Методи оптимізації. Лекція

Класифікація задач оптимізації
за деякими аспектами їхніх постановок

1. *За наявністю умов* (*обмежень*):
   - задачі безумовної оптимізації: $f(x) \to min, x \in E^n$;
   - задачі умовної оптимізації: $f(x) \to min, x \in X \subset E^n$.
2. *За кількістю змінних:*
   - задачі одновимірної оптимізації: цільова функція залежить від однієї змінної, $X \subset E^1$;
   - задачі скінечновимірної оптимізації, тобто $n \geq 2$, $n < \infty$;
   - задачі нескінечновимірної оптимізації (мінімізації функціоналів).
3. *За виглядом допустимої області:*
   - задачі неперервної оптимізації;
   - задачі дискретної оптимізації.
4. *За наявністю випадкового фактору:*
   - детерміновані (немає випадкового фактору);
   - стохастичні (є випадковий фактор).
5. *За кількістю точок екстремуму:*
   - одноекстремальні;
   - багатоекстремальні.
6. *Із урахуванням часу*:
   - статичні (час не враховується);
   - динамічні.

Задача математичного програмування в загальному вигляді може бути сформульована так:

$$f(x) \to min,$$

$$x \in X = \left\{ x \in E^n : x \in X_0, g_i(x) \leq b_i, i = \overline{1,m}, g_i(x) = b_i, i = \overline{m+1,p} \right\}.$$

Функції $f(x)$ та $g_i(x)$ вважаються опуклими функціями.

Тут X_0 – множина простої структури. Такими множинами є: невід'ємний октант, *n*- мірна куля і *n*- мірний паралелепіпед та деякі інші.

На рисунку на площині показані:

а) $X_0 = \left\{ x \in E^2, x = (x_1, x_2) : x_i \geq 0, i = 1,2 \right\}$. Перша чверть координатної площини або невід'ємний октант при $n = 2$;

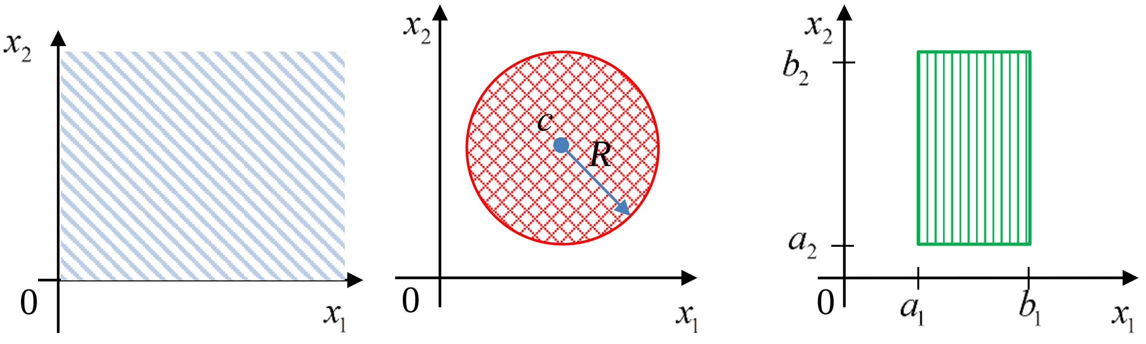
б) 2-вимірна куля – це коло.

$$X_0 = \left\{ x \in E^2, x = (x_1, x_2): (x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2 \leq R^2 \right\},$$

де $c = (c_1, c_2)$ – центр кола, R – радіус;

в) *n*- мірний паралелепіпед на площині – прямокутник.

$$X_0 = \left\{ x \in E^2, x = (x_1, x_2): a_i \le x_i \le b_i, \ i = 1,2 \right\}.$$



а) б) в)

Задачі математичного програмування діляться на
- задачі лінійного програмування (ЛП),
- задачі нелінійного програмування (НЛП).

Постановка задачі лінійного програмування.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min),$$

