1 лекція

1. Основні поняття комбінаторики.

Комбінаторика вивчає різні способи поєднання елементів скінченних множин. За означенням для $n \in N$ $n! = 1 \cdot 2 \cdot . \ . \ . \cdot n = (n-1)! \cdot n, \quad 0! = 1$

Правило суми: якщо дії є несумісними і одну можна виконати m способами, а другу – n способами , то **одну з них** можна виконати $m + n$ способами.

Правило добутку: якщо першу дію можна виконати m способами, другу дію можна виконати n способами , то **разом** ці дії можна виконати $m \cdot n$ способами.

Сполуки (без повторень) – невпорядкована вибірка об'ємом m елементів із групи, яка містить n елементів

кількість **сполук**:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}; \qquad C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1$$

Розміщення (без повторень) – впорядкована вибірка об'ємом m елементів із групи, яка містить n елементів

кількість **розміщень**:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ \ldots\ (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}; \qquad A_n^0 = 1, \quad A_n^n = n!$$

Перестановки (без повторень) – **всілякі способи розташування *n*** елементів

кількість перестановок без **повторень:**

$$P_n = A_n^n = n! \qquad 0! = 1$$

Дві важливі формули:

а) кількість розміщень сполук та перестановок пов'язані формулою:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m \qquad \text{(правило добутку);}$$

б) доцільно вживати при великих m : $C_n^m = C_n^{n-m}$

Приклад 1. Серед лотерейних білетів 20 виграшних і 80 невиграшних. Придбано 3 білета . Скільки способів придбати 1 виграшних і 2 невиграшних.
Відповідь: $C_{20}^1 \cdot C_{80}^2$

Приклад 2. Є три цифри 1,2,3. Знайти а) скільки способів скласти двоцифрове число, яке допускає повторення цифр; б) скільки способів скласти двоцифрове число, яке не допускає повторення цифр.
Відповідь: а) Правило добутку $\underset{3}{x}\ \underset{3}{x} = 3 \cdot 3 = 9$; б) $A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6$.

Приклад 3. На фірмі працює 4 робітника. Виділено 3 путівки : а) три путівки абсолютно однакові; б) три путівки: в Італію, в Грецію, в Єгипет. Скільки способів їх розподілити ?
Відповідь: а) $C_4^3 = C_4^{4-3} = C_4^1 = 4$; б) $A_4^3 = 4 \cdot 3 = 12$.

Приклад 4. Скільки способів розподілити 5 учнів по трьом класам ?
Відповідь: Правило добутку $\underset{3}{x}\ \underset{3}{x}\ \underset{3}{x}\ \underset{3}{x}\ \underset{3}{x} = 3^5 = 243$.

Далі розглянемо ускладнення цих понять на випадки різних комбінацій з повторенням елементів.

Сполуки (з повтореннями) – невпорядкована вибірка об'ємом n елементів з k типів елементів, які можуть повторюватись. Кожен тип містить однакові об'єкти з необмеженим (обмеженим) повторенням :

$$\begin{array}{l} a_1, a_1, \ldots\ a_1, \ldots \\ a_2, a_2, \ldots\ a_2, \ldots \\ .\quad .\quad . \\ a_k, a_k, \ldots\ a_k, \ldots \end{array} \qquad .$$

Нехай ці n об'єктів вибираються з k типів об'єктів так, що $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$. Тоді вибірку можна записати у вигляді

$$\overbrace{a_1, a_1, \dots a_1}^{n_1} \,\|\, \overbrace{a_2, a_2, \dots a_2}^{n_2} \,\|, \quad . \quad . \quad . \,\|\, \overbrace{a_k, a_k, \dots a_k}^{n_k} \quad .$$

Таким чином маємо n об'єктів плюс $(\kappa - 1)$ розподілювач, які займають $(n + k - 1)$ місць. Отже, кількість сполук **з повторенням** можна визначити так

$$\bar{C}_k^n = C_{n+k-1}^n = C_{n+k-1}^{k-1}$$

Розміщення (з повтореннями) – впорядкована вибірка об'ємом m елементів із групи, яка містить n елементів, які можуть повторюватись.
кількість **розміщень з повтореннями**: $\bar{A}_n^m = n^m$

Перестановки (з повтореннями) – якщо в множині з n елементів є k різних типів елементів, причому перший тип повторюється n_1 раз, другий тип – n_2 раз, . . . , k-й тип – n_k раз, таким чином, що $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$, їх кількість знаходимо так $\bar{P}_n = \dfrac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$.

