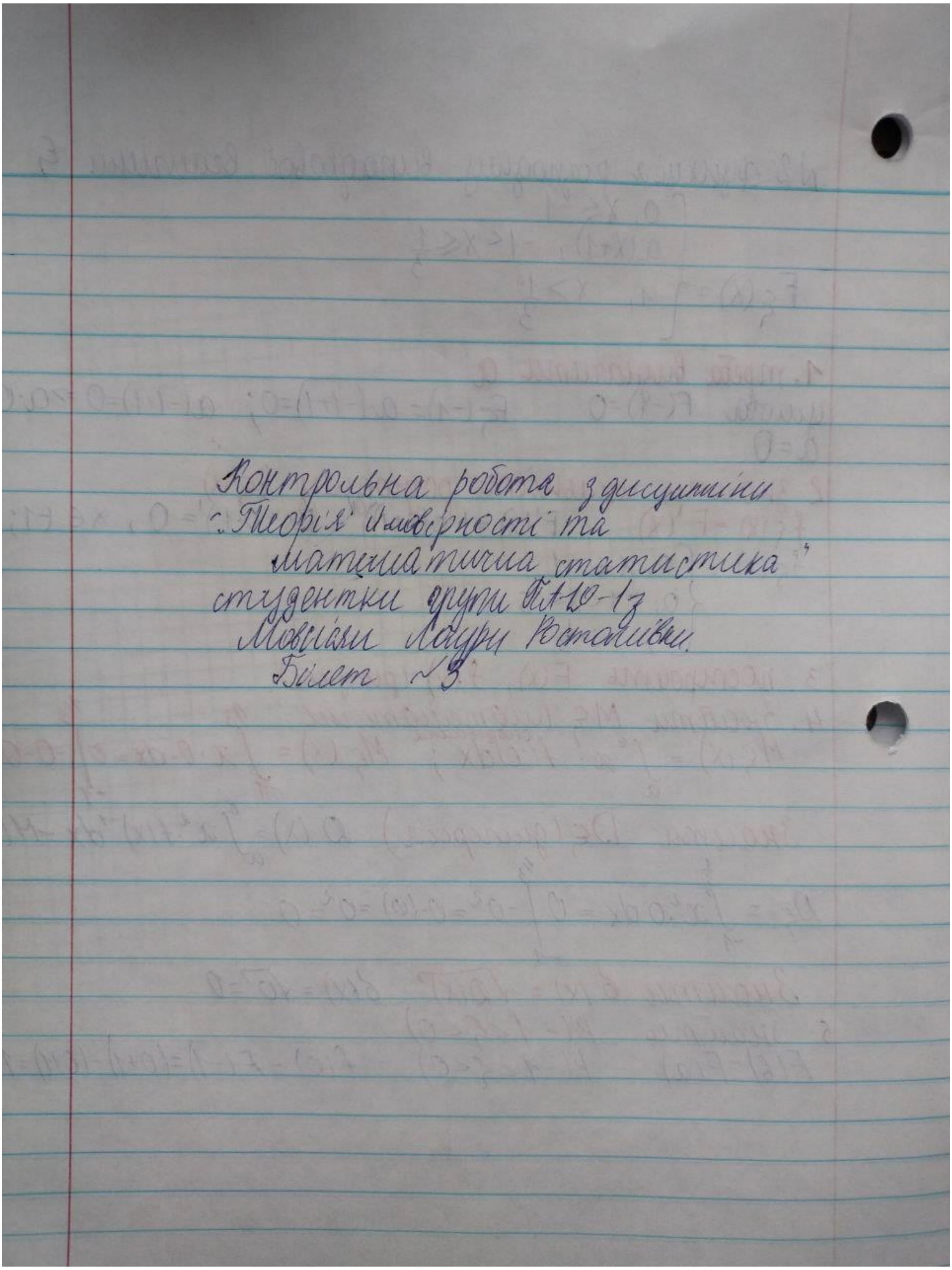
Варіант №3


Контрольна робота з дисципліни
„Теорія ймовірності та
математична статистика"
студентки групи ПМ-20-1з
Мовсісян Лаури Юстасівни.
Білет №3

Варіант №3 (частина 1)

1. З шести карток з літерами Л,І,Т,Е,Р,А вибирають навмання послідовно 4 карти. Знайти ймовірність того, що при цьому вийде слово ‘‘ЛІТР’’.
2. Під час запису прізвищ членів деяких зборів, загальна кількість яких дорівнює 360, виявилось, що початковою літерою в семи була літера А, у п'яти - Є, у восьми - І, у

дев'яти - О, у чотирьох - У, у двох - Ю, усі інші прізвища починаються на приголосну. Знайти ймовірність того, що прізвище члена цих зборів починається на приголосну.

