В.Г. Зайцев

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК «ТЕОРІЯ КЕРУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИМИ Й ТЕХНОЛОГІЧНИМИ ПРОЦЕСАМИ »

2020

Міністерство освіти і науки України
Дніпровський національний університет
ім. Олеся Гончара

В.Г. Зайцев

Навчальний посібник

Теорія керування економічними й технологічними процесами

Дніпро
РВВ ДНУ
2020

1. Основи моделювання економічних і технологічних процесів

Об'єктами застосування теорії і методів оптимального керування, розглянутих у навчальному посібнику,є керовані системи, які описуються диференціальними чи кінцево-різницевими рівняннями відповідно для неперервних чи дискретних процесів. Поняття й визначення системи, моделі, зворотного зв'язку, замкнутої і розімкнутої системи, істотних чи несуттєвих факторів, обумовлених цільовою орієнтацією під час вивчення об'єкта дослідження,– це сукупність вихідних положень, яка складає традиційно предмет введення до таких курсів, як основи керування для студентів, що навчаються за спеціальністю 113 - прикладна математика.

Беручи до уваги, що навчальний посібник може використовуватися і під час підготовки фахівців з інших спеціальностей факультету прикладна математика, у тому числі й управлінського напрямку економічних спеціальностей університету, для яких курс основ економічної кібернетики не читається, даний розділ може розглядатися як вступний, що відображає змістовну сутність і формалізоване подання понять і принципів формування структур систем керування.

1.1. Система. Модель

Спостереження, аналіз і моделювання є засобами пізнання й прогнозування процесів, явищ і ситуацій у всіх сферах об'єктивної дійсності. Спостереження за явищами природи, постановка експериментів дозволили встановити фізичні закони. Ці закони виявляються у визначених кількісних співвідношеннях між параметрами процесу чи явища незалежно від того, чи відбуваються вони в дійсності чи їх реалізацію можна лише подати.

Вивчаючи курс математичного моделювання, ми зустрічаємося з двома важливими поняттями: системи і моделі.

Говорячи, наприклад, про системи забудови міста чи району, кровообігу, керування підприємством, рівнянь, ми насамперед маємо на увазі деяку сукупність. Але чи будь-яка сукупність може бути названа системою? Навряд чи хто назве системами сукупність викинутих на смітник старих речей чи калюж на асфальті після дощу. Ні те, ні інше ніяк не упорядковане, не відповідає визначеній меті, відповідно до якої ця сукупність сформована. Перша властивість систематизації, системного подання про розглянутий об'єкт — це наявність мети, для реалізації якої призначена дана сукупність предметів, явищ, логічних уявлень, що формують об'єкт. Ціль функціонування системи редукує системні ознаки, за допомогою яких описуються, характеризуються елементи системи.

Тому для виділення системи потрібна наявність: 1) мети, для реалізації якої формується система; 2) об'єкта дослідження, що складається з безлічі елементів, об'єднаних у єдине ціле важливими, з погляду мети, системними ознаками; 3) суб'єкта дослідження («спостерігача»), що формує систему; 4) характеристик зовнішнього середовища стосовно системи й відображення її взаємозв'язків із системою.

Наявність суб'єкта дослідження й деяка неоднозначність під час виділення істотних системних ознак викликають значні труднощі для однозначного виділення системи й відповідно до її універсального визначення.

Проте такий підхід дає можливість визначити систему як упорядковане уявлення про об'єкт дослідження з погляду поставленої мети. Він дозволяє виділити головне, найбільш істотне в досліджуваних об'єктах і явищах; ігнорування другорядного спрощує, упорядковує в цілому досліджувані процеси. Для аналізу багатьох складних ситуацій такий підхід важливий сам по собі, однак, як правило, побудова системи служить передумовою для розробки чи реалізації моделі конкретної ситуації.

На настільній моделі літака не можна визначити, наприклад, його аеродинамічні характеристики, характеристики системи керування та міцності. Отже, для реалізації названих цілей дана модель не підходить, оскільки ми не ставимо за мету домогтися зовнішньої подібності. Таким чином, і це головне, структура й властивості моделі залежать від цілей, для досягнення яких вона створюється. У цьому полягає органічна єдність системи й моделі. Якщо невідома мета моделювання, то невідомо і з урахуванням яких властивостей і якостей слід будувати модель.

Невідповідність між визначеннями системи й моделі полягають у тому, що систематизація припускає лише упорядкування, тоді як моделювання – формалізацію взаємозв'язків між елементами системи та з зовнішнім середовищем. Під моделюванням розуміють дослідження об'єктів пізнання не безпосередньо, а непрямим шляхом, за допомогою моделей.

1.2. Керування. Зворотний зв'язок.Замкнута система

У широкому значенні під керуванням розуміють конкретну організацію тих чи інших процесів для досягнення намічених цілей. Керована система допомагає забезпечити цілеспрямоване функціонування при змінних внутрішніх чи (і) зовнішніх умовах. Некерованій системі цілеспрямоване функціонування не властиве.

Приклади керованих систем: рух автомобіля, робота підприємства за встановленим планом чи відповідно до визначених стимулів. Прикладом некерованих систем є рух вітру, стихійні явища в природі. У системі, структура якої встановлена її цільовою орієнтацією (для розв'язання задач створюється система), керування зводиться до підтримки розрахункових значень вихідних параметрів при відхиленнях зовнішніх умов і внутрішніх параметрів від розрахункових. Так улаштована більшість технічних керованих систем.

В економічній системі вибір і формування як структури, так і способу функціонування є завданнями керування, що забезпечують динаміку соціально-економічного розвитку. Однак співвідношення типів завдань – формування виробничо-організаційної структури самої системи й способу її функціонування – неоднаково розглядається на різних рівнях ієрархії керування.

Розглянемо загальну принципову схему керування. Будь-яке керування припускає наявність об'єкта керування (керованої системи), апарата, що здійснює процеси керування (керуючої системи), і зовнішнього середовища.

Об'єкт керування виконує ті чи інші дії для реалізації намічених цілей. Складність об'єкта керування залежить від кількості вхідних у нього елементів і природи взаємозв'язку між ними. У процесі функціонування об'єкт керування піддається впливу зовнішнього середовища, що може сприяти чи перешкоджати досягненню наміченої мети.

Основне призначення керуючої системи – підтримувати встановлений і за якими-небудь властивостями визнаний нормальний режим роботи об'єкта керування, а також забезпечити нормальне функціонування окремих елементів об'єктів керування в умовах впливу зовнішнього середовища.

Об'єкт керування у взаємодії з керуючою системою створить замкнуту систему керування (рис. 1.1), де X – це вплив зовнішнього середовища на об'єкт керування; Y – реакція системи на вплив X.

Рис. 1.1. Замкнута система керування

Зв'язок, за допомогою якого керуюча система впливає на об'єкт керування, якщо він є, називається зворотним. Вхідним сигналом для зворотного зв'язку є вихідний сигнал системи Y. Якщо цей сигнал не відповідає цілям керування замкнутою системою, то керуюча система виробляє вплив зворотного зв'язку dX, що разом з X надходить на вхід об'єкта керування (X,Y,dX у загальному випадку – вектори відповідних розмірностей). У правильно працюючій, з погляду поставленої мети, системі сигнал X+dX повинен сприяти поліпшенню якості функціонування замкнутої системи керування.

Кількісні оцінки ступеня досягнення мети в моделі керування подаються у вигляді значень цільової функції (функціонала), а в умовах, у рамках яких функціонує система, – у вигляді обмежень моделі. Ціль оптимального керування – перебування найкращого, з погляду прийнятої умови, критерію оптимізації. Для конкретних ситуацій при виборі способу керування, господарювання чи ведення діяльності він реалізується у вигляді екстремального значення функціонала.

У техніці вплив керуючих систем на об'єкти керування здійснюються через зворотний зв'язок за допомогою різного роду підсилювачів, кермових приводів й інших механізмів. В економіці це можуть бути, наприклад, додаткові фонди сировинних і матеріальних ресурсів, зміна планових показників й інші фактори керування виробничими процесами.

Зворотний зв'язок є засобом гнучкого керування, коли конкретне керуюче рішення виробляється залежно від сформованої ситуації – коливання встановленого функціонування системи.

Однак не в кожній системі керування здійснюється за допомогою зворотного зв'язку. Найпростіша з таких систем без зворотного зв'язку – керування вуличним рухом за допомогою світлофора. У цьому випадку рух регулюється за заздалегідь заданою програмою незалежно від фактичних потоків автомобілів, тобто стану системи на виході. Іншими прикладами керування без зворотного зв'язку можуть бути: статути, кодекси, наставляння, що регламентують функціонування об'єкта керування в заданих умовах. При цьому може виявитися, що прийняте рішення не є найкращим у порівнянні з іншими можливими. Але воно вважається правільним, правомочним, тому що з точністю відповідає регламентуючому документу. Подібні випадки породжують часом ситуації – прийняти рішення "за законом" чи "по совісті".

У яких випадках система керування створюється зі зворотним зв'язком, а в яких – без нього, залежить насамперед від цілей функціонування системи. Тут можуть братися до уваги економічні умови альтернативних варіантів і тощо. Приклад альтернативних варіантів – керування вуличним рухом за допомогою світлофора, що автоматично переключається, чи регулювальника.

Отже, у структурі системи керування складають:

- об'єкт керування — безпосередній пристрій, агрегат, підсистема загальної системи, у якій реалізується мета функціонування всієї системи;

- керуючу систему — орган керування (суб'єкт керування), що фіксує параметри об'єкта керування й виробляє за необхідності керуючі дії на об'єкт керування для приведення його функціонування до режиму, що відповідно до мети керування прийнято вважати нормальним. Якщо досягнення такого режиму в умовах наявних ресурсів системи неможливе, то як нормальний може бути прийнятий режим, що мінімально відхиляється від бажаного;

- зворотний зв'язок — об'єкт, підсистема, за допомогою якої реалізується вплив керуючої системи на керований об'єкт.

Ці елементи, що формують у сукупності замкнуту систему керування, знаходяться під впливом зовнішнього середовища, що може сприяти чи перешкоджати досягненню цілей системи.

Поданий схематичний опис замкнутої системи керування дуже спрощений і відображає лише принцип її побудови. У дійсності кожний із зазначених елементів, у свою чергу, може включати об'єкт, суб'єкт керування зі зворотним зв'язком чи без нього, і вся система буде мати, таким чином, ієрархічну структуру.

1.3. Економічна система як об'єкт керування

Викладене вище відносять до характеристики систем керування без урахування їх природи – фізичної, виробничо-технологічної, соціально-економічної. Методи оптимального керування, які ми будемо вивчати в наступних розділах, також не пов'язані з природою системи, скоріше вони орієнтовані на визначену форму моделі. Однак переважною будуть економічна, фізична й технологічна орієнтації курсу, що накладає відбиток на характер і методологію практичного застосування результатів математичного моделювання. З цією метою розглянемо найбільш істотні характеристики економічних систем як об'єктів керування.

Економічна система охоплює параметри й характеристики суспільного виробництва, розподілу, обміну та споживання матеріальних благ. Вона є підсистемою соціально-економічної суперсистеми, тобто цілі її функціонування повинні бути підпорядковані соціальним цілям і випливають з них, принаймні погоджуються з останніми. Цілеспрямоване функціонування економічної системи, за винятком найпростіших випадків, за своєю природою є багатокритеріальним. Це означає, що в процесі функціонування, наприклад підприємства, одночасно формують цілі: домогтися максимально можливих прибутків і випуску продукції в натуральному чи вартісному вираженні, водночас з цим витримувати встановлені показники за номенклатурою чи асортиментом, знизити собівартість, домогтися визначеного рівня якості й рентабельності виробленої продукції і т.под. Деякі з цих показників за тенденціями їх реалізації можуть бути суперечливими. Наприклад, прагнення до максимального випуску продукції (у вартісному чи натуральному вираженні) одночасно веде й до сумарного зростання собівартості. Інакше бути не може, тому що виробництво кожного додаткового виробу пов'язане з додатковими витратами, тобто чим більше випускається продукції, тим більшою стає й сумарна собівартість виробництва. Обмеження такої собівартості – протилежна вимога до зростання випуску продукції. Мінімізація собівартості виробництва має сенс тільки тоді, коли точно встановлений необхідний плановий обсяг виробництва. Подібні протиріччя можуть мати місце й стосовно інших окремих критеріальних показників. У цілому можна уявити собі одну з двох альтернатив: або всі взяті в розрахунок критеріальні показники мають поведінку якісно подібним чином, досягаючи одночасно своїх екстремальних значень, або не існує такого можливого плану виробництва, якому відповідали б екстремальні значення одночасно всіх критеріальних показників. Свідчення тому – наведений вище приклад.

Першій альтернативі відповідає однокритеріальна, власне кажучи, ситуація, коли використовується основний, у змістовному відношенні критерій, а інші – ігноруються.

Друга альтернатива полягає у створенні розумного, із практичного погляду, компромісу, коли для прийнятого плану виробництва не досягаються потенційно можливі оптимальні значення окремих цільових критеріїв, але кожний з них для цього плану набуває тією чи іншою мірою близьке до оптимального значення. Практичні деталі формалізованого відображення компромісів – це самостійна теорія, але в остаточному підсумку проблема компромісу зводиться конструктивно до вироблення деякого комплексного критерію, у якому названі вище приватні критерії існують як окремі складові частини чи до застосування методів розв'язання багатокритеріальних задач.

Застосовуючи сучасну термінологію, можна сказати, що економічні управлінські задачі погано структуризовані та не завжди модель може бути побудована однозначно. Що це може означати? Насамперед, цілі функціонування багатьох економічних і особливо соціально-економічних систем не завжди можна чітко сформулювати. Причому це стосується не лише яких-небудь особливих умов чи ситуацій, а самих звичайних, ординарних. Наприклад, яким конкретно показником виражається ступінь досягнення мети неухильного підвищення рівня життя населення? Питання чітке, але в той же час кожен дослідник проблеми, якщо поставити її під конкретним кутом зору, можна розглянути до неї по-різному.

Один з найпростіших підходів – це орієнтація на критерій зростання грошових доходів населення. Однак за цією, начебто б природною, постановкою стоїть багато складних соціально-економічних проблем. Це й забезпечення випереджального зростання продуктивності праці щодо заробітної плати, зниження безробіття, зміцнення купівельної спроможності гривні й насичення сфери споживання якісними вітчизняними товарами й послугами, вирішення житлової проблеми й забезпечення соціальної справедливості тощо. Отже питання як саме конструктивно реалізувати сформульовану вище мету, узагалі говорячи, змістовно зрозумілу, залишається далеко не чітким.

Ітеративний режим застосування в економіці математичних моделей – один з характерних прийомів при моделюванні погано структуризованих задач. Процес збіжності шуканих показників в ітеративному режимі розуміється як цілеспрямований людино-машинний діалог з можливими змінами вихідних даних і, якщо необхідно, окремих елементів моделі. Іншими словами, відбувається уточнення (самонавчання) самої моделі об'єкта за допомогою імітації його функціонування.

Побудова математичних моделей керування виробництвом на кожному рівні ієрархії пов'язана з використанням агрегованої (укрупненої) інформації: чим вищий рівень ієрархії, тим більший ступінь агрегування даних. І відповідно до цього повинні існувати відносно прості методи, алгоритми дезагрегування (розукрупнення) інформації при переході до більш низьких рівнів керування.

1.4. Поняття динамічної системи та їх класифікація

"Динамічна система (ДС) - це система повільної природи (фізичної, хімічної, біологічної, соціальної, економічної тощо), для якої визначено поняття стану, який змінюється у часі (еволюціонує) згідно деякому детермінованому закону".

Стан системи визначається сукупністтю деякіх незалежних величин. Вказані величини прийнято визначать як змінні стану, динамічні змінні або фазові змінні. Вибір змінних стану визначається специфікою конкретної динамічної системи. Наприклад, змінними стану механічної системи є мгновенні значення положень та швидкостей усіх составляющих її матеріальних точок, відносно вибраної системи отсчета; для рідини – це його температура, тиск та об'єм для електричних пристріів – сила струму у його ланцюгах або падіння напруги на його окремих елементах.

Число змінних стану ототожнюють з порядком системи, тобто вектор стану $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ має розмірність $dim\ x = n$. Геометричний простір в ортогональному базисі змінних стану називається простором стану або фазовим простором. Стану ДС у визначений момент часу відповідає точка у його просторі станів, її далі будемо називати точкою зображуньня(ТЗ). Її рух прийнято називати фазовой траєкторієй, а сукупність фазових траєкторій, які отримані при різних початкових умовах – фазовий портрет ДС. Таким чином, якщо рух системи має опис у вигляді однозначного детермінованого закону, фазові траєкторії ніколи не перетинаються ! Виникає наступне питання: яким чином потрібно описати зміни стану ДС ? Вербально (словесно) або по іншому - використовуя фізичні закони або інши – тобто деяку формальну мову математичного представлення.

Класифікація динамічних систем по "формальному"признаку – відображає специфіку математичного опису той або іншої системи, але не торкається її природи.

1. Системи з зосередженими та розподіленими параметрами

   Якщо змінні стану ДС можуть змінюватися тільки в часі та їх значення не залежить від просторових координат, то такі ДС мають назву систем з зосередженими параметрами.

   Однако такій підхід має місто не для всіх систем. Якщо, наприклад, в якості змінних стану атмосфери взяти температуру й густину, то їх вимір буде залежити не тільки від часу, але й міста де ми їх виміряли. Таким чіном, у цьому випадку змінні стану ДС є не тільки функціями часу , но й просторових координат. Такі ДС називають системами з розподіленими параметрами. Простір стану розподілених систем має нескінченну розмірнисть. До цього класу відносяться процеси с яскраво вираженой просторової неоднорідністю: теплові, аєродинамічні, гідродинамічні тощо.

2. Лінійні та нелінійні системи

   "Справжні закони не можуть бути лінійними стверджував Альберт Енштейн. Ця думка в повній мірі відображає поточний розвиток теорії ДС, що вибрала вторований "нелінійний"шлях.

3. Неперервні та дискретні системи

   Якщо стан системи та оператор єволюції визначени для будь-якого моменту часу, таку систему називають системою з неперервним часом обо неперервною системою. У деякої літературі неперервні системи називають потоком.

   Оператор єволюції неперервних систем має вигляд системи звичайних диференціальних рівнянь. $x_i'(t) = f_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, ..., n$, де $dim\ x = n$.

   Якщо стан системи визначен тільки в окреми моменти часу(тобто на дискретної множині точок), то маємо систему з дискретним часом або дискретну систему.

   $$x_i(k+1) = f_i(x_1(k), x_2(k), ..., x_n(k)),$$

   $i = 1, 2, ..., n$. Таким чином це відображення задає зв'язок, між поточним та наступним станом ДС. Відмітимо, що дискретні системи, звичайно використовують для дослідження динаміки неперервних систем.

4. Автономні та неавтономні системи

   Якщо в математичну модель системи явно не входить час, то маємо автономну систему, якщо входе - система неавтономна.

5. Консервативні і дисипативні системи

   Фундаментальною властивістю систем є здатність зберігати енергію.Саме за цією ознакою розрізняють консервативні і дисипативні системи. Якщо під час еволюції системи її енергія залишається постійною, то таку ДС називають консервативної або гамільтонової. Якщо енергія зменшується, то такі системи називаються дисипативними (від латинського слова dissipatio - розсіювання).

При дослідженні динаміки різних процесів, явищ і подій виникає природне запитання: чому ж все закінчиться? Чи існує якась спрямованість в поведінці ДС? Чи є у ДС бажані стану, в які вона прагне потрапити? І так далі.

Для поділу понять руху і результат цього руху прийнято виділяти два основні режими поведінки ДС: перехідний (нестаціонарний) режим, відповідний переходу з початкового стану $_0$ в деякий стан в майбутньому або минулому; усталений режим (стаціонарний), що характеризує стан системи в майбутньому або минулому.

У вас могла скластися думка, що все розмаїття можливої поведінки будь-якої ДС закладене в її математичній моделі. Цю думку виправдано з точки зору точних наук. Ось що сказав з цього приводу Джон фон Нейман: "Точні науки не пояснюють, вони рідко навіть обговорюють явища і в основному пропонують моделі. Під моделлю мається на увазі математична конструкція, яка описує спостережуване явище. Сенс таких математичних конструкцій складається виключно в тому, що вони повинні працювати". Дійсно, маючи працездатну модель, дослідник в результаті її аналізу може оцінити всі можливі варіанти поведінки ДС.

Насправді ми спостерігаємо динамічні процеси, які здатні не просто рухатися, а й мають розвиток, тобто народження принципово нових властивостей. Кожен з нас у своєму житті стояв перед проблемою вибору, який визначав подальший хід подій. Чи існує подібна альтернатива в поведінці ДС, описаних формально? Чи містить математична модель ДС "зародки"нового стану?

Нелінійна динаміка дає відповідь на ці питання ствердно за допомогою поняття "біфуркації"(від лат. слова bifurcus – роздвоєння, розгалуження).

У найбільш загальній формі теорія біфуркації являє собою теорію стаціонарних рішень нелінійних ДУ.

Будь-яка можлива якісна перебудова в поведінці ДС може бути викликана або дією на систему ззовні, або зміною внутрішньо системних властивостей.

Очевидно, що така можливість повинна бути передбачена математичною моделлю системи.

1.5. Постановка задач оптимального керування

Вивчення поводження й конструювання систем керування, що володіють необхідними в додатках властивостями, є ключовим завданням теорії керування.

При цьому на перший план висуваються такі властивості систем, як стійкість, оптимальність, поводження в присутності невизначених перешкод і т.д.

Основна увага в нашому курсі буде приділена вивченню й дослідженню еволюційних систем. Загальне поняття абстрактної системи було сформульоване в останні 10-15 років XX сторіччя. Воно має велику спільність, і його чітке визначення достатньо складне.

Ми обмежимося деякими конкретними класами еволюційних систем. Для них наведемо всі необхідні визначення.

Під еволюційною системою будемо розуміти технічну, фізичну, біологічну, економічну, екологічну й іншу системи, для яких вивчаються зміни, що протікають у ній з часом.

Математично еволюційні системи можуть описуватися різними способами:

а) як безперервні системи, описувані звичайними диференціальними рівняннями (ЗДР);

б) дискретні системи, описувані кінцево-різницевими рівняннями;

в) системи з післядією, для опису яких застосовуються функціонально-диференціальні рівняння. Такі системи виникають тоді, коли протікання процесу визначається не тільки станом системи в даний момент, але також і попередньою історією процесу;

г) системи з розподіленими параметрами, описувані еволюційними рівняннями в частинних похідних (ЧП) – рівняннями теплопровідності, коливань, гідродинаміки і т.д.;

д) стохастичні системи. Стохастичною може бути кожна з названих вище систем, для опису якої використовуються ймовірнісні поняття й методи.

Прикладами еволюційних систем можуть служити:

1. Сонячна система описується з дуже високим ступенем точності системою ЗДР, що виходить із закону всесвітнього тяжіння Ньютона.

2. Рух рідини, що описується нестаціонарним рівнянням у ЧП Нав'є-Стокса. Для опису турбулентних рухів часто використовуються імовірнісні методи (і в тому числі фрактальний підхід).

3. Рух літака. Залежно від вимог точності така система описується ЗДР або при обліку пружних елементів конструкцій – рівняннями в ЧП. При використанні ЕОМ у контурі рівняння виникають різницеві рівняння.

Необхідно відзначити, що та сама реальна фізична система може бути описана різними математичними моделями відповідно до цілей дослідження та вимог точності адекватності опису.

Характерною рисою сучасної епохи є бурхливий вибух дослідницького інтересу до екстремальних задач, тобто до задач визначення найбільших і найменших значень, оптимальних умов протікання процесів і т.д.

Слід підкреслити, що подібні задачі зустрічалися в історії людства в тому чи іншому вигляді, починаючи ще з часів античності. Екстремальні задачі були предметом дослідження І. Кеплера, П. Ферма, Х. Гюйгенса, І. Ньютона, І. Бернуллі, Ж. Лагранжа, Л. Ейлера, К. Вейерштрасса й інших.

Однак саме на сучасному етапі розвитку екстремальні задачі зайняли домінуюче положення, насамперед внаслідок обмеженості природних і матеріальних ресурсів, необхідності твердої економії енергії і матеріалів, зростання народонаселення й інших причин. Істотний прогрес при дослідженні й практичному застосуванні екстремальних задач пов'язаний також з розвитком ЕОМ. Виниклі спочатку з кризи економіки й механіки польоту сучасні екстремальні задачі знаходять зростаючу сферу застосувань у таких галузях, як фізика, різні технологічні процеси, ядерна енергетика, біологія, екологія, медицина й ін.

Бурхливий розвиток теорії оптимального керування (ТОК) пов'язують звичайно з принципом максимуму Понтрягіна і динамічним програмуванням. Математична теорія оптимальних процесів, що базується на принципі максимуму і прилягаючих до нього дослідженнях, послужила теоретично обґрунтованою базою багатьох робіт з аналізу різноманітних прикладних задач оптимального керування, коли стан кожного керованого об'єкта в кожен конкретний момент часу можна задавати вектором у кінцево вимірному просторі. При цьому поводження об'єктів у часі повинне описуватися ЗДР чи звичайними диференціально-різницевими рівняннями. Приблизно те ж коло задач керування досліджувалося за допомогою динамічного програмування. Істотним тут є той факт, що динамічне програмування звичайно було ефективним лише під час розв'язання задач, у яких керована система має кінцеву (відносно невелику) кількість степенів вільності. Значні успіхи в дослідженні різних задач ОК кінцево вимірними системами були досягнуті за допомогою розвинутого М.М. Красовським і його учнями методу, заснованого на використанні класичної L-проблеми моментів. Краще його узагальнення й застосування було запропоновано О.І. Єгоровим.

Застосування всіх цих методів у випадку нескінченновимірних систем призвело до істотних труднощів. Вони полягали, по-перше, у тому, що для зазначених систем не вдалося знайти досить універсального формулювання задачі, для якої можна було б виписати ефективно перевірені й досить повні необхідні умови оптимальності. По-друге, навіть для тих випадків, коли такі умови були отримані, виникали істотні, а часом і принципові труднощі при їх практичному використанні для побудови оптимального керування чи його наближень.

Численні дослідження такого типу задач заклали основи спеціальної галузі теорії ОК, що називають теорією ОК систем з розподіленими параметрами.

Відзначимо основні школи, що в СРСР вели дослідження в області оптимального керування: московська (Л.С. Понтрягін); ленінградська (В.І. Зубов), київська (Б.М. Бублик), дніпропетровська (О.І.Єгоров), казанська (Т.К. Сіразєтдінов), свєрдловська (М.М. Красовський, Ю.С. Осіпов, Б.П. Куржанський), мінська (Р. Габасов, Ф.М. Кірилова), харківська (А.Б. Ахієзер, В.М. Коробов).

Перш ніж переходити до формулювання окремих задач оптимізації, визначимо загальні положення, які характеризують ці задачі.

Головний їх зміст полягає в тому, щоб з можливих різних реалізацій розглянутого процесу вибрати таку, при якій процес був би найкращим за деяким заздалегідь зазначеним критерієм. Можливість вибору різних реалізацій процесу обумовлюється наявністю «керма», змінюючи положення якого можна втручатися в його протікання й направляти в потрібнему русло. Математично ця ситуація виражається тим, що до сукупності математичних співвідношень, що описують процес, входять параметри, які можна змінювати в межах розумного і тим самим впливати на поводження розв'язання. Оскільки положення «керма» можна змінювати в часі, то обрані параметри, узагалі кажучи, будуть функціональними, а не числовими. Їх називають керуючими функціями.

Якщо для характеристики процесу вибрати деяку величину, названу критерієм якості (чи оптимальності) й залежну від розвязання рівнянь, що описують процес, то кожному способу керування буде відповідати своє значення критерію якості. Виходячи з цього, мета керування звичайно формулюється у такий спосіб:

серед усіх можливих реалізацій процесу потрібно вибрати таку реалізацію, при якій критерій якості обирає своє найменше (найбільше) значення.

Наприклад, у задачі про пуск ядерного реактора, тобто перекладі його з заданого початкового стану в номінальний робочий режим, ціль керування загалом може бути сформульована так:

1. У кінцевий момент часу реактор повинен знаходитися в бажаному робочому режимі.

2. Час, витрачений на його пуск, повинен бути мінімальним.

Крім того, потрібно мати на увазі, що на процес можуть накладатися обмеження, безпосередньо не пов'язані з формулюванням цілей керування. Обмеження звичайно дають повну характеристику припустимої реалізації процесу й можуть накладатися як на сам процес, так і на поводження "керма", у зв'язку з вимогами техніки безпеки, технічної реалізації і т.д. Математично вони звичайно описуються у вигляді рівностей чи нерівностей щодо розв'язань рівнянь, що описують процес, і керуючих функцій.

Таким чином, математичне формулювання задачі оптимального керування містить у собі:

1. рівняння, що описують процес;

2. критерій якості;

3. обмеження у вигляді рівностей і нерівностей, що накладаються на розв'язання рівнянь і керуючі функції.

Тому повний математичний опис задачі може бути отриманий лише на основі аналізу реального змісту досліджуваного процесу. Математичні вимоги при цьому звичайно зводяться до того, щоб розглянута задача мала розв'язання в досить широкому класі функцій. При цьому бажано, щоб розв'язання було єдиним. Якщо одиничності нема, то з'являється можливість поліпшити розв'язання шляхом уведення додаткових вимог до розглянутого процесу. Вибір класу функцій, у якому шукається розв'язання задачі оптимального керування, визначається багатьма причинами, що мають як фізичні, так і математичні джерела. Їх загальний аналіз являє собою досить складну задачу.

Надалі при розв'язанні окремих конкретних прикладів чи більш-менш загальних задач оптимального керування будуть застосовуватися різні методи: а) класичне варіаційне числення; б) принцип максимуму Понтрягіна; в) динамічне програмування; г) проблема моментів; д) некласичні методи теорії оптимального керування системами з розподіленими параметрами.

Частина цих методів досить добре відома широкому колу математиків, інженерів і економістів, які працюють в області оптимізації. На цю тему написані монографії і навчальні посібники. Некласичні методи менш відомі і в них немає тієї універсальної спільності, що притаманна, скажімо, принципу максимуму Понтрягіна.

2. Оптимізаційні моделі

Оптимізаційні моделі економічної динаміки

Економіка – дуже складна ієрархічна динамічна система. Залежно від мети дослідження її подають у різних розрізах. На верхньому рівні ієрархії економіку розглядають як систему суспільного виробництва, розподілу, обміну й споживання. Така розбивка зручна для дослідження суспільних відносин, що складаються в процесі виробництва.

Цей опис є основою способу поєднання факторів виробництва: засобів виробництва, робочої сили – і визначає безпосереднє положення виробника в суспільному виробництві.

У процесі праці люди впливають один на одного, поєднуючись певним чином для спільної діяльності. Відносини між людьми у виробництві визначають соціальну структуру суспільства й розподіл результатів. Суспільний спосіб поєднання працівників і засобів праці характеризує тип виробничих відносин.

2.1. Однопродуктова динамічна макроекономічна модель

Дослідження взаємозв'язків елементів виробництва поза суспільною формою приводить до розгляду виробничо-технологічної інтерпретації економіки. Ці взаємозв'язки можна подати у вигляді схеми (рис. 2.1).

Рис. 2.1. Взаємозв'язки елементів виробництва

На рис. 2.2 виділені фактори, що характеризують виробництво: праця *(L)*, засоби праці (основні виробничі фонди) *(K)* і предмети праці $(\widetilde{W})$.

