ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ОЛЕСЯ ГОНЧАРА

Рівень вищої освіти перший (бакалаврський)
Спеціальність 113 прикладна математика ПА 20 1 заочне
Освітня програма комп'ютерне моделювання та технології програмування

Семестр 3

Назва навчальної дисципліни комбінаторний аналіз

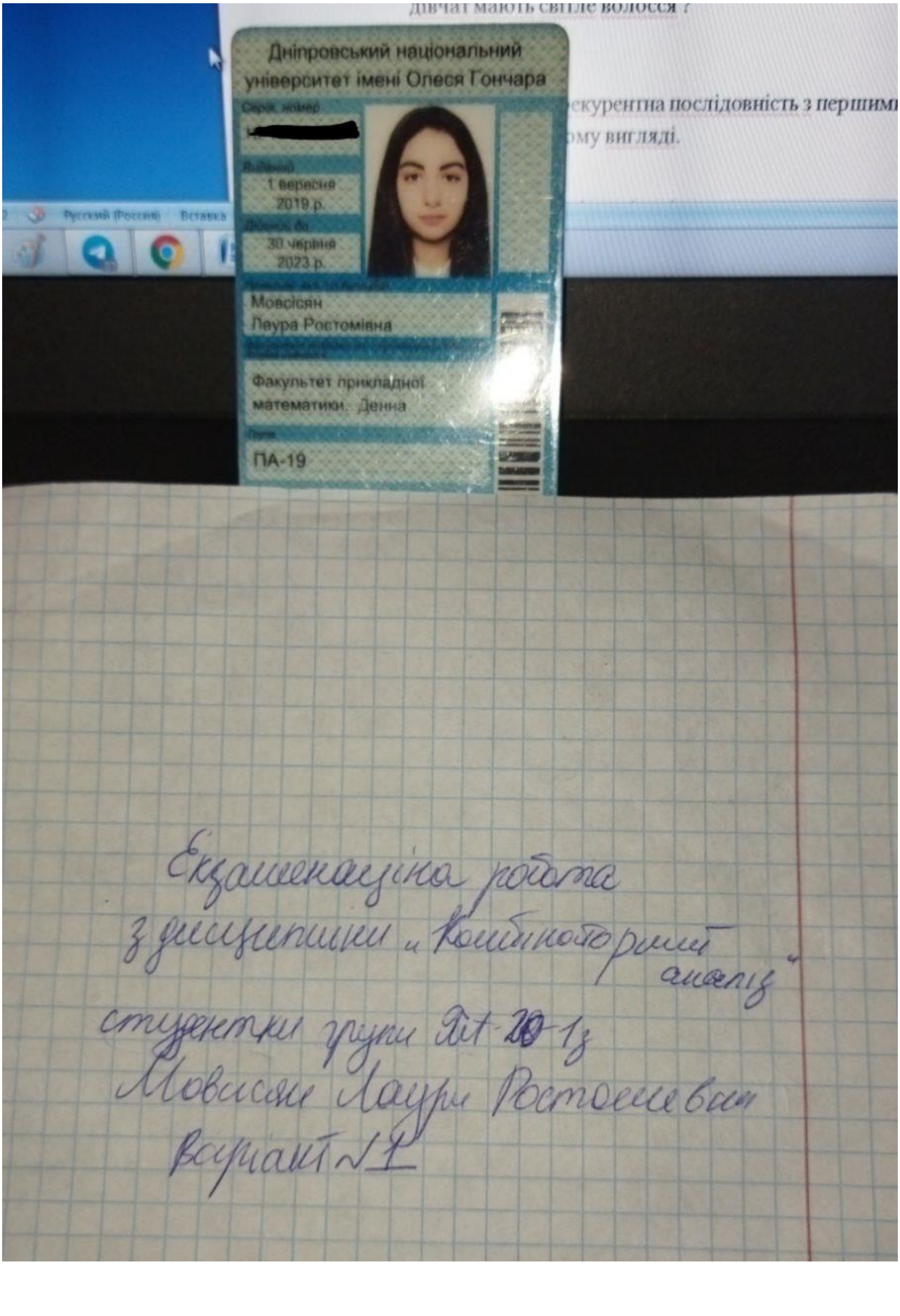
ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 1 (5 завд. *x* 8 балів = 40 балів)

- Основні поняття комбінаторики. Приклади
- Лінійні рекурентні співвідношення. Приклади.
- У класі 60% дівчат, а 70% – мають світле волосся. Який відсоток дівчат мають світле волосся ?
- Обчислити $C_{20}^{19} + C_5^2 =$
- Задана лінійна рекурентна послідовність з першими трьома членами $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0, \quad a_1 = 6, \; a_2 = 14, \; a_3 = 36.$ Записати її у явному вигляді.