3. При рентгенівському обстеженні ймовірність виявлення хворого на туберкульоз дорівнює β. Ймовірність прийняття здорового за хворого дорівнює α. Нехай доля хворих на туберкульоз по відношенню до всього населення дорівнює γ. Знайти ймовірність того, що пацієнт здоровий, якщо він був визнаний хворим при обстеженні.

4. До збору попадають деталі з трьох автоматів. Звісно, що перший автомат дає браку 0.3%, другий - 0.2%, третій - 0,4%. Знайти ймовірність попадання до зборки бракованої деталі, якщо з першого автомата поступило 1000 деталей, з другого - 2000, з третього - 2500.

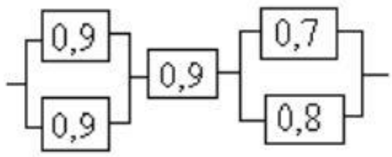
5. Два рівносильних гравці грають у шахи. Що імовірніше: виграти не менше двох партій з чотирьох або не менш трьох з п'яти? Нічиї до уваги не приймаються.

6. Пряха обслуговує 5000 тисяч веретен. Ймовірність обриву нитки на одному веретені впродовж 1 хвилини дорівнює 0.005. Яка ймовірність того, що впродовж однієї хвилини не буде жодного обриву?

7. У деякій місцевості є 3% хворих на малярію. Проводиться обстеження 500 чоловік. З якою ймовірністю серед обслідуваних опиниться 3 ±0.5% хворих на малярію?.

8. Обчислювальна машина нараховує N блоків. Надійність впродовж часу T першого блоку дорівнює P_1, другого - P_2 і т. д. При виході з ладу будь-якого блоку машина виходить з ладу. Знайти ймовірність того, що машина вийде з ладу впродовж часу T.

9. Надійності елементів (ймовірності безвідмовної роботи) протягом певного часу проставлені на малюнку. Елементи виходять з ладу незалежно один від одного.



Мал.1

Чому дорівнює надійність всієї системи?

10. На площині проведені паралельні прямі, відстань (по черзі) між якими 2 та 10 см. На цю площину кинутий круг радіуса 3 см. Яка ймовірність того, що цей круг не перетне жодної з прямих.

Частина I

№1 „Л", „І", „Т", „Е", „Р", „А" => P(„ЛІТР")–? Нав-ня 4 картки

№1 $P_{„А"} = \frac{1}{6}$. $P_{„І"} = \frac{1}{5}$ $P_{„Т"} = \frac{1}{4}$ $P_{„Р"} = \frac{1}{3}$ => $P_{„ЛІТР"} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{720}$

~~Отв~~ Відповідь - $\frac{1}{720}$

№2 Усього - 360, „А"=7, „Є"=5, „І"=8, „О"=9, „У"=4, „Ю"=2

інші на приголосну. $P_{„А\ приголосн"}$ –?

Голосні = 7+5+8+9+4+2 = 35 => Приголосні = 360–35 = 325

$m = 325$, $n = 360$ $P(A) = \frac{m}{n}$ => $P(A) = \frac{325}{360} = \frac{65}{72}$

№3 Ймовірність A → хворого – β => $P(\frac{B}{A})$

B – прийняття здорового за хворого – 2. => $P(\frac{B}{З})$

З – хворі до всього – Y => P(A)

Знайти: P(здоровий, визнаний хворим) –?

Рішення: P(З) = 1 – Y

$$P\left(\frac{З}{B}\right) = \frac{P(\frac{B}{З}) \cdot P(З)}{P(B)} = \frac{P(\frac{B}{З}) \cdot P(З)}{P(З) \cdot (P(\frac{B}{З})) + P(A) \cdot P(\frac{B}{A})} =$$

$$= \frac{2 \cdot (1-Y)}{(1-Y) \cdot 2 + Y \cdot \beta}$$ ⟸ Відповідь

№4 3 автомати. I = 0,3 II = 0,2 III = 0,4 => брак

Поступило I = 1000 II = 2000 III = 2500

P(брак) –?

Рішення: 0,3 → 1000 ① $\frac{0,3}{100} \cdot 1000 + \frac{0,2}{100} \cdot 1000 + \frac{0,4}{100} \cdot 2500 = 15$

0,2 → 2000

0,4 → 1500 ② $\frac{0,3}{100} = 0,003$ (дет) – частина від I ав-ту браковані

③ $\frac{0,2}{100} = 0,002$ (дет) частина від II ав-ту браковані

④ $\frac{0,4}{100} = 0,004$ (дет) – частина від I-ту браковані

⑤ 0,003 · 1000 = 3

⑥ 0,002 · 2000 = 2

⑦ 0,004 · 2500 = 10

⑧ 3+2+10 = 15 (дет) браковані всього

⑨ 1000+2000+2500 = 5500 (дет) – всього виходить з автоматів.

