Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
УНІВЕРСИТЕТ БУДІВНИЦТВА ТА АРХІТЕКТУРИ

ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ

Навчально-методичний посібник

Затверджено
на засіданні кафедри
вищої математики
протокол № 7 від 18.02.13

Харків   2013

ХНУБА

ВСТУП

Теорія випадкових процесів – це розділ теорії ймовірностей, який інтенсивно розвивається та має численні застосування в фізиці, техніці, біології, медицині, економіці та інших областях знань.

У процесі розвитку теорії ймовірностей як науки можна умовно виділити три етапи: перший етап пов'язаний з поняттям випадкової події, другий – з поняттям випадкової величини, а третій – з поняттям випадкової функції. При цьому початок першого етапу відноситься до середини XVII в., другого – до середини XIX ст. а третього – до 20-30 рр. XX століття.

Теорія випадкових процесів виникла внаслідок практичної необхідності математичного моделювання реальних процесів різної природи, стан кожного з яких в будь-який фіксований момент часу представляє собою випадковий вектор відповідної розмірності.

Прикладом випадкового процесу є процес зміни в часі просторових координат частинки, що здійснює броунівський рух. Іншими прикладами випадкових процесів є: процес стабілізації польоту літака в реальних умовах, коли він перебуває під постійним впливом випадкових змін вектора швидкості вітру та інших параметрів турбулентної атмосфери; процеси попиту і пропозиції на ринку товарів тощо.

Фактично теорія випадкових процесів займається вивченням випадкових величин, які еволюціонують у часі.

За задумом авторів, даний посібник повинен допомогти студентам оволодіти прикладними методами теорії випадкових процесів і явитися сполучною ланкою між строгими математичними дослідженнями, з одного боку, та практичними завданнями – з іншого [1].

1 ВИПАДКОВІ ФУНКЦІЇ [2]

1.1 Основні задачі

Можна виділити дві основні задачі, розв'язання яких потребує використання теорії випадкових функцій.

Пряма задача (*аналіз*). Задані параметри деякого обладнання та ймовірнісні характеристики (математичне сподівання, кореляційні функції, закони розподілу) його функції (сигналу, процесу), яка надходить на його "вхід". Потрібно визначити характеристики на "виході" обладнання (по цим характеристикам роблять висновок про якість роботи обладнання). Зокрема, сюди відноситься визначення характеристик випадкового процесу експерименту, що зводиться до статистичної обробки функцій (реалізацій), які спостерігають в експериментах.

Обернена задача (*синтез*). Задані ймовірнісні характеристики "вхідної" та "вихідної" функцій. Потрібно спроектувати оптимальне обладнання (знайти його параметри), яке б здійснювало перетворення заданої вхідної функції в таку вихідну функцію, яка має задані характеристики.

1.2 Випадкові функції

Означення 1.2.1 *Випадковою* називають функцію невипадкового аргументу t, яка при кожному фіксованому значенні аргументу є випадковою величиною.

Випадкові функції аргументу t позначають великими літерами $X(t)$, $Y(t)$ та інші. Наприклад, якщо U – випадкова величина, то функція $X(t)=2t^3\cdot U$ буде випадковою. Дійсно, при кожному фіксованому значенні аргументу ця функція є випадковою величиною: при t_1=2 отримаємо випадкову величину $X_1=16\cdot U$, при t_2=1 отримаємо випадкову величину $X_2=2\cdot U$ і т.д.

Означення 1.2.2 *Перерізом* випадкової функції називають значення цієї функції при фіксованому значенні аргументу.

Іншими словами, переріз є випадкова величина, яка відповідає фіксованому значенню аргументу випадкової функції. Наприклад, для випадкової функції $X(t)=2t^3\cdot U$, що наведена вище, при значеннях аргументу t_1=2 та t_2=1 були отримані відповідно випадкові величини $X_1=16\cdot U$ та $X_2=2\cdot U$, які і є перерізами заданої випадкової функції.

Таким чином, випадкову функцію можна розглядати як сукупність випадкових величин, залежних від параметру t.

Можливе також інше тлумачення випадкової функції при введенні поняття її реалізації.

Означення 1.2.3 *Реалізацією* випадкової функції називають невипадкову функцію аргументу t, якою може виявитися випадкова функція в результаті випробування.

Реалізації функції $X(t)$ позначають малими літерами $x_1(t)$, $x_2(t)$ і т.д., де індекс означає номер випробування. Наприклад, якщо $X(t)=U\cdot\cos t$, де U – неперервна випадкова величина, яка в першому випробуванні прийняла можливе значення u_1=2, а в другому випробуванні u_2=4, то реалізаціями $X(t)$ будуть відповідно невипадкові функції $x_1(t)=2\cdot\cos t$ та $x_2(t)=4\cdot\cos t$. Таким чином, випадкову функцію можна розглядати як сукупність її можливих реалізацій.

Означення 1.2.4 *Випадковим* (*стохастичним*) процесом називають випадкову функцію аргументу t, який тлумачиться як час.

Наприклад, якщо літак повинен летіти із заданою сталою швидкістю, то насправді внаслідок дії випадкових факторів (коливання температури, зміна сили вітру та інші), урахування впливу яких заздалегідь неможливе, швидкість буде змінюватися. У цьому прикладі швидкість літака є випадковою функцією від часу (аргументу, що неперервно змінюється), тобто швидкість є випадковим процесом. Зауважимо: якщо аргумент випадкової функції змінюється дискретно, то відповідні йому значення випадкової функції (випадкові величини) утворюють *випадкову послідовність.* Аргументом випадкової функції може бути не тільки час. Наприклад, якщо вимірюється діаметр ткацької нитки уздовж її довжини, то внаслідок дії випадкових факторів діаметр нитки буде змінюватись. У цьому прикладі діаметр є випадковою функцією аргументу, що неперервно змінюється – довжини нитки. Очевидно, задати випадкову функцію аналітично (формулою), взагалі кажучи, неможливо.

В окремих випадках, якщо вид випадкової функції відомий, а параметри, які її визначають, є випадкові величини, задати її аналітично можна. Наприклад, випадковими будуть функції:

$X(t)= t\cos\Omega t$, де Ω – випадкова величина,

$X(t)=tU\cdot\cos t$, де U – випадкова величина,

$X(t)=U\cdot\cos\Omega t$, де U та Ω – випадкові величини.

1.3 Кореляційна теорія випадкових функцій

Кореляційною теорією випадкових функцій називають теорію, яка заснована на вивченні моментів першого та другого порядку. Вона виявляється достатньою для розв'язання багатьох задач практики. На відміну від випадкових величин, для яких моменти є числами і тому їх називають *числовими характеристиками,* моменти випадкової функції є невипадковими функціями (їх називають *характеристиками).* Нижче будуть розглянуті такі характеристики: математичне сподівання (початковий момент першого порядку), дисперсія (центральний момент другого порядку), кореляційна функція (кореляційний момент).

1.4 Математичне сподівання та його властивості

Означення 1.4.1 *Математичним сподіванням випадкової функції* $X(t)$ називають невипадкову функцію $m_x(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу t дорівнює математичному сподіванню перерізу, відповідного цьому фіксованому значенню аргументу:

$$m_x(t)=M[X(t)].$$

Математичне сподівання має такі властивості:

1 Математичне сподівання невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює самій невипадковій функції:

$$M[\varphi(t)]=\varphi(t).$$

2 Невипадковий множник *(p{t)* можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M[\varphi(t)\cdot X(t)]=\varphi(t)\cdot M[X(t)]=\varphi(t)\cdot m_x(t).$$

3 Математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків:

$$M[X(t)+Y(t)]=M[X(t)]+M[Y(t)]=m_x(t)+m_y(t).$$

Н а с л і д о к . Для того, щоб знайти математичне сподівання суми випадкової і невипадкової функцій, достатньо до математичного сподівання випадкової функції додати невипадкову функцію:

$$M[X(t)+\varphi(t)]=m_x(t)+\varphi(t).$$

Рекомендуємо студенту самостійно довести наведені властивості, враховуючи, що при фіксованому значенні аргументу випадкова функція стає випадковою величиною, а невипадкова функція – сталою величиною.

Наприклад, властивість 3 доводиться так: при фіксованому значенні аргументу випадкові функції $X(t)$ та $Y(t)$ є випадковими величинами, для яких математичне сподівання суми дорівнює сумі математичних сподівань доданків.

Означення 1.4.2 *Центрованою випадковою функцією* називають різницю між випадковою функцією та її математичним сподіванням:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t).$$

Очевидно, що математичне сподівання центрованої випадкової функції дорівнює нулю:

$$M[\overset{\circ}{X}(t)] = M[X(t) - m_x(t)] = M[X(t)] - m_x(t) = 0.$$

Приклад 1.4.1 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)=U\cdot\sin t$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=3$.

Р о з в ' я з а н н я . Знайдемо математичне сподівання, враховуючи, що невипадковий множник $\cos t$ можна винести за знак математичного сподівання:

$$M[X(t)] = M[U\cdot\sin(t)]=\sin t\cdot M(U)=3\sin t.$$

Таким чином, шукане математичне сподівання

$$m_x(t)=3\sin t.$$

1.5 Дисперсія та її властивості

Означення 1.5.1 *Дисперсією випадкової функції* $X(t)$ називають невипадкову невід'ємну функцію $D_x(t)$, значення якої при кожному фіксованому значенні аргументу t дорівнює дисперсії перерізу, що відповідає цьому ж фіксованому значенню аргументу:

$$D_x(t)=D[X(t)].$$

Як відомо, дисперсією (розсіюванням) випадкової величини називають математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D[X(t)]=M[(X(t)-m_x(t))^2].$$

Отже дисперсія випадкової функції дорівнює математичному сподіванню квадрата центрованої функції:

$$D_x(t) = M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t_1)\right)^2\right].$$

Означення 1.5.2 *Середнім квадратичним відхиленням випадкової функції* називають квадратний корінь із дисперсії:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Дисперсія має такі властивості:

1 Дисперсія невипадкової функції $\varphi(t)$ дорівнює нулю:

$$D[\varphi(t)]=0.$$

2 Дисперсія суми випадкової та невипадкової функцій дорівнює дисперсії випадкової функції:

$$D[X(t)+\varphi(t)]=D_x(t).$$

3 Дисперсія добутку випадкової функції на невипадкову функцію дорівнює добутку квадрата невипадкового множника на дисперсію випадкової функції:

$$D[\varphi(t)\cdot X(t)]=\varphi^2(t)\cdot D_x(t).$$

Рекомендуємо студенту самостійно довести ці властивості, враховуючи, що при фіксованому значенні аргументу випадкова функція являється випадковою величиною, а невипадкова функція – сталою величиною.

Приклад 1.5.1 Знайдіть дисперсію випадкової функції $X(t)=U\cdot\cos t$, де U – випадкова величина, причому $D(U)=5$.

Р о з в ' я з а н н я . Знайдемо дисперсію, враховуючи, що невипадковий множник $\cos t$ можна винести за знак дисперсії в квадраті:

$$D[X(t)]=D[U\cdot\cos t]=\cos^2 t\cdot D(U)=5\cdot\cos^2 t.$$

Таким чином, шукана дисперсія

$$D[X(t)]=5\cdot\cos^2 t.$$

1.6 Кореляційна функція та її властивості

Математичне сподівання та дисперсія характеризують випадкову функцію далеко не повністю. Можна навести приклади двох випадкових функцій, які мають однакові математичні сподівання та дисперсії, але поведінка яких різна. Знаючи лише ці дві характеристики, зокрема, нічого не можна сказати щодо ступеня залежності двох перерізів. Для оцінки цієї залежності вводять нову характеристику – кореляційну функцію. Як буде показано нижче, знаючи кореляційну функцію, можна знайти і дисперсію.

Дамо означення кореляційної функції.

Означення 1.6.1 *Кореляційною функцією* випадкової функції $X(t)$ називають невипадкову функцію $K_x(t_1,t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 та t_2, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює кореляційному моменту перерізів, що відповідають цим значенням аргументів:

$$K_x(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)].$$

З а у в а ж е н н я . При рівних між собою значеннях аргументів $t_1=t_2=t$ кореляційна функція випадкової функції дорівнює дисперсії цієї функції:

$$K_x(t,t)=D_x(t).$$

Дійсно

$$K_x(t,t)=M[\overset{\circ}{X}(t)\cdot\overset{\circ}{X}(t)]=M\left[\left(\overset{\circ}{X}(t)\right)^2\right]=D_x(t).$$

Кореляційна функція має такі властивості:

1 При перестановці аргументів кореляційна функція не змінюється (властивість симетрії):

$$K_x(t_1,t_2)=K_x(t_2,t_1).$$

2 Додавання до випадкової функції невипадкового доданка не змінює її кореляційної функції. Якщо $Y(t)= X(t)+\varphi(t)$, то

$$K_y(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2).$$

3 При множенні випадкової функції на невипадковий множник $\varphi(t)$ її кореляційна функція множиться на добуток $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$. Якщо $Y(t)= X(t)\cdot\varphi(t)$, то

$$K_y(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)\cdot\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2).$$

4 Абсолютна величина кореляційної функції не перевищує середнього геометричного дисперсій відповідних перерізів:

$$\left|K_x(t_1,t_2)\right| \le \sqrt{D_x(t_1)\cdot D_x(t_2)}\,.$$

Приклад 1.6.1 Задана випадкова функція $X(t)=U\cdot t$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=5$, $D(U)=12$. Знайдіть кореляційну функцію та дисперсію.