Останні включають, з одного боку, елементи природи, чи природні ресурси (W^S) , і предмети праці *(W)*, повернуті у виробництво як частина сукупного продукту.

Результатом виробничої діяльності є валовий продукт *(X)*, що розподіляється в блоці P_X на виробниче споживання *(W)*, і кінцевий продукт *(Y)*. У свою чергу, кінцевий продукт *(Y)* поділяється в блоці розподілу (P_Y) на валові капітальні вкладення *(I)* і невиробниче споживання *(C)*. Валові капітальні вкладення *(I)* поділяються на амортизаційні відрахування *(A)* й чисті капітальні вкладення, що розширюють виробничі фонди (блок P_I).

Механізм впливу чистих капітальних вкладень на загальні виробничі фонди (ЗВФ) складний і при моделюванні пов'язаний з деякими труднощами. Він являє собою предмет самостійних економіко-математичних досліджень.

Становить інтерес вивчення взаємозв'язків між синтетичними показниками верхнього рівня економічної ієрархії. Одним з підходів до вирішення даної проблеми є побудова однопродуктової макроекономічної моделі.

Однопродуктові макроекономічні моделі – це моделі, що вивчають властивості й тенденції зміни взаємозалежних агрегованих макроекономічних показників, таких, як валовий продукт, кінцевий продукт, трудові ресурси, виробничі фонди, капітальні вкладення (I), споживання тощо. Ці взаємозв'язки можна побачити на рис. 2.2. Так, на макрорівні блок розподілу P_X показує взаємозв'язок між валовим продуктом (W), виробничим споживанням (W) і кінцевим продуктом (Y):

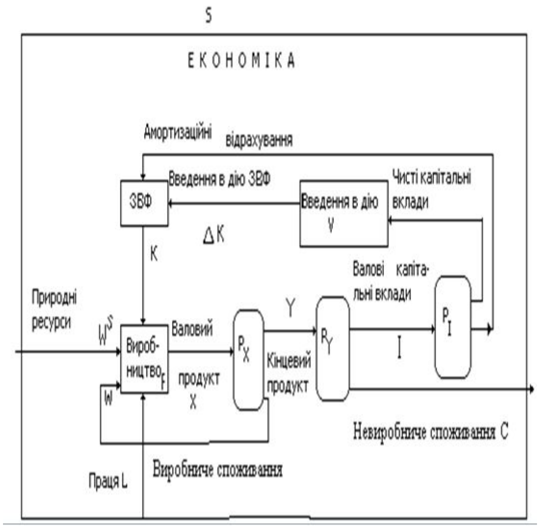

Рис. 2.2. Фактори виробництва

$$X = W + Y. \tag{2.1}$$

Блок P_Y поділяє кінцевий продукт на дві складові: валові капітальні вкладення (I) і невиробниче споживання (C), тобто

$$Y = I + C. \tag{2.2}$$

Капітальні вкладення складають матеріальну основу нарощування й переозброєння виробничого апарата і є засобом вирішення завдань підвищення добробуту. За рахунок капітальних вкладень здійснюється запровадження в дію загальних (основних) виробничих фондів.

У розглянутій моделі припускається, що валові інвестиції цілком витрачаються на приріст основних виробничих фондів у тому ж році та на амортизаційні відрахування:

а) у дискретному варіанті цей взаємозв'язок має вигляд

$$I_t = q\Delta K_t + A, \tag{2.3}$$

де $\Delta K_t = K_{t+1} - K_t$ – приріст основних виробничих фондів у році t; q – параметр моделі; $A = \mu K_t$ – амортизаційні відрахування; μ – коефіцієнт амортизації; K_t – основні виробничі фонди в році t;

б) аналогічним рівнянню (2.3) в неперервному варіанті є

$$I = q\frac{dK}{dt} + \mu K. \tag{2.3.1}$$

Звідси одержуємо диференціальне рівняння руху фондів:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{q}(I - \mu K). \tag{2.3.2}$$

Поєднуючи рівняння зв'язку (2.1)-(2.3), одержимо динамічну модель у дискретному варіанті

$$X_t = W_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t.$$

Якщо вважати виробничі витрати W пропорційними випуску продукції X, тобто

$$W = a, \tag{2.4}$$

то дискретна однопродуктова динамічна модель матиме вигляд

$$X_t = a_t + q\Delta K_t + \mu K_t + C_t,$$

чи

$$\Delta K_t = [(1 - a)X_t - \mu K_t - C_t]/q,$$

а в неперервному варіанті – відповідно

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{q}[(1 - a)X - \mu K - C].$$

У деяких випадках застосовують спрощені варіанти динамічної моделі.

1.Відкрита динамічна модель Леонтьєва. Припустимо, що всі валові капітальні вкладення йдуть на запровадження в дію нових основних виробничих фондів (основні фонди не зношуються). Вважаючи, що приріст випуску продукції $\Delta_t = X_{t+1} - X_t$ пропорційний капітальним вкладенням, тобто

$$I_t = v\Delta X_t, \tag{2.5}$$

з рівнянь (2.1), (2.2), з огляду на (2.4), (2.5), одержимо відкриту динамічну модель Леонтьєва:

$$X_t = aX_t + v\Delta X_t + C_t.$$

У неперервному варіанті динамічна макромодель Леонтьєва має вигляд

$$X = aX + v\frac{dX}{dt} + C. \tag{2.6}$$

Очевидно, що ця модель являє собою лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.

2.Замкнута динамічна модель Леонтьєва. Припустимо, що невиробниче споживання $C(t)$ йде цілком на відновлення робочої сили $L(t)$. Тоді ввівши норму споживання $\gamma(t)$, одержимо

$$C(t) = \gamma(t)L(t). \tag{2.7}$$

Далі, якщо вважати, що витрати праці пропорційні випуску продукції, то

$$L(t) = b(t)X(t), \tag{2.8}$$

де $b(t)$ – норма трудомісткості.

Підставляючи (2.7) у (2.6) з урахуванням (2.8), одержимо "замкнуту за споживанням" модель розширеного відтворення

$$X(t) = a(t)X(t) + v(t)\frac{dX(t)}{dt} + \gamma(t)b(t)X(t),$$

яка описується однорідним диференціальним рівнянням

$$\frac{dX(t)}{dt} - p(t)X(t) = 0,\ p(t) = -\frac{1 - a(t) - \gamma(t)b(t)}{v(t)}. \tag{2.9}$$

Тоді розвиток економіки визначимо розв'язанням рівняння (2.9)

$$X(t) = X_0 e^{-\int\limits_0^t p(\tau)d\tau}.$$

3. Невиробниче споживання є відомою функцією часу. Тоді закон розвитку економіки визначимо з моделі (2.6), що буде неоднорідним диференціальним рівнянням такого вигляду:

$$\frac{dX(t)}{dt} + p_1(t)X(t) = f(t),\ p_1(t) = -\frac{1 - a(t)}{v(t)},\ f(t) = -\frac{C(t)}{v(t)}$$

з розв'язком

$$X(t) = e^{-\int\limits_0^t p_1(\tau)d\tau} \left(\int\limits_0^t f(\tau) e^{-\int\limits_0^t p_1(\tau)d\tau} d\tau + X_0 \right).$$

Отже, можна зробити такий висновок. Виділення з кінцевого продукту Y частини I, що накопичується, приводить до розгляду динамічних моделей і застосуванню для дослідження математичного апарату диференціальних (у неперервному випадку) і кінцево-різницевих рівнянь (у багатокроковому варіанті).

2.2. Постановка задачі керування виробничо-фінансовою діяльністю фірми

Розглянемо діяльність фірми на деякому кінцевому інтервалі часу $T = [0, z]$, де z – горизонт планування.

Нехай у момент часу $t \in T$, фірма має капітал $K = K(t)$, виробляє однорідну продукцію в обсязі $Q = Q(t) = q(t)$, де q – продуктивність капіталу. Зроблена продукція реалізується на недосконалому ринку, приносячи виторг в обсязі $S = S(Q(t))$.

Капітал фірми складається з чистого капіталу (капітал акціонерів) $X = X(t)$ і кредитних коштів (кредиту) $Y = Y(t)$,

$$K(t) = X(t) + Y(t). \tag{2.10}$$

Розмір кредиту обмежений

$$0 \leq Y(t) \leq kX(t), \tag{2.11}$$

де $k > 0 - const$.

У кожен момент фірма видає зарплату своїм співробітникам $\omega L(t)$ (звичайно мається на увазі, що обсяг зарплати на проміжку $[t, t + \Delta t]$ дорівнює $\omega L(t)\Delta t + 0(\Delta t)$. Таким чином, $\omega L(t)$ – швидкість зміни обсягу зарплати, де $\omega > 0$ –ставка зарплати; $L = L(t)$ – чисельність робітників; $L(t) = lK(t)$ (l–трудомісткість реалізації одиниці капіталу). Фірма робить амортизаційні відрахування $\alpha K(t)$ (α– норма амортизації), виплачує відсотки за кредитом $r(t)$ ($r > 0$ константа).

Нехай $D(t), I(t)$ – значення дивідендів й інвестицій у момент t. X_0, K_0 – початкові обсяги чистого й загального капіталів. Тоді мають місце балансові тотожності:

$$X(t) = X_0 + \int\limits_0^t [S(Q(\tau)) - aK(\tau) - rY(\tau) - \omega L(\tau) - D(\tau)]d\tau,$$

$$K(t) = K_0 + \int_0^t [I(\tau) - aK(\tau)]d\tau, t \in T,$$

які можна подати у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dX(t)}{dt} = rX(t) + S - (a + r + \omega l)K(t) - D(t), \qquad (2.12)$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = -aK(t) + I(t),$$

$$X(0) = X_0, K(0) = K_0. \qquad (2.13)$$

де $X(t)$ і $K(t)$ – змінні стани, а $D(t)$ і $I(t)$ – змінні керування. Припустимими керуваннями назвемо кусково-неперервні функції $D(t)$ і $I(t)$, $t \in T$, що задовольняють нерівності:

$$0 \leq D(t) \leq D_{max}, I_{min} \leq I(t) \leq I_{max}, t \in T, \qquad (2.14)$$

де $D_{max} > 0, I_{min} > 0, I_{max} > 0$ – задані числа. Згідно з (2.11) маємо обмеження

$$X(t) \leq K(t) \leq (1 + k)X(t), t \in T. \qquad (2.15)$$

Ставиться завдання – знайти екстремум функціонала, що має вигляд

$$V(D, I) = a_1 e^{-iz} X(z) + \int_0^z e^{-it} D(t)dt \to max, \qquad (2.16)$$

де i – норма дисконтування, a_1– ваговий коефіцієнт, а саме вираження (2.16) – це зважена сума дисконтованого обсягу накопиченого чистого капіталу й обсягу виплачених дисконтованих дивідендів.

2.3. Двопродуктова динамічна макроекономічна модель

Припустимо, що економіка країни представлена двома галузями, кожна з яких випускає валову продукцію X^1, X^2 і затрачає на відтворення працю, засоби праці й предмети праці. Валовий продукт кожної галузі розподіляється в блоках P_X^1, P_X^2 відповідно до кінцевих продуктів Y^1, Y^2 галузей і виробниче споживання W^1, W^2:

$$X^1 = W^1 + Y^1,$$
$$X^2 = W^2 + Y^2.$$

У цій моделі проміжний продукт W^i (i=1,2) витрачається на відтворення валового продукту не тільки своєї галузі, але й іншої:

$$W^1 = W_1^1 + W_2^1,$$
$$W^2 = W_1^2 + W_2^2.$$

Якщо припустити, що міжгалузеві потоки W_j^i (i,j=1,2) з i-й галузі в j-ту галузь пропорційні обсягу валової продукції X^j i–й галузі:

$$W_j^i = a_j^i X^j,$$

де a_j^i – норма витрат продукції i-ї галузі на відтворення одиниці продукції j–ї галузі, то виходячи з цього розподіл валової продукції галузей можна подати у вигляді

$$X^1 = a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 + Y^1, \qquad (*)$$
$$X^2 = a_1^2 X^1 + a_2^2 X^2 + Y^2.$$

Розподіл кінцевого продукту Y^1, Y^2 відповідно на валові капітальні вкладення I^1, I^2 і невиробниче споживання $З^1$, $З^2$ має вигляд:

$$Y^1 = I^1 + З^1,$$
$$Y^2 = I^2 + З^2.$$

У найпростішому варіанті всі валові капітальні вкладення йдуть на розвиток економіки (амортизаційні відрахування в цьому випадку не враховуємо). Тоді витрати валових капітальних вкладень I^1, I^2 мають вигляд

$$I^1 = I_1^1 + I_2^1,\ I^2 = I_1^2 + I_2^2.$$

Будемо вважати, що потік валових капітальних вкладень I_j^i (i, j=1,2) з i-ї галузі в j-ту пропорційний приросту валової продукції j-ї галузі:

$$I_j^i = \nu_j^i \Delta X_j^i, i, j = 1, 2.$$

Підставляючи в (*) усі такі формули, одержимо відкриту двопродуктову модель у дискретному вигляді:

$$X^1 = a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 + \nu_1^1 \Delta X^1 + \nu_2^1 \Delta X^2 + C^1,$$
$$X^2 = a_1^2 X^1 + a_2^2 X^2 + \nu_1^2 \Delta X^1 + \nu_2^2 \Delta X^2 + C^2.$$

У безупинному варіанті модель набуде вигляду

$$X^1 = a_1^1 X^1 + a_2^1 X^2 + \nu_1^1 \tfrac{dX^1}{dt} + \nu_2^1 \tfrac{dX^2}{dt} + C^1,$$
$$X^2 = a_1^2 X^1 + a_2^2 X^2 + \nu_1^2 \tfrac{dX^1}{dt} + \nu_2^2 \tfrac{dX^2}{dt} + C^2.$$

Задаючи в базисному році t_0 $X^1(t_0) = X_0^1, X^2(t_0) = X_0^2$ й припускаючи відомим споживання в часі $C^1(t), C^2(t)$, можна побачити, що задача розвитку економіки, заданої двома галузями, зводиться до системи лінійних неоднорідних диференціа-льних рівнянь.

Зауваження. Аналогічним чином можна побудувати й багатопродуктову модель економіки.

2.4. Моделювання запізнювання під час освоєння капітальних вкладень

Коли мова їде про ідентифікацію процесів на макрорівні одним з головних питань є формування взаємозв'язок факторів з урахуванням запізнювання. Наприклад, ланцюжок "капітальні вкладення – запровадження в дію основних виробничих фондів" належить до числа таких взаємозв'язків.

Існує два підходи при моделюванні запізнювання в процесі освоєння капітальних вкладень. Перший з них припускає наявність проміжку часу τ, після завершення якого капіталовкладення перетворюються на основні фонди. У цьому випадку можна вважати, що зміна основних фондів у момент t відбувається за рахунок інвестицій, виділених у момент $t-\tau$. Тоді модель приросту основних фондів $K(\tau)$ в безупинковому варіанті набуває вигляду

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\mu K(t) + I(t-\tau).$$

Це рівняння уявляє собою рівняння з запізнюванням або рівняння з аргументом, що відхиляється. Величина τ називається параметр запізнювання й визначає значення часу, необхідного на засвоєння інвестицій.

Другий підхід заснований на введенні так званого розподіленого лагу. При цьому передбачається, що інвестиції, які виділяються на розвиток основних фондів, освоюються поступово. Це значить, що якщо у момент часу τ виділено інвестиції $I(t)$, то в момент часу t буде освоєна частка $N(t,\tau)$ основних фондів. Якщо узяти всі моменти часу $\tau < t$, то одержимо таку формулу для запровадження в дію основних фондів $V(t)$ у момент часу t:

$$V(t) = \int\limits_{-\propto}^{t} N(t,\tau)I(\tau)d\tau. \tag{2.17}$$

У випадку дискретної (багатокрокової) моделі, коли інвестиції створяться в моменти часу $t \geq t_1 > t_2 > \ldots > t_n > \ldots$, формулу (2.17) можна переписати у вигляді:

$$V(t) = \sum_{i=-\propto}^{0} N(t,t_i)I(t_i), t_i = t+i. \tag{2.18}$$

Якщо доля інвестицій, створенних в момент часу τ і часу, що вводяться в дію в момент t, залежить лише від проміжку часу освоєння $t-\tau$, то говорять про стаціонарность процесу введення інвестицій у дію. У цьому випадку функція $N(t,\tau)$ буде залежати лише від $t-\tau$ і, отже, дорівнює $N(t-\tau)$. Тому формула (2.17) набуде вигляду

$$V(t) = \int\limits_{-\propto}^{t} N(t-\tau)I(\tau)d\tau.$$

Уведемо нову змінну $\theta = t - \tau$. Якщо $\tau \to -\propto$, то $\theta \to \propto$, а якщо $\tau = t$, то $\theta = 0$. Тоді вираз для $V(t)$ набуде вигляду

$$V(t) = \int\limits_{0}^{\propto} I(t-\theta)N(\theta)d\theta. \qquad (2.19)$$

Функція $N(\theta)$ є важливою характеристикою процесу запровадження в дію капіталовкладень. Одним із припущень про її поводження, яке може бути обране, є положення про монотонне зменшення $N(\theta)$, тобто частка інвестицій, які вводяться в заданий момент часу t, виділених у момент часу $t-\tau$, буде тим менша, чим більший проміжок часу θ. При моделюванні інвестиційного лага застосовують різні способи завдання функції $N(\theta)$. Задамо її у вигляді

$$N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}. \qquad (2.20)$$

Якщо процес освоєння інвестицій є стаціонарним і $I(\tau) = I = const$ при $-\propto < \tau \leq t$, то природним є вимога $V(t) = I$. Підставляючи $I(\tau) = I$ і $V(t) = I$ у формулу (2.19), скорочуючи на I, одержимо

$$\int\limits_{0}^{\propto} N(\theta)dt = 1. \qquad (2.21)$$

При $\theta \to 0$ частка інвестицій, які вводяться, повинна зменшуватися до нуля, тобто має місце співвідношення

$$\lim_{\theta\to\propto} N(\theta) = 0.$$

Очевидно, що розглянута функція розподілу лага $N(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$ перерахованим умовам задовольняє.

Одержимо рівняння для швидкості введення капітальних вкладень $V'(t)$. Для цього потрібно обчислити похідну лівої та правої частини співвідношення (2.19). Обчислюючи похідну правої частини за правилом діференціювання інтеграла за параметром, звідси одержимо:

$$\dot{V}(t) = \int_0^{\propto} \frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t} N(\theta)d\theta, \frac{\partial I(t-\theta)}{\partial t} = -\frac{\partial I(t-\theta)}{\partial \theta},$$

$$\dot{V}(t) = -N(0)I(t) - \int\limits_{0}^{\propto} I(t-\theta)\dot{N}(\theta)d\theta. \qquad (2.22)$$

Зі співвідношення (2.22) маємо шукане рівняння для $V'(t)$

$$\dot{V}(t) = N(0)I(t) + \int_0^{\infty} I(t-\theta)N(\theta)d\theta. \tag{2.23}$$

Для експонентного закону запізнювання рівняння (2.23) спрощується. У цьому випадку $V'(t) = -\lambda^2 e^{-\lambda\theta} = -\lambda N(0)$, де $N(0) = \lambda$. Тоді рівняння (2.23) можна переписати, з урахуванням (2.19), у вигляді

$$\dot{V}(t) = \lambda I(t) - \lambda V(t). \tag{2.24}$$

Можно побачити, що у випадку експонентного закону запізнювання обсяг капітальних вкладень, що вводяться в дію, може бути знайдений за допомогою розв'язання звичайного диференціального рівняння. Для цьому необхідно задати значення $I(t)$ і початкове значення $V(t_0) = V_0$. Після цього $V(t)$ визначається як розв'язання задачі Коші. Тепер модель зростання основних фондів буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} \dot{K}^i(t) = -\mu K^i(t) + V^i(t), \\ \dot{V}^i(t) = -\lambda^i V^i(t) + \lambda^i I^i(t). \end{cases} \tag{2.25}$$

Залежність типу (2.25) може бути отримана і для дискретної моделі запровадження в дію основних фондів (2.18). Аналогом співвідношення (2.20) є при цьому функція

$$N(\theta) = \lambda(1-\lambda)^{\theta}. \tag{2.26}$$

яка задовольняє умову

$$\textstyle\sum_{\theta=0}^{\infty} \lambda(1-\lambda)^{\theta} = 1.$$

Розглянемо співвідношення (2.18). Припустимо, що функція $N(t, t_i)$ залежить лише від різниці $t - t_i$. Застосовуючи аналогічні міркування, одержимо формулу

$$V(t) = \lambda I(t) + (1-\lambda)V(t-1).$$

Останнє рівняння дозволяє визначити, яким буде впровадження в дію капітальних вкладень $V(t)$, якщо відомо, якими були самі капітальні вкладення. Воно є аналогом рівняння (2.24).

2.5. Оптимізаційна динамічна мікроекономічна модель

Центром системи економічних законів є основний економічний закон, що визначає спрямованість економічних процесів. Він відображає вищу мету суспільного виробництва, наприклад, при соціалізмі. Однак сама по собі головна мета не є рушійною силою. Для її досягнення необхідна високоефективна форма виробництва, високий ступень розвитку матеріально-технічної бази, будь-яке підвищення ефективності господарства, що грунтуються на оптимальні темпи зростання продуктивності праці, технічний прогрес і підвищення продуктивності праці.

Кількісний аналіз і математичне формулювання економічних законів служать перехідною ступінню від якісного трактування до розробки моделей оптимального розвитку. При математичній інтерпретації слід виходити з того, що закон, який встановлює причинно-наслідковий зв'язок виробничих відносин, має деяку кількісну форму вираження. В остаточному підсумку зміст критерію розвитку зводиться до визначення максимального «знімання» з економіки, найбільшої ефективності виробництва.

У розглянутій нами оптимізаційній моделі як критерій оптимальності передбачається максимізувати дисконтовану суму споживання, створюваного протягом усього терміну планування:

$$F = \int_{t_0}^{T} \Theta(t) C(t) dt \to max, \tag{2.27}$$

де $C(t)$ - невиробниче споживання; $\Theta(t)$ - функція дисконтування, що показує міру переваги споживання у даний момент щодо споживання того ж продукту в слідуючі моменти часу.

Задачу оптимального розвитку економіки тоді можливо сформулювати таким способом: визначити такій варіант випуску продукції $X(t)$ і таке невиробниче споживання $C(t)$, що забезпечать найбільше інтегроване дисконтоване споживання. Модель набуває такого вигляду:

$$X(t) = aX(t) + q\frac{dK(t)}{dt} + \mu K(t) + C(t).$$

Для економіки, розподіл продукції якої визначений диференціальним рівнянням зв'язку, випуск продукції обмежений виробничими можливостями функції $F(t, K, L)$:

$$0 \leq X \leq F(t, K, L),$$

а зростання виробничих фондів обмежено знизу:

$$K \geq K_{\text{заданий}}, \text{ і } X(t_0) = X_0.$$

Тоді потрібно знайти такий варіант розвитку, що забезпечує максимум функціоналу (2.27).

Отже, розглянута модель враховує не тільки динаміку, але й ціль розвитку економіки. Кількісне визначення оптимального варіанта розвитку за допомогою цієї моделі пов'язане із використанням теорії оптимального керування.

2.6. Нелінійна оптимізаційна модель розвитку багатогалузевої економіки

Дезагрегування динамічної однопродуктової макроекономічної моделі приводить до розгляду розвитку багатогалузевої економіки.

Розглянемо економіку, представлену n-ми галузями, кожна з яких ідентифікується галузевим рівнянням відтворення основних фондів, припускаючи, що валові капітальні вкладення цілком витрачаються без урахування запізнювання на приріст основних виробничих фондів і на амортизаційні відрахування:

$$K^i = I^i - \mu^i K^i, i = \overline{1, n,} \tag{2.28}$$

де $I^i(t)$ - інтенсивність валових капітальних вкладень i-ї галузі; μ^i-коефіцієнт амортизаційних відрахувань i-ї галуз;і K^i – основні фонди i-ї галузі.

При відомому рівні основних виробничих фондів у базисному році маємо

$$K^i(0) = K^i_0 \tag{2.29}$$

виробничі можливості галузей обмежені виробничою функцією галузі:

$$0 \leq X^t \leq F^i(t, K^i, L^i), \tag{2.30}$$

де X^i - інтенсивність валових інвестицій i-ї галузі;L^i – трудові ресурси і-ї галузі.

Міжгалузеві зв'язки представлені балансовими співвідношеннями:

$$X^i = \sum_{j=1}^{n} a^i_j X^j + Y^i, \tag{2.31}$$

$$Y^i = \sum_{j=1}^{n} d^i_j I^i + C^i, i = \overline{1, n,} \tag{2.32}$$

де Y^i - інтенсивність кінцевого продукту i-ї галузі; d^i_j – структурні коефіцієнти основних виробничих фондів; C^i - інтенсивність виробничого споживання i-ї галузі.

Трудові ресурси галузей обмежені нерівністю

$$\sum_{i=1}^{n} L^i \leq L^*. \tag{2.33}$$

Крім того, з економічних міркувань можна одержати такі співвідношення

$$I^i \geq 0, C^i \geq C_m^i, K^i \geq 0. \tag{2.34}$$

Як вихідна інформація задаються початкові значення основних виробничих фондів K_0^i, коефіцієнти амортизації галузей μ^i, матриця коефіцієнтів прямих витрат $A = (a_j^i(t))$, матриця структури фондів (d_j^i), сумарні трудові ресурси $L(t)$, визначені демографічним прогнозом, виробничі функції галузей $F(t, K, L)$.

Необхідно знайти модель оптимального процесу у вигляді

$$v = (\overline{X}(t), \overline{Y}(t), \overline{I}(t), \overline{C}(t), \overline{K}(t), \overline{L}(t)),$$

з критерієм якості

$$T(v) = \int_0^\infty e^{-\delta t} g(t, C) dt \to \max_D,$$

де D – множина планів (процесів), визначених умовами (2.28)-(2.34); δ –коефіцієнт дисконтування; $g(t, C)$ - функція корисності, увігнута з позитивним коефіцієнтом.

Уведення нелінійних виробничих функцій у міжгалузевий баланс дозволяє врахувати можливість взаємного заміщення праці й фондів у галузях і залежність продуктивності праці від фондоозброєності (у нелінійних моделях продуктивності праці вважається заданою функцією часу).

Розглянута нелінійна оптимізаційна модель розвитку багатогалузевої економіки також є задачею, яка розв'язується за допомогою теорії оптимального керування.

Оптимізаційні моделі фізичних процесів

2.7. Вертикальний підйом ракети на максимальну висоту

Нехай ракета з початковою масою m_0 злітає по вертикалі. Завдяки згорянню палива маса ракети $m(t)$ змінюється відповідно до закону $m'(t) = -u(t)$, де $u(t)$ – щосекундна витрата палива. На ракету діють сила ваги $P = m(t)g$, сила лобового опору Q і сила тяги $F = -\beta u(t)$. Припустимо, що сила Q має вигляд $Q = \varepsilon v^2$, де $v(t) = y'(t)$. Будемо вважати, що C і β – сталі параметри, які залежать від конструкції ракети, і будемо розглядати ракету як матеріальну точку. Тоді відповідно до 2-го закону Ньютона можна одержати такі рівняння руху ракети (рівняння Мещерського):

$$v'(t) = (\beta u(t) - Q)/m - g, y'(t) = v(t), m'(t) = -u(t). \tag{2.35}$$

Початкові умови для задачі (2.35) мають вигляд

$$y(0) = 0, v(0) = 0, m(0) = m_0. \tag{2.36}$$

Кінцеві умови: момент T не заданий (m_1 – відома величина), але

$$v(T) = 0, m(T) = m_1. \tag{2.37}$$

Завдання полягає у виборі такого керування $u(t)$, за допомогою якого можна буде максимізувати висоту підйому ракети, тобто

$$J(u) = y(T) \to \max. \tag{2.38}$$

Це задача Майєра з нефіксованим моментом закінчення руху.

2.8. Задача про м'яку посадку на Місяць

Нехай примісячення відбувається по вертикальній прямій. На Місяці відсутня атмосфера, тому м'яка посадка може бути забезпечена тільки реактивними двигунами, що підвищує вимоги до точності керування двигунами.

Рівняння м'якої посадки мають вигляд:

$$y'(t) = v(t), v'(t) = \beta u(t)/m - g, m'(t) = -u(t). \tag{2.39}$$

з початковими умовами:

$$y(0) = y_0, v(0) = v_0, m(0) = m_0.$$

У деякий кінцевий, заздалегідь не заданий момент повинні виконуватися умови:

$$y(T) = 0, v(t) = 0, g = 1,62\text{м}/c^2.$$

Потрібно вибрати керування $u(t)$, яке б мінімізувало витрати палива:

$$I(u) = m_0 - m(T) \to \inf, \tag{2.40}$$

причому

$$0 \le u(t) \le u_{max}. \tag{2.41}$$

2.9. Постановка задачі оптимального керування потужністі ядерного реактора

При конструюванні й експлуатації ядерних реакторів зустрічаються різні оп-тимізаційні задачі, які можна розділити на дві групи.

До першої групи відносять динамічні задачі, у яких потрібно оптимізувати деякі тимчасові характеристики ядерних реакторів. Наприклад, зада-ча про оптимальне випалювання ксенону-135 тощо.

До другої групи належать просторові оптимизаційні реакторні задачі, такі, як максимізація потужності реактора при обмеженні щільності потоку нейтронів, оптимальне розміщення поглинача в реакторі і под. Наведемо приклад задачі про оптимум потужності реактора.

Розглянемо спрощену модель реактора, що дуже добре описує власти-вості реальних енергетичних реакторів з газовим охолодженням (рис.2.3).

Правильна решітка заповнює весь заданий об'єм реактора. У вузлах ґрат розташовані канали з твелами (тепловиділяючими елементами). Змінюючи конструкцію твела, можна змінювати кількість ядерного пального u у твелі, тобто змінювати концентрацію ядерного пального в одиниці об'єму реактора. Обмежимося одновимірною задачею – плоским, циліндричним чи сферичним реактором. Крім цього, будемо розглядати одногрупове наближення, при якому враховуються тільки нейтрони одного типу. Це наближення, з фізичного погляду, справедливе для реакторів з гарним сповільнювачем, що працюють на швидких нейтронах, коли теплові практично відсутні. Позначимо просторову змінну через z і будемо вважати, що $z = 0$ відповідає центру реактора, а $z = H(R)$ – його границі.

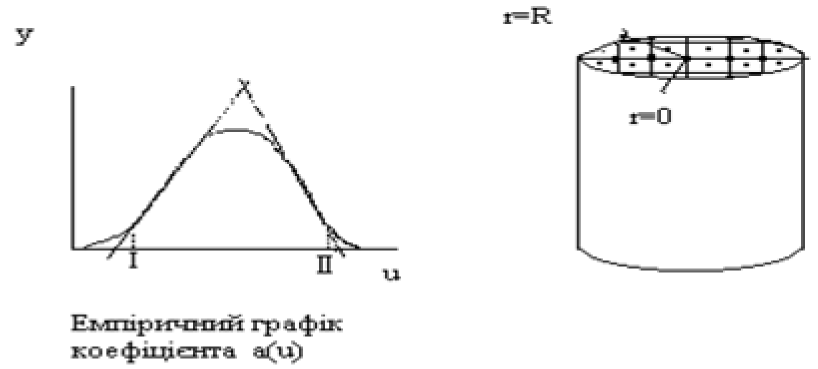

Рис.2.3 Модель реактора

У цих припущеннях для плоского реактора щільність нейтронів задовольняє рівняння

$$\frac{d^2N(z)}{dz^2} + \alpha^2(u)N(z) = 0. \tag{2.42}$$

Графік коефіцієнта $\alpha^2(u) \geq 0$ (рис.2.3), його конкретний вигляд залежить від конструкції реактора, однак в оточенні точок I чи II, цю залежність будемо вважати лінійною, тобто

$$\alpha^2(u) = a + bu \tag{2.43}$$

Граничні умови для рівняння (2.42) мають вигляд:

$$N(0) = N_{max}, \frac{dN}{dz}\mid_{z=0} = 0. \tag{2.44}$$

$$N(H) = p, \frac{dN}{dz}\mid_{z=H} = q$$

Виберемо нормування так, щоб $N_{max} = 1$. Тоді керування повинне задовольняти обмеження

$$0 \leq u_{min} \leq u \leq u_{max}, \tag{2.45}$$

де параметри u_{min} ,u_{max} визначаються конструкцією реактора.

