ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №1

МОДЕЛІ ВІЛЬНОГО І ОБМЕЖЕНОГО ЗРОСТАННЯ ПОПУЛЯЦІЙ

1. Мета роботи

Ознайомитись з побудовою математичних моделей вільного і обмеженого зростання популяцій (моделі Мальтуса, Ферхюльста).

2. Теоретичні відомості

Модель Мальтуса

Однією з найпростіших моделей популяцій є модель Мальтуса. В її основу покладено просте твердження - швидкість зміни населення з часом t пропорційна його поточної чисельності $N(t)$, помноженої на суму коефіцієнтів народжуваності $\alpha(t) \geq 0$ і смертності $\beta(t) \geq 0$. В результаті приходимо до рівняння:

$$N'(t) = (\alpha(t) - \beta(t))N(t), \tag{5.1}$$

яке схоже на рівняння радіоактивного розпаду і збігається з ним при $\alpha < \beta$ (якщо α і β – постійні). Це не дивно, так як при їх виведенні використовувалися однакові міркування. Інтегрування вище наведеного рівняння дає:

$$N(t) = N_0 e^{\int_{t_0}^{t} (\alpha(t) - \beta(t)) dt}, \text{ при } t \geq t_0, \tag{5.2}$$

де $N_0 = N(t_0)$ – чисельність населення в момент $t = t_0$ (початкова чисельність).

На рис. 5.1 наведені графіки функції $N(t)$ при постійних α и β (різним кривим відповідають різні t_0 - значення часу початку процесу). При $\alpha = \beta$ чисельність залишається постійною, тобто в цьому випадку рішенням рівняння є рівноважна величина $N(t) = N_0$. Рівновага між народжуваністю і смертністю нестійка в тому сенсі, що навіть невелике порушення рівності $\alpha = \beta$ призводить з часом до все більшого відхилення функції $N(t)$ від рівноважного значення N_0. При $\alpha < \beta$ чисельність населення зменшується і прямує до нуля при $t \to \infty$, а при $\alpha > \beta$ росте за експоненціальним законом до нескінченності при $t \to \infty$.

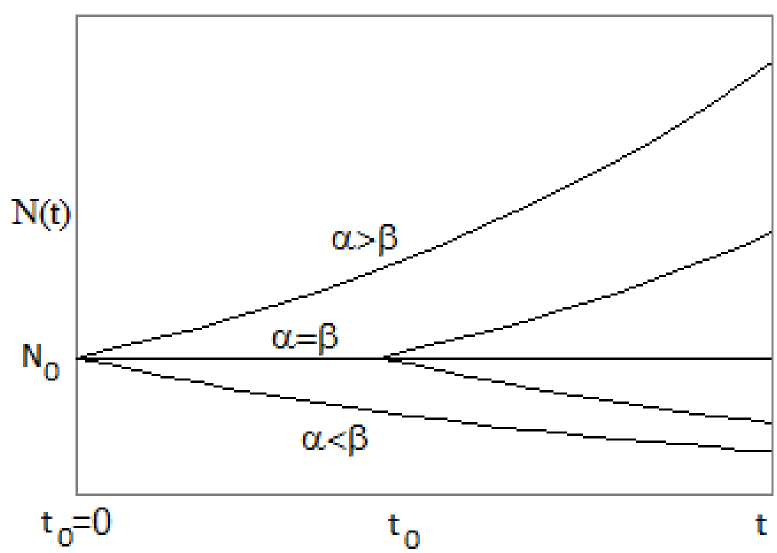

Рис. 5.1. Зміна чисельності популяції з часом в моделі Мальтуса

В даному прикладі можна вказати чимало очевидних обмежень застосовності побудованої моделі. Звичайно ж, дуже складний процес зміни чисельності населення, що залежить до того ж від свідомого втручання самих людей, не може бути описано будь-якими простими закономірностями. Навіть в ідеальному випадку ізольованої біологічної популяції запропонована модель не відповідає реальності в повній мірі хоча б через обмеженість ресурсів, необхідних для її існування.

Моделювання розвитку ізольованої популяції

Припустимо, що в момент часу $t = t_0$, чисельність деякого біологічного виду становить N_0 одиниць.

Нехай $N(t)$ – запас цього виду в момент часу $t \geq t_0$. Тоді похідна $N'(t)$ - це темп приросту, а відношення $\frac{N'(t)}{N(t)}$ являє собою відносний темп приросту даного біологічного виду.

Далі розглянемо біологічний вид з вільним (необмеженим) і обмеженим ростом. У першій моделі припустимо, що відносний темп приросту є величина постійна, яка не залежить від поточної кількості. Тоді $\frac{N'(t)}{N(t)} = r$ є постійною величиною. Звідси випливає, що справедливо диференціальне рівняння:

$$N'(t) = rN(t), \tag{5.3}$$

що представляє собою математичну модель зміни чисельності популяції з вільним зростанням. Очевидно, це є модель Мальтуса, в якій коефіцієнт народжуваності $\alpha(t) = r$ є постійною величиною, а коефіцієнт смертності дорівнює нулю $\beta(t) = 0$.