$P_{(бракованих)} = \frac{15}{5500} \approx 0,0027$

Відповідь: 0,0027.

№5

2-гравця: $\overbrace{\text{Не менше 2 із 4}}^{P_1}$; $\overbrace{\text{не менше 3 із 5}}^{P_2}$.

$P_1 > P_2$ – ?

2 із 4 Рішення: Формула Бернулі

$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$; $n=4$, $k=2$, $p=\frac{1}{2}=0{,}5$ $\quad P_n(k) = C_n^k \cdot p^k$, $k=4$.

$P_4(2) = C_4^2 \cdot 0{,}5^4 = 6 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}375$

$P_4(3) = C_4^3 \cdot 0{,}5^4 = 4 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}25$

$P_4(4) = C_4^4 \cdot 0{,}5^4 = 1 \cdot 0{,}5^4 = 0{,}0625$

$P_1 = P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 0{,}375 + 0{,}25 + 0{,}0625 = 0{,}6875$

3 із 5

$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}5^5 = 10 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}3125$

$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}15625$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}5^5 = 0{,}03125$

$P_2 = P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 0{,}3125 + 0{,}15625 + 0{,}03125 = 0{,}5$

$P_2 > P_1$

Відповідь: ймовірніше виграти не менше 2-х партій із 4.

№6

5000 – всього, $P(\text{обрив}) = 0{,}005$ за 1 хв

P(обрив) = 0 – за 1хв – ?

Ймовірність неможливої події дорівнює нулю $P(\varnothing) = 0$.

№7

3% – хворих, всього – 500, $p\,(3 \pm 0{,}5\%) = $ – ?

Рішення: $3\% = 0{,}03$. $\quad 3+0{,}5\% \quad 3-0{,}5\%$

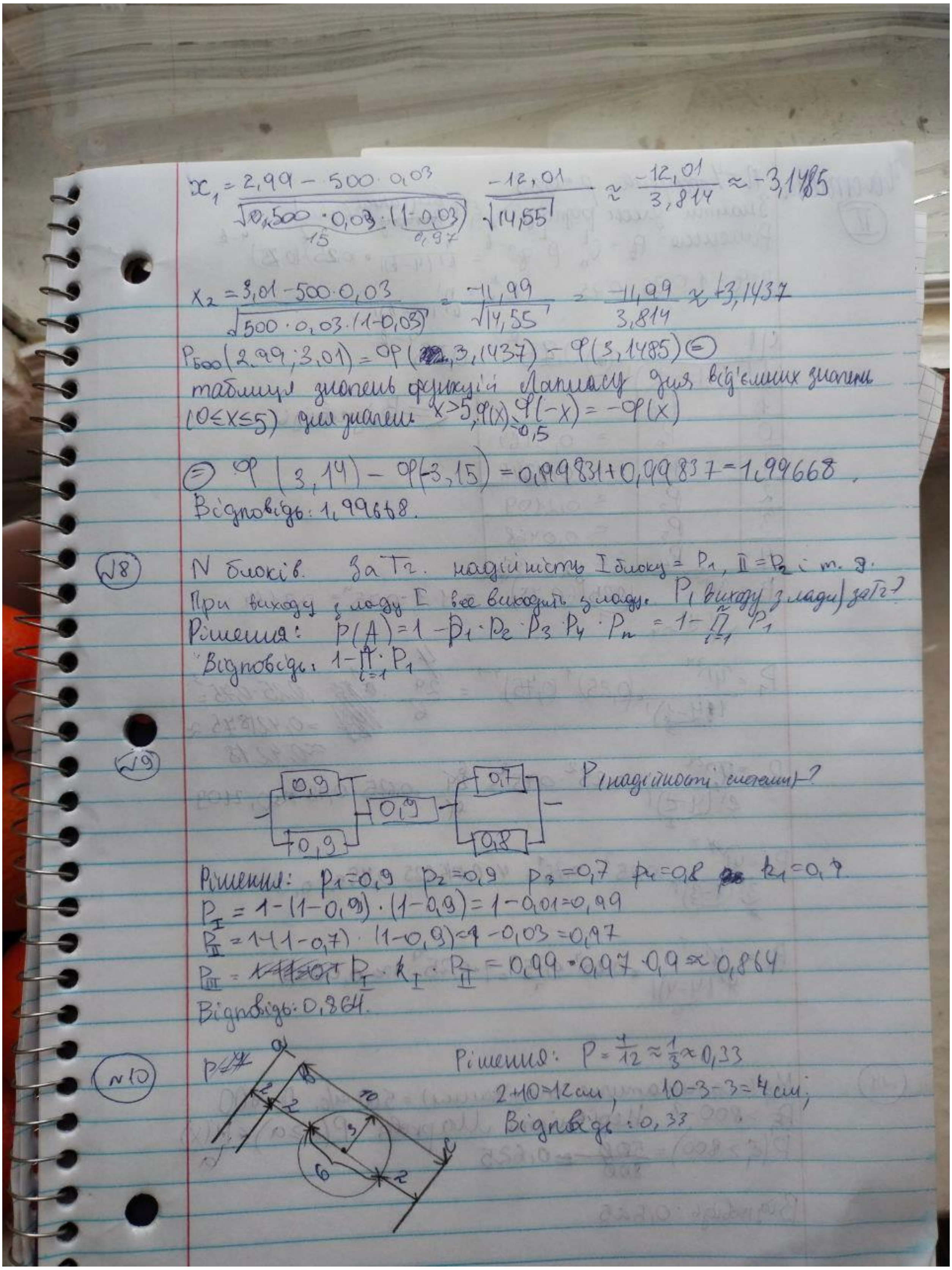
Знайдемо 0,5% от 3 = 0,01; $3+0{,}01 = 3{,}01 \quad 3-0{,}01 = 2{,}99$.

