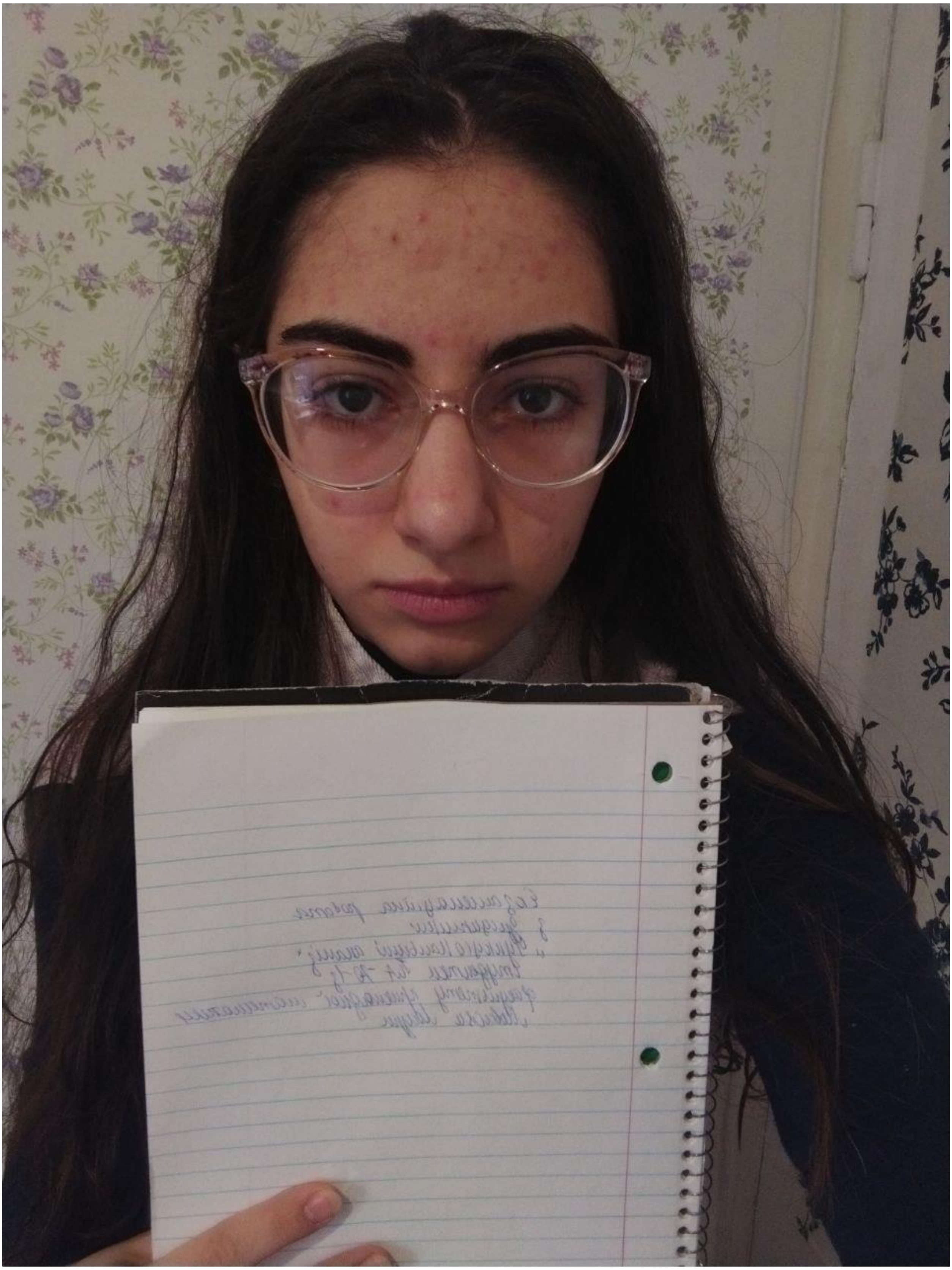

1 завдання

1) Відкриті та замкнені множини

Множина називається відкритою, якщо всі її точки внутрішні. Точка множини називається внутрішньою точкою цієї множини, якщо вона належить множині разом з деяким колом. Околом точки — це будь-яка відкрита куля, що містить цю точку. Внутрішніми точками множини A є точки $(0,1)\times(0,1)$. Покажемо це. Візьмемо довільну точку $(x_0, y_0) \in (0,1)\times(0,1)$. Нехай $r = \min\{x_0, y_0, 1-x_0, 1-y_0\}$. Побудуємо відкриту кулю з центром у точці (x_0, y_0) радіуса r.