Загальним розв'язком цього рівняння є функція $N = Ce^{rt}$, де C – довільна постійна величина. Згідно з початковим умовою при $t = t_0$ повинно бути $N = N_0$, и тоді $N_0 = Ce^{rt_0}$. Отже, $C = N_0 e^{-rt_0}$. Остаточно отримаємо, що чисельність популяції змінюється за експоненціальним законом

$$N(t) = N_0 e^{r(t-t_0)}, \tag{5.4}$$

Очевидно, що необмежено довго зростати популяція не може. Найпростіший спосіб обліку внутрішньовидової конкуренції пов'язаний з гіпотезою про те, що коефіцієнт відтворення не є константою, а залежить від чисельності популяції, спадаючи в міру її росту.

У другій моделі припустимо, що відносний темп приросту популяції сповільнюється зі зростанням її кількості, тобто відношення $\frac{N'(t)}{N(t)}$ убуває зі збільшенням $N(t)$. Якщо це спадання лінійно, то математично цей факт можна записати у вигляді:

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = r - bN(t), \tag{5.5}$$

де постійна $b > 0$.

Звідси випливає, що має місце диференціальне рівняння:

$$N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \tag{5.6}$$

де $k = \frac{r}{b}$.

Рівняння (6) є окремим випадком відомого в математиці диференціального рівняння Бернуллі. Зробимо в рівнянні (5.6) заміну змінних:

$$N(t) = \frac{1}{z(t)} \tag{5.7}$$

і тоді отримаємо:

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{r}{z}\left(1 - \frac{1}{kz}\right), \tag{5.8}$$

або

$$z' = -rz + \frac{r}{k}, \tag{5.9}$$

Таким чином, рівняння (5.6) звелося до лінійного диференціального рівняння першого порядку. Загальним розв'язком останнього рівняння є функція:

$$z(t) = \frac{C}{k}e^{-rt} + \frac{1}{k}, \tag{5.10}$$

У цьому можна переконатися шляхом безпосередньої підстановки.

Отже, загальним розв'язком рівняння (5.6) є функція:

$$N(t) = \frac{ke^{rt}}{C + e^{rt}}, \tag{5.11}$$

З урахуванням початкової умови $N(t_0) = N_0$ отримаємо, що:

$$C = \frac{k - N_0}{N_0}e^{rt_0}. \tag{5.12}$$

Тоді частинним розв'язком рівняння (5.6) буде функція:

$$N(t) = \frac{kN_0 e^{r(t-t_0)}}{k + N_0\left(e^{r(t-t_0)} - 1\right)}. \tag{5.13}$$

Графіки функцій (5.4) і (5.13) зображені на рис. 5.2 для значень $r = 0,05$, $k = 40$ і початкових умов $t_0 = 0$, $N_0 = 5$.

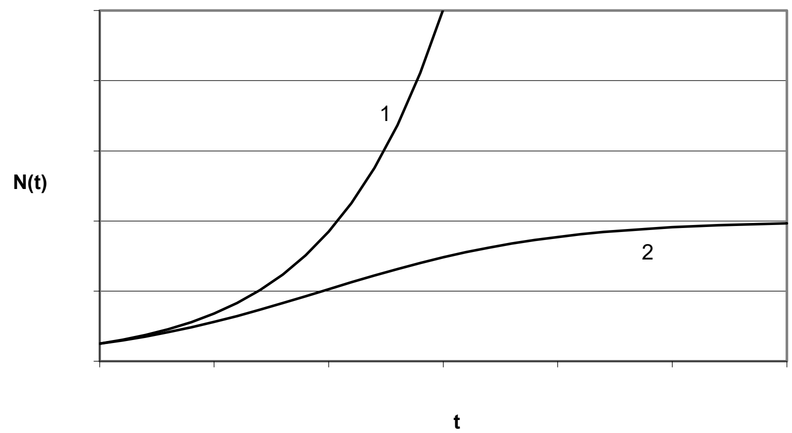

Рис. 5.2. Вільне (крива 1) і обмежене (крива 2) зростання популяції

З рис. 5.2 видно, що крива 1 необмежено зростає, а крива 2 зі збільшенням часу наближається до стаціонарного значення, рівному $k = 40$.

Рівняння (5.6) називається логістичним рівнянням. Воно відоме також як рівняння Ферхюльста (по імені вперше сформулював його бельгійського математика). Спочатку це рівняння з'явилося при розгляді моделі зростання чисельності населення.

