Власні вектори та власні значення

<u>Означення 1.</u> Ненульовий вектор x називається *власним вектором* лінійного оператора φ, якщо існує таке число λ, що має місце співвідношення:

$$\varphi(x) = \lambda x \quad \textbf{(1)}$$

<u>Означення 2.</u> Число λ називається *власним значенням* лінійного оператора φ, що відповідає власному вектору x.

Нехай $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ – матриця лінійного оператора φ, тоді

$$\varphi(x) = Ax \quad \textbf{(2)}$$

Прирівнюючи **(1)** та **(2)**, маємо: $Ax = \lambda x$. Звідси отримуємо:

$$(A - \lambda E)x = 0 \quad \textbf{(3)}$$

$$\det(A - \lambda E) = 0 \quad \textbf{(4)}$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ (\mathbf{4})$$

<u>Означення 3.</u> Рівняння **(4)** називається *характеристичним рівнянням*.

Зауваження. Корені характеристичного рівняння є власними значеннями лінійного оператора φ.

<u>Правило 1.</u> Для того, щоб знайти **власні значення** матриці A, потрібно:

- скласти характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$;
- знайти корені характеристичного рівняння;
- знайдені корені і будуть власними значеннями матриці A.

<u>Правило 2.</u> Для того, щоб знайти **власні вектори** матриці A, потрібно:

- скласти характеристичне рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$;
- знайти власні значення;
- для кожного власного значення λ знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи лінійних рівнянь з основною матрицею $A - \lambda E$;
- знайдені вектори і будуть власними векторами, що відповідають власним значенням λ.