Функціонал W, який оптимізується, має значення потужності, що отримуємо з одиниці об'єму реактора. З точністю до сталої його значення визначається співвідношенням

$$W = \int_0^H u(z)N(z)dz \tag{2.46}$$

Дійсно, імовірність захоплення нейтрона ядерним пальним пропорційна добутку концентрації нейтронів $N(z)$ на концентрацію пального. Кожне захоплення нейтрона викликає розподіл урану, що супроводжується виділенням постійної кількості теплоти. Тоді загальна потужність реактора пропорційна інтегралу у вигляді (2.46).

Однак існують теплотехнічні обмеження, що зводяться до вимог обмеженості температури чи тепловиділення, у всіх точках реактора. Їх можна записати у вигляді

$$u(z)N(z) \leq p_1,$$

$$u(z)N(z) + \int_0^z u(s)N(s)ds \leq p_2. \tag{2.47}$$

Отже, постановка задачі про максимум потужності реактора полягає в такому: знайти такий розподіл ядерного пального $u(z)$, що задовольняє обмеженням (2.45) і (2.47), щоб максимізувати потужність W реактора (2.46), де $N(z)$ – розв'язок задачі (2.42)-(2.44).

3. Класичні методи розв'язання задач оптимального керування

3.1. Основні поняття, які застовуються в теорії керування

Як уже зазначалося в попередньому розділі, кожна конкретна задача оптимального керування визначається: типом рівнянь, що описують еволюцію системи; виглядом функціонала (критерію якості); обмеженнями на траєкторію й керування. Розглянемо ці поняття більш докладно.
1. Рівняння еволюції системи. Залежно від характеру розглядуваного процесу, для його опису можна застосувати звичайні диференціальні рівняння (ЗДР), різницеві рівняння, рівняння з післядією, з частковими похідними, стохастичні рівняння тощо.

Розглянемо об'єкт, стан якого в момент часу t визначається фазовим вектором $x(t) \in R_n$, де R_n – евклідів простір вимірності n. Інколи вектор $x(t)$ називається також вектором стану. Усі вектори $x \in R_n$ далі слід розглядати як вектори-стовпчики з компонентами $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Далі будемо припускати, що рух об'єкта при $t \geq t_0$, описується системою звичайних диференціальних рівнянь такого вигляду

$$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \tag{3.1}$$

де $u(t) \in R_m$ – керування; $f \in R_n$ – задана функція. Надаючи керуванню u різноманітні допустимі значення, одержуємо безліч будь-яких станів об'єкта, серед яких потрібно вибрати найкращий (оптимальний).

Важливий клас систем керування утворюють *лінійні системи.* У цьому випад-ку рівняння руху (3.1) є лінійним як за фазовими координатами, так і за керуванням

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t). \tag{3.2}$$

За допомогою лінійних рівнянь можна виконувати апроксимацію поведінки існуючих систем в околі номінальної (незбуреної) траєкторії.

Інший клас систем, які зустрічаються при розгляді існуючих реальних об'єктів, описується білінійними рівняннями, тобто рівняннями, праві частини яких є лінійними за координатами при фіксованих керуваннях та лінійними за керуванням при фіксованих значеннях координат:

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} u_k(t)B_{ijk}(t)x_j(t) + Bu_0, i = \overline{1,n}. \tag{3.3}$$

2. Мінімізовний функціонал

Керування $u(t)$ системою (3.1) виконується для досягнення ряду заздалегідь поставлених цілей, що частково можна записати в термінах мінімізації деяких функціоналів, що залежать від траєкторії руху системи та керування. Залежно від засобів завдання мінімізовного функціонала прийнято розрізняти задачі Майера, Лагранжа та Больца.

У задачі Лагранжа критерій якості J_0 має вигляд

$$I_0 = \int_{t_0}^{T} F_o(t, x(t), u(t))dt, x \in R_n, u \in R_m, \tag{3.4}$$

де F_0 – задана скалярна функція; T – момент закінчення руху.

Момент T може бути задано раніше або визначається завданою траєкторією руху. В останньому випадку T можна розглядати як додатковий параметр оптимізації.

У задачі Майера потрібно мінімізувати функціонал типу

$$J_0 = \phi_0(T, x(T)), \tag{3.5}$$

де ϕ_0 – завдана скалярна функція; T – час закінчення руху.

У задачі Больца мінімізовний функціонал має вигляд

$$J_0 = \phi_0(T, x(T)) + \int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t)u(t))dt. \tag{3.6}$$

Слід зазначити, що наведений розподіл задач керування з вигляду мінімізовного функціонала зовсім умовний. Так, задачу Больца (а також і задачу Лагранжа) легко звести до задачі Майера. Для цього введемо ще додаткову скалярну змінну $x_{n+1}(t)$, яка задовольняє співвідношенням

$$x'_{n+1}(t) = F_0(t, x(t)u(t)), t \geq t_0, x_{n+1}(t_0) = 0. \tag{3.7}$$

Тоді

$$x_{n+1}(T) = \int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u(t))dt.$$

Далі функціонал (3.6) можна записати у вигляді (3.5), як

$$J_0 = x_{n+1}(T) + \phi_0(T, x(T)). \tag{3.8}$$

Якщо у функціоналі (3.4) функція$F_0(t, x(t), u(t)) = 1$, то задача, яка має за мету мінімізувати час керування, буде називатися задачею швидкодії.

У ряді випадків, коли метою керування є стабілізація заданого програмного руху, тобто утримання дійсної траєкторії руху в деякому околі бажаної траєкторії. У цьому випадку функції F_0, ϕ_0 у (3.6) повинні характеризувати відхилення дійсної траєкторії руху системи від програмної.

Частіше для цієї мети застосовують квадратичні функціонали, які мають вигляд

$$I_0 = x^T(T)N_1x(T) + \int_{t_0}^{T}(x^T(t)N_2(t)x(t) + u^T(t)N_3(t)u(t))dt, \tag{3.9}$$

де в (3.9) усі матриці $N_i \geq 0$. Кінцевий доданок у (3.9) характеризує витрати на керування, які виникають дуже часто в ряді задач.

3. Обмеження на рух

У ряді реальних ситуацій система не повинна заходити в ті або інші області фазового простору. Це знаходить відображення у відповідних обмеженнях на траєкторію $x(t)$ руху системи, які полягають у тому, що в кожний момент часу t існує область $G(t) \in R_n$, у якій може знаходитися вектор стану $x(t)$.

Залежно від виду вказаних обмежень можна виділити різні класи задач керування.

У задачах із фіксованими кінцями початкове $x(t_0)$ та кінцеве $x(t_T)$ положення задані. Якщо ж $x(t_0)$ або $x(t_T)$ не завдане, то відповідна задача має назву задачі з вільним лівим (правим) кінцем.

Задачею з рухомими кінцями називається задача, у якій моменти t_0 і T задані, та початкове $x(t_0)$ і кінцеве $x(t_T)$ положення можуть змінюватися відповідно до меж областей $G(t_0)$ і $G(T)$.

У задачах з ізопериметричними обмеженями, що задані величинами, є інтеграли

$$I_j = \int_{t_0}^{T} F_j(t, x(t))dt = 0, (j = \overline{1, m_1}) \tag{3.10}$$

де F_j – завдані скалярні функції.

Разом з обмеженнями на траєкторію типу рівнянь (3.10), можна також застосовувати обмеження типу нерівності:

$$I_i = \int_{t_0}^{T} F_i(t, x(t))dt \leq 0, (i = \overline{m_1 + 1, m_2}). \tag{3.11}$$

4. Обмеження на керування

При побудові оптимального керування системою (3.1) найбільшого значення має те, яка саме інформація про систему (3.1) доступна керуючій стороні. Якщо фазовий вектор $x(t)$ недоступний для вимірювання, то оптимальне керування має назву в цьому випадку як програмне або П-керування, яке повинне розшукуватися в класі функцій $u(t)$, які залежать тільки від часу t.

Напротивагу, якщо в кожний момент часу t фазовий вектор $x(t)$ точно відомий, то оптимальне керування шукається в класі функцій, які залежать від часу та фазових координат, та має вигляд $u = u(t, x(t))$. Побудоване таким чином керування $u(t, x(t))$ має назву керування з принципу оберненого зв'язку або синтезом керування, або С-керуванням. Ясно, що С-керування є більш гнучким порівняно з П-керуванням.

Поряд з вищезгаданими інформаційними обмеженнями, обумовленими мірою інформування керуючої сторони, існує й інший тип обмежень, пов'язаний з обмеженістю ресурсів керування. Указані обмеження мають вигляд

$$u(t) \in U(t), \tag{3.12}$$

де $U(t) \in R_m$ - завдана множина. Прикладом таких обмежень є

$$(u^T(t), u(t))^{\frac{1}{2}} =\mid u(t) \mid \leq u_0.$$

Співвідношення (3.12) означає, що керування $u(t)$ задовольняє обмеження у кожен момент часу. Іноді ці обмеження можуть мати вигляд інтегральних виразів:

$$I_j = \int_{t_0}^{T} F_j(t, u(t))dt = 0, j = \overline{1, m_1}, \tag{3.13}$$

$$I_k = \int_{t_0}^{T} F_k(t, u(t))dt \leq 0, k = \overline{m_1 + 1, m_2}.$$

У цьому випадку вирази (3.13) можна інтерпретувати, як обмеження на вартість процесу керування. Відзначимо, що обмеження типу рівності (3.13) можна досягти поширенням фазового вектора до обмежень на траєкторію в моменти t_0 і T.

До сих пір ми частіше мали справу лише з класом безперервних функцій. Однак нас цей клас не зовсім влаштовує. Це пояснюється незамкнутістю простору неперервних функцій щодо поточечної збіжності, тому що поточечной межа послідовності безперервних функцій може вже не бути безперервною функцією. Покажемо це на прикладі.

Розглянемо послідовність неперервних функцій $f_k \colon E_1 \to E_1$, визначених на відрізку часу $[0, t^*]$ умовою

$$f_k(t) = \begin{cases} +1, & \text{якщо } 0 \leq t \leq \frac{t^*}{2}; \\ -\frac{2^{k+1}}{t^*}t + (2^k + 1), & \text{якщо } \frac{t^*}{2} < t \leq (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k})t^*; \\ -1, & \text{якщо } (\frac{1}{2} + \frac{1}{2^k})t^* < t \leq t^*. \end{cases}$$

Графік цих функцій представлено на малюнку нижче.

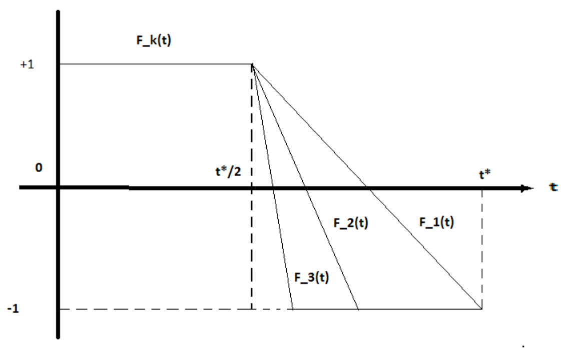

Рис. 3.1. Послідовність неперервних функцій

Зрозуміло, що для будь-якого $t \in [0, t^*]$ послідовність $f_k(t)$ сходиться до деякого значення $f(t)$. Ця гранична функція $f(t)$ вже не є неперервна, а має розрив при $t = \frac{t^*}{2}$. Функція $f(t)$ визначається наступним співвідношенням

$$f(t) = \begin{cases} +1, & 0 \leq t \leq \frac{t^*}{2}; \\ -1, & \frac{t^*}{2} < t \leq t^*. \end{cases}$$

Таким чином, поточечна межа послідовності безперервних функцій вже може бути функцією розривної. Тому бажано ввести такій простір функцій, щоб межа будь-якій послідовності функцій цього простору також йому належала.

Зрозуміло, що клас кусочно безперервних функцій є більш широким, його далі будемо позначати через D. *Визначення 3.1* Функція $f\colon E_1 \to E_1$ називається кусочно-безперервною на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо вона неперервна в усіх точках цього відрізка, крім кінцевого числа точок $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$, а в цих точках існують кінцеві межі функції $f(t)$ зліва та справа. Якщо C - клас безперервних функцій, то $C \subset D$. *Визначення 3.2* Функція $f\colon E_1 \to E_1$ називається вимірної на відрізку $[t_0, t_1]$, якщо вона є поточечной межею деякої послідовності $f_k(t)$ безперервних функцій, тобто якщо при будь-яких $t \in [t_0, t_1]$ виконується наступне співвідношення $f(t) = lim_{k \to \infty} f_k(t)$. Якщо L це є клас усіх вимірних функцій, то маємо наступне співвідношення $C \subset D \subset L$.

Наведенє означення вимірної функції не є загально прийнятними у математичному аналізу. Звичайно воно надається іншими засобами та опирається на поняття вимірної множини.

5. Сумісні обмеження

Нові постановки задач з'являются, коли обмеження мають сумісний характер, тобто залежать одночасно і від траєкторії і від керування.

6. Варіації керування

Припустимо, що вибране деяке допустиме керування $u(t)$, під впливом якого фазова точка, що рухається згідно з законом (3.1), переходить із заданого початкового стану x_0 у заданий стан x_1 . На нашу думку, саме це керування $u(t)$ є оптимальним у розумінні швидкодії, тобто здійснює перехід із стану x_0 у x_1 за найкоротший час. Як перевірити, що це керування дійсно є оптимальним?

Певна річ, потрібно переконатися в тому, що будь-яке інше керування може бути тільки гірше, тобто переведе за більший час. Звичайно так і виконують при розгляді лінійних керованих об'єктів. Однак у більшості випадків порівняти вибране керування $u(t)$ з іншим зазвичай дуже важко. Тому при виводі необхідних умов оптимальності порівнюємо керування $u(t)$ не з усіма, а тільки з «близькими» до нього керуваннями.

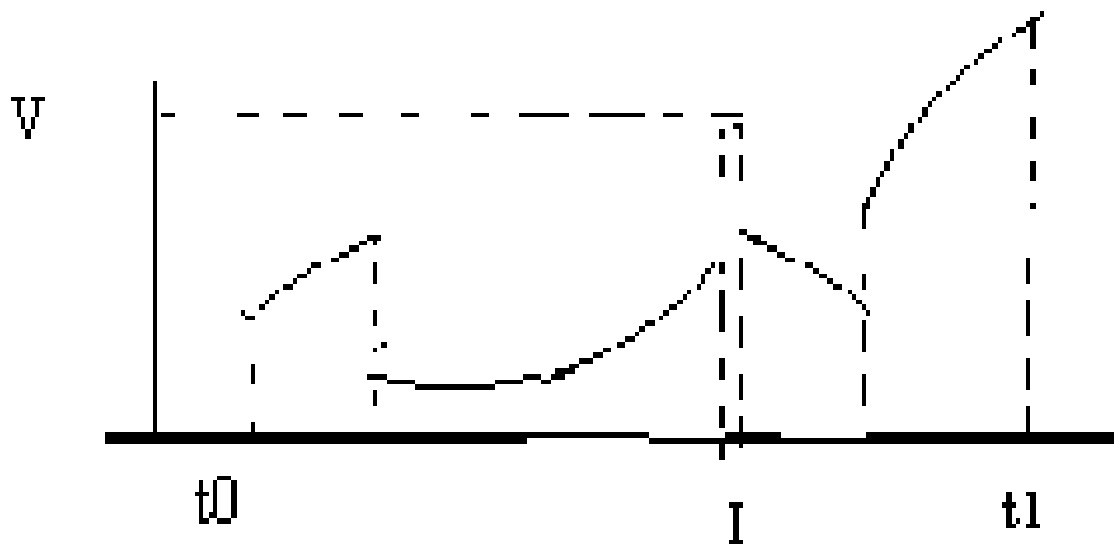

Рис. 3.2. Варіація керування

Поняттю «близькі» керування можна надати різного значення. Уточнимо його таким чином. Візьмемо всередині відрізка часу $t_0 \leq t \leq t_1$, на якому розглядається керування $u(t)$, деяку точку τ, яка не є точкою розриву керування $u(t)$, а в області U – деяку точку υ. Виберемо достатньо мале позитивне число ℓ . Позначимо через I відрізок $\tau - \ell \leq t < \tau$ довжини ℓ з правим кінцем у точці τ. Тепер замінимо керування $u(t)$ на відрізку I сталим керуванням υ, залишивши поза відрізком I керування без зміни. Таке видозмінене керування $u(t)$ будемо називати варіацією цього керування, а саме варіацією поблизу точки τ. Подана побудова дає уточнення терміна «близькі» керування (3.1).

$$u^*(t) = \begin{cases} u(t), t \notin I, \\ \upsilon, t \in I. \end{cases}$$

Таким чином, математичне формулювання задачі оптимального керування включає: 1. Рівняння що описують процес; 2. Критерій якості; 3. Обмеження у вигляді рівнянь та нерівностей, які потрібно накласти на розв'язання рівнянь або керуючі функції.

Повний опис задачі може бути отриманий лише на основі аналізу реального стану процесу, що досліджується. Математичні вимоги при цьому такі: вимагається, щоб розглянута задача мала єдиний розв'язок у достатньо широкому класі функцій.

Розглянемо рівняння руху (3.1) з критерієм якості

$$I(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \qquad \to \inf .$$

Обмеження візьмемо, як вигляд:

$$I_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = 0, j = \overline{1, m_1}, \tag{3.14}$$

$$I_i(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \leq 0, i = \overline{m_1 + 1, m_2}, \tag{3.15}$$

де

$$I_k(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = \int_{t_0}^{T} F_k(t, x(t), u(t))dt + \phi_k(t_0, x(t_0), T, x(T)), k = \overline{0, m_2}. \tag{3.16}$$

У рівняннях (3.1), (3.14), (3.16) функції f, $F = (F_k)$, $\phi = (\phi_k)$ задані, причому $f : R_1 \times R_n \times Rm \to Rn$; $F_k : R_1 \times R_n \times R_m \to R_1$; $\phi_k : R_1 \times R_n \times R_1 \times R_n \to R_1$; $k = 0, \ldots, m_2$. Моменти t_0 початку руху та його закінчення T належать деякому заданому кінцевому відрізку D числової осі.

Керування $u(t)$ шукаємо в класі кусково-неперервних функцій, а траєкторію $x(t)$ – у класі кусково-неперервних функцій, де $t \in D$.

Сукупність варійовних параметрів $q = (t_0, x(t_0), u, T, x(T))$ назвемо допустимою, якщо вона задовольняє всім обмеженням (3.1), (3.14), (3.16).

Допустима сукупність параметрів q має назву оптимальної, якщо для іншої будь-якої "близької" у визначеному розумінні допустимої сукупності $\overline{q}$ значення функціонала, яке відповідає q, не переважає значення цього ж функціонала відповідного $\overline{q}$.

Залежно від того, у якому сенсі розуміти близькість q і $\overline{q}$, виникають різні типи екстремуму (сильний, слабкий та ін.). Ми будемо розглядати умови існування локально оптимального в сильному сенсі екстремуму.

Визначення 3.3 Допустима сукупність параметрів q буде називатися локально оптимальною в сильному сенсі, якщо знайдеться таке $\varepsilon > 0$, що для будь-якої допустимої сукупності $\overline{q}$, оцінці, яка задовольнить

$$| t_0 - \overline{t_0} | + | T - \overline{T} | + \max_t | x(t) - x(\overline{t}) | < \varepsilon, \qquad t \in [t_0, T] \cap [\overline{t_0}, \overline{T}],$$

справедлива нерівність

$$I(\overline{t_0}, \overline{x}(\overline{t_0}), \overline{u}, \overline{T}, \overline{x}, \overline{x}(\overline{T})) \geq I(t_0, x(t_0), u, T, x(T)),$$

3.2. Класичне варіаційне числення в задачах оптимального керування

I. Задачі з вільним правим кінцем і фіксованим часом

A. *Установимо необхідні умови оптимальності* в задачі керування системою

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0, t_0 \leq t \leq T, \tag{3.17}$$
$$x \in R_n, u \in R_m$$

із критерієм якості

$$I(u) = \phi(x(T)) \to \inf. \tag{3.18}$$

Момент початку руху t_0 і його закінчення T, а також початкове положення x_0 – задані. Припустимо, що неперервні функції

$$f(t, x, u) : R_1 \times R_n \times R_m \to R_n, \phi(x) : R_n \to R_1$$

неперервно диференційовні за x і u. Відповідні похідні функцій $f(t, x, u)$ позначимо нижнім індексом

$$f_x(t, x, u) = \partial f(t, x, u)/\partial x, \ f_u(t, x, u) = \partial f(t, x, u)/\partial u, \ \phi_x = \partial \phi(x)/\partial x.$$

Зазначимо, що f_x – матриця має розмір nxn з елементами $\partial f_j(t, x, u)/\partial x_i$, i, $j = 1, \ldots, n$, ϕ_x – вектор-стовпець з компонентами $\partial \phi(x)/\partial x_i$, $i = 1, \ldots, n$. Припустимо, що функції $f(t, x, u)$, f_x , $\phi(x)$, задовольняють умову Ліпшица за змінними $(, y)$, тобто існує > 0, що для будь-яких $t \in R_1$, x, $y \in R_n$, та u, $\upsilon \in R_m$ виконані умови:

$$\begin{aligned} | f(t, x, u) - f(t, y, v) | &\leq C(| x - y | + | u - v |), \\ | f_x(t, x, u) - f_y(t, y, v) | &\leq C(| x - y | + | u - v |), \\ | \phi_x(x) - \phi_y(y) | &\leq C(| x - y |). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Керування $u(t) \in C[0,T]$ - класу неперервних функцій.

Б. *Формула Коші.* Розглянемо систему лінійних рівнянь

$$x'(t) = A(t)x(t), x \in R_n. \tag{3.20}$$

Квадратна матриця $A(t)$ розміру $n \times n$ має кусково-неперервні обмежені елементи.

Позначимо через $X(t)$ фундаментальну матрицю системи (3.20), тобто матрицю, стовпці якої являють собою n – кількість лінійно незалежних розв'язків рівняння (3.20). Матриця Коші $Z(t,s)$ системи (3.20) визначається рівністю

$$Z(t,s) = X(t)X_1(s). \tag{3.21}$$

Для розв'язання лінійного неоднорідного рівняння

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(t), x(t_0) = x_0, \tag{3.22}$$

де $f(t)$– кусково-неперервна обмежена функція, що виражається формулою Коші, отримуємо

$$x(t) = Z(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} Z(t,s)f(s)ds. \tag{3.23}$$

Нагадаємо деякі властивості матриці $Z(t,s)$:

$$\begin{aligned} \partial Z(t,s)/\partial t = A(t)Z(t,s),\ \partial Z(t,s)/\partial s = -Z(t,s)A(s), \\ Z(s,t) = Z^{-1}(t,s), \partial Z^{-1}(t,s)/\partial t = -Z^{-1}(t,s)A(t), \\ Z(t,s)Z(s,t_1) = Z(t,t_1). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Відзначимо, що для сталої матриці $A(t) \equiv B$, матриця Коші $Z(t,s)$ має вигляд

$$Z(t,s) = \exp[B(t,s)]. \tag{3.25}$$

В.*Нерівність Коши-Буняковського.* Для будь-яких двох скалярних функцій $x(t)$ та $y(t)$, що інтегруються з квадратом на відрізку $[t_0, T]$ має місце нерівність Коши-Буняковського.

$$\left[\int_{t_0}^{T} \mid x(t)y(t) \mid dt\right]^2 \leq \left(\int_{t_0}^{T} x^2(t)dt\right)\left(\int_{t_0}^{T} y^2(t)dt\right). \tag{3.26}$$

Г.*Необхідні умови оптимальності.* Введемо такі позначення

$$H(t,x,u,\psi) = \psi^T(t)f(t,x,u). \tag{3.27}$$

Теорема 3.1. (Необхідні умови оптимальності) Нехай $u_0(t)$ - оптимальне П-керування в задачі (3.17), (3.18), а $x_0(t)$ – відповідна йому траєкторія системи $x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), x_0(t) = x_0$. Тоді

$$\partial H/\partial u \mid x_0(t), u_0(t) = H_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)) \equiv 0, t_0 \leq t \leq T, \tag{3.28}$$

де $\psi(t) \in R_n$– розв'язання задачі Коші:

$$\psi'(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \psi(T) = -\phi_x(x_0(T)). \tag{3.29}$$

Доведення. Нехай $u_0(t)$ і $x_0(t)$ – відповідне оптимальне керування й відповідна йому оптимальна траєкторія на $t_0 \leq t \leq T$. Визначимо варіацію керування $\upsilon(t)$ і траєкторію $y(t)$ системи (3.17), яка відповідає керуванню $u_0(t) + \upsilon(t)$:

$$y'(t) = f(t, y(t), u_0(t) + \upsilon(t)), y(t_0) = x_0, t_0 \leq t \leq T.$$

Оцінимо зміну $\Delta(t) = y(t) - x_0(t)$ – оптимальної траєкторії, викликану зміною оптимального керування на величину $\upsilon(t)$. Зрозуміло, що

$$\Delta(t) = \int_{t_0}^{t} [f(s, y(s), u_0(s)) + \upsilon(s)) - f(s, x_0(s), u_0(s))] ds.$$

Звідси та з умови Ліпшиця (3.20) маємо, що

$$|\Delta(t)| \leq C \int_{t_0}^{t} (|\Delta(s)| + |\upsilon(s)|) ds.$$

Тоді за допомогою леми Гронуола–Беллмана

$$|\Delta(t)| \leq e^{C(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} |v(s)| ds \leq C_1 \int_{t_0}^{t} |v(s)| ds. \tag{3.30}$$

Оцінимо тепер зміну критерію якості (3.18), тобто оцінимо різницю $\Delta I = I(u_0 + v) - I(u_0)$. Враховуючи (3.18), знаходимо, що

$$\Delta I = \phi_x^T(x_0(T))\Delta(T) + N_1, \tag{3.31}$$

де

$$N_1 = [\phi_x^T(x_0(T) + \theta\Delta(T)) - \phi_x^T(x_0(T))]\Delta(T),\ 0 \leq \theta \leq 1. \tag{3.32}$$

Визначимо через θ деякі числа з відрізку (0,1). З оцінок (3.30), (3.32) та умов Ліпшица (3.20) випливає, що

$$|N_1| \le C_2(\int_{t_0}^{T} |(\upsilon(s))|ds)^2. \qquad (3.33)$$

Перетворимо тепер перший доданок (3.31). Використовуючи (3.29), маємо

$$\varphi_x^T(x_0(T))\Delta(T) = -\psi^T(T)\Delta(T) = -\int_{t_0}^{T}(\frac{d}{dt}(\psi^T(t)\Delta(t))dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{T}(\dot{\psi}^T(t)\Delta(t) + \psi^T(t)\dot{\Delta}(t))dt = -\int_{t_0}^{T}\psi^T(t)[f(t, y(t), u_0(t) + \upsilon(t_0)) -$$

$$-f(t, x_0(t), u_0(t))]dt + \int_{t_0}^{T} H_x^T(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))\Delta(t)dt.$$

Звідси та зі співвідношень (3.27), (3.31) одержуємо рівність

$$\Delta I = -\int_{t_0}^{T}[H(t, y(t), u_0(t) + \upsilon(t), \psi) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi)]dt +$$

$$+\int_{t_0}^{T} H_x^T(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))\Delta(t)dt + N_1. \qquad (3.34)$$

Відмітимо, що

$$H(t, y(t), u_0(t) + \upsilon(t), \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t) + \upsilon(t), \psi(t)) + H_x^T(t, x_0(t) +$$

$$+\theta\Delta(t), u_0(t) + \upsilon(t), \psi).$$

Тому далі (3.34) можна подати у вигляді

$$\Delta I = -\int_{t_0}^{T}[H(t, y(t), u_0(t) + \upsilon(t), \psi) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi)]dt + N_1 + N_2, \quad (3.35)$$

де

$$N_2 = \int_{t_0}^{T}[H_x^T(y, x_0(t) + \theta\Delta(t), u_0(t) + v(t), \psi) - H_x^T(t, x_0(t), u_0(t), \psi)]\Delta(t)dt.$$

З огляду на рівність (3.29) і умов теореми функція$|\psi(t)|$ – рівномірно обмежена при $t_0 \le t \le T$. Звідси, а також з визначення N_2 і вимог (3.20) випливає, що

$$|N_2| \le C_3 \int_{t_0}^{T} (|\Delta(t)|^2 + |\Delta(t)||\upsilon(t)|)dt. \qquad (3.36)$$

Оцінимо другий доданок (3.36), застосовуючи (3.30) одержимо

$$\int_{t_0}^{T} (|\Delta(t)||\upsilon(t)|)dt \le C_1 \int_{t0}^{T} |\upsilon(t)|(\int_{t_0}^{T} |\upsilon(s)|ds)dt$$
$$\le C_1 \int_{t_0}^{T} |\upsilon(t)|dt \int_{t_0}^{T} |\upsilon(s)|ds = C_1(\int_{t_0}^{T} |\upsilon(t)|dt)^2. \qquad (3.37)$$

Аналогічно з огляду на (3.30) маємо

$$\int_{t_0}^{T} (|\Delta(t)|)^2 dt \le (T - t_0)C_1^2 [\int_{t_0}^{T} (|\upsilon(s)|)ds]^2. \qquad (3.38)$$

Отже формули (3.36)-(3.38) означають, що

$$|N_2| \le C_4 [\int_{t_0}^{T} (|\upsilon(t)|)dt]^2. \qquad (3.39)$$

Таким чином, для довільної припустимої варіації $\upsilon(t)$ оптимального керування $u_0(t)$ доведене основне співвідношення (3.35) для збільшення ΔI критерію якості.

Введемо тепер $\upsilon(t) = \varepsilon\omega(t)$, де $\omega(t)$ – довільне неперервне керування, а параметр $\varepsilon > 0$. Тоді з (3.35) випливає, що

$$0 \le \Delta I = -\int_{t_0}^{T} H_u(t, x_0(t), u(t) + \theta\varepsilon\omega(t), \psi)\varepsilon\omega(t)dt + N_1 + N_2. \qquad (3.40)$$

Відзначимо, що через нерівності (3.33), (3.39) при $\upsilon = \varepsilon\omega$ одержимо

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N_1}{\varepsilon} = 0, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{N_2}{\varepsilon} = 0,$$

Поділивши (3.40) на ε і переходячи до межі при $\varepsilon \to 0$ одержимо

$$0 \le -\int_{t_0}^{T} H_u^T(t, x_0(t), u_0(t), \psi)\omega(t)dt.$$

Застосуючи основну лему варіаційного числення, робимо висновок про те, що остання нерівність можлива тільки тоді, коли виконана рівність

$$H_u(t, x_0(t), u_0(t), \psi) \equiv 0, t_0 \leq t \leq T.$$

Теорема доведена.