Р о з в ' я з а н н я . Знайдемо математичне сподівання:

$$M[X(t)] = M[U\cdot t]=t\cdot M(U)=5t.$$

Знайдемо центровану функцію:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = Ut - 5t = (U-5)\cdot t\,.$$

Отже

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = (U-5)\cdot t_1, \quad \overset{\circ}{X}(t_2) = (U-5)\cdot t_2\,.$$

Знайдемо кореляційну функцію:

$$K_x(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)] = M\left[(U-5)\cdot t_1\cdot(U-5)\cdot t_2\right] =$$

$$= t_1\cdot t_2\cdot M\left[(U-5)^2\right] = t_1\cdot t_2\cdot D\left[U\right] = 12t_1t_2\,.$$

Знайдемо дисперсію, поклавши $t_1=t_2=t$:

$$D_x(t) = K_x(t,t) = 12t^2\,.$$

1.7 Нормована кореляційна функція

Для оцінки ступеня лінійної залежності двох випадкових величин X та Y користуються коефіцієнтом кореляції

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\cdot\sigma_y}\,,$$

де $\mu_{xy} = M[\overset{\circ}{X}\cdot\overset{\circ}{Y}]$ – кореляційний момент випадкових величин X та Y,

$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)}$ – їх середні квадратичні відхилення.

В теорії випадкових функцій аналогом цієї характеристики є нормована кореляційна функція.

Означення 1.7.1 *Нормованою кореляційною функцією* випадкової функції $X(t)$ називають невипадкову функцію $\rho_x(t_1,t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 та t_2, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює коефіцієнту кореляції перерізів, що відповідають цим значенням аргументів:

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_x(t_1)\cdot\sigma_x(t_2)}.$$

Враховуючи, що $\sigma_x(t)=\sqrt{D_x(t)}=\sqrt{K_x(t,t)}$, одержимо:

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)}\cdot\sqrt{D_x(t_2)}}=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_x(t_2,t_2)}}.$$

Нормована кореляційна функція має властивості 1–3 кореляційної функції. Четверта властивість замінюється на $\left|\rho_x(t_1,t_2)\right|\le 1$.

Можна побачити, що при $t_1=t_2=t$ нормована кореляційна функція дорівнює одиниці:

$$\rho_x(t,t)=\frac{K_x(t,t)}{\sqrt{K_x(t,t)}\cdot\sqrt{K_x(t,t)}}=1$$

Приклад 1.7.1 Знайдіть нормовану кореляційну функцію за відомою кореляційною функцією $K_x(t_1,t_2)=4\sin(t_2-t_1)$.

Р о з в ' я з а н н я . Шукана нормована кореляційна функція дорівнює:

$$\rho_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_x(t_2,t_2)}}=\frac{4\sin(t_2-t_1)}{\sqrt{4\sin(t_1-t_1)}\cdot\sqrt{4\sin(t_2-t_2)}}=\sin(t_2-t_1).$$

1.8 Взаємна кореляційна функція та її властивості

Для оцінки ступеня залежності двох випадкових функцій вводять характеристику – взаємну кореляційну функцію.

Означення 1.8.1 *Взаємною кореляційною функцією двох випадкових функцій* $X(t)$ і $Y(t)$ називають невипадкову функцію $R_{xy}(t_1,t_2)$ двох незалежних аргументів t_1 та t_2, значення якої при кожній парі фіксованих значень аргументів дорівнює кореляційному моменту перерізів цих функцій, що відповідають цим значенням аргументів:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

Таким чином, кожна пара чисел t_1 та t_2 визначає систему двох випадкових величин $X(t_1)$ та $Y(t_2)$ і кожній такій системі відповідає її кореляційний момент $M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)]$.

Означення 1.8.2 *Корельованими* називають дві випадкові функції, якщо їх взаємна кореляційна функція не дорівнює нулю тотожно.

Означення 1.8.3 *Некорельованими* називають дві випадкові функції, якщо їх взаємна кореляційна функція тотожно дорівнює нулю.

Взаємна кореляційна функція має такі властивості:

1 При одночасній перестановці індексів і аргументів кореляційна функція не змінюється (властивість симетрії):

$$R_{xy}(t_1,t_2)=R_{yx}(t_2,t_1).$$

2 Додавання до випадкових функції $X(t)$ і $Y(t)$ невипадкових доданків, відповідно $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, не змінює їх взаємної кореляційної функції. Тобто, якщо $X_1(t)= X(t)+\varphi(t)$ і $Y_1(t)= Y(t)+\psi(t)$, то

$$R_{x_1y_1}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2).$$

3 При множенні випадкових функції $X(t)$ і $Y(t)$ на невипадкові множники, відповідно $\varphi(t)$ та $\psi(t)$, їх взаємна кореляційна функція множиться на добуток $\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)$. Тобто, якщо $X_1(t)=X(t)\cdot\varphi(t)$ і $Y_1(t)=Y(t)\cdot\psi(t)$, то

$$R_{x_1y_1}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)\cdot\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2).$$

4 Абсолютна величина взаємної кореляційної функції двох випадкових функцій не перевищує середнього геометричного їх дисперсій:

$$\left|R_{xy}(t_1,t_2)\right|\le\sqrt{D_x(t_1)\cdot D_y(t_2)}.$$

Приклад 1.8.1 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)=t^2\cdot U$ та $Y(t)=t^3\cdot U$, де U – випадкова величина, причому $D(U)=2$.

Р о з в ' я з а н н я . Знайдемо математичні сподівання:

$$m_x(t)=M[X(t)]=M[t\cdot U]=t^2\cdot m_u,$$

$$m_y(t)=M[Y(t)]=M[t^2\cdot U]=t^3\cdot m_u,$$

$$m_u=M[U].$$

Знайдемо центровані функції:

$$\overset{\circ}{X}(t)=X(t)-m_x(t)=t^2U-t^2\cdot m_u=t^2\cdot(U-m_u).$$

$$\overset{\circ}{Y}(t)=Y(t)-m_y(t)=t^3U-t^3\cdot m_u=t^3\cdot(U-m_u).$$

Знайдемо взаємну кореляційну функцію:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\left[t_1^{\,2}\cdot(U-m_u)\cdot t_2^{\,3}\cdot(U-m_u)\right]=$$

$$=t_1^{\,2}\cdot t_2^{\,3}\cdot M\left[(U-m_u)^2\right]=t_1^{\,2}\cdot t_2^{\,3}\cdot D\left[U\right]=2t_1^{\,2}t_2^{\,3}.$$

1.9 Нормована взаємна кореляційна функція

Означення 1.9.1 *Нормованою взаємною кореляційною функцією двох випадкових функцій* $X(t)$ і $Y(t)$ називають невипадкову функцію двох незалежних аргументів t_1 та t_2:

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_y(t_2,t_2)}}=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)}\cdot\sqrt{D_y(t_2)}}.$$

Нормована взаємна кореляційна функція має властивості 1–3 взаємної кореляційної функції, четверта властивість замінюється наступною властивістю: $\left|\rho_{xy}(t_1,t_2)\right|\le 1$.

Приклад 1.9.1 Знайдіть нормовану взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)=t^2\cdot U$ та $Y(t)=t^3\cdot U$, де U – випадкова величина, причому $D(U)=2$.

Р о з в ' я з а н н я . В задачі 5, в якій задані ті ж випадкові функції, були знайдені функції:

$$\overset{\circ}{X}(t)=t^2\cdot(U-m_u),$$

$$\overset{\circ}{Y}(t)=t^3\cdot(U-m_u),$$

$$R_{xy}(t_1,t_2)=2t_1^2t_2^3.$$

Знайдемо кореляційні функції:

$$K_x(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)]=M\left[t_1^2\cdot(U-m_u)\cdot t_2^2\cdot(U-m_u)\right]=$$

$$=t_1^2\cdot t_2^2\cdot M\left[(U-m_u)^2\right]=t_1^2\cdot t_2^2\cdot D\big[U\big]=2t_1^2t_2^2,$$

$$K_y(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)]=M\left[t_1^3\cdot(U-m_u)\cdot t_2^3\cdot(U-m_u)\right]=$$

$$=t_1^3\cdot t_2^3\cdot M\left[(U-m_u)^2\right]=t_1^3\cdot t_2^3\cdot D\big[U\big]=2t_1^3t_2^3.$$

Знайдемо нормовану взаємну кореляційну функцію:

$$\rho_{xy}(t_1,t_2)=\frac{R_{xy}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_x(t_1,t_1)}\cdot\sqrt{K_y(t_2,t_2)}}=\frac{2t_1^2t_2^3}{\sqrt{2t_1^2t_1^2}\cdot\sqrt{2t_2^3t_2^3}}=1.$$

Отже, шукана нормована взаємна кореляційна функція дорівнює одиниці. Зауважимо, що функція $Y(t)$ зв’язана лінійною функціональною залежністю з функцією $X(t)$:

$$Y(t)=t^3\cdot U=t\cdot(t^2\cdot U)=t\cdot X(t).$$

1.10 Характеристики суми випадкових функцій

Нехай $X(t)$ і $Y(t)$ – випадкові функції. Характеристики суми цих функцій визначаються за відомими характеристиками доданків і мають такі властивості.

1 Математичне сподівання суми двох випадкових функцій дорівнює сумі математичних сподівань доданків. Тобто, якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, то

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y(t).$$

Н а с л і д о к Математичне сподівання суми випадкової функції $X(t)$ і випадкової величини Y дорівнює сумі їх математичних сподівань. Отже, якщо $Z(t)=X(t)+Y$, то

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y.$$

2 Кореляційна функція суми двох корельованих випадкових функцій дорівнює сумі кореляційних функцій доданків та взаємної кореляційної функції, доданої двічі з різним порядком слідування аргументів. Якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, то

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2)+R_{xy}(t_1,t_2)+R_{xy}(t_2,t_1).$$

Н а с л і д о к 1 Кореляційна функція суми двох некорельованих випадкових функцій дорівнює сумі кореляційних функцій доданків. Якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, то

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2).$$

Н а с л і д о к 2 Дисперсія суми двох некорельованих випадкових функцій дорівнює сумі дисперсій доданків. Якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, то

$$D_z(t)=D_x(t)+D_y(t).$$

Н а с л і д о к 3 Кореляційна функція суми випадкової функції $X(t)$ і некорельованої з нею випадкової величини Y дорівнює сумі кореляційної функції випадкової функції та дисперсії випадкової величини. Отже, якщо $Z(t)=X(t)+Y$, то

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+D_y.$$

Приклад 1.10.1 Задані випадкові функції $X(t)=t\cdot U$ та $Y(t)=t^2\cdot V$, де U, V – некорельовані випадкові величини, причому $M(U)=3$, $D(U)=2$, $M(V)=5$, $D(V)=6$. Для суми цих функцій $Z(t)=X(t)+Y(t)$ знайдіть: а) математичне сподівання, б) кореляційну функцію, в) дисперсію.

Р о з в ' я з а н н я . А) Знайдемо математичне сподівання суми випадкових функцій за формулою властивості 1:

$$m_z(t)=m_x(t)+m_y(t)=M[t\cdot U]+M[t^2\cdot V]=t\cdot M[U]+t^2\cdot M[V]=3t+5t^2.$$

Б) Знайдемо кореляційну функцію суми випадкових функцій. Оскільки випадкові величини U і V не корельовані, їх кореляційний момент дорівнює нулю:

$$M[(U–3)(V–5)]=0.$$

З цього випливає, що взаємна кореляційна функція випадкових функцій $X(t)$ та $Y(t)$ тотожно дорівнює нулю:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)]=t_1\cdot t_2{}^2\cdot M\left[(U-3)\cdot(V-5)\right]=0.$$

Отже , функції $X(t)$ та $Y(t)$ некорельовані і для знаходження кореляційної функції можна використати формулу з властивості 2 (наслідок 1)

$$K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)+K_y(t_1,t_2).$$

У результаті перетворень одержимо:

$$K_z(t_1,t_2)=2\cdot t_1\cdot t_2+6\cdot t_1{}^2\cdot t_2{}^2.$$

В) Знайдемо дисперсію суми випадкових функцій:

$$D_z(t) = K_z(t,t) = 2t^2 + 6t^4.$$

1.11 Похідна випадкової функції та її характеристики

Для вивчення випадкових функцій необхідне поняття середньої квадратичної збіжності. Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, які мають скінченні математичні сподівання та дисперсії збігається у середньоквадратичному до випадкової величини X, якщо математичне сподівання квадрата різниці $X_n – X$ прямує до нуля при $n \to \infty$^

$$\lim_{n\to\infty} M\left[(X_n - X)^2\right] = 0.$$

Означення 1.11.1 Випадкова величина X називається *границею у середньому квадратичному* послідовності випадкових величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ і записується

$$X = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}} X_n.$$

Похідною випадкової функції $X(t)$ та називають границю у середньому квадратичному відношення приросту випадкової функції до приросту аргументу Δt, коли останній прямує до нуля $\Delta t \to 0$:

$$X'(t) = \underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Як за відомими характеристиками випадкової функції знайти характеристики її похідної? Відповідь дають наведені нижче теореми.

Теорема 1.11.1 Математичне сподівання похідної $X'(t) = \dot{x}$ від випадкової функції $X(t)$ дорівнює похідній від її математичного сподівання:

$$m_{\dot{x}}(t) = m'_x(t).$$

Д о в е д е н н я . За означенням похідної

$$X'(t) = \underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}.$$

Від обох частин рівності знаходимо математичне сподівання

$$M\left[X'(t)\right] = m_{\dot{x}}(t),$$

$$M\left[\underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] = \underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}}\, M\left[\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] =$$

$$= \underset{\Delta t\to 0}{\text{l.i.m.}} \frac{m_x(t+\Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = m'_x(t).$$

Отже

$$m_{\dot{x}}(t) = m'_x(t).$$

Це означає, що при знаходженні математичного і похідної можна змінювати порядок операцій. Дійсно:

$$m_{\dot{x}}(t) = m_x'(t) \quad \Rightarrow \quad M\left[X'(t)\right] = \left\{M\left[X(t)\right]\right\}'.$$

Приклад 1.11.1 Знаючи математичне сподівання $m_x(t)=t^3+2t$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть математичне сподівання її похідної.

Р о з в ' я з а н н я . $m_{\dot{x}}(t) = m_x'(t) = \left[t^3 + 2t\right]' = 3t^2 + 2$.