$k_1 = 2{,}99$, $k_2 = 3{,}01$, $n = 500$, $p = 0{,}03$

Інтегральна формула Лапласа.

$P_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} dx$.

аргументи інтегральної функції розподілу: $x_1 = \frac{k_1 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$ $\quad x_2 = \frac{k_2 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}$



$x_1 = \frac{2{,}99 - 500\cdot 0{,}03}{\sqrt{\underbrace{500\cdot 0{,}03}_{15}\cdot \underbrace{(1-0{,}03)}_{0{,}97}}} = \frac{-12{,}01}{\sqrt{14{,}55}} \approx \frac{-12{,}01}{3{,}814} \approx -3{,}1485$

$x_2 = \frac{3{,}01 - 500\cdot 0{,}03}{\sqrt{500\cdot 0{,}03\cdot(1-0{,}03)}} = \frac{-11{,}99}{\sqrt{14{,}55}} = \frac{-11{,}99}{3{,}814} \approx -3{,}1437$

$P_{500}(2{,}99;3{,}01) = \varphi(-3{,}1437) - \varphi(3{,}1485) \ominus$

таблиця значень функції Лапласу для від'ємних значень $(0 \le x \le 5)$ для значень $x>5, \varphi(x) = 0{,}5$ $\varphi(-x) = -\varphi(x)$

$\ominus\ \varphi(3{,}14) - \varphi(-3{,}15) = 0{,}99831 + 0{,}99837 = 1{,}99668.$

Відповідь: 1,99668.

№8 N блоків. За T2. надійність I блоку $= P_1$, $II = P_2$ і т. д. При виходу з ладу I все виходить з ладу. P (виходу з ладу) за T2?

Рішення: $P(A) = 1 - P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4\cdot P_n = 1 - \prod_{i=1}^{n} P_1$

Відповідь: $1 - \prod_{i=1}^{n} P_1$

№9 P(надійності системи)?

Рішення: $p_1 = 0{,}9$ $p_2 = 0{,}9$ $p_3 = 0{,}7$ $p_4 = 0{,}8$ $k_1 = 0{,}9$

$P_I = 1-(1-0{,}9)\cdot(1-0{,}9) = 1 - 0{,}01 = 0{,}99$

$P_{II} = 1-(1-0{,}7)\cdot(1-0{,}9) = 1 - 0{,}03 = 0{,}97$

$P_{III} = P_I \cdot k_I \cdot P_{II} = 0{,}99\cdot 0{,}97\cdot 0{,}9 \approx 0{,}864$

Відповідь: 0,864.

№10 Рішення: $P = \frac{4}{12} \approx \frac{1}{3} \approx 0{,}33$

$2 + 10 = 12$ см, $10 - 3 - 3 = 4$ см;

Відповідь: 0,33

Варіант №3 (частина 2)

Задача1. Проводиться 4 незалежних постріли в однакових умовах по деякій цілі. Ймовірність попадання при одному пострілі дорівнює 0,25. Знайти закон розподілу ξ – числа попадань в ціль.