Д. *Задача Больца.* Розглянемо задачу

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), t_0 \leq t \leq T, x(t_0) = x_0, \tag{3.41}$$

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(T)) \to \inf, \tag{3.42}$$

де t_0 і T - задані моменти часу, $x_0 \in R_n$ - заданий вектор початкового положення системи. Правий кінець траєкторії $x(T)$ вільний.

Необхідні умови оптимальності в задачі (3.41)–(3.42) можна одержати за допомогою теореми 3.1, шляхом зведення задачі Больца до задачі Майєра. У цьому випадку зробимо так. Введемо змінну x_{n+1} , яка задовольняє умови:

$$x'_{n+1}(t) = F(t, x, u), \qquad x_{n+1}(t_0) = 0,$$

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.43}$$

$$x_{n+1}(T) + \varphi(x(T)) \to \inf .$$

Необхідні умови, сформульовані в теоремі 3.1, будуть мати такий вигляд: функція

$$H = \psi^T(t) f(t, x, u) + \psi_{n+1}(t) F(t, x, u),$$

рівняння для вектора $\psi(t) \in R_n$ зберігає колишній вигляд (3.29), а скалярна функція $\psi_{n+1}(t)$ задовольняє співвідношення:

$$\psi'_{n+1}(t) = -\partial H / \partial x_{n+1} = 0, \psi_{n+1}(T) = -1, \Rightarrow \psi_{n+1}(t) \equiv -1.$$

Тому

$$H(t, x, u, \psi) = -F(t, x, u) + \psi^T(t) f(t, x, u).$$

Тоді сукупність необхідних умов оптимальності в задачі (3.41)–(3.42), яким задовольняють оптимальні траєкторія $x_0(t)$ і керування $u_0(t)$, виражаються співвідношеннями:

$$x'_0(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), t_0 \leq t \leq T, x_0(t_0) = x_0, \tag{3.44}$$

$$\psi'(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{3.45}$$

$$\psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)),$$
$$f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0. \tag{3.46}$$

Якщо розв'язок задачі оптимального керування (3.41)–(3.42) існує та єдиний, то він цілком визначається співвідношеннями (3.44)-(3.46). При цьому побудова оптимального управління складається з таких етапів:

1. Вирішують рівняння (3.46) відповідно до $u_0(t)$ і визначають функцію

$$u_0 = u_0(t, \psi(t), x_0(t)).$$

2. Підставляють отримані вирази u_0 у рівняння (3.44), (3.45). У результаті маємо двоточкову крайову задачу щодо невідомих $\psi(t)$ і $x_0(t)$.

3. Вирішують отриману крайову задачу й визначають функції $\psi(t)$ та $x_0(t)$. Підставляючи знайдені функції у формулу, яка визначає оптимальне керування, одержуємо П-керування $u_0(t)$.

Реалізація викладеного методу в конкретних випадках викликає чисельні труднощі, пов'язані, зокрема, з необхідністю розв'язувати крайову задачу (3.44)–(3.45), з великою розмірністю систем, з їх нелінійністю тощо.

Крім того, необхідно мати на увазі, що для доведення оптимальності отриманого таким чином керування потрібно установити існування розв'язку початкової задачі оптимального керування та єдиного розв'язку крайової задачі (3.44)–(3.45), у якій замість u підставлене $u_0(t, \psi(t), x_0(t))$.

Водночас у деяких важливих випадках описаний підхід може бути ефективно здійснений.

3.3. Оптимальне керування лінійними системами з квадратичним функціоналом

1.Необхідні умови оптимальності.

Лінійно-квадратична (ЛК) задача, складається з мінімізації квадратичного функціонала на траєкторіях лінійної системи

$$I(u) = x^T(T)N_1x(T) + \int_{t0}^{T}(x^T(t)N_2(t)x(t) + u^T(t)N_3(t)u(t))dt, \tag{3.47}$$

$$x'(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), t \in [t_0, T], x \in R_n, u \in R_m,$$
$$x(t_0) = x_0. \tag{3.48}$$

Моменти часу t_0 і T, а також початкове положення x_0 задані. Передбачається, що матриці $A(t)$, $B(t)$, N_1, $N_2(t)$, $N_3(t)$ відповідних розмірностей мають кусково-неперервні елементи, причому

$$N_1 \geq 0, N_2(t) \geq 0, N_3(t) \geq 0. \tag{3.49}$$

Нагадаємо, що матриця $N \geq 0$, якщо $x^T N x \geq 0$ для будь якого $x \in R_n$, та $N > 0$, якщо $x^T N x > 0$, для будь якого $x \in R_n$, $x \neq 0$.

Для визначення оптимального керування у ЛК задачі (3.48), (3.47) використовуємо установлені вище необхідні умови оптимальності (3.44)-(3.46). У розглянутому випадку вони задані рівняннями (3.48) і співвідношеннями:

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) =$$
$$- x^T(t)N_2(t)x(t) - u^T(t)N_3(t)u(t) + \psi^T(t)[A(t)x(t) + B(t)u(t)],$$
$$-\partial H/\partial x = \psi'(t) = -A^T(t)\psi(t) + 2N_2(t)x(t), t_0 \leq t \leq T, \tag{3.50}$$
$$\psi(T) = -2N_1 x(T),$$
$$\partial H/\partial u = B^T(t)\psi(t) - 2N_3(t)u(t) = 0.$$

Відповідно до умов (3.49) функціонал (3.47) є опуклим. Використовуючи опуклість, можна показати, що (3.48) і (3.50) виражають не тільки необхідні, але й достатні умови оптимальності.

2.Побудова оптимального керування.

Застосуємо раніше описаний метод.

1) з рівняння (3.50) випливає, що оптимальне керування визначається формулою

$$u_0(t) = (1/2)N_3^{-1}(t)B^T(t)\psi(t). \tag{3.51}$$

2) підставимо вираз (3.51) у (3.48), (3.50). У результаті одержимо крайову задачу для визначення оптимальної траєкторії $x_0(t)$ та вектора сполучених змінних $\psi(t)$:

$$x_0'(t) = A(t)x_0(t) + (1/2)B_1(t)\psi(t), x_0(t_0) = x_0,$$
$$\psi'(t) = -A'(t)\psi(t) + 2N_2(t)x_0(t), \tag{3.52}$$
$$\psi(T) = -2N_1 x_0(T), \text{ де } B_1(t) = B(t)N_3^{-1}(t)B^T(t);$$

3) для розв'язання крайової задачі (3.52) будемо шукати функцію $\psi(t)$ у вигляді

$$\psi(t) = -2P(t)x_0(t), \tag{3.53}$$

де симетрична матриця $P(t)$ підлягає визначенню. Продиференціюємо обидві частини рівності (3.53) за t:

$$\psi'(t) = -2[P'(t)x_0(t) + P(t)x_0'(t)].$$

Замінимо тут похідні ψ' і x_0' відповідно до рівностей (3.52), а потім підставимо замість $\psi(t)$ у (3.53). Одержимо:

$$-A^T(t)\psi(t) + 2N_2(t)x_0(t) = -2[P'(t)x_0(t) + P(t)A(t)x_0(t) + (1/2)P(t)B_1(t)\psi(t),$$

$$\text{або } [P'(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B_1(t)P(t) + N_2(t)]x_0(t) = 0,$$

$$P(T)x_0(T) = N_1 x_0(T).$$

Останні рівності будуть виконані для будь-якого вектора $x_0(t)$, якщо

$$P'(t) + A^T(t)P(t) + P(t)A(t) - P(t)B_1(t)P(t) + N_2(t) = 0,$$

$$P(T) = N_1. \tag{3.54}$$

Рівняння (3.54), що служить для визначення матриці $P(t)$, називається матричним рівнянням Рікаті. Воно відіграє важливу роль у теорії ЛК задач керування.

Після того як матриця $P(t)$ визначена, оптимальне керування на основі рівностей (3.51) і (3.53) виражається за допомогою формули

$$u_0(t) = -N_3^{-1}(t)B^T(t)P(t)x_0(t). \tag{3.55}$$

Крім того, мінімальне значення критерію якості (3.47), що відповідає керуванню (3.55), визначається співвідношенням

$$minI(u) = I(u_0) = x_0^T P(t_0)x_0. \tag{3.56}$$

Таким чином, побудова матриці $P(t)$ дозволяє цілком розв'язати задачу керування (3.47),(3.48).

Слід відзначити, що керування (3.55) побудовано у вигляді синтезованого керування, тобто у вигляді функції часу й фазових координат. Дійсно, позначаючи реалізоване значення оптимальної траєкторії x_0 через x, одержимо, що оптимальне керування системи, яке перебуває в стані x у момент t, має вигляд

$$u_0(t,x) = -N_3^{-1}(t)B^T(t)P(t)x. \tag{3.57}$$

3.Матричне рівняння Рікаті

Відзначимо деякі властивості матричного рівняння Рікаті (3.54).

1. Розв'язання рівняння (3.54) існує і єдине при всіх $t < T$.

Локальне (тобто приналежні деякій околі точки T) існування та єдність рівняння (3.54) є очевидним наслідком загальних теорем існування розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь. Складнішим є доведення того, що розв'язання задачі (3.54) визначене при всіх $t < T$. Ці труднощі пов'язані з тим, що рівняння (3.54) містить квадратичну нелінійність

$P(t)B_1(t)P(t)$. Та не кожне рівняння з квадратичною нелінійністю має розв'язок, який можна продовжувати на всю вісь.

Розглянемо скалярне рівняння типу (3.54):

$$p'(t) - b_1p^2(t) + n_2 = 0, p(T) = n_1; \tag{3.58}$$

$$b_1, n_1, n_2 > 0.$$

а) рішення рівняння (3.58) не може перетнути пряму $P(t) = 0$. Справді, якщо в точці $t = t_1 < T$ розв'язок перетинає пряму $p(t) = 0$, то повинно бути $p(t_1) = 0$, і $p'(t_1) \geq 0$. Але тоді рівняння (3.58) у точці t_1 порушується;

б) розв'язок $p(t)$ не може також перетнути пряму $p(t) = (n_2/b_1)^{1/2}$, оскільки на цій прямій $-b_1p^2(t)+n_2 = 0$, а усюди вище $-b_1p^2(t)+n_2 < 0$. Таким чином, розв'язок (3.58) знаходиться в межах: $0 \leq p(t) \leq (n_2/b_1)^{1/2}, t \leq T$.

Виходить, що $p(t)$ не може йти до нескінченності для кінцевих значень t на відміну від розв'язку рівняння (3.58).

Використовуючи близькі за смислом міркування, Р.Калман довів, що розв'язки рівняння (3.54) визначені при всіх $t \leq T$.

2. Розв'язання рівняння (3.54) невід'ємне, тобто $p(t) \geq 0$. З (3.56) випливає, що

$$x_0^T p(t) x_0 = I(u_0) \geq 0, \tag{3.59}$$

оскільки завжди функціонал $I(u) \geq 0$. У співвідношенні (3.59) момент $t_0 < T$, а також x_0 можуть бути обрані довільно. Це означає, що $p(t) \geq 0$.

3. Нехай $N_2(t) \equiv 0$, $N_1 > 0$. Тоді (3.54) інтегрується в явному вигляді.

4.Метод послідовних наближень.

Розглянемо послідовність симетричних матриць $P_i(t)$, $(i \geq 1)$, введену за допомогою рекурентних формул:

$$P_0'(t) + A^T(t)P_0(t) + P_0(t)A(t) + N_2(t) = 0, P_0(T) = N_1,$$

$$P_i'(t) + A_i^T(t)P_i(t) + P_i(t)A_i(t) - P_{i-1}(t)B_1(t)P_{i-1}(t) + N_2(t) = 0, P_i(T) = N_1,$$

$$A_i(t) = A(t) - B_1(t)P_{i-1}(t), i = 1, 2... \tag{3.60}$$

Застосовуючи формулу Коші й рівняння (3.60), робимо висновок, що

$$P_i(t) = \int_{t0}^{T} W_i^T(t,s)[P_{i-1}(s)B_1(s)P_{i-1}(s) + N_2(s)]W_i(t,s)ds+$$

$$+W_i^T(t,T)N_1W_i(t_0,T), \quad i \geq 1,$$

де $W_i(t,s)$ – матриця Коші – розв'язок однорідного рівняння $y'(t) = -A_i(t)y(t)$.

Зі співвідношення щодо $P_i(t)$ та аналогічного представлення для матриці $P_0(t)$ випливає, що всі $P_i(t) \geq 0$, навіть можна показати, що $P_{i+1} - P_i(t) \leq 0$, тобто $\{P_i(t)\}$ - незростаюча послідовність невід'ємно-визначених матриць. Далі, можна довести, що послідовність $\{P_i(t)\}$ має межу $P(t) \geq 0$ при $t \to \infty$, причому збіжність $P_i(t) \to P(t)$ є рівномірна на кожному обмеженому проміжку часу. Переходячи до межі при $i \to \infty$ в інтегральній тотожності, що відповідає рівнянню (3.60) робимо висновок, що матриця $P(t)$ – розв'язання задачі (3.54).

Якщо $||P||$ – норма матриці P, що дорівнює квадратному кореню з $||P|| = (\sum p_{ij}^2(t))^{1/2}$, то

$$\max_{t_0 \leq t \leq T} ||P(t) - P_i(t)|| \leq \frac{C}{i!}.$$

3.4. Необхідні умови оптимальності. Метод множників Лагранжа

Зручним і ефективним методом одержання необхідних умов оптимальності в кінцевовимірних задачах оптимізації й у варіаційному численні є *метод множників Лагранжа.* Застосовуючи поняття множників Лагранжа, наведемо необхідні умови оптимальності для наступної задачі:

$$\begin{gathered} x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x \in R_n, u \in R_m, t_0 \leq t \leq T, \\ I_0(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \to \inf, \\ I_j(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) = 0, j = 1, ..., m_1, \\ I_i(t_0, x(t_0), u, T, x(T)) \leq 0, i = m_1 + 1, ..., m_2, \\ I_k = \int_{t_0}^{T} F_k(t, x(t), u(t))dt + \phi_k(t_0, x(t_0), T, x(T)), k = 0, ..., m_2). \end{gathered} \tag{3.61}$$

Нехай розв'язок задачі (3.61) існує і має вигляд $\{t_0, T, u_0(t), x_0(t)\}$, де $u_0(t)$ – оптимальне керування в задачі (3.61); $x_0(t)$ – оптимальна траєкторія; t_0 і T – невідомі моменти початку й закінчення руху. Припустимо, що функції $f, F, f_x, f_u, F_x, \phi, \phi_x$ – неперервні в деякому околі $\{x_0(t), u_0(t), t\}, t \in [t_0, T]$, де $F = (F_1, \ldots, Fm_2)$.

Теорема 3.2. Нехай $(t_0, T, u_0(t), x_0(t))$ – розв'язок задачі (3.61). Тоді існують такі одночасно нерівні нулю множники Лагранжа $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_2})$, $\psi(t) \in R_n$, причому $\psi(t)$ неперервно диференційована на $[t_0, T]$, що справедливі співвідношення:

рівняння еволюції системи

$$x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)); \tag{3.62}$$

рівняння Ейлера

$$\psi'(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - F_x(t, x_0(t), u_0(t))\lambda; \tag{3.63}$$

умови трансверсальності

$$\psi(t_0) = -\varphi_x(t_0, x, T, y)\lambda, \psi(T) = \varphi_y(t_0, x, T, y)\lambda, \tag{3.64}$$

$$\text{при } x = x_0(t), y = x_0(T);$$

умови стаціонарності

$$-F_u(t, x_0(t), u_0(t))\lambda + f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) = 0. \tag{3.65}$$

Умови на рухомі кінці t_0 і T (які враховуються лише у випадку рухомих кінців)

$$F^T(t_0, x_0(t_0), u_0(t_0))\lambda - [\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_x(t_0, x, T, y)x'_0(t_0)]^T\lambda = 0, \tag{3.66}$$

$$F^T(T, x_0(T), u_0(T))\lambda + [\varphi_{t_0}(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T)) + \varphi'_x(t_0, x, T, y)x'_0(T)]^T\lambda = 0, \tag{3.67}$$

при $x = x_0(t), y = x_0(T)$;

умови жорсткості, що доповнює

$$\lambda_j[_{t_0}\int^T F_j(t, x_0(t), u_0(t))dt + \varphi_j(t_0, x_0(t_0), T, x_0(T))] = 0, \tag{3.68}$$

$$j = 1, ..., m_1;$$

умови недодатності

$$\lambda_i \leq 0, i = 0, 1, ..., m_1... \tag{3.69}$$

Відзначимо наступне: умову (3.66) слід враховувати, якщо варіюється момент t_0 початку руху, а умова (3.67) – момент T.Якщо ж який-небудь із моментів t_0 чи T є заданим, то відповідна умова (3.66) чи (3.67) не враховується. Крім того, якщо λ_0 відмінне від нуля, тобто, якщо $\lambda_0 \leq 0$, то замість λ_0 можна взяти будь-яку від'ємну сталу, наприклад -1.

Отже, для задачі керування (3.61) необхідні умови оптимальності визначаються співвідношеннями (3.62) – (3.69).

Спосіб визначення оптимального керування, який будується на використанні необхідних умов оптимальності, складається з таких етапів:
1) з рівняння (3.65) знаходять керування u_0 у вигляді функції часу t, траєкторії $x_0(t)$ і множників Лагранжа λ, $\psi(t)$, тобто

$$u_0 = u_0(t, x_0(t), \psi(t), \lambda);$$

2) підставляють це керування в рівняння (3.62), (3.63), (3.66)–(3.69). Тоді для визначення траєкторії $x_0(t)$ і вектора $\psi(t)$ одержують крайову задачу, утворену системою рівнянь (3.61), (3.63), граничними умовами (3.64), (3.66), (3.67) і співвідношеннями (3.68), (3.69);
3) будують загальне розв'язання $x_0(t)$, $\psi(t)$ системи з $2n$ рівнянь (3.61), (3.63). Цей загальний розв'язок залежить від $2n$ довільних сталих, а також від множників Лагранжа λ і двох моментів часу t_0 і T.

Зазначимо, що співвідношення (3.61)-(3.69) зберігають свій вигляд при заміні ψ на $C\psi$ і λ на $C\lambda$, при будь-яких $C > 0$. З цього виходить, що кількість незалежних компонентів вектора $\lambda \in R_{m_2+1}$ не перевершує m_2. Таким чином, загальне розв'язання системи (3.62)–(3.63) залежить від $2n+m_2+2$ сталих, для визначення яких є $2n$ умови (3.64), дві умови (3.66) і (3.67) на рухливі кінці t_0 та T і m_1 умов (3.68) і $m_2 - m_1$ нерівностей з (3.61). Отже, кількість умов, які потрібні для побудови оптимального керування, збігаються з кількістю шуканих сталих.

Наведемо деякі приклади, які пояснюють вищесказане. Розглянемо задачу, яка має:
1. *Фіксований початок, кінець руху й початковий стан*

У цьому випадку необхідні умови оптимальності виражаються теоремою 3.1. Твердження теореми 3.1 є наслідком із загальних необхідних умов оптимальності, сформульованих у теоремі 3.2. Вектор λ множників Лагранжа зводиться в даному випадку до скаляра λ_0, не додатному через умови (3.69). Тому рівняння (3.63), (3.64) набувають вигляду:

$$\psi'(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - \lambda_0 F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{3.70}$$

$$\psi(T) = \lambda_0 \varphi_x(x(T)). \tag{3.71}$$

Умова (3.65) приводить до співвідношення

$$f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + \lambda_0 F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0. \tag{3.72}$$

Оскільки моменти t_0, T, $x(t_0)$ задані й фіксовані, а обмеження типу рівностей з (3.61) відсутні, то інші необхідні умови оптимальності (3.66)–(3.68) не враховуються. Виходячи з цього, для задачі (3.61)-(3.62) необхідні умови оптимальності зводяться до існування числа $\lambda_0 \leq 0$ та вектора $\psi(t) \in R_n$ таких, що не дорівнюють одночасно нулю, для яких виконуються рівняння (3.61), (3.70), (3.71).

Відзначимо, якщо $\lambda_0 = 0$, то внаслідок (3.70), (3.71) функція $\psi(t) \equiv 0$. Тому $\lambda_0 < 0$, тобто замість λ_0 можна взяти будь-яку невід'ємну сталу. Візьмемо $\lambda_0 = -1$. Тоді співвідношення (3.70)–(3.72) переходять у доведені раніше умови оптимальності з теореми 3.1.

2. *Фіксований початок і кінець руху, вільні початкове й кінцеве положення*

Розглянемо задачу керування системою (3.62) із заданими моментами t_0, T та критерієм якості:

$$I = \int_{t0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt + \phi(x(t_0), x(T)) \to \inf .$$

Початкове положення $x(t_0)$ і кінцеве $x(T)$ – вільні.

Необхідні умови оптимальності (3.63)-(3.69) набувають у даному випадку вигляду рівнянь (3.70), (3.72) і граничних умов

$$\psi(t_0) = -\lambda_0 \phi_x(x, y), \psi(T) = \lambda_0 \phi_x(x, y),$$

$$x = x_0(t_0), y = x_0(T).$$

Беручи до уваги приклад 1, довидемо, що можна покласти $\lambda_0 = -1$. Таким чином необхідні умови оптимальності в задачі 2 мають вигляд:

$$\begin{gathered} x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), t_0 \le t \le T, \\ \psi'(t) = -f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \\ \psi(t_0) = \phi_x(x, y), x = x_0(t_0), \\ \psi(T) = -\phi_y(x, y), y = x_0(T), \\ f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0. \end{gathered} \tag{3.73}$$

3. *Задача з фіксованими значеннями деяких змінних стану, заданих у моменти початку і кінця руху*

При цьому рівняння руху мають вигляд (3.62) із критерієм якості I, моменти t_0, T задані. Крім того, заданими є q_1 компоненти x_1^0, x_2^0, ..., x_{q1}^0 вектора $x(t_0)$ і q_2 компонент x_1^T , x_2^T, ..., x_{q2}^T вектора $x(T)$, де цілі числа $q_1, q_2 < n$.

$$x_i(t_0) - x_i^0 = 0, i = 1, ..., q_1,$$

$$x_j(T) - x_j = 0, j = 1, ..., q_2. \tag{3.74}$$

З огляду на (3.74) природно вважати, що у функціоналі I функція ϕ залежить тільки від інших значень координат, тобто $\phi(x(t_0), x(T)) = \phi(x_{q_1+1}(t_0), ..., x_n(t_0), x_{q_2+1}(T), ..., x_n(T))$. Вектор множників Лагранжа має вигляд $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{m_2})$, де $m_2 = q_1 + q_2, \lambda_0 < 0$.

Отже, необхідні умови оптимальності (3.63)–(3.69) подамо у вигляді

$$x_0'(t) = f(t, x_0(t), u_0(t)), t_0 \le t \le T,$$

$$\psi'(t) = f_x(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) - \lambda_0 F_x(t, x_0(t), u_0(t)), \tag{3.75}$$
$$f_u(t, x_0(t), u_0(t))\psi(t) + \lambda_0 F_u(t, x_0(t), u_0(t)) = 0.$$

Причому виконуються умови трансверсальності:

$$\psi_i(t_0) = -\lambda_i, i = 1, \dots, q_1,$$

$$\psi_j(t_0) = -\lambda_0 \phi_{x_{j(t_0)}}(x(t_0), x(T)), j = q_1 + 1, \dots, n. \tag{3.76}$$
$$\psi_k(T) = \lambda_{q_1+k}, k = 1, ..., q_2,$$
$$\psi_l(T) = \lambda_0 \phi_{x_{l(T)}}(x(t_0), x(T)), l = q_2 + 1, \dots, n.$$

4.*Розглянемо одномірну задачу керування*

$$x'(t) = ax(t) + u(t), 0 \le t \le T,$$

$$x(0) = 0, x(T) = 1, \int_0^T u^2(t)dt \to \min, \tag{3.77}$$

де a і T задані сталі.

Необхідні умови оптимальності (3.75), (3.76) приводять до співвідношень:

$$\psi'(t) = -a\psi(t),$$

$$-2\lambda_0 u(t) - \psi(t) = 0, \tag{3.78}$$

з умовами:

$$\psi(0) = -\lambda_1,$$
$$\psi(T) = -\lambda_2. \tag{3.79}$$

Якщо покласти $\lambda_0 = 0$, то з (3.78) випливає, що $\psi(t) \equiv 0$. Тому з огляду на (3.79) маємо, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, тобто всі множники Лагранжа $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \psi(t))$, одночасно дорівнюють нулю, що неможливо. З цього виходить, що замість λ_0 можна взяти будь-яку від'ємну сталу. Нехай $\lambda_0 = -0,5$. Тоді $u(t) = \psi(t)$ з огляду на (3.78). Звідси і з формули Коші випливає, що $\psi(t) = -\lambda_1 e^{-at} = u(t)$. Підставляючи цей вираз для керування $u(t)$ у (3.77), знаходимо

$$x(t) = -\lambda_1 \int_0^t e^{a(t-2s)} ds.$$

Вважаючи $t = T$ і використовуючи граничну умову $x(T) = 1$, одержимо

$$\lambda_1 = -2[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1}.$$

Отже, оптимальне керування $u_0(t)$ має вигляд

$$u_0(t) = 2ae^{-at}[e^{aT} - e^{-aT}]^{-1}, \tag{3.80}$$

а відповідна цьому керуванню траєкторія –

$$x(t) = [e^{at} - e^{-at}][e^{aT} - e^{-aT}]^{-1}. \tag{3.81}$$

Формули (3.80), (3.81) справедливі при будь-якому a. Зокрема, якщо $a = 0$, то враховуючи правило Лопіталя маємо:

$$u_0(t) = 1/T, x_0(t) = t/T.$$

4. Принцип Максимуму Понтрягіна

4.1. Задача з вільним правим кінцем і заданим часом

Задача Майєра. Розглянемо задачу керування процесом:

$$x'(t) = f(t, x(t), u(t)), x \in R_n, u \in R_m, t_0 \le t \le T, x(t_0) = x_0 \tag{4.1}$$

$$I(u) = \varphi(x(T) \to inf, \tag{4.2}$$

$$u(t) \in U. \tag{4.3}$$

Новим елементом у постановці задачі є обмеження (4.3). Якщо множина U замкнута й обмежена, то оптимальне керування узагалі кажучи, може належати границі множини U. У цьому випадку керування не можна варіювати довільним чином, і, отже, у цьому випадку методи класичного варіаційного числення не застосовуються. Передбачається, що f і φ задовольняють такі обмеження: $f(t, x, u), f_x(t, x, u), \varphi_x(x)$ умову Ліпшица за (x, y), тобто існує стала $C > 0$ така, що для будь-яких $t \in R_1, (x, y) \in R_n, (u, v) \in R_m$ виконані такі нерівності:

$$\begin{gathered} | f(t, x, u) - f(t, y, v) | \le C(| x - y | + | u - v |), \\ | f_x(t, x, u) - f_y(t, y, v) | \le C(| x - y | + | u - v |), \\ | \varphi_x(x) - \varphi_y(y) | \le C | x - y |, \end{gathered} \tag{4.4}$$

а оптимальне керування шукається в класі кусково-неперервних функцій. Оскільки значення $u(t)$ в точках розриву не впливає на величину критерію якості (4.2), то значення керування в точках розриву можна довизначити довільно.

Для визначеності вважається, що розглянуті керування є кусково-неперервні праворуч, тобто

$$u(t) = \lim_{s \to t+0} u(s), \;\; s \in [t_0, T], \;\; u(T) = u(T-0).$$

Якщо обмеження (4.3) відсутні, то необхідні умови оптимальності наведені в теоремі 3.1. Наявність же обмежень (4.3) вимагають модифікації умови стаціонарності (умова (3.72)), указаної теореми, оскільки оптимальне керування u(t) може лежати на границі множини U і тому похідна $\partial H/\partial u$, загалом, може бути відмінна від нуля. Необхідні умови оптимальності для наведеної задачі, які називаються принципом максимуму Понтрягіна, формулюються таким чином.

Теорема 4.1 *Принцип максимуму Понтрягіна*

Нехай $u_0(t)$ – оптимальне керування в задачі (4.1)-(4.3), а $x_0(t)$ – відповідна йому оптимальна траєкторія. Тоді $u_0(t)$ задовольняє умову максимуму

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)). \tag{4.5}$$

Тут гамільтоніан H визначається рівністю

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi^T(t) f(t, x(t), u(t)),$$

а вектор сполучених змінних $\psi(t)$ – розв'язок задачі

$$\psi'(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \psi(T) = -\varphi_x(x_0(T)).$$

Зауваження. У порівнянні з необхідними умовами оптимальності в класичній варіаційній задачі керування (теорема 3.1) у принципі максимуму замінена тільки умова стаціонарності $\partial H/\partial u = 0$ на умову максимуму (4.5). Усі інші умови залишаються незмінними.

Доказ даної теореми стосується змін, обумовлених обмеженням на керування (4.3). Візьмемо довільний елемент $u(t) \in U$ і моменти часу t і $t + \varepsilon$ на відрізку $[t_0, T]$, де $\varepsilon > 0$. Позначимо через $v(s)$ голчасту варіацію керування, задану формулою

$$v(s) = -u_0(s) + u, t \le s \le t + \varepsilon,$$
$$v(s) = 0, s \in [t_0, T] - [t, t + \varepsilon].$$

Відзначимо, що $u_0(t) + v(t) \in U, t_0 \le t \le T$. Тоді, як і в попереднім доказі одержуємо, що

$$0 \le \Delta I \le -\int_t^{t+\varepsilon} [H(t, x_0(t), u, \psi(t)) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))] ds + N_1 + N_2,$$

де $N_1 = [\varphi_x^T(x_0(T) + \theta\Delta(T)) - \varphi_x^T(x_0(T))]\Delta T$ і

$$| N_1 | \leq C_2 \left(\int\limits_t^{t+\varepsilon} | v(s) | ds \right)^2,$$

$$N_2 = \int\limits_t^{t+\varepsilon} \Big[H_x^T(t, x_0(t) + \theta\Delta(t), u_0(t) + v(t), \psi(t)) - H_x^T(t, x_0(t), u_0(t), \psi) \Big] \Delta(t) dt,$$

та $| N_2 | \leq C_4 \left[\int\limits_t^{t+\varepsilon} | v(s) | ds \right]^2$, тоді остаточно маємо

$$| N_1 | + | N_2 | \leq C \Bigg[\int\limits_t^{t+\varepsilon} | v(s) | ds \Bigg]^2 \leq C\varepsilon \int\limits_t^{t+\varepsilon} | (v(s) |^2 ds.$$

З огляду на зроблені припущення H – неперервна функція своїх аргументів. Тому враховуючи кускову неперервність керування $u_0(t)$, знайдеться настільки мале $\varepsilon > 0$, що функція

$$\gamma(t) = H(t, x_0(t), u, \psi(t)) - H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t))$$

неперервна при $s \in [t, t + \varepsilon]$ і $\int\limits_t^{t+\varepsilon} \gamma(s) ds = \varepsilon\gamma(t + \theta\varepsilon)$, за деяких $\theta \in [0, 1]$. Звідси та з виразу для ΔI випливає, що

$$0 \leq \Delta I \leq -\varepsilon\gamma(t + \theta\varepsilon) + \varepsilon C \int\limits_t^{t+\varepsilon} | v(s) |^2 ds, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Поділивши обидві частини отриманої нерівності на ε і переходячи до межі при $\varepsilon \to 0$, отримуємо висновок, що $\gamma(t) \leq 0$.