Теорема 1.11.2 Кореляційна функція похідної від випадкової функції $X(t)$ дорівнює другій мішаній похідній від її кореляційної функції:

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Д о в е д е н н я . За означенням кореляційної функції

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2) = M\left[\mathring{X}'(t_1)\cdot \mathring{X}'(t_2)\right].$$

Оскільки

$$\mathring{X}'(t_1)\cdot \mathring{X}'(t_2) = \frac{\partial^2\left[\mathring{X}(t_1)\cdot \mathring{X}(t_2)\right]}{\partial t_1 \partial t_2},$$

то

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2) = M\left\{\frac{\partial^2[\mathring{X}(t_1)\cdot \mathring{X}(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2}\right\}.$$

Змінюємо порядок знаходження математичного сподівання і похідних, одержимо:

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 M[\mathring{X}(t_1)\cdot \mathring{X}(t_2)]}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}.$$

Приклад 1.11.2 Знаючи кореляційну функцію $K_x(t_1,t_2)=4\cdot t_1\cdot t_2+t_1^2\cdot t_2^2$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть кореляційну функцію її похідної.

Р о з в ' я з а н н я . Знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \left(4t_1t_2 + t_1^2t_2^2\right)_{t_1}' = 4t_2 + 2t_1t_2^2,$$

$$\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \left(4t_2 + 2t_1t_2^2\right)_{t_2}' = 4 + 4t_1t_2.$$

Отже

$$K_{\dot{x}}(t_1,t_2)=4\cdot(1+t_1t_2).$$

Теорема 1.11.3 Взаємна кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ та її похідної $X'(t)=\dot{x}$ дорівнює частинній похідній від її кореляційної функції по відповідному аргументу (якщо індекс $\dot{x}$ записаний першим – диференціюємо за першим аргументом, інакше – за другим):

$$R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1},\ \text{або}\ R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}.$$

Д о в е д е н н я . За означенням взаємної кореляційної функції

$$R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}'(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right]=M\left[\frac{\partial\overset{\circ}{X}(t_1)}{\partial t_1}\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right]=$$

$$=M\left\{\frac{\partial[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_1}\right\}=\frac{\partial M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)]}{\partial t_1}=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}.$$

Доведення другої формули аналогічне.

Приклад 1.11.3 Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=t_1\cdot t_2\cdot e^{t_2-t_1}$ випадкової функції $X(t)$. Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$.

Р о з в ' я з а н н я . Скористаємося формулою

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}.$$

Шукана взаємна кореляційна функція дорівнюватиме

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\left(t_1\cdot t_2\cdot e^{t_2-t_1}\right)'_{t_2}=t_1\cdot\left(e^{t_2-t_1}+t_2\cdot e^{t_2-t_1}\right)=t_1\cdot e^{t_2-t_1}\cdot(1+t_2).$$

1.12 Інтеграл від випадкової функції та його характеристики

Інтегралом від випадкової функції $X(t)$ по відрізку $[0;t]$ називають границю в середньому квадратичному інтегральної суми при прямуванні до нуля максимальної довжини часткового інтервалу Δs_i:

$$Y(t)=\underset{\max\Delta s_i\to 0}{l.i.m.}\sum X(s_i)\cdot\Delta s_i=\int_0^t X(s)ds.$$

Нехай відомі характеристикам випадкової функції $X(t)$. Як знайти характеристики інтеграла випадкової функції? Відповідь дають наведені нижче теореми.

Теорема 1.12.1 Математичне сподівання інтеграла від випадкової функції дорівнює інтегралу її математичного сподівання. Якщо $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, то

$$m_y(t)=\int_0^t m_x(s)ds.$$

Д о в е д е н н я . За означенням інтеграла

$$Y(t) = \underset{\max \Delta s_i \to 0}{l.i.m.} \sum X(s_i) \cdot \Delta s_i .$$

Від обох частин рівності знаходимо математичне сподівання, змінюємо порядок знаходження математичного сподівання та границі:

$$M\left[Y(t)\right] = M\left[\underset{\max \Delta s_i \to 0}{l.i.m.} \sum X(s_i) \cdot \Delta s_i\right] = \underset{\max \Delta s_i \to 0}{l.i.m.} M\left[\sum X(s_i) \cdot \Delta s_i\right].$$

За теоремою додавання математичних сподівань

$$M\left[Y(t)\right] = \underset{\max \Delta s_i \to 0}{l.i.m.} \sum M[X(s_i) \cdot \Delta s_i] =$$

$$= \underset{\max \Delta s_i \to 0}{l.i.m.} \sum M[X(s_i)] \cdot \Delta s_i = \underset{\max \Delta s_i \to 0}{l.i.m.} \sum m_x(s) \cdot \Delta s_i .$$

Оскільки $M\left[Y(t)\right] = m_y(t)$ а вираз $\sum m_x(s) \cdot \Delta s_i$ є інтегральною сумою функції $m_x(t)$, остаточно одержимо

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s) ds .$$

Таким чином, для операцій знаходження математичного сподівання та інтегрування можна змінювати порядок інтегрування. Це видно, якщо записати доведений результат у вигляді

$$M\left[\int_0^t X(s) ds\right] = \int_0^t M[X(s)] ds .$$

Приклад 1.12.1 Знаючи математичне сподівання $m_x(t)=2t+3t^2$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$.

Р о з в ' я з а н н я . Шукане математичне сподівання

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(s) ds = \int_0^t (2s + 3s^2) ds = (s^2 + s^3)\Big|_0^t = t^2 + t^3 .$$

Теорема 1.12.2 Кореляційна функція інтеграла від випадкової функції $X(t)$ дорівнює подвійному інтегралу від її кореляційної функції. Якщо $Y(t) = \int_0^t X(s) ds$, то

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_x(s_1, s_2) ds_1 ds_2 .$$

Д о в е д е н н я . За означенням кореляційної функції

$$K_y(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{Y}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)\right].$$

Центрована випадкова функція дорівнює:

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = \int_0^t X(s) ds - \int_0^t m_x(s) ds = \int_0^t [X(s) - m_x(s)] ds ,$$

або

$$\overset{\circ}{Y}(t) = \int_0^t \overset{\circ}{X}(s)ds$$

Оскільки під знаком визначеного інтеграла змінну можна позначати довільною літерою, позначимо змінні інтегрування в інтегралі для знаходження $\overset{\circ}{Y}(t_1)$ за s_1, а в інтегрування в інтегралі для знаходження $\overset{\circ}{Y}(t_2)$ за s_2. Тоді

$$\overset{\circ}{Y}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_1) = \int_0^{t_1} \overset{\circ}{X}(s_1)ds_1 \cdot \int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(s_2)ds_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(s_1) \cdot \overset{\circ}{X}(s_2) \cdot ds_1 ds_2 /$$

Прирівняємо математичні сподівання обох частин рівності:

$$M[\overset{\circ}{Y}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_1)] = M\left[\int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(s_1) \cdot \overset{\circ}{X}(s_2) \cdot ds_1 ds_2\right].$$

Змінюємо порядок знаходження математичного сподівання та інтегрування і остаточно одержуємо:

$$K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1,s_2)ds_1 ds_2 \,.$$

Приклад 1.12.2 Знаючи кореляційну функцію $K_x(t_1,t_2)=9t_1^2 \cdot t_2^2+16 \cdot t_1^3 \cdot t_2^3$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

Р о з в ' я з а н н я . Виразимо шукану кореляційну функцію через подвійний інтеграл

$$K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(s_1,s_2)ds_1 ds_2 = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} (9s_1^2 s_2^2 + 16 s_1^3 s_2^3)ds_1 ds_2 \,.$$

Виконавши інтегрування, одержимо:

$$K_y(t_1,t_2) = t_1^3 t_2^3 (1 + t_1 t_2) \,.$$

Теорема 1.12.3 Взаємна кореляційна функція випадкової функції $X(t)$ та інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ дорівнює інтегралу від кореляційної функції випадкової функції $X(t)$:

а) $$R_{xy}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} K(t_1,s)ds \,,$$

б) $$R_{yx}(t_1,t_2) = \int_0^{t_1} K(s,t_2)ds \,.$$

Д о в е д е н н я . А) За означенням взаємної кореляційної функції

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{Y}(t_2)\right].$$

Оскільки $\overset{\circ}{Y}(t) = \int_0^t \overset{\circ}{X}(s)ds$, то:

$$R_{xy}(t_1,t_2)=M\left[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(s)ds\right]=M\left[\int_0^{t_2}\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(s)ds\right]=$$

$$=\int_0^{t_2}M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(s)]ds=\int_0^{t_2}K_x(t_1,s)ds\,.$$

Б) Доводиться аналогічно.

Приклад 1.12.3 Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=6\cdot t_1^{\,2}\cdot t_2$ випадкової функції $X(t)$. Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ та $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Р о з в ' я з а н н я . Скористаємося формулою

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}K(t_1,s)ds\,.$$

Шукана взаємна кореляційна функція дорівнюватиме

$$R_{xy}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}6t_1^{\,2}sds=3t_1^{\,2}t_2^2\,.$$

2 СТАЦІОНАРНІ ВИПАДКОВІ ПРОЦЕСИ [3]

Важливим класом випадкових процесів є стаціонарні процеси. Властивість стаціонарності означає незалежність деяких характеристик перерізів процесу від часу. Звичайно, для реальних процесів ця умова вельми обмежувальна, однак вона виконується досить часто, якщо розглядати процес на достатньо короткому інтервалі часу, протягом якого імовірнісні характеристики процесу змінюються мало.

Серед випадкових функцій доцільно виділити клас функцій, математичні сподівання яких зберігають одне й те ж постійне значення при всіх значеннях аргументу t і кореляційні функції яких залежать тільки від різниці аргументів $t_2–t_1$. Для таких функцій початок відліку аргументу t може бути вибрано довільно. Такі випадкові функції називають «стаціонарними в широкому сенсі» на відміну від випадкових функцій, «стаціонарних у вузькому сенсі» (всі характеристики цих функцій не залежать від самих значень аргументів, але залежать від їх взаємного розташування на осі t). З стаціонарності у вузькому сенсі випливає стаціонарність у широкому сенсі; зворотне твердження невірно.

Оскільки ми обмежуємося кореляційної теорією, яка використовує тільки дві характеристики (математичне сподівання і кореляційну функцію), далі розглянемо випадкові функції, стаціонарні в широкому сенсі, причому будемо їх називати просто стаціонарними.

Означення 2.1 *Стаціонарною* називають випадкову функцію $X(t)$, математичне сподівання якої є сталою при всіх значеннях аргументу t і кореляційна функція якої залежить тільки від різниці аргументів $t_2–t_1$.

З цього означення випливає,що:

1) кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є функцією одного аргументу $\tau = t_2 - t_1$, тобто

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(t_2 - t_1) = k_x(\tau);$$

2) дисперсія стаціонарної випадкової функції стала при всіх значеннях аргументу t і дорівнює значенням її кореляційної функції на початку координат ($\tau = 0$), тобто

$$D_x(t) = K_x(t, t) = k_x(t - t) = k_x(0).$$

2.1 Властивості кореляційної функції стаціонарної випадкової функції

В л а с т и в і с т ь 1 Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції є парна функція:

$$k_x(\tau) = k_x(-\tau).$$

В л а с т и в і с т ь 2 Абсолютна величина кореляційного функції стаціонарної випадкової функції не перевищує її значення в початку координат:

$$\left|k_x(\tau)\right| \le k_x(0).$$

2.2 Нормована кореляційна функція стаціонарної випадкової функції

Крім кореляційної функції для оцінки ступеня залежності перетинів стаціонарної випадкової функції використовують ще одну характеристику – нормовану кореляційну функцію. Раніше нормована кореляційна функція була визначена так:

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \cdot \sigma_x(t_2)}.$$

Зокрема, для стаціонарної функції чисельник і знаменник цього дробу мають вигляд:

$$K_x(t_1, t_2) = k_x(\tau), \quad \sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)} = \sqrt{k_x(0)}.$$

Означення 2.2.1 *Нормованою кореляційної функцією стаціонарної випадкової функції* називають невипадкову функцію аргументу τ :

$$\rho_x(\tau) = k_x(\tau) / k_x(0).$$

Абсолютна величина нормованої кореляційної функції стаціонарної випадкової функції не перевищує одиниці.

2.3 Стаціонарно зв'язані випадкові функції

Означення 2.3.1 *Стаціонарно зв'язаними* називають дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$, якщо їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = r_{xy}(\tau).$$

Взаємна кореляційна функція стаціонарно зв'язаних випадкових функцій має наступну властивість:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$

Ця рівність випливає з властивості 1 взаємної кореляційної функції (при одночасній перестановці індексів і аргументів взаємна кореляційна функція не змінюється):

$$r_{xy}(t_2 - t_1) = r_{yx}(t_1 - t_2), \quad r_{xy}(\tau) = r_{yx}(-\tau).$$

Якщо кожна з двох випадкових функцій стаціонарна, то звідси ще не означає, що їх взаємна кореляційна функція залежить тільки від різниці аргументів.

Означення 2.3.2 *Стаціонарними і стаціонарно зв'язаними* називають дві стаціонарні випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$, взаємна кореляційна функція яких залежить тільки від різниці аргументів $\tau = t_2 - t_1$.

2.4 Кореляційна функція похідної та інтеграла стаціонарної функції

Теорема 2.4 Кореляційна функція похідної $X'(t)$ диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ дорівнює другій похідній від її кореляційної функції, взятої зі знаком мінус:

$$k_{\dot{x}}(\tau) = -k''_x(\tau).$$

Теорема 2.4.2 Взаємна кореляційна функція диференційованої стаціонарної випадкової функції $X(t)$ і її похідної $X'(t) = \dot{x}$ дорівнює першій похідній від кореляційної функції $k_x(\tau)$, взятої зі своїм (протилежним) знаком, якщо індекс $\dot{x}$ стоїть на другому (першому) за порядком місці:

$$r_{x\dot{x}}(\tau) = k'_x(\tau); \quad r_{\dot{x}x}(\tau) = -k'_x(\tau).$$

Передбачається, що $\tau = t_2 - t_1$.