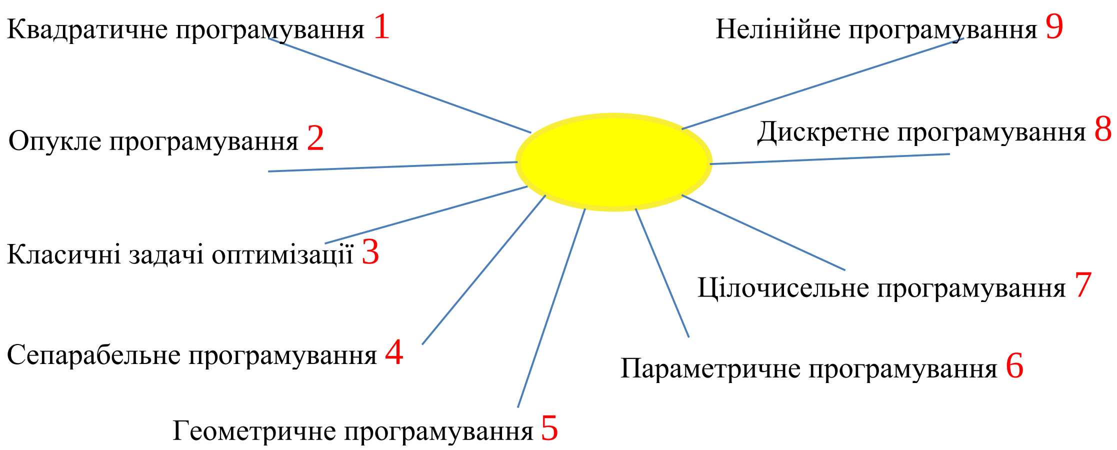
$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i, \ i = \overline{1,p},$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i, \ i = \overline{p+1,m},$$

$$x_j \ge 0, \ i = \overline{1,s}, \ s \le n.$$

Цільова функція і обмеження є лінійними. Основним методом розв'язання задач ЛП є симплекс-метод.

Класифікація задач нелінійного програмування (НЛП)



1. **Квадратичне програмування**.

$$f(x) = (Ax, x) - (b, x) \to min,$$

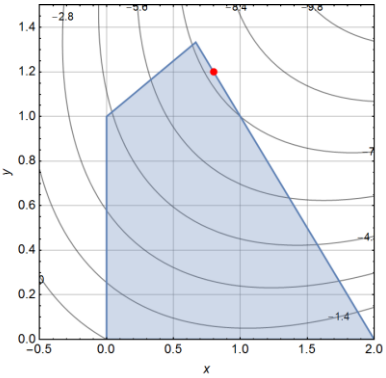
де A – симетрична додатно визначена матриця, функції $g_i(x)$ – лінійні функції, $b \in E^n$.

Приклад.

$$f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 + 2x_2 \le 2 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$



2. **Опукле програмування.** Функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ – опуклі функції, визначені на опуклій множині.

3. **Класичні задачі оптимізації.** Функція $f(x)$ є неперервно-диференційовною.

- задача безумовної оптимізації (без обмежень):

  $f(x) \to min\ , x \in E^n$. $f(x) \in C^1(E^n)$.

  Метод розв'язання: $f'(x) = 0$.

- задача умовної оптимізації:

  $f(x) \to min\ , x \in X \subset E^n$. $f(x) \in C^1(X)$.

  Метод розв'язання: метод множників Лагранжа.

4. **Сепарабельне програмування**. Функції $f(x)$, $g_i(x)$, $i = \overline{1,m}$ – сепарабельні функції. Тобто функції вигляду: $f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)$.

Приклад.

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 - \cancel{2x_1x_2} - 6x_1 - 8x_2 - 5x_3 \to min,$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 5 \\ x_1^2 + \cancel{x_1x_2} - x_2 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

5. **Геометричне програмування**. Функції $f(x)$ и $g_i(x)$, $i = \overline{1,p}$ – позиноми.

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (x_1)^{\alpha_{j1}} \cdot (x_2)^{\alpha_{j2}} \cdot \ldots \cdot (x_n)^{\alpha_{jn}},$$

$g_i(x) < 1,\ i = \overline{1,p}$,

$c_j > 0,\ \alpha_{jk}$ – дійсні числа.

6. **Параметричне програмування**. Цільова функція і/або обмеження залежать від параметру.

Наприклад, параметрична задача лінійного програмування:

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}\left(c'_j+c''_j\,t\right)x_j\to max,$$

$$\sum_{j=1}^{m}\left(a'_{ij}+a''_{ij}\,t\right)x_j=b'_i+b''_i t,\ i=\overline{1,m},$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n},\ t\in[\alpha,\beta].$$

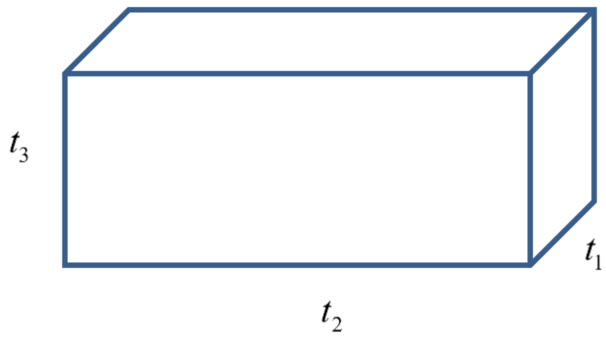
7. **Цілочисельне програмування**. Змінні задачі вважаються цілочисельними.