Оскільки елемент $u \in U$ є довільним, то співвідношення (4.5) має місце при $t \in [t_0, T]$. Подібним чином установлюється правильність рівності (4.5) і при $t = T$, якщо взяти $v(s) = u - u_0(s)$, $T - \varepsilon \leq s \leq T$ та $v(s) = 0, s < T - \varepsilon$.

Відзначимо, що в умовах доведеної теореми $H(t, x_0(t), u_0(t),\ \psi(t))$, як функція часу t неперервна, оскільки незалежно від того, чи є керування неперервним праворуч або ліворуч, значення функції H в будь-який момент часу те саме й дорівнює лівій частини виразу (4.5).

Наслідок. Необхідні умови оптимальності в задачі керування системою (4.1) з обмеженнями (4.3) та мінімізовним функціоналом

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} F_0(t, x(t), u(t))dt + \varphi(x(T)) \to inf. \tag{4.6}$$

Моменти $t_0, T, x(t_0) = x_0 \in R_n$ задані. Тоді має місце
Теорема 4.2 Нехай $u_0(t)$– оптимальне керування в задачі (4.1), (4.3), (4.6), а $x_0(t)$ – оптимальна траєкторія. Тоді існує такий вектор $\psi(t)$, який задовольняє рівняння

$$\psi'(t) = -H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), t_0 \leq t \leq T,$$
$$\psi(T) = -\varphi_x(x(T)), \tag{4.7}$$

що справедлива умова максимуму

$$\max_{u \in U} H(t, x_0(t), u, \psi(t)) = H(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \tag{4.8}$$

де функція H визначається рівністю

$$H(t, x(t), u(t), \psi(t)) = \psi'(t) f(t, x(t), u(t)) - F_0(t, x(t), u(t)). \tag{4.9}$$

У лівій частині умови (4.8) відзначимо, що максимум функції $H(t, x(t), u, \psi(t))$ обчислюється за параметром $u \in U$ при фіксованих значеннях інших аргументів $t, x_0(t)$ і $\psi(t)$. Побудова оптимального керування в задачі (4.1),(4.3), (4.6) виконується аналогічно з урахуванням того, що керування виключається завдяки застосуванню співвідношення (4.8), а саме:

1. Визначають керування $u_0(t, \psi(t), x_0(t))$ з рівняння (4.8);

2. Підставляють знайдене керування u_0 у рівностях (4.1), (4.7) й розв'язують отриману крайову задачу відносно $x_0(t)$ і $\psi(t)$;

3. Підставляють знайдені значення $x_0(t), \psi(t)$ у вираз для u_0. У результаті за-стосування цього методу виходить П-керування $u_0(t)$. Як і для задач без обмежень, отримане П-керування є оптимальним, якщо розв'язок вихідної задачі керування (4.1),(4.3), (4.6) існує, а розв'язок крайовой задачі у п.2 єдиний.

4.2. Розв'язання звичайних задач оптимального керування з використанням методу принципу максимуму

Приклад 1. Розглянемо задачу оптимального керування скалярної системи зі сталими коефіцієнтами a і b :

$$\dot{x}(t) = ax(t) + bu(t), \quad 0 \le t \le T, \quad x(0) = 0 \tag{4.10}$$

з критерієм якості

$$I(u) = \int_0^T [x^2(t) + u^2(t)]dt \to min. \tag{4.11}$$

Розв'язання задачі (4.10)–(4.11), має вигляд $u_0(t) = 0$ і $x_0(t) = 0$. Визначимо його за допомогою принципу максимуму. Дійсно,

$$H = \psi(t)[ax(t) + bu(t)] - x^2(t) - u^2(t). \tag{4.12}$$

За умовою (4.8) з урахуванням (4.12) визначають $u_0(t) = b\psi(t)/2$. Тоді спряжена система рівнянь для функції $\psi(t)$ має вигляд

$$\dot{\psi}(t) = 2x(t) - a\psi(t), \quad \psi(T) = 0. \tag{4.13}$$

А співвідношення для змінної $x(t)$, після урахування $u_0(t) = b\psi(t)/2$ буде мати вигляд

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b^2\psi(t)/2, \quad x(0) = 0. \tag{4.14}$$

Розв'язанням отриманої крайової задачі (4.13)-(4.14) є дві функції $x_0(t) = 0$ і $\psi(t) = 0$. Таким чином $u_0(t) = b\psi(t)/2 \equiv 0$.

Зауваження. Принцип максимуму являє собою суто необхідні умови оптимальності, але не достатні. Тобто, траєкторія системи $x(t)$ та керування $u(t)$ можуть задовольняти умови принципу, але оптимальними не бути.

Приклад 2. Нехай $x(t) \in R_1$ та задовольняє рівнянню

$$\dot{x}(t) = u(t), \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0, \quad 0 \le t \le 1. \tag{4.15}$$

Потрібно визначити керування $u(t)$ так, щоб критерій (4.16) якості був найменшим

$$I(u) = \int_0^1 [u^2(t) - 4x(t)u^3(t) + 2tu^4(t)]dt \to inf. \tag{4.16}$$

Покладемо $p_0 = -1$, тоді маємо, що

$$\psi'(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -4u^3(t), \tag{4.17}$$

де $H = p_0(u^2(t) - 4xu^3(t) + 2tu^4(t)) + \psi(t)u(t)$.
Слід зазначити, що функції

$$x_0(t) = 0, \quad u_0(t) = 0, \quad \psi_0(t) = 0, \tag{4.18}$$

задовольняють умови (4.15), (4.17), а також як і будь-яке керування $u(t)$ належать умові максимуму

$$H(t, x_0, u_0, \psi) \equiv 0 \geq H(t, x_0, u, \psi) = -u^2(1 + 2tu^2).$$

Проте можна виявити, що $x_0(t) = 0, u_0(t) = 0$ не є розв'язком задачі оптимального керування (4.15)-(4.16) з $I(u_0) = 0$.

А тепер слід побудувати послідовність керувань, за допомогою яких значення критерію якості може бути від'ємним. Візьмемо

$$u_\varepsilon(t) = \begin{cases} \varepsilon^{-1}, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon, \quad \varepsilon \in (0,1) \\ (\varepsilon - 1)^{-1}, \quad \varepsilon < t \leq 1, \end{cases} \tag{4.19}$$

відповідно $x_\varepsilon(t)$ має вигляд

$$x_\varepsilon(t) = \begin{cases} t\varepsilon^{-1}, \quad 0 \leq t \leq \varepsilon, \\ (1 - t)(\varepsilon - 1)^{-1}, \quad \varepsilon < t \leq 1. \end{cases} \tag{4.20}$$

Тоді

$$I(u_\varepsilon) = [\varepsilon(1 - \varepsilon])^{-1} - \varepsilon^{-2} + 2(1 - \varepsilon)^{-2} + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon)^{-3}.$$

Очевидно, що $I(u_\varepsilon) \to -\infty$, коли $\varepsilon \to 0$. Таким чином визначаємо, що $u_0(t) \equiv 0$ не є оптимальним.

Приклад 3. Розглянемо задачу про мінімум функціонала

$$I(u) = \int\limits_0^1 \mid x(t) \mid dt, \tag{4.21}$$

застосовуючи розв'язання рівняння (4.15) та обмеження $\mid u \mid \leq 1$.

Зрозуміло, що в теперішній задачі оптимальне керування $u_0(t) \equiv 0$, а оптимальна траєкторія $x_0(t) \equiv 0$. Цей гамільтоніан H має вигляд

$$H = \psi(t)u - |x(t)|. \tag{4.22}$$

Оскільки оптимальне керування $u_0(t) \equiv 0$, то максимум H повинен при оптимальному керуванні бути лише при $\psi(t) \equiv 0$. Проте в даному випадку й інше будь-яке керування максимізує гамільтоніан H. Це означає, що умова максимуму не дозволяє відокремити оптимальне керування від інших.

У подібних випадках, коли принцип максимуму не дозволяє визначити оптимальне керування, йдеться про вироджені задачі оптимального керування.

4.3. Розв'язання складних задач оптимального керування із застосуванням методу принципу максимуму

Приклад 1. Розглянемо наступну систему, яка описує роботу моделі електродвигуна

$$\dot{x_1}(t) = x_2(t), \quad \dot{x_2}(t) = u(t), \quad |u| \leq b \tag{4.23}$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \tag{4.24}$$

$$x_2(T) = 0, \quad x_1(T) \to \max, \tag{4.25}$$

де x_1 – кут звороту валу двигуна; u – приведений обернений момент; T – кінцевий час виконання звороту. Потрібно визначити керування $u(t)$ таке, щоб у час T, швидкість обертання валу дорівнювала нулю, а кут звороту валу мав найбільше значення.

Для розв'язання наведеної задачі, зведемо її до задачі Майера за допомогою застосування штрафної функції. Вказаний підхід достатньо частково використовується для урахування різних обмежень. Введемо функціонал

$$I_k(u) = -x_1(T) + \frac{k}{2}x_2^2(T) \to min, \tag{4.26}$$

де $k >> 1$ – коефіцієнт штрафу.

Ясна річ, що коли $k \to \infty$, керування в задачі (4.23)-(4.24),(4.26) повинне прямувати до оптимального керування в задачі (4.23)-(4.25).

Застосовуючи теорему про необхідні умови принципу максимуму одержимо:

$$\begin{gathered} H = \psi_1 x_2 + \psi_2 u, \quad \psi_1'(t) = -\partial H/\partial x_1 = 0, \psi_1(T) = 1, \\ \psi_2'(t) = -\partial H/\partial x_2 = -\psi_1(t), \psi_2(T) = -kx_2(T), \\ \max_{|u|\leq b} H = \max_{|u|\leq b} \psi_2(t)u. \end{gathered} \tag{4.27}$$

Таким чином, з рівняння (4.27) випливає, що оптимальне керування має вигляд $\psi_1(t) \equiv 1, \psi_2(t) = C - t, u_0(t) = b\,\mathrm{sign}\,\psi_2(t)$, тобто

$$u_0^k(T) = \begin{cases} b, 0 \leq t \leq \tau, \\ -b, \tau < t \leq T, \end{cases} \tag{4.28}$$

де τ – момент перемикання керування, для якого $\psi_2(\tau) = 0$. З рівняння (4.23) для $x_2(t), x_1(t)$ при керуванні $u_0^k(t)$ маємо

$$x_2(t) = \begin{cases} bt, 0 \leq t \leq \tau, \\ 2b\tau - bt, \tau < t \leq T, \end{cases} \quad x_1(t) = \begin{cases} \dfrac{bt^2}{2}, \quad 0 \leq t \leq \tau, \\ \dfrac{b\tau^2}{2} + 2b\tau(t-\tau) - \dfrac{b}{2}(t^2 - \tau^2), \ \tau < t \leq T. \end{cases} \tag{4.29}$$

Для знаходження часу перемикання τ застосуємо наступну крайову умову $\psi_2(T) = -kx_2(T)$. З цього маємо

$$\psi_2(T) = C - T = -k(2b\tau - bT), \quad C = T - k(2b\tau - bT).$$

Оскільки $\psi_2(\tau) = 0$, то отримаємо, що $T - k(2b\tau - bT) - \tau = 0$. Таким чином, для обчислення часу перемикання застосуємо формулу

$$\tau = T(1 + bk)/(1 + 2bk).$$

З цього випливає, що коли $k \to +\infty$ то $\tau \to T/2$. Потім, оскільки $x_2(T) = bT/(1 + 2bk)$, то коли $k \to +\infty$, $x_2(T) \to 0$. Таким чином, оптимальне керування $u_0(t)$ в задачі (4.23)-(4.25) має вигляд

$$u_0(t) = \begin{cases} b, & 0 \le t \le T/2, \\ -b, & T/2 < t \le T. \end{cases}$$

Приклад 2. Розв'язання задачі оптимальної компоновки ядерного реактора

Розглянемо задачу пошуку оптимальної компоновки ядерного реактора, який не має відбивателя в одногруповому наближенні. Розмір реактора L не заданий. Щільність нейтронів $N(z)$ позначимо через $x_1(z)$, а $x_2(z) = dN(z)/dz$. За керування $u(z)$ оберемо концентрацію ядерного пального за одиницю об'єму реактора. Тоді задача набуває вигляду

$$\begin{gathered} \frac{dx_1(z)}{dz} = x_2(z), \quad \frac{dx_2(z)}{dz} = -(a + bu(z))x_1(z), \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, \quad x_1(L) = 0, \\ -\int u(z)x_1(z)dz \to \min, \quad 0 \le u_1 \le u \le u_2, \\ a + bu(z) = 0, \quad 0 \le z \le L, \end{gathered} \tag{4.30}$$

де $u_1, u_2, a, b \ne 0$ – задані сталі.

Гамільтоніан у задачі (4.30) –

$$H = \psi_1(z)x_2(z) - a\psi_2(z)x_1(z) - uy(z), \quad y(z) = (\psi_0 + b\psi_2(z))x_1(z), \tag{4.31}$$

де ψ_0 внаслідок умови не додатна: $\psi_0 \le 0$. Спряжені змінні ψ_1, ψ_2 задовольняють рівнянням:

$$\begin{gathered} \frac{d\psi_1(z)}{dz} = a\psi_2(z) + (\psi_0 + b\psi_2(z))u, \\ \frac{d\psi_2(z)}{dz} = -\psi_1(z), \quad \psi_2(L) = 0. \end{gathered} \tag{4.32}$$

Відповідно до фізичного змісту потік нейтронів $N(z) = x_1(z) > 0$. Тому задачу (4.30) слід розглядати тільки на відрізку $[0, L]$, де L – точка першого нуля функції $x_1(z)$. Тому з (4.30) маємо, що

$$\frac{dx_2(z)}{dz} < 0, \quad z \in [0, L).$$

Таким чином, $x_2(z) < 0$ при $z \in [0, L]$ та на відрізку $[0, L]$ функція $x_1(z)$ монотонно зменшується від значення $x_1(0) = 1$ до $x_1(L) = 0$. Покажемо, що $\psi_0 \leq 0$. Дійсно, оптимальне значення (4.31) має значення нуль:

$$H(z, x_0(z), u_0(z), \psi(z)) = 0, \quad z \in [0, L). \tag{4.33}$$

Якщо $\psi_0 = 0$, то при $z = L$ маємо з урахуванням (4.30) та (4.33), що $H = \psi_1(L)x_2(L) = 0$, та звідси випливає $\psi_1(L) = 0$. Таким чином $\psi_0 = 0$, $\psi_1(L) = \psi_2(L) = 0$, а це заперечує ствердженню теореми про існування спряженого вектора змінних, який не нульовий.

З умов максимуму (4.8), застосованого до гамільтоніана випливає, що

$$u_0(z) = \begin{cases} u_2, & \gamma(z) < 0, \\ \text{не визначено} & \gamma(z) = 0, \\ u_1, & \gamma(z) > 0. \end{cases} \tag{4.34}$$

Можна довести, що в площині відрізку $[0, L]$ не має відрізків, де функція $\gamma(z) = 0$. Отже, оптимальне керування має структуру

$$u_0(z) = \begin{cases} u_2, & \gamma(z) < 0, \\ u_1, & \gamma(z) > 0. \end{cases} \tag{4.35}$$

Таким чином, оптимальна компоновка реактора має зони у яких $u(t)$ набуває значеннь u_1, u_2. Обчислимо кількість зон та їх розташування. Оскільки похідна функції $\gamma(z)$ має вигляд

$$\frac{d\gamma(z)}{dz} = \frac{d}{dz}[(\psi_0 + b\psi_2(z))x_1(z)],$$

і не дорівнює нулю при $\gamma(z) = 0$, то при збільшенні z від 0 до L функція $\gamma(z)$ має можливість змінювати знак тільки один раз і тоді кількість зон не може перевищувати 2.

При цьому $\gamma(L) = 0$ та похідна $\frac{d\gamma(L)}{dz} = \psi_0 x_2(L) > 0$. З цього випливає, що в зоні, яка примикає до околу точки $x = L$, повинно бути $u_0(t) = u_2$. Друга зона примикає до точки $x = 0$. Згідно з (4.33) маємо $0 = a\psi_2(0) + \psi_0 u(0) + b\psi_2(0)u(0)$.

З цього рівняння отримаємо $\psi_2(0) = -\psi_0 u(0)/(a + bu(0))$. Потім $\gamma(0) = (\psi_0 + b\psi_2(0)) = \psi_0 - b\psi_0 u(0)/(a+bu(0)) = a\psi_0/(a+bu(0))$, а відповідно до умови $(a + bu(0)) > 0$. Отже,

$$\operatorname{sign}(\gamma(0)) = \operatorname{sign}(a\psi_0) = \operatorname{sign}(a). \tag{4.36}$$

Таким чином, якщо $a > 0$, то для інших $z \in [0, L]$ оптимальне керування має вигляд $u_0(z) = u_2$. Якщо $a < 0$, то в зоні яка примикає до $z = 0$ маємо $u_0(z) = u_1$.Звичайно таким же чином виконується дослідження задачі при зазначеному розмірі L.

5. Метод динамічного програмування

5.1. Евристичний висновок рівняння Беллмана

Метод динамічного програмування ґрунтується на принципі Р. Беллмана, *як принцип оптимальності.* Цей принцип має місце для систем, подальший рух яких повністю визначається станом цих систем у будь-який поточний момент часу. До таких систем належать системи, що описуються звичайними диференціальними рівняннями, де під станом системи розуміють місце положення системи у фазовому просторі, системи, що описуються рівняннями в кінцевих різницях з дискретними елементами та ін.

Принцип оптимальності був сформульований Р. Беллманом таким чином: *оптимальне керування має таку властивість, що для будь-якого початкового стану і використаного початкового керування наступне оптимальне керування збігається з вихідним оптимальним керуванням щодо стану, яке одержується в результаті застосування початкового керування.*

Вище зазначене формулювання принципу оптимальності належить до систем загального виду.

Розглянемо керований процес, що описується системою

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f(t, x(t)u(t)), \qquad t_0 \le t \le T, \\ &x(t_0) = x_0, \quad u \in U, \end{aligned} \tag{5.1}$$

з функціоналом якості

$$I(u) = \varphi(x(T)) + \int_{t_0}^{T} F(t, x(t), u(t))dt \to \inf_{u \in U}. \tag{5.2}$$

Нехай на рис. (5.1) показана оптимальна траєкторія системи (5.1), що проходить через задану точку $x(t_0)$, тобто траєкторія, що мінімізує за умови $u(t) \in U$ функціонал (5.2), у якому значення T передбачається фіксованим.

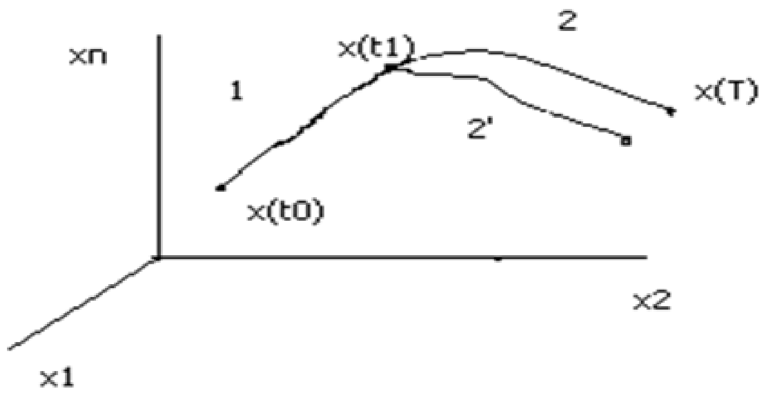

Рис. 5.1. Динаміка процесу

Значення $x(T)$ є заздалегідь невідомим. Точка $x(t_1)$ розбиває розглянуту траєкторію на дві ділянки 1 і 2. Ділянці 2 відповідає функціонал

$$I_2 = \varphi(x(T)) + \int_{t_1}^{T} F(t, x(t), u)dt$$

Ділянка 2 може розглядатися як самостійна траєкторія. Вказана траєкторія буде оптимальною, якщо вона надає мінімум функціонала I_2. Отже, принцип оптимальності затверджує, що ділянка 2 оптимальної траєкторії 1-2 сама по собі є оптимальною траєкторією системи (5.1), стан якої при $t = t_1$ є $x(t_1)$.

Якщо допустити протилежне, то існує інша траєкторія $2'$, що надає функціоналу (5.2) менше значення, ніж надає траєкторія 2. Але тоді на інтервалі $[0, T]$ оптимальною буде не траєкторія 1-2, а траєкторія 1-$2'$. У такий спосіб ми прийшли до протиріччя з вихідними даними. Це й доводить, що ділянка 2 оптимальної траєкторії 1-2, у свою чергу, є оптимальною траєкторією системи (5.1) на інтервалі $[t_0, T]$.
Зауваження.

1. Твердження принципу оптимальності належить до подальшого за даним станом руху системи.

2. Вибір оптимального керування визначається лише станом системи в теперішній момент часу.

Уведемо скалярну функцію $V(s, x)$, (функцію Беллмана), що визначається таким способом. Нехай рух системи (5.1) відбувається на відрізку

$t_0 \leq s \leq \tau \leq T$ і початкова умова має вигляд $x(s) = x, x \in R_n$, тобто задовольняє рівняння

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u), \quad s \leq t \leq T, \quad x(s) = x. \tag{5.3}$$

Для системи (5.3) розглянемо задачу про мінімізацію функціонала

$$\varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u)dt \to \inf_{u \in U} \tag{5.4}$$

При $s = t_0$ і $x = x_0$ задача (5.3) - (5.4) збігається з задачею (5.1)-(5.2). Очевидно, що мінімальне значення функціонала (5.4) на траєкторіях системи (5.3) залежить від початкового моменту s та початкового положення x.

Визначення. Функцією Беллмана $V(s, x)$ називається функція, що дорівнює інфімуму функціонала (5.4) на траєкторіях системи (5.3) за будь-якими припустими керуваннями, тобто

$$V(s, x) = \inf_{u \in U} \left[\varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u)dt \right]. \tag{5.5}$$

Візьмемо довільні моменти часу s і τ такі, що $t_0 \leq s \leq \tau \leq T$. Тоді на основі сформульованого вище принципу Беллмана отримаємо

$$V(s, x) = \mathop{inf}_{u(t) \in U} \left(\varphi(x(T)) + \int_s^T F(t, x(t), u)dt \right) =$$

$$= \inf_{\substack{u(t) \in U \\ s \leq t \leq \tau}} \inf_{\substack{u(t) \in U \\ \tau \leq t \leq T}} \left(\varphi(x(T)) + \int_s^\tau F(t, x(t), u)dt + \int_\tau^T F(t, x(t), u)dt \right) =$$

$$= \inf_{\substack{u(t) \in U \\ s \leq t \leq \tau}} \left[\int_s^\tau F(t, x(t), u)dt + V(\tau, x(\tau)) \right]. \tag{5.6}$$

Відзначимо, що в (5.6) через $x(t)$ позначений розв'язок задачі (5.3). При цьому вибір керування $u(t)$ на інтервалі $s \leq t \leq \tau$ впливає як на значення інтеграла в правій частині (5.6), так і на значення аргументу $x(\tau)$ функції Беллмана $V(\tau, x(\tau))$.

Співвідношення (5.6) можемо записати в такому вигляді:

$$\inf_{\substack{u(t) \in U \\ s \leq t \leq \tau}} \left[\int_s^\tau F(t, x(t), u(t))dt + V(\tau, x(\tau)) - V(s, x) \right] = 0. \tag{5.7}$$

Припустимо, що функція Беллмана безперервно диференційовна. Тоді при малих значеннях різниці $\tau - s$ з точністю до малих більш високого порядку малості, ніж $\tau - s$, одержимо

$$V(\tau, x(\tau)) - V(s, x) = \dot{V}(s, x)(\tau - s), \tag{5.8}$$

де $V'(s, x)$ – повна похідна функції V уздовж траєкторії системи (5.1), яка дорівнює

$$\dot{V}(s, x) = \frac{\partial V(s, x)}{\partial s} + \frac{\partial V(s, x)}{\partial x} f(t, x, u). \tag{5.9}$$

Розділимо обидві частини (5.7) на $\tau - s$ і перейдемо до межі при $\tau \to s + 0$. Тоді виходячи з співвідношення (5.8) одержимо рівняння Беллмана

$$\inf_{u(t)\in U} (V_t(t, x) + V_x(t, x) f(t, x, u) + F(t, x, u)) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T, x \in R_n. \tag{5.10}$$

Відповідно до визначення (5.5) маємо

$$V(T, x) = \varphi(x(T)), \quad x \in R_n \tag{5.11}$$

На цьому евристичний висновок рівняння Беллмана закінчений.
Висновок. Отже, якщо розв'язок вихідної задачі оптимального керування (5.1)-(5.2) існує, а функція $V(t, x)$ безперервно диференційовна, то справедливі співвідношення (5.10)-(5.11).

5.2. Побудова С-керування за допомогою методу динамічного програмування

Якщо керування u, що реалізує ***inf*** виразу (5.10), існує, то воно є функцією часу t і фазової координати x, тобто $u = u(t, x)$. У такий спосіб за допомогою методу динамічного програмування керування може бути побудоване у вигляді керування за принципом зворотного зв'язку чи С-керування.
При цьому необхідно мати на увазі таке:

1. У заданому класі припустимих керувань не завжди існує таке, при якому досягається **inf** виразу (5.10).

2. Функція Беллмана $V(t, x)$ не завжди має ту гладкість, що була використана при висновку задачі Коші (5.10), (5.11). Іншими словами, функція Беллмана не завжди задовольняє відповідне в розглянутій задачі рівняння Беллмана.

3. Якщо функція Беллмана $V(t,x)$ задовольняє рівняння Беллмана, то звідси не випливає, що керування, при якому досягається **inf** у (5.10), є оптимальним. Зокрема, при цьому керуванні не може існувати розв'язок рівняння руху (5.1).

4. Розв'язання задачі Коші (5.10), (5.11) може виявитися не єдиним. У цьому випадку потрібно додаткове дослідження, що дозволяє установити, яке з цих розв'язків є і функцією Беллмана вихідної задачі оптимального керування.

Водночас з тим, іноді метод динамічного програмування приводить до розв'язання задачі (5.1), (5.3). Виходячи з цього має місце теорема.

Теорема 5.1. Нехай існує єдиний безупинно диференціальний розв'язок V_0 задачі (5.10), (5.11) та існує припустиме керування $u_0(t,x)$ таке, що

$$\inf_{u\in U}[f^T(t,x,u)\frac{\partial V_0(t,x)}{\partial x} + F(t,x,u)] = f^T(t,x,u_0)\frac{\partial V_0(t,x)}{\partial x} + F(t,x,u_0). \quad (5.12)$$

Тоді C-керування $u_0(t,x)$ є оптимальним, а відповідна функція Беллмана є $V_0(t,x)$.

Доказ. Обчислимо повну похідну функції Беллмана вздовж траєкторій системи (5.1) при керуванні u_0. З огляду на рівності (5.9) маємо

$$\dot{V}_0(t,x) = \frac{\partial V_0(t,x)}{\partial t} + f^T(t,x,u_0)\frac{\partial V_0(t,x)}{\partial x}$$

Застосовуючи співвідношення (5.10) і (5.12) знаходимо

$$\dot{V}_0(t,x) = -F(t,x,u_0), t_0 \le t \le T, x \in R_n \quad (5.13)$$

Рівність (5.13) справедлива $\forall x \in R_n$. Зокрема, вона справедлива, якщо замість x, підставити $x_0(t)$ і відповідну $u_0(t)$ тобто

$$\dot{V}_0(t,x_0(t)) = -F(t,x_0(t),u_0(t,x_0(t))). \quad (5.14)$$

Про інтегрувавши обидві частини (5.14) за t у межах від t_0 до T, одержимо

$$V_0(t,x_0(t)) = V(T,x(T)) + \int_{t_0}^{T} F(t,x_0(t),u_0(t,x_0(t)))dt. \quad (5.15)$$

Але $V(T,x(T)) = \varphi(x(T))$ відповідно до умови (5.11). Звідси, а також із (5.2) і (5.15) випливає, що

$$\dot{V}(t,x(t)) \ge -F(t,x(t),u(t,x(t))).$$

Нехай $u(t,x)$ – будь-яке припустиме С-керування, а $x(t)$ – відповідне йому розв'язання рівняння (5.1). Тоді, застосовуючи рівність (5.10), як і при виводі співвідношення (5.14), отримуємо, що

$$I(u_0) = V_0(t_0, x_0). \tag{5.16}$$

Інтегруючи це співвідношення в межах від t_0 до T, враховуючи (5.11), одержуємо, що

$$I(u) \geq V_0(t_0, x_0). \tag{5.17}$$

Порівняння (5.16) з (5.17) показує, що

$$I(u) \geq V_0(t_0, x_0) = I(u_0).$$

Таким чином, оптимальність керування u_0 установлена.

Алгоритм побудови С-керування на основі методу динамічного програмування

1. Знаходимо керування $u = u(t,x,V)$, що реалізує мінімум лівої частини рівняння Беллмана (5.10).

2. Підставляючи $u = u(t,x,V)$ у (5.10), одержуємо нелінійне рівняння в частинних похідних щодо функції $V(t,x)$ із крайовою умовою $V(T,x)$ (5.11).

3. Вирішуємо отриману задачу й визначаємо $V(t,x)$.

4. Підставляючи знайдене значення $V(t,x)$ у вираз $u(t,x,V)$, який визначено в пункті 1, знаходимо оптимальне С-керування $u(t,x) = u(t,x,V(t,x))$. Тоді на основі теореми можна стверджувати, що якщо розв'язок $V(t,x)$ рівняння Беллмана єдиний, а знайдене керування $u(t,x)$ – припустиме, то $u(t,x)$ – оптимальне С-керування, а $V(t,x)$ – функція Беллмана.

5.3. Зв'язок методу динамічного програмування й принципу максимуму

З урахуванням ряду додаткових припущень про гладкість функції Беллмана, що випливають, з методу динамічного програмування може бути виведений принцип максимуму Понтрягіна.

Розглянемо це на прикладі задачі оптимального керування (5.1), (5.2). Метод динамічного програмування дозволяє звести цю задачу до розв'язання задачі Коші (5.10), (5.11). Припустимо, що існує єдине безперервне розв'язання цієї задачі $V(t,x)$ з безперервними похідними $V_t(t,x)$, $V_x(t,x)$, $V_{tx}(t,x)$, $V_{xx}(t,x)$ і припустиме керування $u_0(t,x)$, що задовольняє рівності (5.12), тобто

$$\inf_{u\in U}[f^T(t,x,u)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}+F(t,x,u)] = f^T(t,x,u_0)\frac{\partial V(t,x)}{\partial x}+F(t,x,u_0). \quad (5.18)$$

Тоді, як показано в п.2 алгоритму, керування $u_0(t,x)$ є оптимальним. Відповідну С-керуванню $u_0(t,x)$ оптимальну траєкторію системи позначимо через $x_0(t)$.