Оскільки взаємна кореляційна функція $r_{x\dot{x}}(\tau)$ залежить тільки від τ, то стаціонарна випадкова функція і її похідна стаціонарно зв'язані.

Теорема 2.4.3 Кореляційна функція інтеграла

$$Y(t) = \int_0^t X(s)ds$$

від стаціонарної випадкової функції дорівнює:

$$K_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau) k_x(\tau) d\tau - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \tau) k_x(\tau) d\tau + \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) k_x(\tau) d\tau.$$

Н а с л і д о к Дисперсія інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ від стаціонарної випадкової функції дорівнює:

$$D_y(t) = 2\int_0^t (t-\tau)k_x(\tau)d\tau .$$

2.5 Ергодичні стаціонарні випадкові процеси

Серед стаціонарних випадкових функцій можна виділіть клас функцій, оцінка характеристик яких шляхом усереднення безлічі реалізацій рівносильна усереднюванню за часом тільки однієї реалізації досить великої тривалості.

Означення 2.5.1 Стаціонарну випадкову функцію $X(t)$ називають *ергодичною*, якщо її характеристики, що знайдені усередненням безлічі реалізацій, збігаються з відповідними характеристиками, отриманими усередненням за часом однієї реалізації $x(t)$, яка спостерігалася на інтервалі $(0, T)$ досить великої тривалості.

Достатня умова ергодичності стаціонарної випадкової функції $X(t)$ відносно математичного сподівання полягає в тому, що її кореляційна функція $k_x(\tau)$ при $\tau \to \infty$ прямує до нуля:

$$\lim_{\tau\to\infty} k_x(\tau) = 0.$$

Достатня умова ергодичності стаціонарної випадкової функції $X(t)$ відносно кореляційної функції полягає в тому, що кореляційна функція $k_y(\tau)$ при $\tau \to \infty$ прямує до нуля:

$$\lim_{\tau\to\infty} k_y(\tau) = 0.$$

де

$$Y(t,\tau) = \overset{\circ}{X}(t)\overset{\circ}{X}(t+\tau).$$

У якості оцінки математичного сподівання ергодичної стаціонарної випадкової функції $X(t)$ по реалізації $x(t)$, що спостерігалася на інтервалі $(0, T)$ приймають середнє за часом її значення:

$$m_x^* = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt.$$

У якості оцінки кореляційної функції ергодичної стаціонарної випадкової функції приймають

$$k_x^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau} \overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{x}(t+\tau)dt.$$

3 ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ'ЯЗАННЯ [4]

Задача 1 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)=U\cdot e^t$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=10$.

Відповідь: $m_x(t)=10\cdot e^t$.

Задача 2 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)=U\cdot\sin5t+V\cos5t$, де U та V – випадкові величини, причому $M(U)=3$, $M(V)=4$.

Відповідь: $m_x(t)=3\cdot\sin5t+4\cos5t$.

Задача 3 Задана дисперсія $D_x(t)$ випадкової функції $X(t)$. Знайдіть дисперсію випадкових функцій $Y(t)= X(t)+\sin t$ та $Z(t)=X(t)\cdot\sin t$.

Відповідь: $D_x(t)= D_x(t)$, $D_z(t)= D_x(t)\cdot\sin^2 t$.

Задача 4 Відома кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$. Знайдіть кореляційні функції випадкових функцій $Y(t)=X(t)+\sin t$ та $Z(t)=X(t)\cdot\sin t$.

Відповідь: $K_y(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)$, $K_z(t_1,t_2)=K_x(t_1,t_2)\cdot\sin t_1\cdot\sin t_2$.

Задача 5 Задана випадкова функція $X(t)=U\cdot\cos2t$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=4$, $D(U)=5$. Знайдіть математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію.

Відповідь: $m_x(t)=4\cos2t$, $K_x(t_1,t_2)=5\cdot\cos3t_1\cdot\cos3t_2$, $D_x(t)=5\cdot\cos^2 3t_1$.

Задача 6 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, знаючи її кореляційну функцію $K_x(t_1,t_2)=3\cdot\cos2(t_2–t_1)$.

Відповідь: $\rho_x(t_1,t_2)=\cos2(t_2–t_1)$.

Задача 7 Знайдіть взаємну кореляційну функцію, нормовану взаємну кореляційну функцію двох випадкових функції $X(t)=(t–2)\cdot U$ та $Y(t)=(t^2+2)\cdot U$, де U – випадкова величина, причому $D(U)=2$.

Відповідь: $R_{xy}(t_1,t_2)=2\cdot(t_1–2)\cdot(t_2^2+2)$, $\rho_x(t_1,t_2)=1$.

Задача 8 Задані випадкові функції $X(t)=(t–1)\cdot U$ та $Y(t)=(t^2+1)\cdot V$, де U, V – некорельовані випадкові величини, причому $M(U)=3$, $D(U)=2$, $M(V)=5$, $D(V)=6$. Знайдіть математичне сподівання, кореляційну функцію та дисперсію суми цих функцій $Z(t)=X(t)+Y(t)$.

Відповідь: $m_z(t)=3(t–1)+5(t^2+1)$, $K_z(t_1,t_2)=2(t_1–1)(t_2–1)+6(t_1^2+1)(t_2^2+1)$, $D_z(t)=2(t–1)^2+6(t^2+1)^2$.

Задача 9 Знаючи математичне сподівання $m_x(t)=t^2+e^t$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть математичне сподівання її похідної.

Відповідь: $m_{\dot{x}}(t)=2t+e^t$.

Задача 10 Знаючи математичне сподівання $m_x(t)=t^3+5$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)=tX'(t)+t^2$.

Відповідь: $m_{\dot{y}}(t)=3t^3+t^2$.

Задача 11 Знаючи кореляційну функцію $K_x(t_1,t_2)=5e^{-(t_2-t_1)^2}$ випадкової функції $X(t)$, Знайдіть кореляційну функцію її похідної.

Відповідь: $K_{\dot{x}}(t_1,t_2)=10\cdot e^{-(t_2-t_1)^2}\cdot\left(1-2(t_2-t_1)^2\right)$.

Задача 12 Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=t_1^2\cdot t_2^2\cdot e^{t_2-t_1}$ випадкової функції $X(t)$. Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$.

Відповідь: $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)=t_1\cdot t_2^2\cdot e^{t_2-t_1}\cdot(2+t_1)$.

Задача 13 Задане математичне сподівання $m_x(t)=3t^2+1$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Відповідь: $m_y(t)=t^3+t$.

Задача 14 Задана випадкова функція $X(t)=U\cdot\cos^2 t$, де U – випадкова величина, причому $M(U)=2$. Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)=t^2\int_0^t X(s)ds$.

Відповідь: $m_y(t)=0.5\cdot t^2\cdot(2t+\sin 2t)$.

Задача 15 Знаючи кореляційну функцію $K_x(t_1,t_2)=\cos(\omega\cdot t_1)\cdot\cos(\omega\cdot t_2)$ випадкової функції $X(t)$, знайдіть кореляційну функцію та дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Відповідь: $K_y(t_1,t_2)=\dfrac{\sin\omega t_1\cdot\sin\omega t_2}{\omega^2}$, $D_y(t)=\dfrac{\sin^2\omega t}{\omega^2}$.

Задача 16 Задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=6\cdot t_1\cdot t_2^2$ випадкової функції $X(t)$. Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{xy}(t_1,t_2)$ і $R_{yx}(t_1,t_2)$ випадкових функцій $X(t)$ та $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

Відповідь: $R_{xy}(t_1,t_2)=2t_1t_2^3$, $R_{yx}(t_1,t_2)=3t_1^2t_2^2$.

Задача 17 Чи є стаціонарними випадкові функції: а) $X(t)=U\cdot\cos 2t$, U – випадкова величина, $M(U)=4$; б) $X(t)=t^3U$, U – випадкова величина, $M(U)=0$; б) $X(t)=t^3U$, U – випадкова величина, $M(U)=0$, $D(U)=2$; в) $X(t)=t^3U$, U – випадкова величина, $M(U)=0$, $D(U)=0$.

Відповідь: а) Випадкова функція $X(t)=U\cdot\cos 2t$ – нестаціонарна, $m_x(t)=4\cos 2t\neq\text{const}$; б) випадкова функція $X(t)=t^3U$ – нестаціонарна, хоча $m_x(t)=0=\text{const}$, але кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=2\cdot t_1^3\cdot t_2^3$ залежить не від різниці аргументів, а від кожного з них; б) випадкова функція $X(t)=t^3U$ – стаціонарна, $m_x(t)=0=\text{const}$, $K_x(t_1,t_2)=0=0\cdot(t_2-t_1)$ залежить від різниці аргументів.

Задача 18 Задана випадкова функція $X(t)=t+U\cdot\cos 2t+V\cdot\sin 2t$, U, V – випадкові величини, $M(U)=M(V)=0$, $D(U)=D(V)=4$, $M(UV)=0$. Довести, що: а) $X(t)$ нестаціонарна функція; б) $X'(t)$ – стаціонарна.

Відповідь: а) випадкова функція $X(t)$ нестаціонарна, $m_x(t)=t\neq\text{const}$;

б) випадкова функція $X'(t)$ – стаціонарна, $m_{\dot{x}}(t)=1=const$, $K_{\dot{x}}(t_1,t_2)=$ $=16\cos(t_2-t_1)$.

Задача 19 Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=D\cdot e^{-|\tau|}\cdot(1+|\tau|)$ стаціонарної випадкової функції *X*(*t*). Для похідної *X'*(*t*) Знайдіть: а) кореляційну функцію; б) дисперсію.

Вказівка. Розглянути випадки випадки: 1) τ≥0, 1) τ<0, а потім об'єднати їх.

В і д п о в і д ь : а) $k_{\dot{x}}(\tau)=D\cdot e^{-|\tau|}\cdot(1-|\tau|)$; б) $D_{\dot{x}}=D$.

Задача 20 Задана кореляційна функція $k_x(\tau)=e^{-|\tau|}$ стаціонарної випадкової функції *X*(*t*). Знайдіть дисперсію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$.

В і д п о в і д ь : $D_y(t)=2(t+e^{-t}-1)$.

3.1 Запитання для самоперевірки

1 Дайте означення випадкового процесу та випадкової функції.

2 Що таке перетин випадкової функції та її реалізація?

3 Дайте означення математичного сподівання та дисперсії випадкової функції, назвіть їх властивості.

4 Дайте означення кореляційної функції, нормованої кореляційної функції, назвіть їх властивості.

5 Як, знаючи кореляційну функцію випадкової функції, знайти її дисперсію?

6 Дайте означення взаємної кореляційної функції, нормованої взаємної кореляційної функції.

7 Які функції називають корельованими, некорельованими?

8 Назвіть характеристики суми випадкових функцій, їх властивості та наслідки.

9 Похідна випадкової функції, її характеристики та властивості.

10 Інтеграл від випадкової функції, його характеристики та властивості.

11 Дайте означення стаціонарних випадкових процесів та функцій.

12 Кореляційна функція стаціонарної випадкової функції та її властивості.

13 Що таке стаціонарно пов'язані випадкові функції, їх властивості

14 Ергодичні стаціонарні випадкові функції.

4 ТЕСТИ ДЛЯ МОДУЛЬНОГО КОНТРОЛЯ [5]

Тест-1

1 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t) = ut + 3$, $M(u) = 2$, $\sigma(u) = 5$. Обчисліть: $m_x(1)$.

а) 2 ; б) 5 ; в) 10 ; г) 15 .

2 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t) = ut + 3$, $M(u) = 2$, $\sigma(u) = 5$. Обчисліть: $K(1;2)$.

а) 8 ; б) 10 ; в) 20 ; г) 50 .

3 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2) = 4\cos(t_1 - t_2)$. Обчисліть: $\rho_x(\pi/2, \pi/6)$.

а) 0,5 ; б) 0,2 ; в) 0,1 ; г) 0,4 .

4 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, якщо $X(t) = t \cdot u$, $Y(t) = t^2 \cdot u$, $D(u) = 2$. Обчисліть: $R_{xy}(1;2)$.

а) 1 ; б) 8 ; в) 4 ; г) 3 .

5 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t) = (t-1)u, \quad Y(t) = (t+2)v, \quad M(u) = 3, \ M(v) = 6.$$

Знайдіть $M(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $m_z(1)$.

а) 18 ; б) 23 ; в) 30 ; г) 12 .

6 Задані дві випадкові функції X(t) і Y(t) та їх характеристики:

$$X(t) = (t-1)u, \quad Y(t) = (t+2)v, \quad D(u) = 0{,}2, \ D(v) = 5.$$

Знайдіть $D(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $D_z(1)$.

а) 38 ; б) 45 ; в) 56 ; г) 87 .

7 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$, якщо задано математичне сподівання випадкової функції $X(t)$: $Y(t) = t^2 \cdot X' - 4t$, $m_x(t) = 5t^3 + 1$. Обчисліть: $m_y(1)$.

а) 11 ; б) 22 ; в) 33 ; г) 11 .

8 Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = 2t_1 \cdot t_2 + 9t_1^2 \cdot t_2^2$. Обчисліть: $K_x(1;2)$.

а) 28 ; б) 43 ; в) 74 ; г) 85 .

9 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(t_1, t_2) = 2(t_1 - 3) \cdot (t_2 - 3) + 5t_1^2 \cdot t_2^2 .$$

Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)$. Обчисліть: $R_{x\dot{x}}(1;2)$.

а) 16 ; б) 75 ; в) 32 ; г) 12 .