Задача2. Задана функція розподілу випадкової величини ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1, \\ a(x+1), & -1 < x \le \dfrac{1}{3}, \\ 1, & x > \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

Треба : 1) визначити a ; 2) знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$; 3) побудувати графіки $f_\xi(x)$ та $F_\xi(x)$; 4) знайти $M\xi,\ D\xi,\ \sigma\xi;$ 5) знайти $P(-1<\xi<0)$.

Задача 3. Пара величин ξ та η задана сумісним законом розподілу:

η \ ξ	1	2	3
-2	0,1	0,15	0,25
2	0,15	0,05	0,3

Обчислити закон розподілу η та умовний розподіл ξ, за умови, що η набула значення 2, знайти $F_\eta(x)$, побудувати графік $F_\eta(x)$, обчислити $M\eta,\ D\eta,\ \sigma\eta$ та момент кореляції $K_{\xi,\eta}$. Чи є ξ та η незалежними?

Задача 4. Математичне сподівання початкової швидкості даного типу снарядів дорівнює 500 м/с. Оцінити ймовірність того, що при випробуванні чергового снаряду його початкова швидкість перевищить 800 м/с.

Частина (II)

$n = 4$ постріла $p = 0{,}25$

Знайти: закон розподілу ξ (~~попад~~ влучання в ціль)

Рішення: $P_k = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \frac{4!}{k!(4-k)!} \cdot (0{,}25)^k \cdot (0{,}75)^{4-k}$

$p = q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$ $\quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$\frac{4!}{k!(4-k)!} \cdot 0{,}25^k \cdot 0{,}75^{4-k}$

k	P_k	
0	P_0	$= 0{,}3164$
1	P_1	$= 0{,}4248$
2	P_2	$= 0{,}2109$
3	P_3	$= 0{,}0468$
4	P_4	$= 0{,}0039$

⇐ Відповідь

$P_0 = \frac{4!}{0!\,4!} \cdot (0{,}25)^0 \cdot (0{,}75)^{4-0} = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}75^4 = 0{,}3164$

$P_1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} \cdot (0{,}25)^1 (0{,}75)^{4-1} = \frac{24}{6} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}421875 \approx 0{,}4218$

$P_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^2 = \frac{24}{4} \cdot 0{,}625 \cdot 0{,}75^2 \approx 0{,}2109$

$P_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} \cdot 0{,}25^3 \cdot 0{,}75^1 = 4 \cdot 0{,}015625 \cdot 0{,}75 \approx 0{,}0468$

$P_4 = \frac{4!}{4!(4-4)!} \cdot 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^0 = 1 \cdot 0{,}25^4 \cdot 1 \approx 0{,}0039$

№4

$M\xi$ (математичне сподівання) $= 500$ м/с. $a = 800$

$P_\xi > 800$ – ? Нерівність Маркова $P(X \geq a) \leq \frac{M(X)}{a}$

$P(\xi > 800) = \frac{500}{800} \approx 0{,}625$

Відповідь: 0,625.

№2. Функція розподілу випадкової величини ξ

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ a(x+1), & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

1. треба визначити a

умова $F(-1)=0$ $\quad F_\xi(-1) = a\cdot(-1+1)=0$; $\quad a(-1+1)=0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0 \Rightarrow$

$a=0$

2. знайти щільність розподілу $f_\xi(x)$

$f_\xi(x) = F'(x)$ $\quad F'(x) = (0(x+1))' = (0x+0\cdot 1)' = 0,\ x \in (-1; \frac{1}{3}]$

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

3. построить $F(x)$, $f(x)$ (рисунок).

4. Знайти $M\xi$ (математичне спод.вання)

$M_\xi(x) = \int_a^b x\cdot f(x)dx$; $\quad M_\xi(x) = \int_{-1}^{1/3} x\cdot 0\cdot dx = 0\Big|_{-1}^{1/3} = 0-0=0$