Уведемо функції $\psi(t)\in R_n$ і $H\in R_1$, через рівності

$$\begin{aligned}&\psi(t) = -V_x(t,x_0(t)),\\ &H(t,x,u,\psi(t)) = \psi^T(t)f(t,x,u)-F(t,x,u).\end{aligned} \quad (5.19)$$

Тоді з рівності (5.18) випливає співвідношення

$$\begin{aligned}&f^T(t,x_0(t),u_0)V_x(t,x_0(t))+F(t,x_0(t),u_0)=\\ &\qquad\qquad=\min_{u\in U}\Big[f^T(t,x_0(t),u)V_x(t,x_0(t))+F(t,x_0(t),u)\Big].\end{aligned}$$

З цього співвідношення та з (5.19) випливає, що

$$\begin{aligned}&\max_{u\in U}\Big[-f^T(t,x_0(t),u)V_x(t,x_0(t))-F(t,x_0(t),u)\Big]=\\ &\max_{u\in U}\Big[\psi^T(t)f(t,x_0(t),u)-F(t,x_0(t),u)\Big]=\\ &=\max_{u\in U}H(t,x_0(t),u,\psi(t)) = H(t,x_0(t),u_0,\psi(t)).\end{aligned} \quad (5.20)$$

Потім на основі (5.10) і (5.18) одержуємо

$$V_t(t,x) = -V_x^T(t,x)f(t,x,u_0)-F(t,x,u_0) = H(t,x,u,\psi(t)).$$

Продиференціюємо обидві частини цього виразу за x і введемо $x=x_0(t)$. З огляду на (5.19)

$$V_{tx}(t,x_0(t)) = -\dot{\psi}(t) = \frac{\partial H}{\partial x}(t,x_0(t),u_0(t),\psi(t)). \quad (5.21)$$

Аналогічно, диференціюючи обидві частини (5.11) за x і припускаючи, що $x=x_0(T)$, у силу (5.19) одержуємо

$$V_x(T,x_0(T)) = -\psi(T) = \psi_x(x_0(T)).$$

Звідси і з (5.21) випливає, що функція $\psi(t)$ – розв'язання задачі Коші

$$\dot{\psi}(t) = -H_x(t, x_0(t), u_0(t), \psi(t)), \psi(T) = -\psi_x(x_0(T)). \tag{5.22}$$

Умови (5.21) і (5.22) збігаються з раніше доведеними співвідношеннями принципу максимуму.
Зауваження.

1. Метод динамічного програмування дозволяє звести задачу оптимального керування до дослідження задачі Коші (5.10)–(5.11) для нелінійного рівняння в частинних похідних.

2. Принцип максимуму зводить розв'язання задачі оптимального керування до вивчення крайових задач для систем звичайних диференціальних рівнянь.

5.4. Розв'язання задач методом динамічного програмування

Приклад 1. Оптимальний режим зниження потужності ядерного реактора

Досліджуємо оптимальне керування процесом зниження потужності реактора в одно груповому наближенні.

Нехай $n(t)$ – число нейтронів у реакторі в момент t, а керування $u(t)$ – пропорційне зміні коефіцієнта розмноження нейтронів. Тоді

$$\dot{n}(t) = u(t)n(t), \quad 0 \le t \le T, \quad n(0) = n_0 \ge 0, \tag{5.23}$$

де T – заданий час зниження потужності.

Нехай критерій якості, що мінімізується, має вигляд

$$I(u) = \alpha \ln^2 n(T) + \beta \int_0^T u^2(t)dt \to \inf, \tag{5.24}$$

де сталі - α, $\beta > 0$, а керування $u(t) \ge 0$, $t > 0$.

Рівняння Беллмана для задачі (5.23)– (5.24) має вигляд

$$V_t + \inf_u (u(t)n(t)V_n + \beta u^2(t)) = 0, \quad V(T, n) = \alpha \ln^2 n. \tag{5.25}$$

Керування, що мінімізує ліву частину (5.25), таке:

$$u = -\frac{n}{2\beta} V_n. \tag{5.26}$$

Підставляючи дане керування в (5.25) для визначення функції $V(t,n)$, одержуємо рівняння в частинних похідних

$$V_t - \frac{n^2(t)}{4\beta}(V_n)^2 = 0, \quad V(T,n) = \alpha \ln^2 n.$$

Диференціюванням можна перевірити, що розв'язком цієї задачі є функція

$$V(t,n) = \frac{\alpha \ln^2 n}{1 + \alpha\beta^{-1}(T-t)}. \tag{5.27}$$

З (5.26) і (5.27) випливає, що оптимальне керування, сформоване за принципом зворотного зв'язку чи С-керування, має вигляд

$$u(t,n) = -\frac{\alpha \ln n}{[\beta + \alpha(T-t)]}.$$

Приклад 2. Розв'язання лінійно-квадратичної задачі оптимального керування.

Нехай рівняння руху системи мають вигляд:

$$\dot{x}(t) = Ax + Bu, \quad x \in R_n, \quad u \in R_m, \quad t \geq y_0 \quad , x(t_0) = x_0. \tag{5.28}$$

Функціонал якості має вид

$$I(u) = x^T(T)N_1x(T) + \int_{t_0}^{T}(x^T(s)N_2(s)x(s) + u^T(s)N_3(s)u(s))ds, \tag{5.29}$$

$N_1 \geq 0$, $N_2(s) \geq 0$, $N_3(s) > 0$.

Рівняння Беллмана для (5.28), (5.29) має вигляд

$$\inf_u \Big\lfloor V_t + V_x^T(Ax + Bu) + x^TN_2x + u^TN_3u \Big\rfloor = 0, \tag{5.30}$$

а гранична умова

$$V(T,x) = x^TN_1x. \tag{5.31}$$

Керування u, що мінімізує ***inf*** (5.30), одержимо так: виконаємо диференціювання за вектором u вираз в (5.30) і зрівняємо отриману похідну з нулем.

$$B^TV_x + 2N_3(t)u = 0, \quad u = -\frac{1}{2}N_3^{-1}(t)B^TV_x. \tag{5.32}$$

Підставляючи (5.32) у (5.30), знаходимо рівняння для визначення функції V

$$V_t + x^TN_2x + V_x^TAx - \frac{1}{4}V_x^TBN_3^{-1}B^TV_x = 0. \tag{5.33}$$

Таким чином, функція Беллмана задовольняє нелінійне рівняння в частинних похідних (5.33) із крайовою умовою (5.31).

Будемо шукати розв'язок рівняння (5.33) з умовою (5.31) у вигляді

$$V(t,x) = x^T P(t) x, \tag{5.34}$$

де матриця $P(t)$ підлягає визначенню.

Підставляючи (5.34) у (5.33) одержуємо, що матриця $P(t)$ – розв'язок задачі

$$\begin{gathered} \dot{P}(t) + N_2 + A^T P(t) + PA - \frac{1}{4} P(t) B N_3^{-1} B^T P(t) = 0, \\ P(T) = N_1, \\ t_0 \le t \le T. \end{gathered} \tag{5.35}$$

Порівнюючи отримане рівняння (5.36) з рівнянням Ріккаті, знайдене методом принципу максимуму, можна побачити що вони цілком збігаються. Тоді аналогічно одержуємо

$$\begin{gathered} u_0(t,x) = -N_3^{-1}(t) B P(t) x, \\ I(u_0) = x_0 P(t_0) x_0 = V(t_0, x_0). \end{gathered}$$

Приклад 3. Розглянемо поведінку системи, описаної рівняннями

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = u_1 x_1 + x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = u_2. \end{cases}$$

а функціонал якості має вигляд

$$Q = \int_0^T G(x(t), u(t), t) dt \to \min, \;\; G = G(x_1, x_2, t).$$

Керування u_1 та u_2 мають обмеження $-1 \le u_i \le +1, (i = 1, 2)$.
Тут функції $f_1(x,u) = u_1 x_1 + x_2, f_2(x,u) = u_2$. Тоді рівняння Беллмана має вигляд

$$-\frac{dS}{dt} = \min_{\substack{-1 \le u_1 \le +1 \\ -1 \le u_2 \le +1}} K(x_1, x_2, u),$$

де

$$K(x_1, x_2, u) = G(x_1, x_2, u) + \frac{\partial S}{\partial x_1}(u_1 x_1 + x_2) + \frac{\partial S}{\partial x_2} u_2.$$

Оптимальне керування u_i^*, яке дає мінімум функції $K(x_1, x_2, u)$ має вигляд

$$u_1^* = -\operatorname{sign}\left(x1\frac{\partial S}{\partial x_1}\right), \quad u_2^* = -\operatorname{sign}\frac{\partial S}{\partial x_2}$$

Таким чином, при обмеженнях на керування $|u_i| \leq 1 (i = 1, 2)$ мінімальне значення функції $[K(x_1, x_2, u)]$ при $u = u^*$ має такий вигляд

$$[K(x_1, x_2, u)]_{u=u^*} = G(x_1, x_2, t) - \left|x_1\frac{\partial S}{\partial x_1}\right| + x_2\frac{\partial S}{\partial x_1} - \left|\frac{\partial S}{\partial x_2}\right|.$$

Таким чином, рівняння Беллмана в цьому випадку буде таким

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = G(x_1, x_2, t) - \left|x_1\frac{\partial S}{\partial x_1}\right| + x_2\frac{\partial S}{\partial x_1} - \left|\frac{\partial S}{\partial x_2}\right|$$

Отримане рівняння Беллмана, повинно розглядатися лише в множині, де функція S неперервна, має неперервні частинні похідні за всіма своїми аргументами.

5.5. Застосування методу динамічного програмування до дискретних систем

Більшість керованих систем можна описати рівняннями в кінцевих різницях. Такі системи прийнято називати *дискретними системами.* До дискретних систем відносять імпульсні системи, до складу яких входять ЕОМ тощо. Нехай керована система описується скалярним рівнянням

$$\dot{x}(t) = f_1(x(t), u(t)) \tag{5.36}$$

з керуванням

$$u \in \Omega \tag{5.37}$$

Початковий стан системи заданий $x(t_0) = x_0(0)$.

Необхідно знайти керування $u(t)$, яке надає мінімум функціонала

$$Q = \int_0^T G_1(x(t), u(t))dt + \varphi(x(T)), \tag{5.38}$$

де T – фіксована стала.

Далі будемо вважати, що $T = N\tau$, де N – деяке ціле число, а $\tau = const$ – достатньо мала величина.

Обмежимося вивченням стану системи лише в дискретні моменти часу:

$$t = \nu\tau, \ \ (\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, N) \dots \ . \tag{5.39}$$

Тоді

$$\dot{x}(t) \cong (x(t+\tau) - x(t))/\tau = (x(\nu\tau + \tau) - x(\nu\tau))/\tau, \tag{5.40}$$

та вихідне диференціальне рівняння (**??**) можна замінити наближенням

$$x(\nu\tau + \tau) - x(\nu\tau) = \tau f(x(\nu\tau) u(\nu\tau)). \tag{5.41}$$

Таким чином, маємо рівняння в кінцевих різницях, де його аргументи x і u, які є дискретними та визначеними в дискретні моменти часу $t = \nu\tau$, $(\nu = 1, 2, \dots, N)$.

Функціонал (5.38) апроксимуємо інтегральною сумою

$$Q = \tau \sum_{\nu=0}^{N-1} G_1((x(\nu\tau), U(\nu\tau)) + \varphi(x(N\tau)). \tag{5.42}$$

Визначимо:

$$\begin{gathered} x(\nu) = x(\nu\tau), \quad u(\nu) = u(\nu\tau), \\ f(x(\nu), u(\nu)) = \tau f_1(x(\nu), u(\nu)), \\ G(x(\nu), u(\nu)) = \tau G_1(x(\nu), u(\nu)). \end{gathered}$$

Тоді система (5.41) буде мати вигляд

$$x(\nu + 1) = x(\nu) + f(x(\nu), u(\nu)), \tag{5.43}$$

а її початковий стан буде завданий як

$$\big[x(\nu)\big]_{\nu=0} = x(0) \ . \tag{5.44}$$

Нехай потрібно визначити керування $u = u(v)$, яке задовольняє обмеження

$$u \in \Omega \tag{5.45}$$

та надає мінімум сумі

$$Q = \sum_{\nu=0}^{N-1} G\big(x(\nu), u(\nu) + \varphi(x(N))\big). \tag{5.46}$$

Поставлена задача, що описується співвідношеннями (5.43)-(5.46), полягає в тому, що потрібно знайти сукупність значень $u(0), u(1), u(2), \dots, u(N-1)$, які мінімізують суму (5.46) за умов (5.43)-(5.45).

1. Розв'язання задачі почнемо з останнього інтервалу часу $(N-1)\tau \le t < N\tau$, припускаючи, що стан $x(N-1)$ відомий.

Відповідно до принципу оптимальності керування u на інтервалі часу $(N-1)\tau \le t < N\tau$ повинне бути обране з урахуванням обмеження (5.45) так, щоб мінімізувати відповідну даному інтервалу часу часткову суму

$$Q_{N-1} = G\big(x(N-1), u(N-1)\big) + \varphi\big(x(N)\big). \tag{5.47}$$

Оскільки згідно з (5.43) маємо

$$x(N) = x(N-1) + f(x(N-1), u(N-1)), \tag{5.48}$$

тоді (5.47) набуває вигляду

$$Q_{N-1} = G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi[(x(N-1) + f(N-1), u(N-1))]. \tag{5.49}$$

Оскільки стан $(N-1)$ передбачається відомим, то вираз (5.49) залежить лише від однієї невідомої величини $u(N-1)$, що повинна бути знайдена з урахуванням обмеження (5.45) з умови мінімізації величини Q_{N-1}.

Знайдене оптимальне значення $u(N-1)$ позначимо через $u^*(N-1)$. Одержуване при цьому мінімальне значення Q_{N-1} позначимо через S_{N-1}:

$$\min_{u(N-1)\in\Omega} Q_{N-1} = S_{N-1} = S_{N-1}(x(N-1)). \tag{5.50}$$

У (5.50) точно зазначено, що мінімальні значення Q_{N-1} залежать від стану системи $(N-1)$. Тоді відповідно до (5.49) співвідношення (5.50) набуде вигляду:

$$\begin{aligned} S_{N-1}\big(x(N-1)\big) &= \min_{u(N-1)\in\Omega} Q_{N-1} = \\ &= \min_{u(N-1)\in\Omega} \big[G(x(N-1), u(N-1)) + \varphi(x(N))\big] = \\ &= \min_{u(N-1)\in\Omega} \big\{G\big(x(N-1), u(N-1)\big) + \varphi\big[x(N-1) + f(x(N-1), u(N-1))\big]\big\}. \end{aligned} \tag{5.51}$$

2. Розглянемо інтервал $(N-1)\tau \le t < N\tau$, що складається з останнього й передостаннього інтервалів. Згідно з (5.46) цьому інтервалу відповідає сума

$$Q_{N-2} = G\big(x(N-2), u(N-2)\big) + G\big(x(N-1), u(N-1)\big) + \varphi\big(x(N)\big), \tag{5.52}$$

чи відповідно до (5.47)

$$Q_{N-2} = G\big(x(N-2), u(N-2)\big) + Q_{N-1}. \tag{5.53}$$

Стан $x(N-2)$ передбачається відомим. З принципу оптимальності випливає, що лише стан $x(N-2)$ і ціль керування (мінімізація Q_{N-2}) визначають оптимальне керування на інтервалі часу $[(N-2)\tau, N\tau]$.

Знайдемо величину S_{N-2} , тобто мінімум Q_{N-2} по $u(N-2)$ і $u(N-1)$. Врахуємо, що мінімум за $u(N-1)$ суми Q_{N-1} вже знайдений вище і

$$S_{N-1} = S_{N-1}(x(N-1)),$$

поданий у вигляді функції від $x(N-1)$. Крім того

$$x(N-1) = x(N-2) + f(x(N-2), u(N-2))$$

і тоді

$$S_{N-1}(x(N-1)) = S_{N-1}[x(N-2) + f(x(N-2), u(N-2))].$$

Оскільки перший доданок у (5.53) не залежить від $u(N-1)$, то

$$S_{N-2}(x(N-2)) = \min_{\substack{u(N-2)\in\Omega \\ u(N-1)\in\Omega}} Q_{N-2} =$$

$$= \min_{u(N-2)\in\Omega}\{G(x(N-2), u(N-2)) + S_{N-1}(x(N-2)) + f(x(N-2), u(N-2))\}. \tag{5.54}$$

У (5.54) вираз зведений до вигляду мінімізації тільки за однією змінною $u(N-2)$. Знайдене значення позначимо через $u^*(N-2)$. Підкреслимо, що пошук мі-німуму охоплює обидва доданки в (5.53).

Зі співвідношення (5.54) можна побачити, що вибір $u(N-2)$ з умови мінімуму одного лише першого доданку у виразі (5.53), тобто з умови застосування принципу оптимальності лише до інтервалу $(N-2)\tau \le t \le (N-1)\tau$, був би помилковим.

Розглянемо тепер інтервал часу

$$(N-3)\tau \le t \le N\tau,$$

який складається з трьох останніх інтервалів. Цьому інтервалу часу згідно з (5.46), відповідає часткова сума

$$\begin{gathered} Q_{N-3} = G\big(x(N-3), u(N-3)\big) + \\ +G\big(x(N-2), u(N-2)\big) + G\big(x(N-1), u(N-1)\big) + \\ +G\big(x(N-1), u(N-1)\big) + \varphi\big(x(N)\big) \end{gathered} \tag{5.55}$$

чи згідно з (5.52)

$$Q_{N-3} = G\big(x(N-3), u(N-3)\big) + Q_{N-2}. \tag{5.56}$$

Припустимо, що стан $x(N-3)$ відомий. Відповідно до принципу оптимальності лише стан $x(N-3)$ і ціль керування (мінімізація Q_{N-3}) визначають оптимальне керування на інтервалі $[(N-3)\tau, N\tau]$.

Знайдемо величину S_{N-3} , тобто мінімум Q_{N-3} за $u(N-3)$, $u(N-2)$, $u(N-1)$. При цьому врахуємо, що мінімум за $u(N-2)$ і $u(N-1)$ часткової суми Q_{N-2} вже знайдений вище (5.54) і

$$S_{N-2} = S_{N-2}(x(N-2))$$

поданий у вигляді функції від $x(N-2)$. Згідно з (5.43)

$$x(N-2) = x(N-3) + f(x(N-3), u(N-3)),$$

то

$$S_{N-2}(x(N-2)) = S_{N-2}[x(N-3) + f(x(N-3), u(N-3))].$$

Оскільки перший доданок у правій частині (5.53) не залежить від $u(N-2)$ і $u(N-1)$, то маємо

$$S_{N-3}\big(x(N-3)\big) = \min_{\substack{u(N-3)\in\Omega \\ u(N-2)\in\Omega \\ u(N-1)\in\Omega}} Q_{N-3} =$$

$$= \min_{u(N-3)\in\Omega}\{G(x(N-3), u(N-3)) + S_{N-2}(x(N-2))\} =$$

$$\min_{u(N-3)\in\Omega}[G(x(N-3), u(N-3)) + S_{N-2}\{x(N-3) + f(x(N-3), u(N-3))\}]. \tag{5.57}$$

У виразі (5.57) мінімізація виконується лише за однією змінною $u(N-3)$. Знайдене при цьому значення $u(N-3)$ буде шуканим оптимальним значенням, що позначимо через $u^*(N-3)$.

Тепер легко одержати загальну (рекурентну) формулу, розглядаючи інтервал часу $(N-k)\tau \leq t < N\tau (k = 2, 3, \ldots, N)$.

Аналогічно (5.54) та (5.57) будемо мати

$$S_{N-k}\big(x(N-k)\big) = \min_{\substack{u(N-k)\in\Omega \\ u(N-k+1)\in\Omega \\ \cdots\cdots\cdots \\ u(N-1)\in\Omega}} Q_{N-k} =$$

$$= \min_{u(N-k)\in\Omega}\{G(x(N-k), u(N-k)) + S_{N-k+1}(x(N-k) + f(x(N-k), u(N-k))\}. \tag{5.58}$$

Вираз (5.58) зведений до такого вигляду, що мінімізацію потрібно виконувати лише за однією змінною, а саме за $u(N-k)$. Знайдене при цьому значення $u(N-k)$ буде шуканим значенням, що позначимо через $u^*(N-k)$.

У такий спосіб за допомогою (5.51) і (5.58) будуть знайдені керування:

$$\begin{aligned} u^*(N-1) &= \widehat{u}(x(N-1)), \\ u^*(N-2) &= \widehat{u}(x(N-2)), \\ \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots \\ u^*(1) &= \widehat{u}(x(1)), \\ u^*(0) &= \widehat{u}(x(0)). \end{aligned} \tag{5.59}$$

У виразі (5.59) точно зазначено, що знайдені на часткових інтервалах часу $[(N-j)\tau, N\tau), (j = 1, 2, \ldots, N)$ значення $u^*(N-j)$ виражені у вигляді функцій стану системи $x(N-j)$ на початку часткового інтервалу.

Оскільки стан $x(0)$ заданий, то значення $u^*(0)$ визначається. Потім, відповідно до (5.43) знайдемо стан $x(1)$ і визначимо значення $u^*(1)$. Після цього згідно з (5.43) знайдемо стан $x(2)$ і визначимо значення $u^*(2)$ тощо.

Таким чином, викладений метод дозволяє цілком визначити оптимальне керування на заданому проміжку $[0, N\tau)$. У наведеному алгоритмі динамічного програмування для системи (5.43) істотну роль відігравало припущення про те, що кінцевий момент часу $T = N\tau$ фіксований. Однак і для випадку швидкодії, тобто T – не фіксоване, є можливість побудувати алгоритм динамічного програмування.

5.6. Проблема синтезу оптимальних законів керування і диссипативность замкнутих систем

На фундаментальну значимість властивості дисипативних в сучасній теорії самоорганізації вказував І. Пригожин: "Диссипативні структури являють собою разючий приклад, який демонструє здатність нерівномірності служити джерелом упорядкованості".

Нехай об'єкт керування описується векторно-матричних диференціальним рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = f(x) + G(x)u, \tag{5.60}$$

де $x \in E^n$, $u \in E^m$, $f \in E^n$, $G(x) = (g_{ij}(x))$ - матриця розмірности n х m.

Постановка завдання синтезу оптимального керування. Знайти закон керування $u = u(x)$, який переводить об'єкт (5.60) з будь-якого початкового стану $x(0) = x_0$ в початок координат фазового простору $= 0$, забезпечуючи асимптотическую стійкість замкнутої системи та доставляє мінімум функціоналу

$$I = \int_0^\infty [F_0(x) + < u, Du >]dt, \tag{5.61}$$

де $F_0(x)$ - знаковизначенна по x, позитивна функція, $D - diag(d_{ii})$- діагональна матриця m х m, $< .,. >$ - скалярний добуток.

Якщо маємо лінійні стаціонарні об'єкти керування, то оптимальну функцію Ляпунова вибирають у вигляді певно-позитивної квадратичної форми $V(x) = x^T Cx$.

Підставивши таку форму в основне функціональне рівняння і прирівнявши до нуля коефіцієнти при різних ступенях фазових координат, отримують систему нелінійних алгебраїчних рівнянь типу Риккати. Рішення такої системи утруднено, так як універсальних методів поки немає.

Для лінійних несталих об'єктів керування оптимальну функцію Ляпунова також шукають у вигляді позитивно-визначенної квадратичної форми $V(x) = x^T U(t)x$. В цьому випадку отримують систему ЗДР типу Риккати.

Якщо оптимальне керування визначається з системи нелінійних ДР (5.60), то у цьому випадку немає регулярного методу визначення оптимальної функції Ляпунова.

Рішення проблеми синтезу оптимальних алгоритмів керування нелінійними об'єктами управління привело до створення методу АКОР за критерієм узагальненої роботи академіка А.А. Красовського, в якому функціонал, що оптимізуємо має полувизначений вигляд. У цьому випадку завдання синтезу зводиться до вирішення вже лінійного рівняння в ЧП, що дозволяє для пошуку керувань деяким класом нелінійних об'єктів побудувати чисельні процедури синтезу.

Таким чином, нехай маємо наступну задачу

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x), \tag{5.62}$$

де $\varphi(x) = f(x) + G(x)u(x)$, $u(x)$ - вектор оптимальних законів керування. Для диссипативних систем, відповідний показник дивергенції вектора $\varphi(x)$, $div(\varphi(x))$ повинен бути негативним

$$div(\varphi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i} \mid_{x \in \Omega} < 0.$$

Наслідуючи метод АКОР Летова-Кальмана для завдання синтезу оптимального управління (5.60), (5.61), запишемо основне функціональне рівняння

$$\min_u \left[F_0(x) + < u, Du > + < f(x), \frac{\partial V}{\partial x} > + < G(x)u, \frac{\partial V}{\partial x} > \right] = 0. \qquad (5.63)$$

Мінімум по u в (5.63) досягається тоді, коли

$$u = -\frac{1}{2} D^{-1} G^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (5.64)$$

Отже, щоб знайти керування (5.64), яке є оптимальним, необхідно визначити функцію $V = V(x)$ як рішення нелінійного ДР 1-го порядку у частинних похідних

$$F_0(x) + < u, Du > + < f(x), \frac{\partial V}{\partial x} > -\frac{1}{4} < G(x) D^{-1} G^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial x} >= 0 \qquad (5.65)$$

що має граничну умову

$$V(x(\infty)) = 0. \qquad (5.66)$$

Тоді система (5.60), будучі замкнутою оптимальним керуванням (5.64), приймає наступний вигляд

$$\dot{x}(t) = f(x) - \frac{1}{2} G(x) D^{-1} G^T(x) \frac{\partial V}{\partial x}. \qquad (5.67)$$

Замкнута оптимальна система керування (5.67) має бути також асимптотично стійкою.

Таким чином, завдання АКОР зводиться до знаходження функції $V = V(x)$ з рівняння (5.65) з граничною умовою (5.66). Рішення цієї задачі є складним.

6. Керованість та спостережуваність лінійних систем

6.1. Керованість лінійних систем. Класичний підхід

1. *Системи зі сталими коефіцієнтами.* Розглянемо систему, яка має вигляд векторного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Gu, \qquad (6.1)$$

де

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \dots \\ u_r \end{bmatrix},$$

а -$x_k (k = 1, \dots, n)$ – змінні стану системи; $u_i (i = 1, \dots, r)$ – керуючі сили, які діють у системі. Елементи матриць A та G – сталі.

Розглянемо питання, чи можна вказану систему (6.1) перевести з будь-якого заданого початкового стану в інший бажаний стан за кінцевий проміжок часу, якщо належним чином застосувати закон зміни керуючих сил $u_i = u_i(t)$.

Визначення. Систему (6.1) будемо називати керованою, якщо її можна перевести з будь-якого заданого початкового стану, за кінцевий проміжок часу, у будь-який бажаний стан, якщо належним чином застосовувати закон зміни керуючих сил.

Системи, які мають таку властивість, будемо називати цілком керованими.

Якщо керованість системи залежить від побудови матриць A і G, то поняття керованості належить також от вказаних матриць, тобто – пара (A, G) – цілком керована або некерована.

Закон руху системи (6.1) буде таким:

$$x(t) = e^{At} x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)} G u(\tau) d\tau. \tag{6.2}$$

Припустимо, що існує такий закон зміни керуючих сил $u_i = u_i(t)$ $(i = 1, \dots, r)$, який забезпечує подання системи в момент часу $t = T$ у початок координат, тобто

$$x(T) = 0. \tag{6.3}$$

Згідно з (6.2) маємо, що

$$x(T) = e^{AT} x(0) + \int_0^T e^{A(T-\tau)} G u(\tau) d\tau. \tag{6.4}$$

Тоді відповідно до (6.3) маємо співвідношення

$$\int_0^T e^{A(T-\tau)} G u(\tau) d\tau = -e^{AT} x(0),$$

додаючи до лівої та правої його частини e^{-AT}, маємо

$$\int_0^T e^{-A\tau} G u(\tau) d\tau = -x(0). \tag{6.5}$$

Відповідно до співвідношення

$$e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k(-\tau)A^k,$$

де m – степінь мінімального полінома $\psi(\lambda)$ матриці A, а $\alpha_k(t)$ – коефіцієнти інтерполяційного полінома Лагранжа-Сільвестра $r(\lambda)$, який побудований для функції $e^{\lambda t}$, що визначається на спектрі матриці A. Тоді співвідношення (6.5), беручи до уваги співвідношення, можна подати у вигляді

$$\sum_{k=0}^{m-1} A^k G \int_0^T u(\tau)\alpha_k(-\tau)d(\tau) = -x(0).$$

Потім, ліву частину вказаного співвідношення подамо у вигляді додатка двох матриць

$$\begin{bmatrix} G & AG & AG^2 \cdots A^{m-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^T u(\tau)a_0(-\tau)d(\tau) \\ \int_0^T u(\tau)a_1(-\tau)d(\tau) \\ \cdots \\ \int_0^T u(\tau)a_{m-1}(-\tau)d(\tau) \end{bmatrix} = -x(0). \qquad (6.6)$$

Введемо означення для лівої матриці таким чином:

$$W = \begin{bmatrix} G & AG & A^2G \ldots A^{m-1}G \end{bmatrix}. \qquad (6.7)$$

Ураховуючи, що $\psi(\lambda)$ – анулюючий поліном матриці , тобто $\psi(A) = 0$, одержимо, що

$$A^m + C_1A^{m-1} + \cdots + C_{m-1}A + C_mE = 0,$$

таким чином A^m – являє собою лінійну комбінацію матриць $E, A, A^2, \ldots, A^{m-1}$, тоді

$$A^k = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{kj}A^j, (k \geq m), \;\; a \;\; A^kG = \sum_{j=0}^{m-1} \varepsilon_{kj}A^jG.$$

Підставляючи ці співвідношення у формулу (6.7), визначимо матрицю, яка має розмірність n x q, де $q = m$ x r, та елементами якої є скаляри

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & \ldots & W_{1q} \\ W_{21} & W_{22} & \ldots & W_{2q} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ W_{n1} & W_{n2} & \ldots & W_{nq} \end{bmatrix}.$$

Через U визначимо матрицю-стовпець, яка має розмірність $(m \times 1)$ та елементами якої є

$$U^T = \left[\int_0^T u(\tau) a_0(-\tau) d\tau \ \cdots \ \int_0^T u(\tau) a_{m-1}(-\tau) d\tau \right]$$

У цьому випадку векторне співвідношення (**??**) можливо записати як таке матричне рівняння :

$$WU = -x(0), \tag{6.8}$$

або у вигляді

$$\sum_{k=1}^{q} w_k U_k = -x(0), \tag{6.9}$$

де $w_k \ (k = 1, \ldots, q)$ та $x(0)$ – n-мірні вектори, а U_k – скаляри, причому $q = m * r \geq n$, де m-степінь мінімального полінома $\psi(\lambda)$ матриці $A(m \leq n)$; r – розмірність керування u. Таким чином, вектор $x(0)$ являє собою лінійну комбінацію векторів $w_k(k = 1, \ldots, q)$.
Оскільки як $x(0)$ може бути обраний будь який вектор n-мірного простору $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то з (6.9) маємо теорему.
Теорема 6.1. Для того щоб система (6.6) була цілком керованою, необхідно й достатньо, щоб серед векторів $w_k(k = 1, \ldots, q)$ знайшлась n кількість лінійно-незалежних векторів.

Іншими словами, умова керованості системи (6.1) полягає в тому, що ранг матриці (6.7)

$$W = \left[G \ \ AG \ \ AG^2 \cdots A^{m-1} G \right]$$

повинен дорівнювати n.
Зауваження. Для систем, у яких $m = n$, матриця (6.7) має вигляд

$$Q = \left[B \ \ AB \ \ A^2 B \cdots A^{n-1} B \right]$$

і ранг матриці Q повинен дорівнювати n.

6.2. Спостережуваність лінійних систем. Класичний підхід

Розглянемо систему, яка має опис у вигляді векторного диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = A\tilde{x} + Gu, \tag{6.10}$$

$$\tilde{y} = C\tilde{x} + Lu, \tag{6.11}$$

де $\tilde{x}$ – n-мірний вектор; $\tilde{y}$ – p-мірний вектор; u – r-мірний вектор. Через A, G, C та L позначимо матриці типу $n \times n$, $n \times r$, $p \times n$, $p \times r$ відповідно, де $\tilde{x}$ – вектор стану системи; u – вектор керування; $\tilde{y}$ – вектор спостереження стану системи, елементом якого є лінійна комбінація векторів $\tilde{x}$ та u.