10 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(t_1, t_2) = 2(t_1 - 3) \cdot (t_2 - 3) + 5t_1^2 \cdot t_2^2 .$$

Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{\dot{x}x}(t_1, t_2)$. Обчисліть: $R_{\dot{x}x}(1;2)$.

а) 34 ; б) 65 ; в) 92 ; г) 38 .

11 Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$ випадкової функції $X(t)$, якщо $m_x(t) = 3t^2 + 1$. Обчисліть: $m_y(1)$.

а) 3 ; б) 2 ; в) 6 ; г) 8 .

12 Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1, t_2) = 2t_1 \cdot t_2$. Обчисліть: $K_y(1;2)$.

а) 7 ; б) 3 ; в) 9 ; г) 2 .

13 Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{xy}(t_1, t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція: $K_x(t_1, t_2) = 3t_1^2 \cdot t_2^2$. Обчисліть: $R_{xy}(1;3)$.

а) 27 ; б) 76 ; в) 24 ; г) 59 .

14 Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{yx}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція: $K_x(t_1,t_2)=3t_1^2\cdot t_2^2$. Обчисліть: $R_{yx}(1;3)$.

а) 5 ; б) 9 ; в) 2 ; г) 4 .

Тест-2

1 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=u\sin 5t$, $M(u)=3,\ \sigma(u)=8$. Обчисліть: $m_x(\pi/30)$.

а) 2,4 ; б) 1,5 ; в) 0,8 ; г) 5,2 .

2 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=u\sin 5t$, $M(u)=3,\ \sigma(u)=8$. Обчисліть: $K(\pi/30;\pi/10)$.

а) 32 ; б) 54 ; в) 39 ; г) 64 .

3 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=8e^{-3(t_1-t_2)^2}$. Обчисліть: $\rho_x(2;1)$.

а) exp(-2) ; б) ln2 ; в) exp(-3) ; г) ln3 .

4 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, якщо $X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+2)u,\quad D(u)=3$. Обчисліть: $R_{xy}(2;1)$.

а) 3 ; б) 5 ; в) 2 ; г) 1 .

5 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+3)v,\quad M(u)=4,\ M(v)=5.$$

Знайдіть $M(Z)$ якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $m_z(1)$.

а) 45 ; б) 88 ; в) 53 ; г) 20 .

6 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+3)v,\quad D(u)=0{,}3,\ D(v)=2.$$

Знайдіть $D(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $D_z(1)$.

а) 32 ; б) 23 ; в) 75 ; г) 69 .

7 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$, якщо задано математичне сподівання випадкової функції $X(t)$: $Y(t) = 2\cos t + t \cdot X'$, $m_x(t) = 3\sin 4t$. Обчисліть: $m_y(\pi)$.

а) -3 ; б) -2 ; в) 6 ; г) -4 .

8 Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1, t_2) = 3t_1^2 \cdot t_2^2 + 4t_1^3 \cdot t_2^3$. Обчисліть: $K_x(1;2)$.

а) 135 ; б) 109 ; в) 168 ; г) 155 .

9 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(t_1, t_2) = 4\sin 3t_1 \cdot \sin 3t_2$$

Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{x\dot{x}}(t_1, t_2)$. Обчисліть: $R_{x\dot{x}}(\pi/2; \pi/3)$.

а) 12 ; б) 36 ; в) 47 ; г) 50 .

10 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(t_1, t_2) = 4\sin 3t_1 \cdot \sin 3t_2$$

Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{\dot{x}x}(t_1, t_2)$. Обчисліть: $R_{\dot{x}x}(\pi/2; \pi/3)$.

а) 21 ; б) 0 ; в) 2 ; г) 75 .

11 Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ випадкової функції $X(t)$, якщо $m_x(t) = \cos 2t + 3$. Обчисліть: $m_y(\pi)$.

а) –ln2 б) 3π ; в) 5π ; г) ln3 .

12 Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1, t_2) = \cos 2t_1 \cdot \cos 2t_2$. Обчисліть: $K_y(\pi/4; \pi/4)$.

а) 0,25 ; б) 0,75 ; в) 0,15 ; г) 0,2 .

13 Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=2t_1^3\cdot t_2^3$. Обчисліть: $R_{xy}(1;2)$.

а) 2 ; б) 8 ; в) 10 ; г) 14 .

14 Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{yx}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=2t_1^3\cdot t_2^3$. Обчисліть: $R_{yx}(1;2)$.

а) 4 ; б) 7 ; в) 9 ; г) 12 .

Тест-3

1 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=u\cos 6t$, $M(u)=4$, $\sigma(u)=3$. Обчисліть: $m_x(\pi/18)$.

а) 4 ; б) 2 ; в) 8 ; г) 3 .

2 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=u\cos 6t$, $M(u)=4$, $\sigma(u)=3$. Обчисліть: $K(\pi/18;0)$.

а) 1,3 ; б) 2,8 ; в) 1,4 ; г) 4,5 .

3 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=t_1\cdot t_2 e^{4(t_1-t_2)^2}$. Обчисліть: $\rho_x(2;1)$.

а) exp(4) ; б) 3π ; в) ln5 ; г) exp(-2) .

4 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, якщо $X(t)=t^2\cdot u$, $Y(t)=t\cdot u$, $D(u)=4$. Обчисліть: $R_{xy}(2;1)$.

а) 20 ; б) 16 ; в) 35 ; г) 10 .

5 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t)=(t+2)u,\quad Y(t)=(t^2-3)v,\quad M(u)=6,\ M(v)=4.$$

Знайдіть $M(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $m_z(1)$.

а) 10 ; б) 5 ; в) 18 ; г) 15 .

6 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t) = (t+2)u, \quad Y(t) = (t^2 - 3)v, \ D(u) = 0{,}5, \ D(v) = 7 .$$

Знайдіть $D(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$. u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $D_z(1)$.

а) 12,5 ; б) 32,5 ; в) 56,5 ; г) 45,5 .

7 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$, якщо задано математичне сподівання випадкової функції $X(t)$: $Y(t) = t^2 \cdot X' - 7t$, $m_x(t) = 8t^3 + 3$. Обчисліть: $m_y(1)$.

а) 23 ; б) 13 ; в) 17 ; г) 64 .

8 Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2) = 4t_1 \cdot t_2 + 5t_1^3 \cdot t_2^3$. Обчисліть: $K_x(1;2)$.

а) 235 ; б) 184 ; в) 169 ; г) 137 .

9 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1,t_2) = e^{-2(t_1 - t_2)^2}$. Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$. Обчисліть: $R_{x\dot{x}}(1;2)$.

а) -ln2 ; б) -4exp(-2) ; в) 4π г) 3exp(-3) .

10 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1,t_2) = e^{-2(t_1 - t_2)^2}$. Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$. Обчисліть: $R_{\dot{x}x}(1;2)$.

а) 3exp(-3) ; б) ln2 ; в) 4π ; г) 4exp(-2) .

11 Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$ випадкової функції $X(t)$, якщо $m_x(t) = 4t^3 + 5$. Обчисліть: $m_y(1)$.

а) 2 ; б) 6 ; в) 8 ; г) 10 .

12 Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$,якщо задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1,t_2)=3t_1^2\cdot t_2^2$. Обчисліть: $K_y(1;3)$.

а) 21 ; б) 4 ; в) 9 ; г) 12 .

13 Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{xy}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2$. Обчисліть: $R_{xy}(1;2)$.

а) 1 ; б) 5 ; в) 9 ; г) 8 .

14 Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{yx}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2$. Обчисліть: $R_{yx}(1;2)$.

а) 4 ; б) 6 ; в) 7 ; г) 9 .

Тест-4

1 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=ut-2$, $M(u)=5$, $\sigma(u)=1$. Обчисліть: $m_x(2)$.

а) 1 ; б) 2 ; в) 8 ; г) 4 .

2 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=ut-2$, $M(u)=5$, $\sigma(u)=1$. Обчисліть: $K(2;3)$.

а) 6 ; б) 9 ; в) 10 ; г) 12 .

3 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=3\cos(t_1-t_2)$. Обчисліть: $\rho_x(0;\pi/2)$.

а) -1 ; б) 0 ; в) 4 ; г) -3 .

4 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, якщо $X(t) = (t+1)u$, $Y(t) = (t^2 - 2)u$, $D(u) = 5$. Обчисліть: $R_{xy}(1;2)$.

а) 5 ; б) 8 ; в) 2 ; г) 4 .

5 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t) = (t-2)u, \quad Y(t) = (t+3)v, \quad M(u) = 5, \ M(v) = 2.$$

Знайдіть $M(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $m_z(2)$.

а) 3 ; б) 10 ; в) 9 ; г) 24 .

6 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:

$$X(t) = (t-2)u, \quad Y(t) = (t+3)v, \quad D(u) = 0{,}1, \ D(v) = 9.$$

Знайдіть $D(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, u, v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $D_z(2)$.

а) 175 ; б) 140 ; в) 105 ; г) 225 .

7 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$, якщо задано математичне сподівання випадкової функції $X(t)$:

$$Y(t) = 4e^{-3t} \cdot X' + 2t^2, \qquad m_x(t) = 5\cos 7t. \qquad \text{Обчисліть: } m_y(\pi).$$

а) $2\pi^2$; б) $3\pi^2$; в) $2\pi^3$; г) $5\pi^3$.

8 Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2) = 3t_1 \cdot t_2 + 8t_1^2 \cdot t_2^2$. Обчисліть: $K_x(1;2)$.

а) 34 ; б) 67 ; в) 57 ; г) 98 .

9 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1,t_2) = 2t_1 \cdot t_2 \cdot e^{3(t_1 - t_2)^2}$. Знайдіть взаємну кореляційну функції $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$. Обчисліть: $R_{x\dot{x}}(1;0)$.

а) 2exp(3) ; б) ln3 ; в) 3exp(2) ; г) $3\pi^2$.

10 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1,t_2) = 2t_1 \cdot t_2 \cdot e^{3(t_1 - t_2)^2}$. Знайдіть взаємну кореляційну функції $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$. Обчисліть: $R_{\dot{x}x}(1;0)$.

а) 1 ; б) 0 ; в) 2 ; г) 3 .

11 Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$ випадкової функції $X(t)$, якщо . $m_x(t)=6t^2+5$ Обчисліть: $m_y(2)$.

а) 12 ; б) 14 ; в) 26 ; г) 23 .

12 Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$,якщо задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$: $K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2$. Обчисліть: $K_y(1;2)$.

а) 85 ; б) 3 ; в) 43 ; г) 26 .

13 Знайдіть взаємну кореляційну функції $R_{xy}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=6t_1^2\cdot t_2^2$. Обчисліть: $R_{xy}(1;3)$

а) 54 ; б) 78 ; в) 32 ; г) 95 .

14 Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{yx}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int\limits_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=6t_1^2\cdot t_2^2$. Обчисліть: $R_{yx}(1;3)$.

а) 21 ; б) 45 ; в) 18 ; г) 39 .

Тест-5

1 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(u)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(u)$ випадкової величини u. Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $X(t)$, якщо $X(t)=ut+5$, $M(u)=7$, $\sigma(u)=4$. Обчисліть: $m_x(2)$.

а) 19 б) 33 в) 65 г)14

2 Задана випадкова функція X(t), математичне сподівання M(u) та середнє квадратичне відхилення σ(u) випадкової величини u. Знайдіть кореляційну функцію випадкової функції X(t), якщо $X(t)=ut+5$,$M(u)=7$, $\sigma(u)=4$. Обчисліть: $K(1;2)$.

а) 15 б) 74 в) 32 г) 67

3 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції X(t), якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=4e^{-7(t_1-t_2)^2}$. Обчисліть: $\rho_x(1;2)$.

а) exp(-7) б) ln2 в) exp(-3) г) 2pi

4 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій X(t) і Y(t), якщо

$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=6$. Обчисліть: $R_{xy}(1;2)$.

а) 16 б) 24 в) 25 г) 49

5 Задані дві випадкові функції X(t) і Y(t) та їх характеристики:

$$X(t)=(t^2-4)u,\quad Y(t)=(t+5)v,\quad M(u)=3,\ M(v)=7.$$

Знайдіть $M(Z)$ якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, u ,v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $m_z(2)$.

а) 49 б) 35 в) 86 г) 21

6 Задані дві випадкові функції X(t) і Y(t) та їх характеристики:

$$X(t)=(t^2-4)u,\quad Y(t)=(t+5)v,\quad D(u)=0{,}8,\ D(v)=4.$$

Знайдіть $D(Z)$, якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, u ,v – не корельовані випадкові величини. Обчисліть: $D_z(2)$.

а) 123 б) 196 в) 144 г)185

7 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції Y(t), якщо задано математичне сподівання випадкової функції X(t): $Y(t)=t^2\cdot X'-5t,\quad m_x(t)=6t^3+2$. Обчисліть: $m_y(1)$.

а) 13 б) 15 в) 18 г) 50

8 Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції X(t), якщо відома її кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2+7t_1^3\cdot t_2^3$. Обчисліть: $K_x(1;2)$.

а) 234 б) 284 в) 127 г) 320

9 Задана кореляційна функція випадкової функції X(t): $K_x(t_1,t_2)=2\cos 5t_1\cdot\cos 5t_2$.

Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$. Обчисліть: $R_{x\dot{x}}(\pi;\pi/2)$.

а) 30 б) 40 в) 10 г) 20

10 Задана кореляційна функція випадкової функції X(t): $K_x(t_1,t_2)=2\cos 5t_1\cdot\cos 5t_2\cdot$

Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$. Обчисліть: $R_{\dot{x}x}(\pi;\pi/2)$.

а) 4 б) 0 в) -2 г) 8

11 Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ випадкової функції X(t), якщо $m_x(t)=4t^2+7$. Обчисліть: $m_y(3)$.

а) 57 б) 81 в) 32 г) 11

12 Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$,якщо задана кореляційна функція випадкової функції X(t): $K_x(t_1,t_2)=7t_1\cdot t_2$. Обчисліть: $K_y(1;2)$.