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x,y) \in R^2_2 : \rho((x,y),(x_0,y_0)) < r\}$$

З простору R^2_2 відстань $\rho((x,y),(x_0,y_0)) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Отже куля з центром у точці (x_0, y_0) радіуса r задається нерівністю $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 < r^2$.

Будь-яка точка цієї кулі має координати (x,y) такі, що $x_0 - r < x < x_0 + r$, $y_0 - r < y < y_0 + r$. З того, що $r = \min\{x_0, y_0, 1-x_0, 1-y_0\}$ маємо $x_0 - r \geq 0$, $x_0 + r \leq 1$. Звідси $0 < x < 1$. Так само $0 < y < 1$. Доведено, що відкрита куля $B((x_0, y_0), r)$ міститься у множині A. Це означає, що (x_0, y_0) — внутрішня точка множини A. (x_0, y_0) — довільна точка множини $(0,1)\times(0,1)$, отже всі точки множини $(0,1)\times(0,1)$ є внутрішніми точ-ми мн-ни A. Точка $A \setminus (0,1)\times(0,1)$ не є внутр-ми точками мн-ни A, так як у будь-якому околі цих точок є точки, які належать A і точки, які не належать A. Ці точки є граничними точками мн-ни A. Мн-на A $\exists$ не відкрита

Мн-на наз-я замкненою, якщо вона має всі свої граничні точки. Точка простору називається граничною точкою мн-ни, якщо у будь-якому її околі знаходиться безліч точок цієї мн-ни. Всі точки мн-ни $A = [0,1]\times[0,1]$ є граничними точками усієї мн-ни. Будь-яка точка площини що знаходиться за межами мн-ни A не є її граничною точкою. Нехай є довільна точка $(x_1, y_1) \notin A$. Відстань від точки (x_1, y_1) до мн-ни A

$$d = \rho((x_1,y_1), A) = \inf_{(x,y)\in A} \rho((x,y),(x_1,y_1)) > 0$$

Побудуємо відкриту кулю з центром у точці (x_1, y_1) радіуса $d/2$. У цій кулі немає точок мн-ни A, інакше $\rho((x_1,y_1),A) \le d/2$, а це не так. Отже, мн-на A замкнена

2 завдання

② Означення та приклади лінійних операторів.

② Лінійний простір лінійних операторів.

2.1 Нехай X, Y – 2 лінійні но топологічні простори.
Лінійним оператором, що діє з простору X в простір Y, називається відображення

$$y = Ax, \text{ де } x \in X, y \in Y.$$

яке задовольняє умову: $A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A(x_1) + \beta A(x_2)$
Сукупність D_A всіх точок $x \in X$, для яких визначено відображення A, називається областю визначення оператора A. У загальному випадку $D_A \subset X$, але ми завжди будемо вважати, що D_A є лінійний багатовид, коли $x', x'' \in D_A$, то $\alpha x' + \beta x'' \in D_A$, для всіх α, β

Приклади лінійних операторів

1) У будь-якому лінійному просторі X одиничний оператор задається таким чином: $Ix = x$, $\forall x \in X$

2) Для довільних лінійних просторів X, Y задамо нульовий оператор O: $Ox = 0$, $\forall x \in X$, $0 \in Y$

3) Побудуємо загальний вигляд лін-го оператора, який переводить скінченновимірний простір у скінченновимірний, тобто розглянемо оператор A, який відображає n-вимірний R^n із базисом $e_1, \dots, e_n$, у m-вимірний простір R^m із базисом $f_1, \dots f_m$.

Для всякого елемента $x \in R^n$ має місце розкладання за векторами базису, а саме: $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

З огляду на лінійність оператора A, для образу елемента x буде правильним таке розкладання: $Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i A e_i$

Із цієї рівності випливає, що для того щоб задати оператор A, необхідно задати його значення на базисних векторах. Елементи Ae_i є елементами простору Y, і може бути поданий розкладанням за базисом $f_1, \dots f_m$ цього простору, а саме: $Ae_i = \sum_{k=1}^{m} a_{kj} f_k$

Отже для того щоб задати оператор A, треба задати матрицю коефіцієнтів a_{ik}. Образ простору R^n в просторі R^m є лінійним підпростором, розмірність якого = рангу матриці $\|a_{kj}\|$, не $\geq n$

Q.22. Лінійний простір лінійних операторів.