8. **Дискретне програмування.** Множина допустимих розв'язків є дискретною множиною.

9. Власне **задачі НЛП**, тобто задачі які розв'язуються загальними методами розв'язання задач НЛП.

Приклад. Задача геометричного програмування.

Нехай потрібно переправити через річку 400 *м*³ гравію. Припустимо, що гравій вантажиться у відкритий ящик завдовжки t_1 *м*, шириною t_2 *м* і висотою t_3 *м*. Бічні сторони і дно ящика виготовлені з матеріалу, вартість 1 *м*² якого 10 грошових одиниць, а передня і задня стінки – із матеріалу по 20 грошових одиниць за *м*². Кожне перевезення ящика будь-якого розміру з одного берегу на інший і назад коштує 0,1 грошова одиниця, причому після його використання ящик не матиме залишкової вартості. Чому дорівнює мінімальна вартість транспортування 400 *м*³ гравію?



Очевидно, що при лінійних розмірах ящика t_1, t_2, t_3 *число рейсів*, які потрібно виконати для перевезення 400 *м*³ гравію становить $\dfrac{400}{t_1\cdot t_2\cdot t_3}$, а вартість перевезень: $0.1\dfrac{400}{t_1\cdot t_2\cdot t_3}$.

Загальна вартість матеріалу становить

$$40\cdot t_2\cdot t_3+20\cdot t_1\cdot t_3+10\cdot t_1\cdot t_2.$$

Отже, сумарна вартість перевезень з врахуванням вартості матеріалу становить:

$$g(t)=\frac{40}{t_1\cdot t_2\cdot t_3}+40\cdot t_2\cdot t_3+20\cdot t_1\cdot t_3+10\cdot t_1\cdot t_2.$$

Природними обмеженнями будуть умови додатності змінних:

$$t_1>0,\ t_2>0,\ t_3>0.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є $t_1 = 2$, $t_2 = 1$, $t_3 = 0.5$. $g\left(t^*\right) = 100$.

Класичний метод пошуку екстремуму

Нехай $f\left(x\right)$ є диференційовна у просторі E^n, тобто $f\left(x\right) \in C^1\left(E^n\right)$.

Тоді точками локального мінімуму або максимуму функції $f\left(x\right)$ у просторі E^n можуть бути лише ті точки x у просторі, в яких $f'\left(x\right) = 0$, тобто

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_k} = 0,\ k = \overline{1,n}. \tag{1}$$

Усі точки, які задовольняють системі (1) називають стаціонарними точками функції $f\left(x\right)$.

Сюди входять точки мінімуму, максимуму, а також точки, в яких функція не має ні мінімуму ні максимуму.

Залучаючи достатні умови або необхідні умови більш високого порядку, ніж перший, серед стаціонарних точок вибираємо точки мінімуму (максимуму).

У тих випадках, коли вдається виявити всі точки локального мінімуму (максимуму) функції $f\left(x\right)$, для визначення глобального мінімуму (максимуму) цієї функції у просторі E^n потрібно перебрати всі точки локального мінімуму (максимуму) та із них вибрати точку з найменшим (найбільшим) значенням функції.

Приклад. Знайти екстремуми функції

$$f\left(x,y\right) = -\frac{1}{9}\left(3x+5y\right)^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}y^2 + 5xy - 2y.$$

Знайдемо похідні цієї функції

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x} = -\left(3x+5y\right)^2 + 3x + 5y,$$

$$\frac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y} = -\frac{5}{3}\left(3x+5y\right)^2 + 5y + 5x - 2.$$

Знайдемо розв'язок системи

$$\begin{cases} -\left(3x+5y\right)^2 + 3x + 5y = 0, \\ -\frac{5}{3}\left(3x+5y\right)^2 + 5y + 5x - 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(3x+5y\right)\left[1-3x-5y\right] = 0, \\ -\frac{5}{3}\left(3x+5y\right)^2 + 5x + 5y - 2 = 0. \end{cases}$$

Ця система розпадається на дві системи

1) $\begin{cases} 3x+5y = 0, \\ 5x+5y-2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = -\frac{3}{5}. \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x+5y=1, \\ 5x+5y=\dfrac{11}{3}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3}, \\ y=-\dfrac{3}{5}. \end{cases}$

Точки $M_0\left(1,-\dfrac{3}{5}\right)$ та $M_1\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{3}{5}\right)$ є стаціонарними точками.