Вихідні припущення для виведення рівняння при розгляді популяційної динаміки виглядають наступним чином:

– швидкість розмноження популяції пропорційна її поточної чисельності, при інших рівних умовах,
– швидкість розмноження популяції пропорційна кількості доступних ресурсів, за інших рівних умов. Таким чином, другий член рівняння відображає конкуренцію за ресурси, яка обмежує зростання популяції.

Параметр r характеризує швидкість зростання (розмноження), а k — ємність середовища, тобто максимально можливу чисельність популяції.

Відзначимо деякі властивості логістичної функції (5.6).

1. $\lim\limits_{t \to \infty} N(t) = k$.

2. У ситуації «достатнього обсягу ресурсів», тобто поки $N(t)$ набагато менше k, логістична функція спочатку росте приблизно експоненціально:

$$\frac{N(t)}{N_0 e^{r(t-t_0)}} = \frac{1}{1 + \frac{N_0}{k}\left(e^{r(t-t_0)} - 1\right)}. \tag{5.14}$$

3. Аналогічно, при «вичерпанні ресурсів» ($t \to \infty$) різниця $k - N(t)$ експоненціально убуває з таким же показником:

$$k - N(t) = k\left(\frac{k - N_0}{k + N_0\left(e^{r(t-t_0)} - 1\right)}\right), \tag{5.15}$$

і, отже,

$$\left(k - N(t)\right)e^{r(t-t_0)} = \frac{k}{\frac{N_0}{k - N_0} + e^{-r(t-t_0)}}. \tag{5.16}$$

Звідси випливає, що при $t \to \infty$ добуток $\left(k - N(t)\right)e^{r(t-t_0)}$ прагне до постійної величини, а це означає, що різниця $k - N(t)$ убуває по експоненціальному закону з показником r.

В даному випадку диференціальне рівняння (5.6) має досить просте аналітичне рішення виду (5.13). Але це буває вкрай рідко. Як правило, диференціальні рівняння не мають аналітичного рішення, і тоді слід шукати наближене чисельне рішення.

3. Завдання

У початковий момент часу t_0 кількісний склад деякого біологічного виду дорівнює N_0 одиниць. Потрібно зробити прогноз чисельності $N(t)$ даної популяції при $t \geq t_0$ для двох випадків:

– відносний темп приросту популяції не залежить від її чисельності і дорівнює постійній величині r,
– відносний темп приросту популяції залежить від її чисельності і дорівнює величині $r - bN(t)$ (обмежений зростання популяції).

Для цього необхідно виконати наступні пункти:

1. Скласти математичну модель вільного росту популяції у вигляді лінійного диференціального рівняння, знайти аналітичний розв'язок рівняння;

2. Скласти математичну модель обмеженого зростання популяції у вигляді диференціального рівняння Бернуллі, знайти розв'язок рівняння при заданих початкових умовах.

3. Побудувати графіки зміни чисельності для моделей вільного і обмеженого зростання популяції.

4. Варіанти

Вихідні дані для прогнозу чисельності $N(t)$ даної популяції містяться в табл. 5.1.

Таблиця 5.1. **Характеристики популяції**

№ варіанту	t_0, **год**	**N0**	r, **год** $^{-1}$	$\boldsymbol{k}$
1	21	40	0,29	90
2	18	79	1,58	77
3	12	51	1,52	82
4	6	62	0,84	71
5	20	62	1,4	75
6	14	73	0,36	94
7	8	45	0,30	99
8	21	44	0,50	71
9	15	56	1,82	82
10	9	67	1,13	71
11	23	67	1,34	74
12	17	79	0,66	93
13	11	50	0,60	98
14	5	62	1,92	78
15	18	61	0,12	91
16	12	73	1,43	70
17	6	44	1,37	76
18	20	44	1,58	78
19	14	55	0,90	99
20	8	67	0,22	87
21	22	67	0,42	91
22	15	78	1,75	70
23	9	50	1,67	75
24	23	49	1,87	78
25	17	61	1,20	97
26	11	72	0,53	86

5. Зміст звіту

За результатами виконаної лабораторної роботи подається звіт, в якому повинні міститися:

1. Мета роботи.

2. Варіант завдання.

3. Математична модель вільного росту популяції і її аналітичний розв'язок.

4. Математична модель обмеженого зростання популяції. Аналітичний та чисельний розв'язок відповідного диференціального рівняння

5. Графіки зміни чисельності для моделей вільного і обмеженого зростання популяції.

6. Висновки.

7. Лістинг програми.

6. Контрольні питання

1. Модель Мальтуса. Зміна чисельності популяції з часом. Нереальність моделі.

2. Математична модель вільного росту популяції. Загальне і приватне рішення диференціального рівняння.

3. Математична модель обмеженого зростання популяції. Умова виникнення моделі. Загальне і приватне рішення диференціального рівняння.

4. Припущення для побудови моделей вільного і обмеженого зростання популяції. Властивості логістичної функції.