а) 9 б) 8 в) 7 г) 2

13 Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{XY}(t_1,t_2)$ випадкової функції X(t) і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2$.Обчисліть: $R_{XY}(1;3)$.

а) 36 б) 25 в) 74 г) 63

14 Знайдіть взаємну кореляційну функцію $R_{YX}(t_1,t_2)$ випадкової функції X(t) і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2$.Обчисліть: $R_{YX}(1;3)$.

а) 45 б) 12 в) 36 г) 55

5 ЗРАЗОК ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

1 Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(U)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(U)$ випадкової величини U. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію, кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо

$$X(t) = U \cdot \sin 12t, \quad M(U) = 10, \quad \sigma(U) = 8.$$

Обчисліть: $m_x(\pi/24)$; $K(\pi/36; \pi/24)$; $D_x(\pi/24)$.

Розв'язання.

$$m_x(t) = M[X(t)] = M[U \cdot \sin 12t] = \sin 12t \cdot M[U] = 10\sin 12t.$$

$$m_x(\pi/24) = 10\sin\frac{\pi}{2} = 10.$$

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = U\sin 12t - 10\sin 12t = \sin 12t \cdot (U - 10).$$

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = \sin 12t_1 \cdot (U - 10); \quad \overset{\circ}{X}(t_2) = \sin 12t_2 \cdot (U - 10).$$

$$D(U) = \sigma^2(U) = 64.$$

$$K_x(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)] = M[\sin 12t_1 \cdot (U - 10) \cdot \sin 12t_2 \cdot (U - 10)] =$$

$$= \sin 12t_1 \cdot \sin 12t_2 \cdot M[(U - 10)^2] = \sin 12t_1 \cdot \sin 12t_2 \cdot D(U) = 64\sin 12t_1 \cdot \sin 12t_2.$$

$$K_x(\pi/36, \pi/24) = 64\sin\frac{\pi}{3} \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 32\sqrt{3}.$$

$$D_x(t) = D[X(t)] = K_x(t, t).$$

$$D_x(t) = 64\sin 12t \cdot \sin 12t = 64 \cdot \sin^2 12t.$$

$$D_x(\pi/24) = 64 \cdot \sin^2\frac{\pi}{2} = 64.$$

Відповідь: $m_x(\pi/24) = 10$; $K_x(\pi/36, \pi/24) = 32\sqrt{3}$; $D_x(\pi/24) = 64$.

2 Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція:

$$K_x(t_1, t_2) = 4\cos(t_1 - t_2).$$

Обчисліть: $\rho_x(\pi/2; \pi/6)$.

Розв'язання.

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{K_x(t_1, t_2)}{\sqrt{K_x(t_1, t_1)} \cdot \sqrt{K_x(t_2, t_2)}}.$$

$$\rho_x(t_1, t_2) = \frac{4\cos(t_1 - t_2)}{\sqrt{4\cos(t_1 - t_1)} \cdot \sqrt{4\cos(t_2 - t_2)}} = \cos(t_1 - t_2).$$

$$\rho_x(\pi/2; \pi/6) = \cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5.$$

Відповідь: $\rho_x(\pi/2; \pi/6) = 0{,}5$.

3 Знайдіть взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, якщо

$$X(t) = (t+25)\cdot U, \quad Y(t) = (t^2-16)\cdot U, \quad D(U) = 10.$$

Обчисліть: $R_{xy}(0;5)$.

Розв'язання.

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)].$$

$$m_x(t) = M[X(t)] = M[(t+25)\cdot U] = (t+25)\cdot M[U];$$

$$m_y(t) = M[Y(t)] = M[(t^2-16)\cdot U] = (t^2-16)\cdot M[U];$$

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) = (t+25)\cdot U - (t+25)\cdot M[U] = (t+25)(u - M[U]);$$

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t) = (t^2-16)\cdot U - (t^2-16)\cdot M[U] = (t^2-16)(u - M[U]).$$

$$\overset{\circ}{X}(t_1) = (t_1+25)(U - M[U]), \quad \overset{\circ}{Y}(t_2) = ({t_2}^2-16)(U - M[U]).$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{Y}(t_2)] = M[(t_1+25)(U-M[U])\cdot({t_2}^2-16)(U-M[U])] =$$

$$= (t_1+25)\cdot({t_2}^2-16)\cdot M[(U-M(U))^2] =$$

$$= (t_1+25)\cdot({t_2}^2-16)\cdot D(U) = 10\cdot(t_1+25)\cdot({t_2}^2-16).$$

$$R_{xy}(t_1,t_2) = 10\cdot(t_1+25)\cdot({t_2}^2-16);$$

$$R_{xy}(0;5) = 10\cdot(0+25)\cdot(25-16) = 2250.$$

Відповідь: $R_{xy}(0;5) = 2250$.

4 Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики:
$X(t) = (t^2-1)U, \quad Y(t) = (t+3)V, \quad M(U) = 2, \quad M(V) = 3, \quad D(U) = 4, \quad D(V) = 5.$
Знайдіть $M(Z)$, $D(Z)$, якщо $Z(t) = X(t) + Y(t)$, якщо U,V – некорельовані випадкові величини. Обчисліть: $m_z(1)$; $D_z(2)$.

Розв'язання.

$$M(Z) = M[X(t)+Y(t)] = M[X(t)] + M[Y(t)] = M[(t^2-1)U] + M[(t+3)V] =$$
$$= (t^2-1)\cdot M(U) + (t+3)\cdot M(V) = (t^2-1)\cdot 2 + (t+3)\cdot 3.$$

$$m_z(t) = M(Z) = 2(t^2-1) + 3(t+3) = 2t^2 + 3t + 7; \quad m_z(1) = 12.$$

$$K_z(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2). \quad (R_{xy} = 0)$$

$$K_x(t_1,t_2) = D(u)\cdot({t_1}^2-1)({t_2}^2-1) = 4({t_1}^2-1)({t_2}^2-1).$$

$$K_y(t_1,t_2) = D(v)\cdot(t_1+3)(t_2+3) = 5(t_1+3)(t_2+3).$$

$$K_z(t_1,t_2)=4(t_1^{\,2}-1)(t_2^{\,2}-1)+5(t_1+3)(t_2+3).$$

$$D(z)=K_z(t,t)=4(t_1^{\,2}-1)^2+5(t_1+3)^2; \quad D(2)=161.$$

Відповідь: $m_z(1)=12$; $D(2)=161$.

5 Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$, якщо задано математичне сподівання випадкової функції $X(t)$:

$$Y(t)=t\cdot X'+t^3, \quad m_x(t)=t^2+3.$$

Обчисліть: $m_y(3)$.

Розв'язання.

$$M[Y(t)]=M[t\cdot X'+t^3]=M[t\cdot X']+M[t^3]=t\cdot M[X']+t^3\cdot M[1]=t\cdot m_{\dot{x}}(t)+t^3.$$

$$M[X']=m_{\dot{x}}(t)=(m_x(t))'=2t; \quad M[1]=1.$$

$$m_y(t)=M[Y(t)]=t\cdot 2t+t^3=t^2(2+t). \quad m_y(3)=45.$$

Відповідь: $m_y(3)=45$.

6 Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція:

$$K_x(t_1,t_2)=2t_1\cdot t_2+3t_1^2\cdot t_2^2.$$

Обчисліть: $K_{\dot{x}}(1;2)$.

Розв'язання.

$$\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}=2t_2+6t_1\cdot t_2^2; \quad K_{\dot{x}}(t_1;t_2)=\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=2+12t_1\cdot t_2, \quad K_{\dot{x}}(1;2)=26.$$

Відповідь: $K_{\dot{x}}(1;2)=26$.

7 Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(t_1,t_2)=7t_1\cdot t_2\cdot e^{8(t_1-t_2)^2}.$$

Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)$, $R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$.

Обчисліть: $R_{x\dot{x}}(1;0)$, $R_{\dot{x}x}1;0)$.

Розв'язання.

$$R_{x\dot{x}}(t_1,t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}=7t_1(e^{8(t_1-t_{22})^2}(1-16t_2(t_1-t_2)); \qquad R_{x\dot{x}}(1;0)=7e^8.$$

$$R_{\dot{x}x}(t_1;t_2)=\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}=7t_2(e^{8(t_1-t_{22})^2}(1+16t_1(t_1-t_2)); \qquad R_{\dot{x}x}(1;0)=0.$$

Відповідь: $R_{x\dot{x}}(1;0)=7e^8$; $R_{\dot{x}x}(1;0)=0$.

8 Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ випадкової функції $X(t)$, якщо $m_x(t)=4t+1$. Обчисліть: $m_y(3)$.

Розв'язання.

$$m_y(t)=M[Y(t)]=\int_0^t m_x(s)ds=\int_0^t (4s+1)ds=\left(4\frac{s^2}{2}+s\right)_0^t=2t^2+t.$$

$$m_y(3)=21.$$

Відповідь: $m_y(3)=21$.

9 Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

$$K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2+9t_1^2\cdot t_2^2.$$

Обчисліть: $K_y(1;2)$.

Розв'язання.

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}K_x(s_1,s_2)ds_1ds_2.$$

$$K_y(t_1,t_2)=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}(4s_1\cdot s_2+9s_1^2\cdot s_2^2)ds_1ds_2=\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}4s_1\cdot s_2ds_1ds_2+\int_0^{t_1}\int_0^{t_2}9s_1^2\cdot s_2^2ds_1ds_2=$$

$$=4\int_0^{t_1}s_1ds_1\cdot\int_0^{t_1}s_2ds_2+9\int_0^{t_1}s_1^2ds_1\cdot\int_0^{t_1}s_2^2ds_2=4\left.\frac{s_1^2}{2}\right|_0^{t_1}\cdot\left.\frac{s_2^2}{2}\right|_0^{t_2}+9\left.\frac{s_1^3}{3}\right|_0^{t_1}\cdot\left.\frac{s_2^3}{3}\right|_0^{t_2}=t_1^2\cdot t_2^2+t_1^3\cdot t_2^3.$$

$$K_y(1;2)=12.$$

Відповідь: $K_y(1;2)=12$.

10 Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{XY}(t_1,t_2),R_{YX}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція:

$$K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2.$$

Обчисліть: $R_{XY}(1;2), R_{YX}(1;2)$.

Розв'язання.

$$R_{XY}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}K_x(t_1,s)ds=3\int_0^{t_2}t_1\cdot sds=3t_1\cdot\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^{t_2}=\frac{3}{2}t_1\cdot t_2^2.\qquad R_{XY}(1;2)=6.$$

$$R_{YX}(t_1,t_2)=\int_0^{t_2}K_x(s,t_2)ds=3\int_0^{t_2}s\cdot t_2ds=3t_2\cdot\left.\frac{s^2}{2}\right|_0^{t_1}=\frac{3}{2}t_1^2\cdot t_2.\qquad R_{YX}(1;2)=3.$$

Відповідь: $R_{XY}(1;2)=6$, $R_{YX}(1;2)=3$.

6 ІНДИВІДУАЛЬНІ ЗАВДАННЯ [6] Додаток

Задача 1

Задана випадкова функція $X(t)$, математичне сподівання $M(U)$ та середнє квадратичне відхилення $\sigma(U)$ випадкової величини U. Знайдіть математичне сподівання, дисперсію кореляційну функцію випадкової функції $X(t)$, якщо;

Таблиця 1

1	$X(t) = ut + 3$, $M(u) = 2$, $\sigma(u) = 5$	16	$X(t) = ut - 6$, $M(u) = 9$, $\sigma(u) = 1$
2	$X(t) = u\sin 5t$, $M(u) = 3$, $\sigma(u) = 8$	17	$X(t) = u\sin 7t$, $M(u) = 7$, $\sigma(u) = 2$
3	$X(t) = u\cos 6t$, $M(u) = 4$, $\sigma(u) = 3$	18	$X(t) = u\cos 8t$, $M(u) = 3$, $\sigma(u) = 4$
4	$X(t) = ut - 2$, $M(u) = 5$, $\sigma(u) = 1$	19	$X(t) = ut + 7$, $M(u) = 9$, $\sigma(u) = 5$
5	$X(t) = u\sin 6t$, $M(u) = 6$, $\sigma(u) = 2$	20	$X(t) = u\sin 10t$, $M(u) = 5$, $\sigma(u) = 3$
6	$X(t) = u\cos 7t$, $M(u) = 7$, $\sigma(u) = 4$	21	$X(t) = u\cos 4t$, $M(u) = 8$, $\sigma(u) = 2$
7	$X(t) = ut + 4$, $M(u) = 3$, $\sigma(u) = 5$	22	$X(t) = ut + 8$, $M(u) = 4$, $\sigma(u) = 1$
8	$X(t) = u\sin 8t$, $M(u) = 1$, $\sigma(u) = 9$	23	$X(t) = u\sin 6t$, $M(u) = 7$, $\sigma(u) = 4$
9	$X(t) = u\cos 9t$, $M(u) = 2$, $\sigma(u) = 6$	24	$X(t) = u\cos 3t$, $M(u) = 8$, $\sigma(u) = 3$
10	$X(t) = ut - 5$, $M(u) = 4$, $\sigma(u) = 2$	25	$X(t) = ut + 2$, $M(u) = 2$, $\sigma(u) = 4$
11	$X(t) = u\sin 4t$, $M(u) = 6$, $\sigma(u) = 7$	26	$X(t) = u\sin 3t$, $M(u) = 5$, $\sigma(u) = 2$
12	$X(t) = u\cos 5t$, $M(u) = 3$, $\sigma(u) = 8$	27	$X(t) = u\cos 4t$, $M(u) = 1$, $\sigma(u) = 3$
13	$X(t) = ut + 5$, $M(u) = 7$, $\sigma(u) = 4$	28	$X(t) = ut - 8$, $M(u) = 3$, $\sigma(u) = 1$
14	$X(t) = u\sin 2t$, $M(u) = 1$, $\sigma(u) = 5$	29	$X(t) = u\sin 6t$, $M(u) = 6$, $\sigma(u) = 2$
15	$X(t) = u\cos 10t$, $M(u) = 6$, $\sigma(u) = 3$	30	$X(t) = u\cos 9t$, $M(u) = 7$, $\sigma(u) = 2$