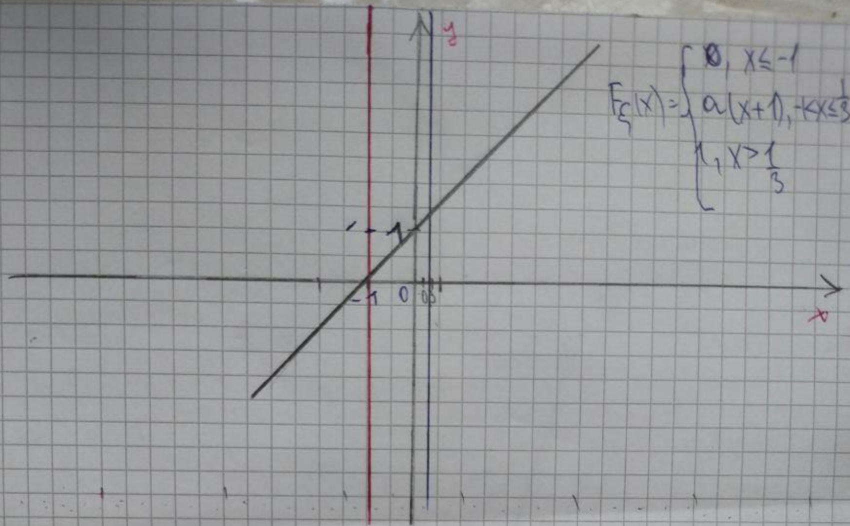
Знайти $D\xi$ (дисперсія) $\quad D(x) = \int_a^b x^2\cdot f(x)^{-1} dx - M(x)^2$

$D_\xi = \int_{-1}^{\frac{1}{3}} x^2\cdot 0\, dx = 0\Big|_{-1}^{1/3} - 0^2 = 0-(0) = 0^2 = 0$

Знайти $\sigma(x) = \sqrt{D(x)}$ $\quad \sigma(x) = \sqrt{0} = 0$

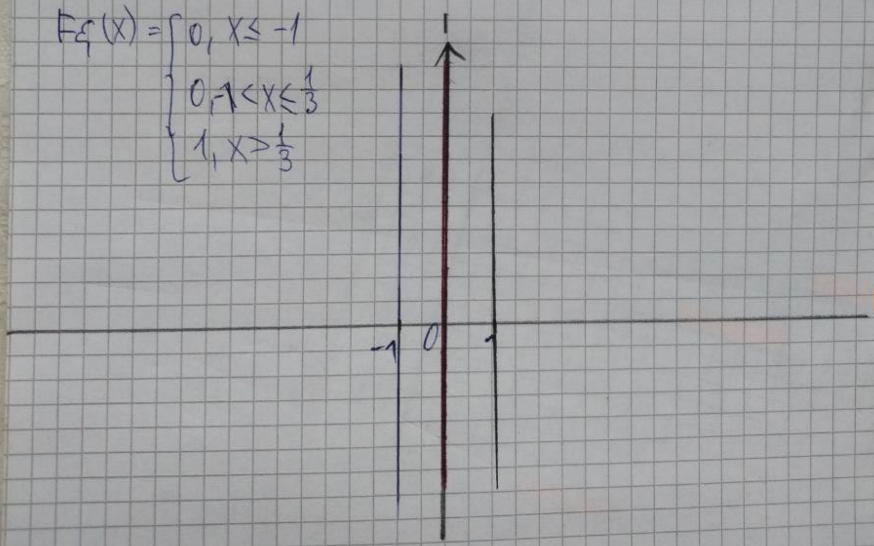
5. Знайти $P(-1<\xi<0)$

$F(b)-F(a)$ $\quad P(-1<\xi<0) = f(0) - F(-1) = (0+1)-(0+1) = 1-1=0$



$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ a(x+1), & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le -1 \\ 0, & -1 < x \le \frac{1}{3} \\ 1, & x > \frac{1}{3} \end{cases}$$



№3

ξ / η	1	2	3
-2	0,1	0,15	0,25
2	0,15	0,05	0,3

Закон розподілу ξ

$\underbrace{\boxed{0,1}\ \boxed{0,15}\ \boxed{0,25}}$

$\Sigma P = 0,1+0,15+0,25 = 0,5$

$\xi \mid \eta=-2$	1	2	3
p	0,2	0,3	0,5

$\frac{0,1}{0,5}$ $\frac{0,15}{0,5}$ $\frac{0,25}{0,5}$

$\xi \mid \eta=2$	1	2	3
p	0,3	0,1	0,6

$\frac{0,15}{0,5}$ $\frac{0,05}{0,5}$ $\frac{0,3}{0,5}$

$\underbrace{0,15+0,05+0,3}_{0,5}$

1.1. Умовний розподіл ξ, за умови, що η набула значення 2.