Далі припустимо, що елементи $\tilde{y_1}$, $\tilde{y_2}$, $\ldots$,$\tilde{y_p}$ вектору $\tilde{y}$ доступні спостереженню на відрізках часу $0 \leq t \leq T$, і, таким чином, за даним вимірюванням відома функція $\tilde{y_1}(t)$,$\tilde{y_2}(t)$,$\ldots$,$\tilde{y_p}(t)$ на відрізку часу $0 \leq t \leq T$. При цьому припустимо, що відповідно до закону зміни керуючих сил $u_k = u_k(t)$ на $0 \leq t \leq T$. Тоді згідно з (6.2) отримаємо

$$\tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau,$$

то

$$\tilde{y}(t) = Ce^{At}\tilde{x}(0) + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau + Lu(t),$$

де $u(t)$ – відомо, тоді

$$\tilde{y}(t) - C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Gu(\tau)d\tau - Lu(t) = Ce^{At}\tilde{x}(0). \tag{6.12}$$

Ліва частка співвідношення (6.12) відома, але початковий стан системи $\tilde{x}(0)$ – припускається невідомим. Виникає питання, чи існує можливість відновити значення $\tilde{x}(0)$ за отриманим із спостереження даним.

Вказана задача еквівалентна наступній

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{6.13}$$

$$y = Cx. \tag{6.14}$$

Потрібно відновити початкове значення $x(0)$ за відомим із спостереження значенням вектора-функції $y(t)$, $(0 \leq t \leq T)$.

Визначення. Можливість відновлення початкового стану $x(0)$ системи, якщо відома деяка спостережувана лінійна операція понад її виходом назвемо спостережливістю.

Системи, які мають таку особливість назвемо цілком спостережуваними. Із рівнянь (6.13), (6.14) випливає, що

$$y(t) = Ce^{At}x(0). \tag{6.15}$$

Матриця C має елементи $C_{ij}(i = 1, \ldots, p; j = 1, \ldots, n)$. Нехай $C_j(j = 1, \ldots, p)$ – рядки матриці C. Тоді

$$y_j(t) = C_j e^{At}x(0), \;\; j = \overline{1,p}; \;\; e^{At} = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t)A^k, \tag{6.16}$$

де m – степінь мінімального полінома $\psi(\lambda)$ матриці A, $a_k(t)$ – коефіцієнти інтерполяційного полінома Лагранжа-Сільвестра $r(\lambda)$, який побудований для функції $e^{\lambda t}$ на спектрі матриці A. Тому, підставивши це співвідношення в (6.16), отримуємо, що

$$y_j(t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t)C_j A^k x(0), \;\; j = \overline{1,p}.$$

Якщо обидві частини його помножити на $a_i(t)(i = 0, \ldots, m-1)$ та проінтегрувати вказані функції за змінною t на відрізку $[0, T]$, отримуємо

$$\int_0^T a_i(t)y_j(t)dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int_0^T a_i(t)a_k(t)dtC_j A^k x(0). \tag{6.17}$$

Введемо такі позначення:

$$\big(a_i, a_j\big) = \int_0^T a_i(t)a_j(t)dt.$$

Тоді для кожного фіксованого j відповідно до (6.17) будемо мати таку систему рівнянь :

$$\left.\begin{array}{c} (a_0, a_0)C_j x(0) + (a_0, a_1)C_j Ax(0) + \ldots + (a_0, a_{m-1})C_j A^{m-1}x(0) = (a_0, y_j) \\ (a_1, a_0)C_j x(0) + (a_1, a_1)C_j Ax(0) + \ldots + (a_1, a_{m-1})C_j A^{m-1}x(0) = (a_1, y_j) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a_{m-1}, a_0)C_j x(0) + (a_{m-1}, a_1)C_j Ax(0) + \ldots (a_{m-1}, a_{m-1})C_j A^{m-1}x(0) = (a_{m-1}, y_j) \end{array}\right\} \text{(6.1}$$

Визначник із коефіцієнтів при $C_jx(0)$, $C_jAx(0)$,..., $C_jA^{m-1}x(0)$ у (6.18) різниться від нуля, як визначник Грамма для системи лінійно–незалежних функцій $a_0(t)$, $a_1(t)$, ..., $a_{m-1}(t)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_0, a_0) & (a_0, a_1) & \dots & (a_0, a_{m-1}) \\ (a_1, a_0) & (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_{m-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{m-1}, a_0) & (a_{m-1}, a_1) & \dots & (a_{m-1}, a_{m-1}) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Таким чином, система рівнянь (6.18) має єдиний розв'язок. Позначимо

$$\left.\begin{array}{c} C_jx(0) = \mu_{j1}, \\ C_jAx(0) = \mu_{j2}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ C_jA^{m-1}x(0) = \mu_{jm} \end{array}\right\}, \tag{6.19}$$

де $j = 1, \dots, p$, будемо мати всього $v = m * p$ співвідношень (6.19). Позначимо скалярний добуток двох векторів ξ та η, як

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \dots + \xi_n\eta_n.$$

Нехай M^* позначає транспоновану матрицю для матриці . Очевидно, що $(M \times N)^* = N^* \times M^*$, таким чином співвідношення (6.19) можна подати у вигляді :

$$\begin{gathered} \langle C_j, x(0) \rangle = \mu_{j1}, \\ \langle A^*C_j^*, x(0) \rangle = \mu_{j2}, \\ \langle (A^*)^{m-1}C_j^*, x(0) \rangle = \mu_{jm}, \quad j = \overline{1, p}, \end{gathered}$$

де C_j^* – стовпець з елементами $[C_{j1}$, C_{j2},..., $C_{jn}]$, а $C^* = [C_1^*, C_2^*, \dots, C_p^*]$. Далі аналогічно $A^*C^* = [A^*C_1^*, A^*C_2^*, \dots, A^*C_p^*]$, $(A^*)^2C^* = [(A^*)^2C_1^*, (A^*)^2$ $C_2^*, \dots, (A^*)^2C_p^*]$, $(A^*)^{m-1}C^* = [(A^*)^{m-1}C_1^*, (A^*)^{m-1}C_2^*, \dots, (A^*)^{m-1}C_p^*]$. Зрозуміло, що стовпці матриць C^*, A^*C^*, $(A^*)^2C^*, \dots, (A^*)^{m-1}C^*$(їх кількість $v = m*p$) – вектори, які належать лівій частині співвідношень (6.19). Таким чином, вказані вектори являють собою стовпці сідаючої коагулірованої матриці

$$S = \left[C^* \quad A^*C^* \quad A^{*2}C^* \cdots A^{*m-1}C^*\right], \tag{6.20}$$

яка має розмірність $n \times v = m * p$.

Припустимо, що серед стовпців матриці S є $n-$ кількість лінійно незалежних стовпців $S_{\sigma 1}, S_{\sigma 2}, \dots, S_{\sigma n}$, тобто $rang\ S = n$. Розмірність p вектора у обрана як $v = m*p \geq n$. Далі, із співвідношень (6.19) візьмемо ті, які належать до родини лінійно незалежних $S_{\sigma 1}, S_{\sigma 2}, \ldots, S_{\sigma n}$. Нехай це будуть рівняння

$$\left.\begin{array}{c} S_{\sigma_1 1}x_1(0) + S_{\sigma_1 2}x_2(0) + \cdots + S_{\sigma_1 n}x_n(0) = \mu_{\sigma_1}, \\ S_{\sigma_2 1}x_1(0) + S_{\sigma_2 2}x_2(0) + \cdots + S_{\sigma_2 n}x_n(0) = \mu_{\sigma_2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ S_{\sigma_n 1}x_1(0) + S_{\sigma_n 2}x_2(0) + \cdots + S_{\sigma_n 2n}x_n(0) = \mu_{\sigma_n}. \end{array}\right\}, \tag{6.21}$$

Таким чином отримали, систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь відносно змінних $x_1(0), x_2(0), x_3(0), \ldots, x_n(0)$. Визначник із коєфіцієнтів рівняння (6.21) не дорівнює нулю, тому що вектори $S_{\sigma 1}, S_{\sigma 2}, \ldots, S_{\sigma n}$ лінійно незалежні і система рівнянь має один розв'язок, тобто існує єдиний вигляд компонент $x_1(0), x_2(0), x_3(0), \ldots, x_n(0)$ вектора початкового стану $x(0)$.
Виходячи з цього, має місце теорема.
Теорема 6.2 Необхідною та достатньою умовою спостережуваності системи (6.13) -(6.14) полягає в тому, що ранг матриці (6.20)

$$S = \begin{bmatrix} C^* & A^*C^* & A^{*2}C^* \cdots A^{*m-1}C^* \end{bmatrix}$$

дорівнює n.

6.3. Принцип подвійності в теорії керованості та спостережуваності лінійних систем

Нехай розглядається система, яка має вигляд

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dx}{dt} = Ax + Gu \\ y = Cx + Lu \end{array}\right\}, \tag{6.22}$$

де x, u, y – вектори, які мають розмірність n, r, p, а A, G, C, L – матриці типу $n \times n, n \times r, p \times n, p \times r$. Умова керованості системи (6.22) полягає в тому, що ранг матриці

$$W = \begin{bmatrix} G & AG & A^2G \cdots A^{m-1}G \end{bmatrix}$$

дорівнює n.

Умова спостережуваності системи (6.22) полягає в тому, що ранг матриці

$$S = \begin{bmatrix} C^* & A^*C^* & A^{*2}C^* \cdots A^{*m-1}C^* \end{bmatrix}$$

Теж дорівнює n.
Далі розглянемо систему, яка має такий вигляд

$$\left.\begin{array}{c} \frac{d\xi}{dt} = A^*\xi + C^*\vartheta \\ \eta = G^*\xi + L^*\vartheta \end{array}\right\}, \tag{6.23}$$

де ξ, υ, η – мають розмірність n, p, r.
Для системи (6.23) умова керованості полягає в тому, що ранг матриці

$$rang\, S = rang\big[C^* \quad A^*C^* \quad A^{*2}C^* \cdots A^{*m-1}C^*\big] = n.$$

А відповідна умова спостережуваності має вигляд – ранг матриці

$$W = \big[G \quad AG \quad A^2G \cdots A^{m-1}G\big]$$

дорівнює n.

Р. Калман вперше встановив наступний принцип подвійності: система (6.22) керована (спостережувана), якщо й тільки якщо система (6.23) спостережувана (керована).

6.4. Керованість та спостережуваність лінійних нестаціонарних систем. Класичний підхід

1. Розглянемо лінійну нестаціонарну систему, яка подається у вигляді векторного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + G(t)u. \tag{6.24}$$

Елементи матриць $A(t), G(t)$ – неперервні, дійсніми функції часу.

Систему (6.24) будемо називати цілком керованою в момент часу t_0, якщо з будь-якого стану, яке вона займала в час t_0, її можна перевести в нульовий стан, за кінцевий проміжок часу, належним чином обираючи закон зміни керування.

Виходячи з цього, має місце теорема.

Теорема 6.3. Нехай $F(t, \tau) = \theta(t)\theta^{-1}(\tau)$, де $\theta(t)$ – фундаментальна матриця розв'язання системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t),$$

а $W(t, \tau)$ позначимо матрицю

$$W(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \hat{O}(t_0, \tau)G(\tau)G^*(\tau)\hat{O}^*(t, \tau)d\tau. \tag{6.25}$$

Нестаціонарна лінійна система (6.24) керована в момент часу t_0, якщо й тільки якщо для будь-якого кінцевого t_1 матриця $W(t_0, t_1)$, яка розраховується згідно з (6.25), є позитивно-визначеною матрицею.

2. Розглянемо задачу про встановлення початкового стану $x(t_0)$, якщо маємо спостережування $y(t)$ на проміжку часу $t_0 \le t \le T$. Нехай система має вигляд

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t), \\ y(t) &= C(t)x(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.26}$$

Тоді має місце теорема.

Теорема 6.4. Система (6.26) цілком спостережувана на проміжку $[t_0, T]$, якщо й тільки якщо матриця

$$M(t_0, t) = \int_{t_0}^{T} F^*(t, t_0) C^*(t) C(t) F(t, t_0) dt$$

неособлива (тобто існує $M^{-1}(t_0, T)$).

6.5. Керованість та спостережуваність лінійних нестаціонарних систем. Сучасний підхід

Сучасні керовані системи, як правило, є досить складними і зазвичай містять кілька "рулів". Тому приступаючи до вивчення таких систем, доцільно розглянути принципові можливості "рулів"в кожній системі. Великий інтерес представляє питання про те, чи можна за допомогою допустимих керувань перевести систему з одного заданого стану в інше заздалегідь заданий стан. Якщо це можливо зробити, і до того ж багатьма способами, то природно шукати то керування, яке за обраним критерієм є найкращим. Якщо оптимальне керування знайдено, то природно поставити питання про те, як його реалізувати, тобто вибрати програмним або воно повинно працювати за принципом зворотного зв'язку.

Розглянуті в подальшому завдання досить ефективно і наочно вирі-шують-ся методами теорії Гільбертових просторів.

Нехай H - вещественний гільбертов простір. Як приклад такого простору будемо надалі розглядати простір $L_2^r(0,T)$ - вектор-функцій $u(t) = u_1(t), ..., u_r(t)$, $0 < t < T$, елементи якого $u_i(t)$, $i = 1, ..., r$ є сумовні зі своїми квадратами. Нагадаємо, що скалярний добуток і норма в ньому визначені формулами

$$(u, v) = \int_0^T \sum_{i=1}^{r} u_i(t) v_i(t) dt, \|u\|^2 = \int_0^T \sum_{i=1}^{r} u_i^2(t) dt,$$

де інтеграл розуміється в сенсі Лебега.

Одним з основних властивостей Гільбертових просторів, яке широко використовується, є властивість визначається наступною теоремою.

Теорема Леві.Якщо M - повне підпростір в H, то для будь-якого елемента $x \in H$ існує однозначне уявлення $x = y + z$, де $y \in M$, а z ортогонально M. При цьому очевидно, що $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Друге твердження має для нас особливий інтерес і складається в наступній теоремі.

Теорема Рисса. Лінійний обмежений функціонал f, визначений на всьому гільбертовому просторі H, однозначно представимо у вигляді $f(x) = (u, x)$, де елемент $u \in H$ однозначно визначається функціоналом f.

Керованість. Розглянемо керовану систему, поведінка якою має опис у вигляді лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u + f(t), \tag{6.27}$$

де $A(t)$ та $B(t)$ - неперервні матриці розміру n x n, n x r відповідно, $f(t)$ - завдана функція з $L_2^n(0,T)$, T - довільне, але фіксовне число.

Визначення 1. Система (6.27) називається цілком керованою на відрізку $[0,T]$, якщо для будь-якого вектора x^1 і x^2 з E^n можна вказати керування $u = u(t, x^1, x^2)$, $0 \le t \le T$, з $L_2^r(0,T)$ таке, що рішення $x(t)$ задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t, x^1, x^2) + f(t), 0 \le t \le T, x(0) = x^1$$

в момент часу $t = T$ задовольняє умові $x(T) = x^2$.

У *визначенні 1* не має ніяких обмежень щодо керування $u(t, x^1, x^2)$, крім його належності простору $L_2^r(0,T)$. Однако у реальних систем цього може бути недостатньо, тому що внутрішні якості таких систем требують додаткових обмежень на допустимі керування. Однако поняття цілком керованости не змінюється.

У подальшому, не обмежуя загальность отримуємих результатів, досліджуватись буде задача керованості наступної системи

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u, 0 \le t \le T, x(0) = x^1. \tag{6.28}$$

Виконав заміну $y = x - \varphi(t)$, з системи (6.27) маємо $\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)y + B(t)u + $ $+ A(t)\varphi(t) + f(t)$. Визначимо $\varphi(t)$, наступним чином

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = A(t)\varphi + f(t), \varphi(0) = 0.$$

Як відомо, розв'язок системи (6.28) можливо надати у вигляді

$$x(t) = W(t,0)x^1 + \int_0^t W(t,s)B(s)u(s)ds,$$

де $W(t,s)$ - матриця Коши рівняння $\dfrac{dz}{dt} = A(t)z(t)$.

Для того, щоб цей розв'язок $x(t)$ задовільняв умові $x(T) = x^2$, необхідно та достатньо, щоб керування $u(t)$ задовільняло умові

$$\int_0^T W(T,s)B(s)u(s)ds = C, \text{ де } C = x^2 - W(T,0)x^1. \tag{6.29}$$

Таким чином отримуємо, що система (6.27) якщо $f(t) = 0$ цілком керована якщо й тільки якщо, для будь якого вектору C з E^n можливо вказати керування $u(t,C)$, яке задовільняє умові (6.29).

Цей результат дозволяє за допомогою теореми Леві отримати необхідні та достатні умови цілком керованості, що звичайно легко перевірити.

Введемо наступні означення. Нехай $h_i(t)$ - i- й стовбець матриці $B^*(t)W^*(T,t)$; C_i - i - я компонента вектору C.

Тоді співвідношення (6.29) приймають наступний вигляд

$$\int_0^T h_i^*(t)u(t)dt = C_i, \text{ де } i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.30}$$

Наведено рівняння, у подальшому будемо називати моментним співвідношенням, а числа C_i - моментами.

Теорема 1. Для того, щоб система (6.27) при $f(t) = 0$ мала бути цілком керованної на відрізку $[0,T]$, необхідно й достатньо щоб вектор-функції $h_1(t), \ldots, h_n(t)$ були лінійно незалежними на цьому відрізку.

Доказ. Нехай система (6.27) є цілком керованною на відрізку $[0,T]$ та для будь яких x^1 та x^2 існує керування $u(t)$, що задовольняє моментним співвідношенням (6.30), тобто

$$\int_0^T h_i^*(t)u(t)dt = C_i, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Означимо через M_h кінцево вимірний підпростір з $L_2^r(0,T)$ з елементами $h(t)$, що мають вигляд

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i h_i(t), \tag{6.31}$$

де α_i - повільні стали. Тоді з урахуванням теореми Леві можливо визначити керування $u(t)$ у вигляді $u(t) = v(t) + w(t)$, де $v(t) \in M_h$, а $w(t) \perp M_h$. З того що $w(t) \perp M_h$ маємо

$$\int_0^T h_i^*(t)w(t)dt = 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

Враховуя співвідношення (6.29) отримуємо що

$$\sum_{k=1}^{n}(h_i, h_k)\alpha_k = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6.32}$$

Висновки. Якщо x^1, x^2 - повільно вибрані з E^n (C_i - також будуть повільні) та існує керування $u(t)$, що задовольняє моментним співвідношенням (6.30), то проекція (6.32) на M_h визначається за допомогою сталих $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, що визначаються з системи (6.32). Вказана система має розв'язок для будь яких C_i, тому що визначник системи (6.32) $\Delta = det \mid (h_i, h_k) \mid$ відмінен від нуля. Δ є визначник Грама вектор-функцій $h_1(t), \ldots, h_n(t)$, тому він відмінен від нуля, якщо вказані функції є лінійно незалежними.

Крім того, якщо врахувати що h_i є i - м стовпцом матрици $B^*(t)W^*(T,t)$, то легко показати, що визначник Грама є визначником матриці

$$\Phi = \int_0^T B^*(t)W^*(T,t)W(T,t)B(t)dt. \tag{6.33}$$

Теорема 2. Для того, щоб система (6.27) мала бути цілком керованної на відрізку $[0, T]$, необхідно й достатньо, щоб визначник матриці (6.33) був відмінен від нуля, тобто щоб вказана матриця була неособой.

Область досяжності. Далі будемо розглядати керований процес у вигляді

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y(t) + B(t)u, 0 \leq t \leq T, \quad \text{з початковою умовою } y(0) = 0. \tag{6.34}$$

Допустимими керуваннями будемо вважати функції $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ з деякої множини D_u. Якщо допустимими є функції $u(t) \in L_2^r(0,T)$, це означає, що множину D_u можливо задавати нерівністю $\| u \|_{L_2^r} \leq L$, де L - деяка стала.

Надалі будемо вважати, що D_u задовольняє наступним умовам:

1) кожна функція $u(t) \in D_u$ однозначно визначає неперервний розв'язок $y = y(x)$ завдання (6.34) :

$$y(t) = \int_0^t W(t,s)B(s)u(s)ds, \tag{6.35}$$

2) кожна функція $u(t) \in D_u$ співвідношеннями

$$f(h_i) = \int_0^T h_i^*(t)u(t)dt, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{6.36}$$

визначає лінійний обмежений функціонал f, що завдан на лінеалі $L_h : \alpha_1 h_1 + \ldots + \alpha_n h_n$, якій належить повному лінійному нормованому простору X_h, а це вказує що $f \in X_h^*$.

Визначення 2. Множиною досяжності керованої системи (6.34) будемо називати множину усіх $y \in E^n$, якщо для кожного існує керування $u(t) \in D_u$, $0 \leq t \leq T$, таке що відповідна йому функція (6.35) задовольняє умові $y(T) = y$.

Для лінійних систем можливо доказати наступну чудову властивість області досяжності.

Теорема 3. Якщо D_u - випукла замкнута множина повного лінійного метрічного простору X_h, що задовольняє вказаним вище двом умовам, то множина досяжності замкнуто і опукло в E^n.

Теорема 4. Критерій керованості. Керування $u^*(t)$ що переводе систему (6.28) зі стану x^1 якщо $t = t_0$, в стан x^2 при $t = t_1$ існує тоді і тільки тоді, коли вектор

$$\Theta(x^1, x^2) = x^2 - W(t_0, t_1)x^1$$

належить області значень перетворення

$$\Phi(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[W(t_1, t_0)B(t)B^*(t)W^*(t_0, t_1)\right] dt.$$

Більш того, якщо x^* розв'язок рівняння

$$\Phi(t_1, t_0) = \Theta(x^1, x^2),$$

то керування $u^*(t)$ задається наступною формулой

$$u^*(t) = -B^*(t)B(t)x^*.$$

Спостережливость лінійних нестаціонарних систем

Нехай керований процес описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad 0 < t < T, \tag{6.37}$$

де $A(t), B(t)$ - неперервні матриці відповідної розмірності n х n, n х r. Допустимі керування $u = u(t)$ з простору $L_2^r(0, T)$.

Через вектор $y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$ позначимо вектор, компоненти якого є лінійні комбінації фазових координат x_i і компонент керування u_j

$$y = C(t)x + D(t)u, \tag{6.38}$$

де $C(t), D(t)$ - неперервні матриці розмірності m х n та m х r відповідно.

Будемо припускати, що керування $u = u(t)$ задано і компоненти y_i вектора y доступні спостереженню на $0 \leq t \leq T$, і отже, за результатами спостережливості відомі функції $y_i = y_i(t), i = 1, 2, \ldots, m, 0 \leq t \leq T$.

Основне завдання спостережливості в цьому випадку полягає в тому, щоб за отриманими результатами спостережливості (тобто за відомою функції $y(t)$ $= \{y_{1(t)},\, y_2(t), ..., y_m(t)\}$) визначити значення вектор-функції $x = x(t)$ при всіх $t \in [0, T]$, які є рішенням рівняння (6.37) при $u = u(t)$.

Це рішення можна подати у вигляді

$$x(t) = W(t,0)x^0 + \int_0^t W(t,s)B(s)u(s)ds, \tag{6.39}$$

де x^0 - невідомий стан системи. $W(t,s), B(s)$ та $u(s)$ визнаються відомими, таким чином другий доданок у вирази (6.39) - відома функція часу. Невідомим є перший доданок - $W(t,0)x^0$.

Отже, для вирішення питань спостережливості замість (6.37) досить розглядати однорідні рівняння

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \quad 0 < t < T. \tag{6.40}$$

$$y = C(t)x(t). \tag{6.41}$$

Отже основне завдання спостережливості тоді полягає в наступному.

За даними спостережливості $y(t), t \in [0, T]$, які представлені у вигляді (6.41), потрібно знайти вектор x^0 початкового стану фазового вектора $x(t)$, що визначається рішенням рівняння (6.40).

Визначення 3. Якщо будь-який початковий стан ^{0} системи (6.40) можна визначити за відомою на відрізку $[0, T]$ функції $y(t)$, яка представимо у вигляді (6.41), то система (6.40), (6.41) називається цілком цілком спостережуваної на цьому відрізку часу.

Нехай $h_i(t)$ - i-й стовпец матриці $C(t)W(t,0)$. Розмірність вектора $h_i(t)$ дорівнює m, а кількість векторів - n. Має місто наступна

Теорема 5. Для того, щоб система (6.40), (6.41) була цілком спостережуваної на відрізку $[0, T]$, необхідно і достатньо, щоб вектор-функції $h_1(t), \ldots, h_n(t)$ були лінійно незалежні на цьому відрізку.

Ідентифікуємість лінійних нестаціонарних систем

Завданням ідентифікації будемо називати задачу визначення стану $x(t)$ в момент $t = t_1 \leq T$ за даними про керування $u(t)$ і вихідний величиною $y(t)$ при $t \leq t_1$.

Пару (t_1, x), де $x \in E^n$ будемо називати подією, а вектор $y(t), 0 \leq t \leq t_1$, відповідний керуванню $u(t)$, за яким відновлюється подія (t_1, x), будемо позначати через $y(t, t_1, x, u(t))$, $t < t_1$.

Подія (t_1, x) в системі

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= A(t)x(t), \quad 0 < t < T, \\ y &= C(t)x(t), \end{aligned} \tag{6.42}$$

називається неідентифікованій тоді і тільки тоді, коли $y(t, t_1, x, u(t)) = \Theta$ при всіх $t \in [0, t_1]$.

Визначення 4. Лінійну систему (6.42) будемо називати ідентифікованої, якщо жодна подія (t_1, x) не є неідентифікованою, за винятком події (t_1, Θ).

Теорема 6. Для того, щоб подія (t_1, x^0) у системі (6.42) було неідентифікованою, необхідно і достатньо, щоб вектор x^0 належав ядру матриці

$$N(t_1) = \int_0^{t_1} W^*(t, t_1)C^*(t)C(t)W(t, t_1)dt. \tag{6.43}$$

Зауваження. Ядром матриці A є множина векторів, що задовольняють рівнянню $Ax = \Theta$.

Слідство 1. Для того, щоб система (6.42) була ідентифікована, необхідно і достатньо, щоб ранг матриці (6.43) дорівнював n.

Слідство 2. Нехай матриці A, C стали. Система (6.42) буде ідентифікована, тоді і тільки тоді, коли система

$$\frac{dx}{dt} = -A^*x + C^*v,$$

$$rang\{C^*, A^*C^*, \ldots, A^{*(m-1)}C^*\} = n$$

буде цілком керована.

7. Стохастичні системи

У більшості задач, сигнал який поступає на вхід керуючої системи, являє собою реалізацію деякого випадкового процесу. Зазвичай ніяких відомостей про його реалізацію немає, крім звичайних відомостей про статистичні властивості відповідного випадкового процесу. Наприклад, може бути відомо, що розглянутий процес є гауссівським, знайдене його середнє значення та кореляційна функція.

При такому обсязі відомостей про вхідний сигнал не є можливим отримання більш повної за обсягом інформації про сигнал на виході системи. Можна лише визначити статистичні властивості сигналу на виході системи.

Якщо система подається у вигляді лінійних диференціальних рівнянь, то мова може йти про визначення статистичних властивостей інтегралів указаних диференціальних рівнянь за заданими статистичними властивостями правих частин рівнянь. Розглянемо розв'язання вказаної задачі.

7.1. Інтегральне рівняння Вінера для оптимальної функції ваги

Нехай на вхід одновимірної нестаціонарної лінійної системи надходить нестаціонарний випадковий процес $\zeta(t)$. Через $\upsilon(t,\tau)$ позначимо функцію ваги цієї системи. Сигнал на виході системи має тоді вигляд

$$\xi(t) = \vartheta(t,t_0)\xi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau.$$

Якщо $\xi(t_0) = 0$, то маємо

$$\xi(t) = \int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau. \tag{7.1}$$

Нехай $\mu(t)$ – сигнал, який ми бажаємо отримати на виході системи. Якщо, наприклад, $\zeta(t) = m(t) + n(t)$, де $m(t)$ – корисний сигнал; $n(t)$ – помилки. Тоді бажаний сигнал може мати вигляд $\mu(t) = m(t)$ або являти собою деяке завдане перетворення корисного сигналу $m(t)$.

Позначимо через $e(t)$ помилку у відтворюванні бажаного сигналу :

$$e(t) = \mu(t) - \xi(t)$$

або відповідно до (7.1)

$$e(t) = \mu(t) - \xi(t) = \mu(t) - \int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau. \tag{7.2}$$

Середнє значення $e^2(t)$ розрахуємо, як

$$I(t) = M[e^2(t)] = M\left\{ \left[\mu(t) - \int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau \right]^2 \right\}$$

або

$$I(t) = M[\mu^2(t)] - 2M\left[\mu(t)\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau\right] +$$
$$+M\left[\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\sigma)\zeta(\sigma)d\sigma\right]. \qquad (7.3)$$

Вважаючи, що $\mu(t)$ і $\zeta(t)$ – випадкові процеси з нульовими середніми значеннями, та позначаючи через

$$\left.\begin{array}{c}\varphi_{\mu\mu}(\tau,\sigma) = M[\mu(\tau)\mu(\sigma)],\\ \varphi_{\mu\zeta}(\tau,\sigma) = M[\mu(\tau)\zeta(\sigma)],\\ \varphi_{\zeta\zeta}(\tau,\sigma) = M[\zeta(\tau)\zeta(\sigma)],\end{array}\right\}$$

кореляційні функції, визначені на множині відповідних випадкових функцій, співвідношення (7.3) подамо в такому вигляді :

$$I(t) = \varphi_{\mu\mu}(t,t) - 2\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\tau)\varphi_{\mu\zeta}(t,\tau)d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\tau)\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\sigma)\varphi_{\zeta\zeta}(\tau,\sigma)d\sigma d\tau. \qquad (7.4)$$

Величина $I(t)$, яка являє собою дисперсію помилки, залежить від виду функції ваги системи, тобто виступає як функціонал, визначений на класі функцій ваги лінійних нестаціонарних систем. Якщо $\vartheta(t,\tau)$ – оптимальна функція ваги, тобто на якій функціонал $I(t)$ досягає мінімуму, то це означає, що для будь-якої іншої функції ваги $\vartheta(t,\tau)+\gamma h(t,\tau)$ (де γ – будь-який параметр, який не залежить від t і τ) дисперсія похибки буде $I(t)+\delta I(t) > I(t)$.