Затверджено на засіданні кафедри ОМ та МК , протокол № 19 від 05 травня 2021 р

Завідувачка кафедри В. Турчина

Екзаменатор В. Волошко


дівчат мають світле волосся ?
екурентна послідовність з першими
ому вигляді.
Русский (Россия)
Вставка
Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара
[redacted]
1 вересня 2019 р.
30 червня 2023 р.
Мовсісян Лаура Ростомівна
Факультет прикладної математики. Денна
ПА-19
Екзаменаційна робота
з дисципліни „Комбінаторний аналіз"
студентки групи ПА-20-1з
Мовсісян Лаури Ростомівни
варіант №1

- Основні поняття комбінаторики. Приклади

1. Основні поняття комбінаторики. Приклад.
Комбінаторика вивчає різні способи поєднання елементів в скінченних множинах. Зі значеннями для $n \in N$ $n! = 1 \cdot 2 \ldots n = (n-1)! \cdot n$, $0! = 1$

2) Правило суми: якщо дії є несумісними і одну можна виконати m способами, а другу n способами, то одну з них можна виконати $m+n$ способами.

1) Серед білетів 20 — виграшні і 80 невиграшні. Придбано 3 білета. Сколько способов приобрести 1 выигрышный і 2 невиграшних.

$$C_{20}^{1} \cdot C_{80}^{2} = \frac{20!}{19! \cdot 1!} \cdot \frac{80!}{78! \cdot 2!} = \frac{20 \cdot 79 \cdot 80}{2} = 63200$$

1) Правило добутку: якщо першу дію можна виконати m способами, другу дію можна виконати n способами, то разом ці дії можна виконати $m \cdot n$ способами.

2) правило суммы. пример:
- В вазе 3 яблока, 6 груш, 4 сливы. Сколько вариантов выбрать один плод
$3+4+6 = 13$ вариантов

3) Сполуки (без повторень) — невпорядкована вибірка об'ємом m елементів із групи, які містять n елем-ів.
кіл-ть сполук: $C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\, m!}$; $C_n^0 = 1$; $C_n^n = 1$

приклад:
Скількома способами вибрати 2 деталі із 10?

$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{8! \, 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$$

•

4) Розміщення (без повторень) – впорядкована вибірка об'ємом m елементів із групи, яка містить n елементів

Кіль-ть розміщень $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ $A_n^0 = 1$ $A_n^n = n!$

приклад:

з 9 студентів обрати старосту, зам. старосту, президента

$A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$

5) Перестановки (без повторень) – всі які способи розташування n елем-ів. Кіл-ть перестановок без повторень: $P_n = A_n^n = n!$ $0! = 1$

а) кіль-ть розміщень сполук та перестановок пов'язані формулою: $A_n^m = P_m \cdot C_n^m$ (правило добутку)

б) довільно вживати при великих m: $C_n^m = C_n^{n-m}$

5) приклад: скількома способами поділити

а) 5 учнів по 3 класах. ~~А~~ ~~Р~~ $3^5 = 243$

6) Сполуки (з повтореннями) – невпорядкована об'ємом n елементів з k типів елементів, які можуть повторюватись. Кожен тип містить однакові об'єкти з (необмеженим) повторенням:

Кількість сполук з повторенням: $\bar{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1}$

7) Розміщення (з повтореннями) – впорядкована вибірка об'ємом m елементів із групи, яка містить n елементів, які можуть повторюватися. Кіль-ть розміщень з повт. $\bar{A}_n^m = n^m$

8) Перестановки (з повтореннями) – якщо в множині з n елементів є k різних типів елементів, причому I тип повторен. n_1 раз, II тип – n_2 раз, k-ий тип – n_k раз, то кіль-ть:

$$\bar{P}_n = \frac{n!}{n_1! \, n_2! \cdots n_k!}$$

Лінійні рекурентні співвідношення. Приклади.

(17) Лінійні рекурентні співвідношення

В деяких випадках члени послідовності задаються формулами. Він знаходиться за допомогою формули та декількох попередніх членів. Отже,

$a_{n+k} = F(k, a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k \in N$ (1)

В цьому випадку повинні бути задані попередні члени послідовності, а саме $a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \ldots, a_{n-1}, a_n$.