1.1. Закон розподілу η

$\boxed{\frac{0,1}{0,15}} \}0,16$

$\xi=1$ / η	-2	2
p	0,625	0,937

$\frac{0,1}{0,16}$ $\frac{0,15}{0,16}$

$\xi=2$ / η	-2	2
p	0,75	0,25

$\frac{0,15}{0,2}$ $\frac{0,05}{2}$

$\boxed{\frac{0,15}{0,05}} + \} 0,2$

$\boxed{\frac{0,25}{0,3}} + \} 0,55$

$\xi=3$ / η	-2	2
p	0,45	0,54

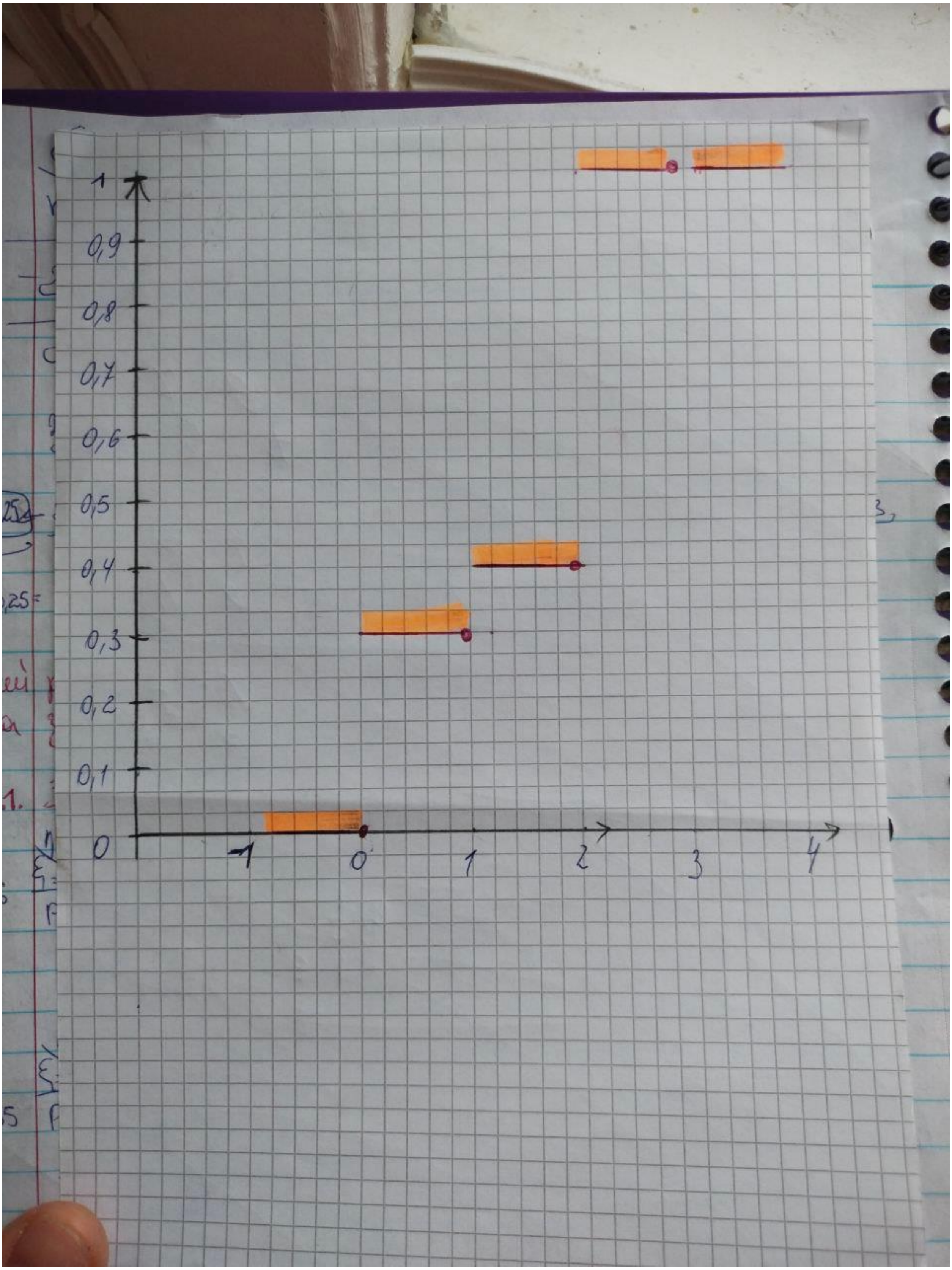
$\frac{0,25}{0,55}$ $\frac{0,3}{0,55}$

2. Знайти $F_\eta(x)$

$\xi \mid \eta=2$	1	2	3
p.	0,3	0,1	0,6

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x<0 \\ 0,3, & x<1 \\ 0,4, & x<2 \\ 1, & x \leq 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