Задача 2

Знайдіть нормовану кореляційну функцію випадкової функції X(t), якщо відома її кореляційна функція

Таблиця 2

1	$K_x(t_1,t_2)=4\cos(t_1-t_2)$	16	$K_x(t_1,t_2)=7\cos(t_1-t_2)$
2	$K_x(t_1,t_2)=8e^{-3(t_1-t_2)^2}$	17	$K_x(t_1,t_2)=2e^{-7(t_1-t_2)^2}$
3	$K_x(t_1,t_2)=5t_1\cdot t_2e^{4(t_1-t_2)^2}$	18	$K_x(t_1,t_2)=6t_1\cdot t_2e^{2(t_1-t_2)^2}$
4	$K_x(t_1,t_2)=3\cos(t_1-t_2)$	19	$K_x(t_1,t_2)=8\cos(t_1-t_2)$
5	$K_x(t_1,t_2)=4e^{-7(t_1-t_2)^2}$	20	$K_x(t_1,t_2)=4e^{-7(t_1-t_2)^2}$
6	$K_x(t_1,t_2)=6t_1\cdot t_2e^{2(t_1-t_2)^2}$	21	$K_x(t_1,t_2)=5t_1\cdot t_2e^{4(t_1-t_2)^2}$
7	$K_x(t_1,t_2)=2\cos(t_1-t_2)$	22	$K_x(t_1,t_2)=5\cos(t_1-t_2)$
8	$K_x(t_1,t_2)=5e^{-3(t_1-t_2)^2}$	23	$K_x(t_1,t_2)=9e^{-3(t_1-t_2)^2}$
9	$K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2e^{5(t_1-t_2)^2}$	24	$K_x(t_1,t_2)=10t_1\cdot t_2e^{9(t_1-t_2)^2}$
10	$K_x(t_1,t_2)=9\cos(t_1-t_2)$	25	$K_x(t_1,t_2)=5\cos(t_1-t_2)$
11	$K_x(t_1,t_2)=6e^{-8(t_1-t_2)^2}$	26	$K_x(t_1,t_2)=2e^{-4(t_1-t_2)^2}$
12	$K_x(t_1,t_2)=9t_1\cdot t_2e^{6(t_1-t_2)^2}$	27	$K_x(t_1,t_2)=7t_1\cdot t_2e^{4(t_1-t_2)^2}$
13	$K_x(t_1,t_2)=10\cos(t_1-t_2)$	28	$K_x(t_1,t_2)=8\cos(t_1-t_2)$
14	$K_x(t_1,t_2)=7e^{-4(t_1-t_2)^2}$	29	$K_x(t_1,t_2)=2e^{-5(t_1-t_2)^2}$
15	$K_x(t_1,t_2)=8t_1\cdot t_2e^{9(t_1-t_2)^2}$	30	$K_x(t_1,t_2)=9t_1\cdot t_2e^{3(t_1-t_2)^2}$

Задача 3

Знайдіть взаємну кореляційну функцію та нормовану взаємну кореляційну функцію двох випадкових функцій $X(t)$ і $Y(t)$, якщо

Таблиця 3

1	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=2$
2	$X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+2)u,\quad D(u)=3$
3	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=4$
4	$X(t)=(t+1)u,\quad Y(t)=(t^2-2)u,\quad D(u)=5$
5	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=6$
6	$X(t)=(t^2-2)u,\quad Y(t)=(t+3)u,\quad D(u)=7$
7	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=8$
8	$X(t)=(t+3)u,\quad Y(t)=(t^2-4)u,\quad D(u)=9$
9	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=10$
10	$X(t)=(t^2-4)u,\quad Y(t)=(t+5)u,\quad D(u)=6$
11	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=7$
12	$X(t)=(t+5)u,\quad Y(t)=(t^2-3)u,\quad D(u)=2$
13	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=8$
14	$X(t)=(t^2-6)u,\quad Y(t)=(t+4)u,\quad D(u)=3$
15	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=5$
16	$X(t)=(t+7)u,\quad Y(t)=(t^2-5)u,\quad D(u)=4$
17	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=9$
18	$X(t)=(t^2-5)u,\quad Y(t)=(t+6)u,\quad D(u)=7$
19	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=10$
20	$X(t)=(t+8)u,\quad Y(t)=(t^2-7)u,\quad D(u)=6$
21	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=1$
22	$X(t)=(t^2-9)u,\quad Y(t)=(t+7)u,\quad D(u)=2$
23	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=3$
24	$X(t)=(t+9)u,\quad Y(t)=(t^2-8)u,\quad D(u)=5$
25	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=2$
26	$X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+2)u,\quad D(u)=3$
27	$X(t)=t^2\cdot u,\quad Y(t)=t\cdot u,\quad D(u)=4$
28	$X(t)=(t+1)u,\quad Y(t)=(t^2-2)u,\quad D(u)=5$
29	$X(t)=t\cdot u,\quad Y(t)=t^2\cdot u,\quad D(u)=6$
30	$X(t)=(t^2-2)u,\quad Y(t)=(t+3)u,\quad D(u)=7$

Задача 4

Задані дві випадкові функції $X(t)$ і $Y(t)$ та їх характеристики. Знайдіть $M(Z)$, $D(Z)$, якщо $Z(t)=X(t)+Y(t)$, U, V – не корельовані випадкові величини.

Таблиця 4

1. $X(t)=(t-1)u,\quad Y(t)=(t+2)v,\quad M(u)=3,\ M(v)=6,\ D(u)=0{,}2,\ D(v)=5$
2. $X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+3)v,\quad M(u)=4,\ M(v)=5,\ D(u)=0{,}3,\ D(v)=2$
3. $X(t)=(t+2)u,\quad Y(t)=(t^2-3)v,\quad M(u)=6,\ M(v)=4,\ D(u)=0{,}5,\ D(v)=7$
4. $X(t)=(t-2)u,\quad Y(t)=(t+3)v,\quad M(u)=5,\ M(v)=2,\ D(u)=0{,}1,\ D(v)=9$
5. $X(t)=(t^2-4)u,\quad Y(t)=(t+5)v,\quad M(u)=3,\ M(v)=7,\ D(u)=0{,}8,\ D(v)=4$
6. $X(t)=(t+3)u,\quad Y(t)=(t^2-6)v,\quad M(u)=7,\ M(v)=8,\ D(u)=0{,}9,\ D(v)=1$
7. $X(t)=(t-3)u,\quad Y(t)=(t+4)v,\quad M(u)=2,\ M(v)=3,\ D(u)=0{,}4,\ D(v)=5$
8. $X(t)=(t^2-5)u,\quad Y(t)=(t+6)v,\quad M(u)=1,\ M(v)=4,\ D(u)=0{,}6,\ D(v)=8$
9. $X(t)=(t+4)u,\quad Y(t)=(t^2-7)v,\quad M(u)=9,\ M(v)=2,\ D(u)=0{,}2,\ D(v)=3$
10. $X(t)=(t-4)u,\quad Y(t)=(t+8)v,\quad M(u)=5,\ M(v)=6,\ D(u)=0{,}1,\ D(v)=7$
11. $X(t)=(t^2-6)u,\quad Y(t)=(t+5)v,\quad M(u)=4,\ M(v)=7,\ D(u)=0{,}3,\ D(v)=2$
12. $X(t)=(t+6)u,\quad Y(t)=(t^2-4)v,\quad M(u)=6,\ M(v)=1,\ D(u)=0{,}9,\ D(v)=5$
13. $X(t)=(t-5)u,\quad Y(t)=(t+9)v,\quad M(u)=3,\ M(v)=8,\ D(u)=0{,}4,\ D(v)=8$
14. $X(t)=(t^2-7)u,\quad Y(t)=(t+2)v,\quad M(u)=5,\ M(v)=3,\ D(u)=0{,}7,\ D(v)=9$
15. $X(t)=(t+8)u,\quad Y(t)=(t^2-7)v,\quad M(u)=9,\ M(v)=4,\ D(u)=0{,}6,\ D(v)=3$
16. $X(t)=(t-6)u,\quad Y(t)=(t+2)v,\quad M(u)=4,\ M(v)=8,\ D(u)=0{,}2,\ D(v)=6$
17. $X(t)=(t^2-8)u,\quad Y(t)=(t+9)v,\quad M(u)=7,\ M(v)=5,\ D(u)=0{,}1,\ D(v)=2$
18. $X(t)=(t+9)u,\quad Y(t)=(t^2-4)v,\quad M(u)=2,\ M(v)=4,\ D(u)=0{,}8,\ D(v)=7$
19. $X(t)=(t-4)u,\quad Y(t)=(t+5)v,\quad M(u)=9,\ M(v)=6,\ D(u)=0{,}7,\ D(v)=5$
20. $X(t)=(t^2-9)u,\quad Y(t)=(t+1)v,\quad M(u)=5,\ M(v)=2,\ D(u)=0{,}6,\ D(v)=3$
21. $X(t)=(t+5)u,\quad Y(t)=(t^2-8)v,\quad M(u)=6,\ M(v)=3,\ D(u)=0{,}9,\ D(v)=7$
22. $X(t)=(t-6)u,\quad Y(t)=(t+8)v,\quad M(u)=7,\ M(v)=6,\ D(u)=0{,}4,\ D(v)=8$
23. $X(t)=(t^2-2)u,\quad Y(t)=(t+6)v,\quad M(u)=4,\ M(v)=5,\ D(u)=0{,}8,\ D(v)=2$
24. $X(t)=(t+4)u,\quad Y(t)=(t^2-9)v,\quad M(u)=7,\ M(v)=2,\ D(u)=0{,}3,\ D(v)=4$
25. $X(t)=(t-1)u,\quad Y(t)=(t+1)v,\quad M(u)=1,\ M(v)=6,\ D(u)=0{,}3,\ D(v)=2$
26. $X(t)=(t^2-1)u,\quad Y(t)=(t+2)v,\quad M(u)=3,\ M(v)=6,\ D(u)=0{,}3,\ D(v)=2$
27. $X(t)=(t+9)u,\quad Y(t)=(t^2-3)v,\quad M(u)=2,\ M(v)=4,\ D(u)=0{,}5,\ D(v)=7$
28. $X(t)=(t-8)u,\quad Y(t)=(t+3)v,\quad M(u)=3,\ M(v)=2,\ D(u)=0{,}1,\ D(v)=9$
29. $X(t)=(t^2-4)u,\quad Y(t)=(t+7)v,\quad M(u)=1,\ M(v)=3,\ D(u)=0{,}8,\ D(v)=4$
30. $X(t)=(t+2)u,\quad Y(t)=(t^2-4)v,\quad M(u)=7,\ M(v)=1,\ D(u)=0{,}9,\ D(v)=1$

Задача 5

Знайдіть математичне сподівання випадкової функції $Y(t)$, якщо задано математичне сподівання випадкової функції $X(t)$:

Таблиця 5

1. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 4t, \qquad m_x(t) = 5t^3 + 1$
2. $Y(t) = 2\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 3\sin 4t$
3. $Y(t) = 3t^2 \cdot X' - 4\sin t, \qquad m_x(t) = 5e^{2t}$
4. $Y(t) = 4e^{-3t} \cdot X' + 2t^2, \qquad m_x(t) = 5\cos 7t$
5. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 5t, \qquad m_x(t) = 6t^3 + 2$
6. $Y(t) = 3\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 4\sin 5t$
7. $Y(t) = 4t^2 \cdot X' - 3\sin t, \qquad m_x(t) = 7e^{6t}$
8. $Y(t) = 8e^{-3t} \cdot X' + 5t^2, \qquad m_x(t) = 2\cos 4t$
9. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 6t, \qquad m_x(t) = 9t^3 + 5$
10. $Y(t) = 5\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 8\sin 2t$
11. $Y(t) = 9t^2 \cdot X' - 2\sin t, \qquad m_x(t) = 4e^{5t}$
12. $Y(t) = 7e^{-3t} \cdot X' + 5t^2, \qquad m_x(t) = 3\cos 8t$
13. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 7t, \qquad m_x(t) = 8t^3 + 3$
14. $Y(t) = 4\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 6\sin 5t$
15. $Y(t) = 6t^2 \cdot X' - 7\sin t, \qquad m_x(t) = 2e^{3t}$
16. $Y(t) = 8e^{-3t} \cdot X' + 9t^2, \qquad m_x(t) = 3\cos 7t$
17. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 8t, \qquad m_x(t) = 9t^3 + 4$
18. $Y(t) = 6\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 3\sin 9t$
19. $Y(t) = 4t^2 \cdot X' - 7\sin t, \qquad m_x(t) = 6e^{2t}$
20. $Y(t) = 7e^{-3t} \cdot X' + 4t^2, \qquad m_x(t) = 9\cos 2t$
21. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 10t, \qquad m_x(t) = 6t^3 + 7$
22. $Y(t) = 8\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 4\sin 8t$
23. $Y(t) = 5t^2 \cdot X' - 7\sin t, \qquad m_x(t) = 9e^{5t}$
24. $Y(t) = 8e^{-3t} \cdot X' + 5t^2, \qquad m_x(t) = 2\cos 5t$
25. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 4t, \qquad m_x(t) = 5t^3 + 1$
26. $Y(t) = 2\cos t + t \cdot X', \qquad m_x(t) = 3\sin 4t$
27. $Y(t) = 3t^2 \cdot X' - 4\sin t, \qquad m_x(t) = 5e^{2t}$
28. $Y(t) = 4e^{-3t} \cdot X' + 2t^2, \qquad m_x(t) = 5\cos 7t$
29. $Y(t) = t^2 \cdot X' - 5t, \qquad m_x(t) = 6t^3 + 2$