Розглянемо, як працює формула (1), наприклад, при $k=3$. Випишемо I три члени послідовності, які повинні бути вибрані як початкові умови: при $n=0$ $a_2 = a_{0+3-1}$, $a_1 = a_{0+3-2}$, $a_0 = a_{0+3-3}$. Далі знаходимо наступні члени послідовності за формулою (1)

$a_{0+3} = a_3 = F(0, a_{0+3-1}, a_{0+3-2}, a_{0+3-3}) = F(0, a_2, a_1, a_0)$. Маємо при $n=1$, $a_{1+3} = a_4 = F(1, a_{1+3-1}, a_{1+3-2}, a_{1+3-3}) = F(1, a_3, a_2, a_1)$

І далі при $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ знаходимо наступні члени посл.

Лінійне рекурентне співвідношення

$$a_{n+k} = -p_1 a_{n+k-1} - \ldots - p_k a_n, \ (2)$$

з відомими початковими членами $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$

Явну посл-ть будемо шукати у вигляді $a_n = \lambda^n$, $\lambda \in R$. Підставимо цей вираз у (2) отримаємо $\lambda^{n+k} + p_1 \lambda^{n+k-1} + p_2 \lambda^{n+k-2} + \ldots + p_k \lambda^k = 0$

Маємо характеристичне рівняння $P_k(\lambda) = \lambda^k + p_1 \lambda^{k-1} + p_2 \lambda^{k-2} + \ldots + p_k = 0$

Нехай $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_k$ — різні дійсні корені цього рівняння.

Тоді враховуючи ~~послідовність~~ позначення та однорідність загальним розв'язком буде $a_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + C_k \lambda_k^n$

Коефіцієнти $c_1, c_2, \ldots c_k$ визначаються з початкових умов, для чого складемо лінійну систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \ldots + c_k = a_0 \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + c_k\lambda_k = a_1 \\ \ldots \\ c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda^{k-1} + c_k\lambda^{k-1} = a_{k-1} \end{cases} \quad (3)$$

з головним визначником Вандермонда. Загальновідомо, що він відмінний від нуля якщо λ-різні, тому система (3) має єдиний розв'язок

Приклад: $a_{n+3} - 3a_{n+2} - a_{n+1} + 3a_n = 0$, $a_1 = 3$, $a_2 = 7$, $a_3 = 27$

$\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0$ $\quad \lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -1$

$a_n = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 3^n + c_3(-1)^n$

$$\begin{cases} c_1 \cdot 1^1 + c_2 \cdot 3^1 + c_3(-1)^1 = 3 \\ c_1 \cdot 1^3 + c_2 \cdot 3^2 + c_3(-1)^2 = 7 \\ c_1 \cdot 1^2 + c_2 \cdot 3^3 + c_3(-1)^3 = 27 \end{cases} \quad \begin{matrix} c_1 + 3c_2 - c_3 = 3 \\ c_1 + 9c_2 + c_3 = 9 \\ c_1 + 27c_2 - c_3 = 27 \end{matrix} \quad \begin{matrix} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{matrix}$$

$a_n = -1 \cdot 1^n + 1 \cdot 3^n + 1 \cdot (-1)^n = -1 + 3^n + (-1)^n$

- У класі 60% дівчат, а 70% – мають світле волосся. Який відсоток дівчат мають світле волосся ?

- Обчислити $C_{20}^{19} + C_5^2 =$

- Задана лінійна рекурентна послідовність з першими трьома членами $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0, \quad a_1 = 6, \ a_2 = 14, \ a_3 = 36.$ Записати її у явному вигляді.

③ 60% - дів. 70% - світле

$60\% + 70\% = 130\%$

$130\% - 100\% = 30\%$

В: 30% дівчат мають світле волосся

④ $C_{20}^{19} + C_5^2 = 10 + 20 = 30$

$C_{20}^{19} = \frac{20!}{1!\,19!} = 20; \quad C_5^2 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$

⑤ $a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0$

$a_1 = 6, a_2 = 14, a_3 = 36$

$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$

$x_1 = 1 \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$

$a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot 2^n$

$$\begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 3 + C_3 \cdot 2 = 6 \\ C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 9 + C_3 \cdot 4 = 14 \\ C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 27 + C_3 \cdot 8 = 36 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1C_1 + 3C_2 + 2C_3 = 6 \\ 1C_1 + 9C_2 + 4C_3 = 14 \\ 1C_1 + 27C_2 + 8C_3 = 36 \end{array} \quad \begin{array}{l} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \\ C_3 = 1 \end{array}$$

$a_n = 1^n + 3^n + 2^n$