+ побудувати графік $F_\eta(x)$



1
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
-1
0
1
2
3
4

3. Знайти математичне сподівання

$M\xi$

ξ / $\eta=-2$	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

$M(\xi|\eta=-2) = 1\cdot0,2 + 2\cdot0,3 + 3\cdot0,5 = 2,3$

ξ / $\eta=2$	1	2	3
P	0,3	0,1	0,6

$M(\xi/\eta=2) = 1\cdot0,3 + 0,2\cdot0,1 + 0,6\cdot3 = 2,12$

η / $\xi=1$	-2	2
P	0,625	0,937

$M\left(\frac{\eta}{\xi=1}\right) = -2\cdot0,625 + 0,937\cdot2 = 0,624$

η / $\xi=2$	-2	2
P	0,75	0,25

$M\left(\frac{\eta}{\xi=2}\right) = -2\cdot(0,75) + 2\cdot0,25 = -1$

η / $\xi=3$	-2	2
P	0,45	0,54

$M\left(\frac{\eta}{\xi=3}\right) = -2\cdot0,45 + 2\cdot0,54 = 0,18$

4. Знайти дисперсію випадкових величин

$D\eta$

ξ / $\eta=2$	1	2	3
P	0,3	0,1	0,6

$D_{1\eta}(X) = M(\eta^2) - M^2(X) = 5,74 - (2,12)^2 = 1,2456$

$M_1(\xi^2)$

ξ^2	1	4	9
P	0,3	0,1	0,6

$M(\xi^2) = 1\cdot0,3 + 4\cdot0,1 + 9\cdot0,6 = 5,74$

$M_2(\xi^2)$

$\xi^2/\eta=-2$	1	4	9
P	0,2	0,3	0,5

$= 0,2\cdot1 + 4\cdot0,3 + 9\cdot0,5 = 5,9$

$D_{2\eta}(\xi) = 5,9 - (2,3)^2 = 0,61$

$M_1(\eta^2)$

$\eta^2|\xi=1$	4	4
P	0,625	0,937

$= 4\cdot0,625 + 4\cdot0,937 = 6,248$

$D_1\eta(\eta) = 6,428 - (0,624)^2 = 6,0386$

$M_2(\eta)^2$

$\eta^2|\xi=2$	4	4
P	0,75	0,25

$= 4\cdot0,75 + 0,25\cdot4 = 4$; $D_2(\eta) = 4 - (-1)^2 = 3$

$M_3(\eta)^2$

$\eta|\xi=3$	4	4
P	0,45	0,54

$= 4\cdot0,45 + 0,54\cdot4 = 3,96$; $D_3(\eta) = 3,96 - (0,18)^2 = 3,927$

5. Знайти середньоквадратичне відхилення σ_η

$\sigma_{\eta_1}(\xi) = \sqrt{1,2456} \approx 1,1160$

$\sigma_{\eta_2}(\xi) = \sqrt{0,61} \approx 0,781$

$\sigma_{\eta_1}(\eta) = \sqrt{6,0386} \approx 2,4574$

$\sigma_{\eta_2}(\eta) = \sqrt{3} \approx 1,732$

$\sigma_{\eta_3}(\eta) = \sqrt{3,9276} \approx 1,9818$

6. Момент кореляції $K_{\xi,\eta}$.

$K(\xi,\eta)$:

$C(\xi,\eta) = M(\xi,\eta) - M(\xi)\,M(\eta)$.

$\eta \backslash \xi$	1	2	3
-2	0,1	0,15	0,25
2	0,15	0,05	0,3

$1 \cdot (-2) = -2 \quad p = 0,1$

$1 \cdot 2 = 2 \quad p = 0,15$

$2 \cdot (-2) = -4 \quad p = 0,15$

$2 \cdot 2 = 4 \quad p = 0,05$

$3 \cdot (-2) = -6 \quad p = 0,25$

$3 \cdot 2 = 6 \quad p = 0,3$

xy	-2	2	-4	4	-6	6
p	0,1	0,15	0,15	0,05	0,25	0,3

$M(xy) = 0,1 \cdot (-2) + 0,15 \cdot 2 + 0,15 \cdot (-4) + 0,05 \cdot 4 + 0,25 \cdot (-6) + 6 \cdot 0,3 = 0$

$C(\xi,\eta) = 0 - (5,74)^2 \cdot 4 = -131,7904 \rightarrow$ коавариация

$K(\xi,\eta) = \frac{-131,7904}{\sigma_{\eta_1}(\xi) \cdot \sigma_{\eta_2}(\eta)} = \frac{-131,7904}{1,732 \cdot 1,1160} = \frac{-131,7904}{1,932912} \approx -68,1823$

7. Чи є ξ та η незалежними?

Т.к $K_{\xi,\eta} \neq 0$, то зв'язок між ξ та η є, Отже ξ та η залежні один від одного.