Приклад 1.
Продається два види булочок (a,b), купується три булочки. Скільки варіантів наборів булочок можна придбати.
Відповідь: $\bar{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = C_4^3 = C_4^1 = 4$. Дійсно, перераховуємо (a,a,a), (a,a,b), (a,b,b), (b,b,b).

Приклад 2.
Комітет складається з 8 осіб. Укладаючи рішення, вони голосують 'за', 'проти', 'утримався'. Знайти скільки можливих різних результатів голосування.
Відповідь: Кожний окремий результат голосування можна подати у вигляді, наприклад : ЗЗПППУУУ або $ЗЗ \,\|\, ППП \,\|\, УУУ$. Справді, маємо $\bar{C}_3^8 = C_{8+3-1}^8 = C_{10}^8 = C_{10}^2 = \dfrac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$

Приклад 3.
При формування доміно використовується 7 цифр, які для кожної кісточки використовуються по дві в різних комбінаціях і можуть повторюватись. Скільки кісточок доміно ?
Відповідь: $\bar{C}_7^2 = C_{7+2-1}^2 = C_8^2 = \dfrac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$

Приклад 4.
а) Скільки послідовностей можна утворити з літер «с», «т», «а», «л», «ь» ?
Відповідь: $n = 5$. Всі літери різні. $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

б) Скільки послідовностей можна утворити з літер «к», «к», «о», «о», «с» ?

Відповідь: $n = 5$, $n = n_1 + n_2 + n_3 = 2 + 2 + 1$. $\overline{P}_5 = \dfrac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$

2. Різні способи обчислення комбінаторних об'єктів

Приклади демонструють, що ключовим моментом при розв'язування комбінаторних задач є обчислення біноміальних коефіцієнтів. Слід зауважити, що при кодуванні інформації теж використовується обчислення біноміальних коефіцієнтів. Основна обчислювальна проблема виникає при великих значеннях m і n.

Розглянемо тепер різні способи обчислення біноміальних коефіцієнтів.

1. Безпосередньо за формулами

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!\,m!}; \qquad C_n^0 = 1, \quad C_n^n = 1$$

2. Ці формули можна звести до рекурентних, а саме

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n\cdot(n-1)!}{\big((n-1)-(m-1)\big)!\ \ m\cdot(m-1)!} =$$

$$= \frac{n}{m}\cdot\frac{(n-1)!}{\big((n-1)-(m-1)\big)!\ \cdot(m-1)!} = \frac{n}{m}\cdot C_{n-1}^{m-1}.$$

3. Обчислення за допомогою трикутника Паскаля.

Трикутник Паскаля (знаходження біноміальних коефіцієнтів)

		сума коефіцієнтів $= 2^n$
$(a+x)^0$	1	1
$(a+x)^2$	1 2 1	4
$(a+x)^3$	1 3 3 1	8
$(a+x)^4$	1 4 6 4 1	16
$(a+x)^5$	1 5 10 10 5 1	32
$(a+x)^6$	1 6 15 20 15 6 1	64
. . .	. . .	. . .

4. Обчислення за допомогою числових послідовностей.

Приклад 1. Обчислити $C_n^k = C_{10}^4$. Для обчислення треба побудувати $n-k=10-4=6$ числових послідовностей, кожна з яких містить $k+1=5$ членів. Отже, перша послідовність – числа від 1 до $к = 5$. Далі, для кожної послідовності, починаючи з другого члена, щоб знайти черговий член, треба знайти суму всіх попередніх членів попередньої послідовності :

1, 2, 3, 4, 5

1, 3, 6, 10, 15

1, 4, 10, 20, 35

1, 5, 15, 35, 70

1, 6, 21, 56, 126

1, 7, 28, 84, 210 Отже, $C_{10}^4 = 210$.

5. Обчислення на основі біноміальних квадратів і прямокутників.

Приклад 2. Обчислити $C_n^k = C_7^4$. Для обчислення треба знайти $n-k=7-4=3$ і побудувати стовці з номерами від 0 до $к = 4$, та рядки з номерами від 0 $n-k=7-4=3$. Перший рядок та останній стовпчик заповнюємо одиницями. Далі елемент кожної клітини – сума двох елементів : згори і праворуч. $C_n^k = C_n^{n-k} = C_7^4 = C_7^{7-4} = C_7^3$

Результат на перетині $(n-k)$*-го* стовпчика та $к$*-го* рядка. Для цього прикладу – $7-4=3$*-го* стовпчика та 4 рядка. $C_7^4 = 35.$

k / n-k	5	4	3	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	6	5	4	3	2	1
2	21	15	10	6	3	1
3	56	35	20	10	54	1
4	126	70	**35**	15		1