Для пари нормованих просторів X, Y розглядають мн-ну всіх обмежених лінійних опер-ів, що діють з простору X і Y. У цій мн-ні застосовують операції додавання:

$(A+B)x = Ax + Bx$ (для всіх $x \in X$) та множення на скаляр $(aA)x = a \cdot Ax$.

З нерівностей

$\|(A+B)x\| < \|Ax\| + \|Bx\| \le (\|A\| + \|B\|)\|x\|$ та $\|aAx\| < |a| \cdot \|A\| \cdot \|x\|$

випливає, що опер-ри $A+B$, та aA обмежені, причому:

$\|A+B\| < \|A\| + \|B\|$; $\|aA\| \le |a| \cdot \|A\|$.

Розглянемо лінійний простір $L(X;Y) = \{X \to Y\}$ лінійних обмеж-х опер-ів, які відображають простір X у простір Y [в алгебраїчному сенсі $L(X,Y)$ є підпростором лінійного простору всіх лінійних опер-ів, що діють із X і Y].

Коли $a \ne 0$, то $\|A\| = \|a^{-1} \cdot aA\| \le \| \le |a|^{-1} \|aA\|$, звідки $\|aA\| \ge |a| \cdot \|A\|$. Робимо висновок $\|aA\| = |a| \cdot \|A\|$ (коли $a = 0$)

Отже, $L(X,Y)$ є нормований простір з нормою $\|A\|$.

Теорема: Якщо простір Y повний, то простір $L(X,Y)$ — теж повний. Доведення: Нехай $\{A_n\}$ — фундаментальна посл-ть із простору $L(X,Y)$, тоді для кожного елемента $x \in X$ посл-ть $\{A_n x\}$ є фундам-ю в просторі Y, і має границю (z).

$x \mapsto z$ позначимо A. Доведемо, що A — обмежений лінійний оп-р і $A_n \to A$ в просторі $L(X,Y)$.

1. Лінійність: $A(\alpha x + \beta y) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\alpha x + \beta y) = \alpha \lim\limits_{n\to\infty} A_n x + \beta \lim\limits_{n\to\infty} A_n y = \alpha Ax + \beta Ay$

2. Обмеженість: Посл-ть $\{A_n\}$ фундам-на, тому обмежена, тобто $\exists C > 0, \forall n: \|A_n\| \le C$, тому $\|Ax\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|A_n x\| \le C\|x\|$. Нерівність є наслідком неперервності норми: $\|x_n\| - \|x\| \le \|x_n - x\|$.

3. Збіжність: $A_n \to A$ $\|(A_n - A)x\| = \lim_{m \to \infty} \|(A_n - A_m x)\|$

Так як послід-ть $\{A_n\}$ фундам-на, то для кожного числа $\varepsilon > 0$, існує номер N, що для всіх значень $m, n \geq N$, та всіх елементів $x \in X$ виконується нерівність $\|(A_n - A_m)x\| \leq \varepsilon \|x\|$, а тому і $\|(A_n - A)x\| \leq \varepsilon \|x\|$. Звідси $\|A_n - A\| \leq \varepsilon$. Збіжність $A_n \to A$ доведено.

3 завдання

[illegible]

(3) Чи утворюють у нормованому просторі $C[-1;1]$ підпростір монотонно зростаючі функції? Так, утворюють!!!

Підпростори нормованого простору

Підпростір лінійного простору L як непусту мн-ну L_0, що має власт-ть: якщо $x, y \in L_0$, то $\alpha x+\beta y \in L_0$, тобто по відношенню до визначених у просторі L операцій додавання елементів і множення на число мн-на L_0, сама утворює лінійні підпрос-ри, що містять усі свої граничні точки. У скінченновимірному нормованому просторі всякий підпростір автоматично є замкненим. Це не поширюється на нескінченно-вимірні простори. Підпростір — то замкнений підпростір. Підпростором, породженим даною системою елементів $\{x_a\}$, буде найменший замкнений підпростір, який містить систему $\{x_a\}$. Його наз-ть лінійним замиканням. Сукуп-ть елем-тів, що містять разом з x та y довільну лінійну комбінацію: $(\alpha x+\beta y)$ називають лінійним багатовидом. Система елементів, що лежить у нормованому просторі E буде повною, якщо породжений нею підпростір збігається з цим простором E