $f(t,x) \equiv 0$, $u_1(x) \equiv 0$, а функції $u_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ та значення параметрів a, ℓ, x_{1-4}, $h_{1,2}$ суть такі ж самі, як в крайовій задачі для рівняння теплопровідності.