Перевірімо критерій Сильвестра додатної визначеності матриці: матриця $f''(x)$ ***додатно визначена*** в тому і тільки в тому випадку, коли всі її головні (кутові) мінори додатні.

Нагадаємо, що головними (кутовими) мінорами матриці $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$ називаються визначники:

$$\Delta_1=a_{11},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \ldots,\ \Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Матриця $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=\overline{1,n}$ буде ***від'ємно визначеною*** в тому і тільки в тому випадку, коли мають місце такі знаки головних (кутових) мінорів:

$\Delta_1<0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3<0$, $\Delta_4>0$, …

Обчислимо другі похідні функції $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=-6(3x+5y)+3,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=-10(3x+5y)+5.$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=-10(3x+5y)+5,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=-\frac{50}{3}(3x+5y)+5.$$

$$f''(x,y)\Big|_M=\begin{pmatrix} \left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_M \\ \left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_M & \left.\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right|_M \end{pmatrix}.$$

Обчислимо другі похідні функції $f(x)$ в точці $M_0\left(1,-\dfrac{3}{5}\right)$:

$$f''(M_0)=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},\ \Delta_1=3>0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}=-10<0.$$

В точці $M_0\left(1,-\frac{3}{5}\right)$ функція $f\left(x,y\right)$ не має екстремуму.

Досліджуємо другу стаціонарну точку $M_1\left(\frac{4}{3},-\frac{3}{5}\right)$.

Обчислимо другі похідні функції $f\left(x,y\right)$ в точці M_1:

$$f''\left(M_1\right)=\begin{pmatrix}-3 & -5\\ -5 & -\frac{35}{3}\end{pmatrix},\ \Delta_1=-3<0,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}-3 & -5\\ -5 & -\frac{35}{3}\end{vmatrix}=10>0.$$

Матриця других похідних $f''\left(M_1\right)$ від'ємно визначена. Точка $M_1\left(\frac{4}{3},-\frac{3}{5}\right)$ є точка максимуму функції $f\left(x,y\right)$.

В класичному математичному аналізі традиційно розглядається така задача на умовний екстремум: знайти екстремуми функції $f\left(x\right)$ за умови, що змінні x задовольняють обмеженням

$$g_1\left(x\right)=0,\ \ldots,\ g_s\left(x\right)=0,\ x\in E^n.$$

Вважається, що $f\left(x\right)$ та $g_i\left(x\right)$, $i=\overline{1,s}$ є визначеними та мають неперервні частинні похідні першого порядку у всьому просторі E^n.

Методами розв'язання такого класу задач є

- метод виключення частини змінних,
- метод множників Лагранжа.

Метод множників Лагранжа для задачі умовної оптимізації з обмеженнями у формі рівностей

Нехай потрібно розв'язати таку задачу

$$f\left(x\right)\to min \tag{1}$$

за умови

$$x\in X=\left\{\ x\in E^n : g_i\left(x\right)=0, i=\overline{1,s}\right\}. \tag{2}$$

Припустимо, що функції $f\left(x\right), g_1\left(x\right),\ldots, g_s\left(x\right)$ визначені та диференційовні на множині X і $s<n$.

Основна ідея методу множників Лагранжа полягає у переході від задачі на умовний екстремум до задачі знаходження безумовного екстремуму спеціально побудованої функції Лагранжа з наступним застосуванням класичного методу пошуку екстремуму.

Введемо змінні $\lambda_0,\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ і побудуємо функцію Лагранжа

$$L\left(x,\lambda\right)=\lambda_0\ f\left(x\right)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\ g_i\left(x\right). \tag{3}$$

Сформулюємо необхідну умову екстремуму для задачі (1),(2).

Теорема (Ознака Лагранжа). Для того, щоб вектор $x_* = \left(x_1^*,\ldots,x_n^*\right)$ був розв'язком задачі (1), (2), ***необхідно*** існування вектору $\lambda^* = \left(\lambda_0^*,\lambda_1^*,\ldots,\lambda_s^*\right)$, такого що його компоненти λ_i^* $\left(i=\overline{1,s}\right)$ одночасно не дорівнюють нулеві і такі, що всі частинні похідні першого порядку функції Лагранжа $L\left(x,\lambda\right)$ за змінними x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$ в точці x_* дорівнюють нулеві, тобто

$$\frac{\partial L\left(x_*,\lambda^*\right)}{\partial x_k} = \lambda_0^* \frac{\partial f\left(x_*\right)}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i^* \frac{\partial g_i\left(x_*\right)}{\partial x_k} = 0,\ k=\overline{1,n},\ \lambda^* \neq 0. \qquad (4)$$

Умова (4) має ясний геометричний сенс. Вона означає, що градієнти $f'\left(x_*\right), g_1'\left(x_*\right),\ldots, g_s'\left(x_*\right)$ є лінійно залежними. У випадку, коли $s=1$, вектори $f'\left(x_*\right), g_1'\left(x_*\right)$ повинні бути колінеарними.