Відповідно до (7.4) маємо

$$I(t)+\delta I(t) = \varphi_{\mu\mu}(t,t) - 2\int\limits_{t_0}^{t}\vartheta(t,\tau)\varphi_{\mu,\zeta}(t,\tau)d\tau - 2\gamma\int\limits_{t_0}^{t}h(t,\tau)\varphi_{\mu\zeta}(t,\tau)d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}[\vartheta(t,\tau)+\gamma h(t,\tau)]\int\limits_{t_0}^{t}[\vartheta(t,\sigma)+\gamma h(t,\sigma)]\varphi_{\zeta\zeta}(\tau,\sigma)d\sigma d\tau. \qquad (7.5)$$

Виконавши явні перетворення та ввівши певні означення

$$I_1(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\sigma)\left[\varphi_{\mu\zeta}(t,\sigma) - \int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\varphi_{\zeta\zeta}(\sigma,\tau)d\tau\right]d\sigma,$$

$$I_2(t) = \int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\int_{t_0}^{t} h(t,\sigma)\varphi_{\zeta\zeta}(\tau,\sigma)d\sigma d\tau = M\left\{\left[\int_{t_0}^{t} h(t,\tau)\zeta(\tau)d\tau\right]^2\right\} > 0,$$

отримуємо, що співвідношення (7.5) набуде вигляду

$$I(t) + \delta I(t) = I(t) - 2\gamma I_1(t) + \gamma^2 I_2(t). \tag{7.6}$$

Необхідна умова мінімуму функціонала (7.3) має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial\gamma}[I(t) + \delta I(t)]_{\gamma=0} = 0, \ \ \forall h(t,\tau). \tag{7.7}$$

Відповідно до (7.6) умова (7.7) являє собою

$$I_1(t) = 0. \tag{7.8}$$

Отримане співвідношення є не тільки необхідною, але й достатньою умовою. Дійсно, якщо $I_1(t) = 0$, то (7.6) буде мати вигляд

$$[I(t) + \delta I(t)]_{I_1(t)=0} = I(t) + \gamma^2 I_2(t) > I(t),$$

тому що $I_2(t) > 0$ при будь-яких $h(t,\tau)$.

Умова (7.8) повинна виконуватися при будь-яких функціях $h(t,\tau)$, тому при $I_1(t)$, наведеному вище, умова мінімуму $M[e^2(t)]$ буде такою :

$$\int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\varphi_{\zeta\zeta}(\sigma,\tau)d\tau = \varphi_{\mu\zeta}(t,\sigma), \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.9}$$

Таким чином, оптимальна функція ваги $\vartheta(t,\tau)$ повинна задовольняти інтегральне рівняння (7.9), яке має називатися рівнянням Вінера.

Дисперсія помилки оптимальної системи, яка має вигляд (7.4), для оптимальної системи буде мати такий вигляд:

$$M\left[e^2(t)\right] = \varphi_{\mu\mu}(t,t) - \int_{t_0}^{t} \vartheta(t,\tau)\varphi_{\mu\zeta}(t,\tau)d\tau. \tag{7.10}$$

7.2. Оптимальні фільтри Калмана-Б'юсі

Розглянемо систему, яка зображується у вигляді скалярного диференціального рівняння

$$\frac{dx}{dt} = f(t)x + u(t). \tag{7.11}$$

Внаслідок наявності перешкод (завад), які мають вимірювальні пристрої, стан системи визначається з помилкою, тому результати спостереження мають вигляд

$$z(t) = x(t) + \nu(t). \tag{7.12}$$

Припустимо, що функції $u(t)$ та $\nu(t)$ являють собою нестаціонарні випадкові процеси типу білого шуму, які мають нульові середні значення. Кореляційні функції вказаних випадкових процесів мають такий вигляд (7.13):

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{uu}(t,\tau) = M[u(t)u(\tau)] = q(t)\delta(t-\tau), \\ \varphi_{\nu\nu}(t,\tau) = M[\nu(t)\nu(\tau)] = r(t)\delta(t-\tau), \\ \varphi_{u\nu}(t,\tau) = M[u(t)\nu(\tau)] = 0, \end{array}\right\}, \tag{7.13}$$

де $q(t)$ і $r(t)$ – неперервні диференційовані функції, причому $q(t)$ – не негативна функція, а $r(t)$ – позитивна для всіх значень t. Через $\delta(t)$ – визначена дельта-функція Дірака.

Для визначення оцінки $\tilde{x}(t)$ стану $x(t)$ системи (7.11) Калман та Б'юсі [9] запропонували застосувати фільтр, який становить собою систему, що має вигляд неоднорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = s(t)\tilde{x}(t) + k(t)z(t), \qquad \tilde{x}(t_0) = 0. \tag{7.14}$$

При цьому, функції $s(t)$ і $k(t)$, визначені в співвідношенні (7.14), потрібно обрати так, щоб задовольнялась умова

$$M\left\{[x(t) - \tilde{x}(t)]^2\right\} = \min. \tag{7.15}$$

Через $\psi(t,\tau)$ позначимо функцію ваги системи, яка подається у вигляді однорідного диференціального рівняння

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = s(t)\tilde{x}(t).$$

У цьому випадку розв'язок диференціального (7.14) буде мати такий вигляд:

$$\tilde{x}(t) = \psi(t, t_0)\tilde{x}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t, \tau)k(\tau)z(\tau)d\tau.$$

Позначимо тепер

$$a(t, \tau) = \psi(t, \tau)k(\tau).$$

З цього випливає, що $a(t, t) = \psi(t, t)k(t)$, а оскільки $\psi(t, t) = 1$, тоді маємо, що $a(t, t) = k(t)$, а потім відповідно до $\tilde{x}(t_0) = 0$ сигнал на виході системи (7.14) має вигляд

$$\tilde{x}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} a(t, \tau)z(\tau)d\tau. \tag{7.16}$$

Даному співвідношенню (7.16) відповідає співвідношення (7.1) в задачі Вінера.

Бажаним сигналом тепер є функція $x(t)$. Тому інтегральне рівняння Вінера тут набуває вигляду

$$\int\limits_{t_0}^{t} a(t, \tau)\varphi_{zz}(\sigma, \tau)d\tau = \varphi_{xz}(t, \sigma), \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.17}$$

Функція $a(t, \tau)$, яка задовольняє інтегральне співвідношення (7.17), як випливає з розв'язання задачі Вінера, доставляє мінімум функціонала (7.15).

Диференціюючи за змінною t ліву та праву частину рівняння (7.17), отримуємо

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} a(t, \tau)\varphi_{zz}(\sigma, \tau)d\tau + a(t, t)\varphi_{zz}(\sigma, t) = \frac{\partial}{\partial t}\varphi_{xz}(t, \sigma), \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.18}$$

Оскількі випадкові процеси $x(t)$ та $v(t)$ не корельовані, а $v(\sigma)$ та $v(t)$ не корельовані для всіх значень $\sigma < t$, то співвідношення

$$\varphi_{zz}(\sigma, t) = M\Big\{\big[x(\sigma) + \nu(\sigma)\big]\big[x(t) + \nu(t)\big]\Big\}$$

можна подати як

$$\varphi_{zz}(\sigma, t) = \varphi_{xx}(\sigma, t) = \varphi_{zx}(\sigma, t), \;\; t_0 \le \sigma < t. \tag{7.19}$$

Помітимо, що оскільки $\varphi_{xx}(t,\sigma) = \varphi_{xx}(\sigma,t)$, то з наведеного вище рівняння випливає, що

$$\varphi_{zx}(\sigma,t) = \varphi_{xz}(t,\sigma), \;\; t_0 \le \sigma < t. \tag{7.20}$$

Розглянемо праву частину співвідношення (7.18). Відповідно до (7.11) маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{xz}(t,\sigma) = \frac{\partial}{\partial t}M\big[x(t)z(\sigma)\big] = M\big[x'(t)z(\sigma)\big] = M\big[f(t)x(t)z(\sigma)\big] + \\ +M\big[u(t)z(\sigma)\big]. \tag{7.21}$$

З рівнянь (7.11) та (7.12) можна побачити, що випадковий процес $z(\sigma)$ для всіх значень $\sigma < t$ не корельований із більш запізнювальним вхідним сигналом $u(t)$, тобто

$$M\big[u(t)z(\sigma)\big] = 0, \qquad t_0 \le \sigma < t,$$

і співвідношення (7.21) набуває вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_{xz}(t,\sigma) = f(t)\varphi_{xz}(t,\sigma), \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.22}$$

Таким чином, відповідно до (7.19), (7.20) і (7.22) рівняння (7.18) набуде вигляду

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau)\varphi_{zz}(\sigma,\tau)d\tau + a(t,t)\varphi_{xz}(t,\sigma) = f(t)\varphi_{xz}(t,\sigma), \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.23}$$

Підставляючи замість $\varphi_{xz}(t,\sigma)$ вираз(7.17), приведемо рівняння (7.23) до вигляду

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau)\varphi_{zz}(\sigma,\tau)d\tau + [a(t,t) - f(t)]\int\limits_{t_0}^{t} a(t,\tau)\varphi_{zz}(\sigma,\tau)d\tau = 0, \quad t_0 \le \sigma < t, \text{ або}$$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \left[f(t)a(t,\tau) - a(t,t)a(t,\tau) - \frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau)\right]\varphi_{zz}(\sigma,\tau)d\tau = 0, \quad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.24}$$

Позначимо далі

$$b(t,\tau) = f(t)a(t,\tau) - a(t,t)a(t,\tau) - \frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau). \tag{7.25}$$

Тоді рівняння (7.24) можна подати у вигляді

$$\int_{t_0}^{t} b(t,\tau)\varphi_{zz}(\sigma,\tau)d\tau = 0, \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.26}$$

Підсумовуючи ліві та праві частини рівнянь (7.17) та (7.1.) отримуємо таке співвідношення:

$$\int_{t_0}^{t} \bigl[a(t,\tau) + b(t,\tau)\bigr]\varphi_{zz}(\sigma,\tau)d\tau = \varphi_{xz}(t,\sigma), \qquad t_0 \le \sigma < t. \tag{7.27}$$

Таким чином, як функція $a(t,\tau)$, так і функція $a(t,\tau) + b(t,\tau)$ – розв'язок інтегрального рівняння (7.17) та доставляють мінімум функціонала (7.15).

Припустимо, що функція $r(t)$, яка входить до співвідношення (7.13), позитивна для будь-яких значень t, це дуже просто довести. Тому різниця двох розв'язків інтегральних рівнянь дорівнює нулю. Для функції $a(t,\tau)$, $a(t,\tau)+b(t,\tau)$ згідно (7.16), оптимальні оцінки, мають вигляд

$$\tilde{x}(t) = \int_{t_0}^{t} a(t,\tau)z(\tau)d\tau. \qquad \bar{x}(t) = \int_{t_0}^{t} [a(t,\tau) + b(t,\tau)]z(\tau)d\tau.$$

Позначимо $p(t) = \bar{x}(t) - \tilde{x}(t)$, тоді маємо, що

$$p(t) = \int_{t_0}^{t} b(t,\tau)z(\tau)d\tau.$$

Далі з умов $M[p(t)z(\sigma)] = 0, \quad t_0 \le \sigma < t,$ випливає, що $M[p(t)\tilde{x}(t)] = M[p(t)\bar{x}(t)] = 0$. Виходячи з цього маємо, що $M\{p(t)[\bar{x}(t) - \tilde{x}(t)]\} = M[p(t)p(t)] = 0$. Підставляючи в наведене рівняння значення функції $p(t)$ отримаємо

$$\int_{t_0}^{t} b(t,\tau)\int_{t_0}^{t} b(t,\sigma)M[z(\tau)z(\sigma)]d\sigma d\tau = 0.$$

Виконуючи наявні перетворення, та беручи до уваги співвідношення (7.13), можна зрозуміти, що функція

$$b(t,\tau) = 0, \qquad t_0 \le \tau < t. \tag{7.28}$$

Таким чином із співвідношень (7.28) та (7.25) маємо

$$\frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau) = f(t)a(t,\tau) - a(t,t)a(t,\tau). \tag{7.29}$$

Виконуючи операцію диференціювання за змінною t співвідношення (7.13), отримуємо рівняння

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}a(t,\tau)z(\tau)d\tau + a(t,t)z(t). \tag{7.30}$$

Підставляючи в (7.30) співвідношення (7.29) та виконуючи деякі перетворення з умовою $a(t,t) = k(t)$, отримаємо таке кінцеве рівняння для $\tilde{x}(t)$:

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = [f(t) - k(t)]\tilde{x}(t) + k(t)z(t). \tag{7.31}$$

З рівняння (7.31) та (7.14) випливає, що функція $s(t)$ має вигляд

$$s(t) = f(t) - k(t).$$

Таким чином, оптимальний фільтр, рівняння якого (7.31), можна подати у кінцевому вигляді як

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t)\tilde{x}(t) + k(t)[z(t) - \tilde{x}(t)], \tag{7.32}$$

являє собою систему з оберненим зв'язком, у яку розузгодження входить з коефіцієнтом $k(t)$.

Для визначення функції $k(t)$ підставимо в рівняння (7.31) вираз (7.12) для $z(t)$, отримаємо таке співвідношення :

$$\frac{d\tilde{x}}{dt} = f(t)\tilde{x}(t) + k(t)[x(t) - \tilde{x}(t)] + k(t)\nu(t). \tag{7.33}$$

Позначимо через $e(t)$ помилку оцінки стану системи: $e(t) = x(t) - \tilde{x}(t)$.

Його розв'язання, якщо позначити функцію ваги однорідної системи (7.33) через $\psi(t,\tau)$ має вигляд

$$e(t) = \psi(t,t_0)e(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \psi(t,\tau)[u(\tau) - k(\tau)\nu(\tau)]d\tau. \tag{7.34}$$

Знайдемо диференціальне рівняння, якому задовольняє дисперсія помилки

$$l(t) = M[e^2(t)]. \tag{7.35}$$

Очевидно, що при застосуванні поданих вище співвідношень та співвідношень із §7.1 можна отримати таке диференціальне рівняння, якому задовольняє функція помилки $l(t)$ та коефіцієнт $k(t)$:

$$\frac{dl(t)}{dt} = 2f(t)l(t) - \frac{l^2(t)}{r(t)} + q(t), \qquad k(t) = \frac{l(t)}{r(t)}. \tag{7.36}$$

Для отриманого рівняння Ріккаті (7.36) початковий стан буде мати вигляд

$$l(t_0) = M[x(t_0)x(t_0)] = \varphi_{xx}(t_0, t_0).$$

Таким чином, для визначення оптимального фільтру Калмана-Б'юсі отримали всі необхідні співвідношення.

8. Завдання для лабораторних робіт

Пропонуються такі завдання для контролю засвоєння матеріалу навчального посібника. Для всіх робіт потрібно використовувати математичні середовища Matlab або Maple з їх мовами програмування.

I. Лабораторна робота присвячена розв'язанню наступних задач Коші.

Потрібно побудувати графічно фазові траєкторії наступних завдань.

А. Завдання двох тіл.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2(t) * x_3(t), \frac{dx_2}{dt} = -x_1(t) * x_3(t), \frac{dx_3}{dt} = -0.51 * x_1(t) * x_2(t),$$

початкові умови мають вигляд $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 1$, $x_3(0) = 1$, $t \in [0, T]$.

Б. Завдання брюсселятора.

$$\frac{dy_1}{dt} = 2 + y_1^2(t) * y_2(t) - 9.533 * y_1(t), \frac{dy_2}{dt} = -y_1^2(t) * y_2(t) + 8.533 * y_1(t),$$

початкові умови мають вигляд $y_1(0) = 1$, $y_2(0) = 4.2665$, $t \in [0, 10 + n]$, де n - номер студента в списку групи. Потрібно поставити відносну і абсолютну точність розв'язку - 10^{-8}.

В. Завдання качки.

$$0.01*(\frac{dy_1}{dt})-y_2(t)=-y_1^2(t),\frac{dy_2}{dt}+y_1(t)=0,$$

початкові умови мають вигляд $y_1(0)=0.25$, $y_2(0)=0.0575$, $t\in[0,10+n]$, де n - номер студента в списку групи. Потрібно поставити відносну і абсолютну точність розв'язку - 10^{-5}.

Г. Завдання Алейникова.

$$\frac{dx}{dt}+a*x(t)=f(t)+c*x^2(t),$$

$x(0)=0$, $f(t)=2*heaviside(t)$, $c=1$, $a=-3$, $t\in[0,10+n]$, де n - номер студента в списку групи. Потрібно поставити відносну і абсолютну точність розв'язку - 10^{-12}.

Д. Нелінійна автономна стаціонарна система з локально нестійким дільницею.

$$0.1\frac{dy_1}{dt}-y_1(t)-y_2(t)=-y_1^3(t)/3,\frac{dy_2}{dt}=-2*y_1^3(t)+2.4*y_1(t),$$

початкові умови мають вигляд $y_1(0)=2$, $y_2(0)=\frac{1}{3}y_1^3(0)-1.2*y_1(0)$, $t\in[0,10+n]$, де n - номер студента в списку групи. Потрібно поставити відносну і абсолютну точність розв'язку - 10^{-6}.

II. Лабораторна робота присвячена розв'язанню наступних крайових задач

Потрібно побудувати графічно фазові траєкторії наступних завдань.

1.

$$\epsilon\frac{d^2y(x)}{dx^2}+(1+x^2)\frac{dy(x)}{dx}-(x-\frac{1}{2})^2y(x)=-(x^2+e^x),$$

$x\in(0,1)$, крайові умови $y(0)=-1$, $y(1)=0$. $\epsilon=1,10,0.00001,0.1$.

2.

$$\epsilon\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{dy(x)}{dx}=0,$$

$x\in(0,1)$, крайові умови $y(0)=0$, $y(1)=1$. $\epsilon=1,10,0.00001,0.1$.

3.

$$-\epsilon\frac{d^2y(x)}{dx^2}+\frac{dy(x)}{dx}=0,$$

$x\in(0,1)$, крайові умови $y(0)=1$, $y(1)=1$. $\epsilon=1,10,0.00001,0.1$.

4.

$$\epsilon\frac{d^2y(x)}{dx^2}+2x\frac{dy(x)}{dx}=0,$$

$x \in (-1, 1)$, крайові умови $y(-1) = -1$, $y(1) = 2$. $\epsilon = 1, 10, 0.00001, 0.1$.

III. Лабораторна робота присвячена розв'язанню задачі швидкодії

Потрібно побудувати графічно фазові траєкторії наступної задачі швидкодії та обрахувати час швидкодії.

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = u, \quad \text{де} \ \mid u \mid \leq 1.$$

Потрібно керовану систему перевести з початкового стану $x^0 = \{x_1^0, x_2^0\}$ в стан $x^1 = \{0, 0\}$. Обчислити час переведення. Тут x_1^0 - день народження, x_2^0 - місяц народження студента зі знаком $+$ або $-$ - парний або непарний день або місяць.

IV. Лабораторна робота присвячена розв'язанню задачі динамічного програмування

Постановка завдання. Електродвигун обертає котушку, на яку намотується дріт. Щоб уникнути обриву проводу або його провисання, швидкість намотування повинна підтримуватися постійною. Під час намотування діаметр котушки збільшується, що призводить до збільшення моменту інерції котушки $g(t)$. Для підтримки постійної лінійної швидкості намотування $V(t) = V_0$ необхідно зменшувати кутову швидкість $w(t)$ так, щоб $r(t)w(t) = V(t) = V_0$.

Рівняння обертання котушки має вигляд:

$$\frac{d}{dt}[g(t)w(t)] = \kappa U(t) - \psi w(t),$$

де $U(t)$ - напруга на вході електродвигуна; κ - коефіцієнт пропорційності між крутним моментом двигуна і його вхідною напругою; ψ - коефіцієнт тертя обертання. Керуванням є $U(t)$, а регульованою величиною - $w(t)$, яку необхідно міняти так, щоб виконувалася умова $r(t)w(t) = v(t) = v_0$. Знайдемо залежність $r(t)$ і $g(t)$ від часу при постійній швидкості намотування v_0.

За час t_1, необхідне для намотування одного ряду дроту, радіус зміниться від r_0 до $r(t_1)$ так, що

$$r^2(t_1) - r_0^2 = kv_0t_1,$$

де $k > 0$ - деякий коефіцієнт, що характеризує привід. З наведеного вище рівняння при умові $t_1 << 1$ отримуємо

$$r(t) = \sqrt{r_0^2 + Ct}.$$

Так як для кола радіуса R момент інерції пропорційний R^4, то

$$g(t) = g(0) + C_1[r^4(t) - r^4(0)].$$

Номінальне значення $w_n(t)$ для кутової швидкості визначається виразом $w_n(t) = = v_0 r^{-1}(t)$, а номінальна напруга, що керує має вигляд

$$U_n(t) = \frac{1}{\kappa}[\frac{d}{dt}[g(t)w_n(t)] - \psi w_n(t)].$$

У теорії стійкості $w_n(t)$ і $U_n(t)$ прийнято називати необуреним рухом. Для обурених значень відповідних змінних маємо:

$$x(t) = g(t)[w(t) - w_n(t)], u(t) = U(t) - U_0(t).$$

В результаті отримуємо шукане рівняння обертання котушки

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\psi g^{-1}(t)x(t) + \kappa u(t).$$

Критерій якості, підлягає мінімізації, виберемо у вигляді

$$I(u) = \int_0^T [(r(t)g^{-1}(t)x(t))^2 + \rho u^2(t)]dt \to \min, \rho > 0.$$

Чисельне рішення задачі оптимального керування виконати при наступних значеннях функцій і коефіцієнтів:$T = 10 + 0.1n$, $r(t) = \sqrt{0.01 + 0.0005t}$, $g(t) = = 0.02 + 66,67(r^4(t) - r^4(0))$, $\psi = 0.01$, $\rho = 0.06$, $\kappa = 1$, n - номер студента в списку групи..

Побудувати графічний розв'язок рівняння Риккати. Навести оптимальне значення функціоналу.

9. Завдання для самостійної та індивідуальної роботи

Пропонуються такі задачі для самостійного контролю засвоєння матеріалу навчального посібника.

I. Визначити, чи є система $x'(t) = Ax + Bu$ керована, якщо матриці A та B мають вигляд :

1. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

2. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

3. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

4. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

5. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$ 6. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

II. Визначити, чи є система $x'(t) = Ax, y = B^T x$ спостережувана, якщо матриці A та B мають вигляд :

1. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$ 2. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

3. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$ 4. $A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

5. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$ 6. $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \ B = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}.$

III. Знайти функцію Беллмана та оптимальне керування для системи на відрізку $0 \le t < 1$:

1. $x'(t) = u(t) + t,$
$x^2(1) + \int\limits_0^1 u^2(t)dt \to \inf .$
2. $x'(t) = a * x(t) + u(t),$
$x(1) \to \inf, \quad |u| <= 1$
3. $x'(t) = a * x(t) + u(t),$
$x^2(1) \to \inf, \quad |u| <= 1$
4. $x'(t) = u(t),$
$|x(1)| \to \inf, \quad |u| <= 1$

IV. Розв'язати такі задачі оптимального керування, використовуючи класичний підхід або метод максимуму Понтрягіна.

1. Ракета підіймається догори під дією гравітаційних та керуючих сил. Рівняння руху має вигляд $x''(t) = -g + u(t)$, де g –гравітаційна стала; u – реактивне прискорення. Потрібно знайти таке $u(t)$, щоб висота підіймання була найвища та виконувалось одне з обмежень на відрізку $[0, T]$:

$$\int |u(t)|\, dt = u_0, \qquad \int u^2(t)dt = u_0,$$

де u_0 - задана стала, T – час досягнення найвищої висоти.

2. Ракета підіймається догори під дією гравітаційних та керуючих сил. Рівняння руху має вигляд $x''(t) = -g + u(t)$, де g –гравітаційна стала, u – реактивне

прискорення. Потрібно знайти таке $u(t)$, щоб висота підіймання була найвища та виконувалось одне з обмежень на відрізку $[0, T]$:

$$\int \left|u(t)\right| dt = u_0, \qquad \int u^2(t)dt = u_0,$$

та мало місце обмеження $0 \leq u \leq u_1$, де u_0 ,u_1 – задані сталі, T – час досягнення найвищої висоти.

3. Процес керування високотемпературною піччю описується рівнянням

$$x'(t) = -\alpha_1(x(t) - x_0) - \alpha_2(x^4(t) - x_0^4) + \alpha_3 u(t), t >= 0,$$

де $x(t)$ – температура печі; x_0 – температура навколишнього повітря печі; $u(t)$ – керування кількістю теплоти, яка поступає в піч. Перша складова характеризує втрати від конвекції, друга – за рахунок радіації. Потрібно вибрати керування так, щоб піч у вказаний час мала задану температуру X_T та функціонал

$$J(u) = \int u^2(t)dt$$

досягав мінімального значення. Записати необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

4. Двокамерна модель "поглинання ліків та метаболізму" має вигляд

$$x'(t) = -\alpha_1 x_1(t) + u(t), x_2'(t) = \alpha_1 x_1(t) - \alpha_2 x_2(t), t >= 0,$$

де $x_1(t)$ – маса ліків у тракті шлунок; $x_2(t)$ - маса ліків у крові; $u(t)$ – кількість ліків на прийомі, $\alpha_1 > 0$ та $\alpha_2 > 0$. Ціль керування – досягнення в крові потрібної кількості ліків за мінімальний час . Записати необхідні умови оптимальності у формі принципу максимуму.

5. Нехай керуючий процес рівняння

$$x_1'(t) = x_2(t), \qquad x_2'(t) = u(t), \qquad 0 < t < 1,$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = a; x_2(0) = b.$$

Допустимими керуваннями є кусково-неперервні функції $\mathrm{u} = \mathrm{u(t)}$, які задовольняють умови

$$\left|u(t)\right| <= 1.$$

Потрібно знайти таке керування, щоб відповідне йому розв'язання наведеної задачі задовольняло умову $x_1(1) =$, та при цьому функціонал $I = x_2(1)$ мав найменше значення.

6. Нехай керований процес подається у вигляді рівнянь

$$x_1'(t) = x_2(t) + u_1(t), \qquad x_2'(t) = u_2(t), \qquad t_0 < t < T,$$

з початковими умовами

$$x_1(t_0) = a; \quad x_2(t_0) = b.$$

Допустимим управлінням є вектор-функція $u = u(t) = \{u_1(t), u_2(t)\}$, який задовольняє умови

$$\int_{t0}^{T} [u_1^2(t) + u_2^2(t)]dt <= 1.$$

Потрібно знайти таке управління, щоб відповідне розв'язання задачи задовольняло умову $x_2() = 0$ та функціонал $I(u) = {}_1()$ мав найменше значення.

7. Нехай керований процес описується рівняннями :

$$x_1'(t) = x_2(t), \qquad x_2'(t) = -2\lambda x_2 - x_1 + u(t), \qquad 0 < t < T,$$

з початковими умовами

$$x_1(0) = a; \quad x_2(0) = b,$$

де $\lambda = 0,2; a = 2; b = 1; T = 2\pi$ – задані сталі. Потрібно знайти таке керування, щоб відповідне розв'язання задачи задовольняв умови $x_1(T) = x_2() = 0$ та значення функціонала $I = \max_{0 \le t \le T} |u(t)|$ було б найменше.

8. Процес має опис у вигляді диференціального рівняння

$$x'(t) = -ax + bu(t), \quad 0 < t < T,$$

початкова умова $x(0) = 0$, на керування обмеження у вигляді

$$-1 <= u(t) <= +1$$

Потрібно вибрати управління так, щоб відхилення в кінцевий час T було б найбільшим.

9. Нехай функція $y(t)$ диференційована на відрізку $[a, b]$, стала $\alpha >= 0$. Потрібно визначити функцію $x(t)$, яка задовольняє умови Ліпшица з величиною α, так щоб інтеграл $I = \int_a^b [x(t) - y(t)]^2 dt$ набував найменш можливого зна-чен-ня. (Задача знаходження профілю дороги).

10. Нехай точка рухається в середовище, яке має сталу швидкість v. Є можливість керування особистою швидкістю, яке має обмежений модуль значення. Потрібно знайти управління $u(t)$ таке, щоб забезпечило найшвидший перехід з одного стану до іншого.

11. Плавець перепливає річку. Його координати руху задовольняють рівнянням:

$$x_1' = 1 + u \cos \varphi, \qquad x_2' = 1 + u \sin \varphi$$

де u – величина швидкості, та її напрям збігу з напрямком x_1; φ – це вугол, який він утримує з напрямком x_1. Як потрібно пливти йому, щоб тільки перепливти річку, її швидкість дорівнює 1, тобто початкова умова є, а кінцева точка не вказана. Застосувати принцип максимуму.

12. Нехай керування рухом точки має вигляд

$$x''(t) = u(t), \quad 0 <= t <= 2, x(0) = 0, x'(0) = 1$$

Потрібно знайти управління, яке мінімізує функціонал

$$I(u) = x^2(2) + \int\limits_0^2 u^2(t) dt.$$

13. Нехай керування рухом точки має вигляд

$$x''(t) = -x(t) + u(t), \quad 0 <= t <= 2, x(0) = 1, x'(0) = 0$$

Потрібно знайти управління, яке мінімізує функціонал

$$I(u) = x^2(2) + (x')^2 (2) + \int\limits_0^2 u^2(t) dt.$$

14. Розглянути систему

$$\dot{x} = -x^3 + u, \quad x(0) = x_0$$

для якой функція витрат має вигляд

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left(x^2 + u^2\right) dt$$

Визначити оптимальне керування з оберненим зв'язком, використовючи метод Беллмана.

15. Знайти керування та траєкторію, за допомогою яких здійснюється перехід системи

$$\dot{x_1} = x_2, \quad x_1(0) = 0, \quad x_2 = u, \quad x_2(0) = 0$$

з початкового стану в кінцевий стан

$$x_1(1) + x_2(1) = 1$$

так, щоб функціонал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt \to \min .$$

16. Знайти керування та відповідну траєкторію системи, яка здійснює перевід системи $x'(t) = -x + u$ з початкового стану $x(0) = 10$ в $x(1) = 0$ так, щоб

$$J = \frac{1}{2}\int_0^1 (\dot{u})^2 dt \to \min .$$

17. Визначити рівняння Беллмана для системи

$$\dot{x_1} = x_2, \quad \dot{x_2} = -x_2 - x_1^2 + u$$

якщо критерій якості має вигляд

$$J = \int_0^T \left(x_1^2 + u^2\right) dt$$

18. Знайти оптимальне керування, що мінімізує функціонал

$$J = \int_0^T dt$$

для системи

$$\dot{x} = -x + u, \quad \text{якщо} \quad x(0) = 1, \quad x(T) = 0, \left|u\right| \leq 1 + \left|x\right|.$$

Список рекомендованої літератури

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление/В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.В.Фомин – М.: Наука, 1984.- 430 с.

2. Афанасьев В.Н. Математическая теория конструирования систем управления/В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов: Учеб. Пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1989. – 447 с.

3. Беллман Р. Динамическое программирование: ИЛ, М., 1960. – 367 с.

4. Браммер К. Фильтр Калмана-Бьюси/К. Браммер, Г. Зиффлинг. – М.: Наука, 1982.- 310 с.

5. Бутковский А.Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами: М.: Наука, 1965. – 476 с.

6. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

7. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 504 с.

8. Иванилов Ю.П. Математические модели в экономике/ Ю.П. Иванилов, А.В. Лотов. – М.: Наука, 1979. - 355 с.

9. Красовский Н.Н. Теория управления движением: М.: Наука, 1968.- 476 с.

10. Кротов В.Ф. Методы и задачи оптимального управления/ В.Ф. Кротов, В.И. Гурман. – М.: Наука, 1973. – 378 с.

11. Кротов В.Ф. Основы теории оптимального управления/ В.Ф. Кротов, Б.А. Лагоша, С.М.Лобанов, Н.И. Данилина, С.И. Сергеев; Учеб.пособие для экон. вузов. – М.: Высш.шк., 1990. – 430 с.

12. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. М., Физматгиз, 1961. – 330 с.

13. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. – М.: Наука, 1969. – 136 с.

14. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление: М.: Наука, 1971. – 396 с.

15. Сейдж Э.П. Оптимальное управление системами/Э.П. Сейдж , Ч.С. Уайт: Пер. с англ./ Под ред. Б. Р. Левина., часть III. 3 том. М.: Радио и связь, 1982. – 357с.

Зміст