Якщо $\lambda_0 \neq 0$, то задачу (3) називають невиродженою (регулярною), при $\lambda_0 = 0$ – виродженою. У багатьох практичних задачах $\lambda_0 = 1$.

Відзначимо, що вимірність задачі (1), (2) дорівнює n, а вимірність задачі (3) є $n+s+1$.

Алгоритм методу множників Лагранжа

Крок 1. Будуємо функцію Лагранжа

$$L\left(x,\lambda\right) = f\left(x\right) + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\, g_i\left(x\right)$$

та складаємо систему

$$\frac{\partial L\left(x,\lambda\right)}{\partial x_k} = 0,\ k=\overline{1,n},\ \frac{\partial L\left(x,\lambda\right)}{\partial \lambda_i} = g_i\left(x\right) = 0,\ i=\overline{1,s}.$$

Крок 2. Розв'язавши отриману систему алгебраїчних рівнянь якимось з відомих методів, отримаємо стаціонарні точки x функції Лагранжа.

Крок 3. Залучаючи необхідні умови більш високих порядків або достатні умови, або аналізуючи поведінку цільової функції в околі стаціонарних точок, виберемо серед стаціонарних точок точки мінімуму.

Метод множників Лагранжа для задачі умовної оптимізації з обмеженнями у формі нерівностей

Знайдемо розв'язок задачі

$$f\left(x\right) \to min \qquad (5)$$

за умов

$$x \in X = \left\{ x \in E^n : g_i\left(x\right) \leq 0, i=\overline{1,s} \right\}. \qquad (6)$$

Допустимо, що функції $f\left(x\right), g_1\left(x\right),\ldots, g_s\left(x\right)$ диференційовні та $s<n$.

У цьому випадку застосовується такий алгоритм:

Алгоритм методу

Крок 1. Розглянемо задачу

$$f\left(x\right)\to min, \tag{5}$$

$$g_i\left(x\right)<0, \quad i=\overline{1,s}. \tag{8}$$

Задачу (5), (8) розв'язуємо класичним методом, тобто знаходимо стаціонарні точки, які є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_k}=0,\ k=\overline{1,n},$$

потім перевіряємо чи задовольняють ці точки умові (8). Якщо не задовольняють, виключаємо їх з подальшого розгляду, у протилежному випадку – досліджуємо чи є ці стаціонарні точки точками мінімуму цільової функції.

Крок 2. Розв'язуємо задачу

$$f\left(x\right)\to min,$$

$$g_i\left(x\right)=0, \quad i=\overline{1,s}$$

методом множників Лагранжа для обмежень у формі рівностей.

Крок 3. Серед всіх знайдених точок вибираємо точки мінімуму.

Алгоритм описаний.

Приклад 1. Знайти мінімум функції

$f\left(x_1,x_2\right)=4x_1^2+x_2^2$, при умові $x_1+x_2=5$.

Складаємо функцію Лагранжа

$$L\left(x,\lambda\right)=4x_1^2+x_2^2+\lambda\left(x_1+x_2-5\right).$$

Складаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial L\left(x,\lambda\right)}{\partial x_1}=8x_1+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L\left(x,\lambda\right)}{\partial x_2}=2x_2+\lambda=0,$$

$$\frac{\partial L\left(x,\lambda\right)}{\partial \lambda}=x_1+x_2-5=0.$$

Розв'язуємо отриману систему

$$\begin{cases} 8x_1+\lambda=0, \\ 2x_2+\lambda=0, \\ x_1+x_2-5=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=4, \\ \lambda=-8. \end{cases}$$

Для дослідження отриманої стаціонарної точки застосуємо критерій Сильвестра. Для функції $f\left(x\right)$

$$f'\left(x\right)=\begin{pmatrix} 8x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix},\ f''\left(x\right)=\begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ \Delta_1=8>0,\ \Delta_2=16>0.$$

Згідно з цим критерієм, маємо, що цільова функція в точці $(1,4)$ має єдиний мінімум.