Задача 6

Знайдіть кореляційну функцію похідної випадкової функції $X(t)$, якщо відома її кореляційна функція

Таблиця 6

1. $K_x(t_1,t_2)=2t_1\cdot t_2+9t_1^2\cdot t_2^2$	2. $K_x(t_1,t_2)=3t_1^2\cdot t_2^2+4t_1^3\cdot t_2^3$
3. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2+5t_1^3\cdot t_2^3$	4. $K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2+8t_1^2\cdot t_2^2$
5. $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2+7t_1^3\cdot t_2^3$	6. $K_x(t_1,t_2)=5t_1\cdot t_2+6t_1^3\cdot t_2^3$
7. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2+6t_1^2\cdot t_2^2$	8. $K_x(t_1,t_2)=5t_1^2\cdot t_2^2+6t_1^3\cdot t_2^3$
9. $K_x(t_1,t_2)=6t_1\cdot t_2+7t_1^3\cdot t_2^3$	10. $K_x(t_1,t_2)=6t_1\cdot t_2+5t_1^2\cdot t_2^2$
11. $K_x(t_1,t_2)=7t_1^2\cdot t_2^2+3t_1^3\cdot t_2^3$	12. $K_x(t_1,t_2)=8t_1\cdot t_2+3t_1^3\cdot t_2^3$
13. $K_x(t_1,t_2)=7t_1\cdot t_2+2t_1^2\cdot t_2^2$	14. $K_x(t_1,t_2)=9t_1^2\cdot t_2^2+5t_1^3\cdot t_2^3$
15. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2+9t_1^3\cdot t_2^3$	16. $K_x(t_1,t_2)=10t_1\cdot t_2+3t_1^2\cdot t_2^2$
17. $K_x(t_1,t_2)=5t_1^2\cdot t_2^2+2t_1^3\cdot t_2^3$	18. $K_x(t_1,t_2)=8t_1\cdot t_2+7t_1^3\cdot t_2^3$
19. $K_x(t_1,t_2)=6t_1\cdot t_2+5t_1^2\cdot t_2^2$	20. $K_x(t_1,t_2)=5t_1^2\cdot t_2^2+2t_1^3\cdot t_2^3$
21. $K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2+7t_1^3\cdot t_2^3$	22. $K_x(t_1,t_2)=7t_1\cdot t_2+4t_1^2\cdot t_2^2$
23. $K_x(t_1,t_2)=9t_1^2\cdot t_2^2+6t_1^3\cdot t_2^3$	24. $K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2+9t_1^3\cdot t_2^3$
25. $K_x(t_1,t_2)=2t_1\cdot t_2+9t_1^2\cdot t_2^2$	26. $K_x(t_1,t_2)=3t_1^2\cdot t_2^2+4t_1^3\cdot t_2^3$
27. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2+5t_1^3\cdot t_2^3$	28. $K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2+8t_1^2\cdot t_2^2$
29. $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2+7t_1^3\cdot t_2^3$	30. $K_x(t_1,t_2)=5t_1\cdot t_2+6t_1^3\cdot t_2^3$

Задача 7

Задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$. Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{x\dot{x}}(t_1,t_2),\ R_{\dot{x}x}(t_1,t_2)$.

Таблиця 7

1. $K_x(t_1,t_2)=2(t_1-3)\cdot(t_2-3)+5t_1^2\cdot t_2^2$	2. $K_x(t_1,t_2)=4\sin 3t_1\cdot\sin 3t_2\cdot$
3. $K_x(t_1,t_2)=e^{-2(t_1-t_2)^2}$	4. $K_x(t_1,t_2)=2t_1\cdot t_2\cdot e^{3(t_1-t_2)^2}$
5. $K_x(t_1,t_2)=2\cos 5t_1\cdot\cos 5t_2\cdot$	6. $K_x(t_1,t_2)=3(t_1-4)\cdot(t_2-4)+6t_1^2\cdot t_2^2$
7. $K_x(t_1,t_2)=5\sin 4t_1\cdot\sin 4t_2\cdot$	8. $K_x(t_1,t_2)=e^{-3(t_1-t_2)^2}$
9. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2\cdot e^{5(t_1-t_2)^2}$	10. $K_x(t_1,t_2)=5\cos 6t_1\cdot\cos 6t_2\cdot$
11. $K_x(t_1,t_2)=4(t_1-5)\cdot(t_2-5)+7t_1^2\cdot t_2^2$	12. $K_x(t_1,t_2)=6\sin 7t_1\cdot\sin 7t_2\cdot$
13. $K_x(t_1,t_2)=e^{-4(t_1-t_2)^2}$	14. $K_x(t_1,t_2)=5t_1\cdot t_2\cdot e^{7(t_1-t_2)^2}$
15. $K_x(t_1,t_2)=7\cos 8t_1\cdot\cos 8t_2\cdot$	16. $K_x(t_1,t_2)=4(t_1-5)\cdot(t_2-5)+9t_1^2\cdot t_2^2$
17. $K_x(t_1,t_2)=6\sin 5t_1\cdot\sin 5t_2\cdot$	18. $K_x(t_1,t_2)=e^{-5(t_1-t_2)^2}$
19. $K_x(t_1,t_2)=8t_1\cdot t_2\cdot e^{6(t_1-t_2)^2}$	20. $K_x(t_1,t_2)=9\cos 7t_1\cdot\cos 7t_2\cdot$
21. $K_x(t_1,t_2)=9(t_1-6)\cdot(t_2-6)+8t_1^2\cdot t_2^2$	22. $K_x(t_1,t_2)=8\sin 6t_1\cdot\sin 6t_2\cdot$
23. $K_x(t_1,t_2)=e^{-9(t_1-t_2)^2}$	24. $K_x(t_1,t_2)=7t_1\cdot t_2\cdot e^{8(t_1-t_2)^2}$
25. $K_x(t_1,t_2)=2(t_1-3)\cdot(t_2-3)+5t_1^2\cdot t_2^2$	26. $K_x(t_1,t_2)=4\sin 3t_1\cdot\sin 3t_2\cdot$
27. $K_x(t_1,t_2)=e^{-2(t_1-t_2)^2}$	28. $K_x(t_1,t_2)=2t_1\cdot t_2\cdot e^{3(t_1-t_2)^2}$
29. $K_x(t_1,t_2)=2\cos 5t_1\cdot\cos 5t_2\cdot$	30. $K_x(t_1,t_2)=3(t_1-4)\cdot(t_2-4)+6t_1^2\cdot t_2^2$

Задача 8

Знайдіть математичне сподівання інтеграла $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$ випадкової функції $X(t)$, якщо:

Таблиця 8

1. $m_x(t)=3t^2+1$	2. $m_x(t)=\cos 2t+3$.
3. $m_x(t)=4t^3+5$	4. $m_x(t)=\sin 3t+2$
5. $m_x(t)=4t^2+7$	6. $m_x(t)=\cos 3t+4$.
7. $m_x(t)=5t^3+8$	8. $m_x(t)=\sin 4t+5$
9. $m_x(t)=5t^2+6$	10. $m_x(t)=\cos 4t+1$.
11. $m_x(t)=7t^3+9$	12. $m_x(t)=\sin 5t+4$
13. $m_x(t)=6t^2+5$	14. $m_x(t)=\cos 5t+9$.
15. $m_x(t)=8t^3+3$	16. $m_x(t)=\sin 6t+2$
17. $m_x(t)=7t^2+2$	18. $m_x(t)=\cos 6t+8$.
19. $m_x(t)=9t^3+5$	20. $m_x(t)=\sin 7t+4$
21. $m_x(t)=8t^2+9$	22. $m_x(t)=\cos 7t+3$.
23. $m_x(t)=10t^3+1$	24. $m_x(t)=\sin 9t+2$
25. $m_x(t)=3t^2+1$	26. $m_x(t)=\cos 2t+3$.
27. $m_x(t)=4t^3+5$	28. $m_x(t)=\sin 3t+2$
29. $m_x(t)=4t^2+7$	30. $m_x(t)=\cos 3t+4$.

Задача 9

Знайдіть кореляційну функцію інтеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція випадкової функції $X(t)$:

Таблиця 9

1. $K_x(t_1,t_2) = 2t_1 \cdot t_2$.	2. $K_x(t_1,t_2) = \cos 2t_1 \cdot \cos 2t_2$
3. $K_x(t_1,t_2) = 3t_1^2 \cdot t_2^2$	4. $K_x(t_1,t_2) = 3t_1 \cdot t_2$.
5. $K_x(t_1,t_2) = \cos 3t_1 \cdot \cos 3t_2$	6. $K_x(t_1,t_2) = 4t_1^2 \cdot t_2^2$
7. $K_x(t_1,t_2) = 5t_1 \cdot t_2$.	8. $K_x(t_1,t_2) = \cos 4t_1 \cdot \cos 4t_2$
9. $K_x(t_1,t_2) = 5t_1^2 \cdot t_2^2$	10. $K_x(t_1,t_2) = 4t_1 \cdot t_2$.
11. $K_x(t_1,t_2) = \cos 5t_1 \cdot \cos 5t_2$	12. $K_x(t_1,t_2) = 6t_1^2 \cdot t_2^2$
13. $K_x(t_1,t_2) = 7t_1 \cdot t_2$.	14. $K_x(t_1,t_2) = \cos 6t_1 \cdot \cos 6t_2$
15. $K_x(t_1,t_2) = 7t_1^2 \cdot t_2^2$	16. $K_x(t_1,t_2) = 8t_1 \cdot t_2$.
17. $K_x(t_1,t_2) = \cos 7t_1 \cdot \cos 7t_2$	18. $K_x(t_1,t_2) = 9t_1^2 \cdot t_2^2$
19. $K_x(t_1,t_2) = 10t_1 \cdot t_2$.	20. $K_x(t_1,t_2) = \cos 8t_1 \cdot \cos 8t_2$
21. $K_x(t_1,t_2) = 10t_1^2 \cdot t_2^2$	22. $K_x(t_1,t_2) = 12t_1 \cdot t_2$.
23. $K_x(t_1,t_2) = \cos 9t_1 \cdot \cos 9t_2$	24. $K_x(t_1,t_2) = 12t_1^2 \cdot t_2^2$
25. $K_x(t_1,t_2) = 2t_1 \cdot t_2$.	26. $K_x(t_1,t_2) = \cos 2t_1 \cdot \cos 2t_2$
27. $K_x(t_1,t_2) = 3t_1^2 \cdot t_2^2$	28. $K_x(t_1,t_2) = 3t_1 \cdot t_2$.
29. $K_x(t_1,t_2) = \cos 3t_1 \cdot \cos 3t_2$	30. $K_x(t_1,t_2) = 4t_1^2 \cdot t_2^2$

Задача 10

Знайдіть взаємні кореляційні функції $R_{XY}(t_1,t_2), R_{YX}(t_1,t_2)$ випадкової функції $X(t)$ і $Y(t)=\int_0^t X(s)ds$, якщо задана кореляційна функція:

Таблиця 10

1. $K_x(t_1,t_2)=3t_1^2\cdot t_2^2$	2. $K_x(t_1,t_2)=2t_1^3\cdot t_2^3$
3. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2$	4. $K_x(t_1,t_2)=2\cos 3t_1\cdot\cos 3t_2$
5. $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2$	6. $K_x(t_1,t_2)=5t_1^3\cdot t_2^3$
7. $K_x(t_1,t_2)=6t_1\cdot t_2$	8. $K_x(t_1,t_2)=3\cos 4t_1\cdot\cos 4t_2$
9. $K_x(t_1,t_2)=5t_1^2\cdot t_2^2$	10. $K_x(t_1,t_2)=6t_1^3\cdot t_2^3$
11. $K_x(t_1,t_2)=3t_1\cdot t_2$	12. $K_x(t_1,t_2)=4\cos 5t_1\cdot\cos 5t_2$
13. $K_x(t_1,t_2)=6t_1^2\cdot t_2^2$	14. $K_x(t_1,t_2)=7t_1^3\cdot t_2^3$
15. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2$	16. $K_x(t_1,t_2)=5\cos 6t_1\cdot\cos 6t_2$
17. $K_x(t_1,t_2)=8t_1^2\cdot t_2^2$	18. $K_x(t_1,t_2)=9t_1^3\cdot t_2^3$
19. $K_x(t_1,t_2)=5t_1\cdot t_2$	20. $K_x(t_1,t_2)=7\cos 8t_1\cdot\cos 8t_2$
21. $K_x(t_1,t_2)=10t_1^2\cdot t_2^2$	22. $K_x(t_1,t_2)=8t_1^3\cdot t_2^3$
23. $K_x(t_1,t_2)=9t_1\cdot t_2$	24. $K_x(t_1,t_2)=8\cos 9t_1\cdot\cos 9t_2$
25. $K_x(t_1,t_2)=3t_1^2\cdot t_2^2$	26. $K_x(t_1,t_2)=2t_1^3\cdot t_2^3$
27. $K_x(t_1,t_2)=4t_1\cdot t_2$	28. $K_x(t_1,t_2)=2\cos 3t_1\cdot\cos 3t_2$
29. $K_x(t_1,t_2)=4t_1^2\cdot t_2^2$	30. $K_x(t_1,t_2)=5t_1^3\cdot t_2^3$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1 Гихман И.И., Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов: Учеб. Пособие для вузов. –М.: Наука, 1977. 568с.

2 Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика.–М.: Высшая школа., 2002.

3 Волков И.К., Зуев С.М.,Цветкова Г.М. Случайные процессы: Учебн. для вузов/ Под ред.В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. –М.:Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана,1999.–448с.

4 Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. 2-изд., доп.–М.: Наука, Физматлит, 1996.

5 Несвіт М.І. Методичні вказівки до виконання комп'ютерних тестів з курсу «Вища Математика» ХНУСА, Харків 2012, 44с.

6 Несвіт М.І.,Поклонський Є.В. Методичні вказівки та завдання до виконання модуля «Випадкові процеси».– Харків: ХНУБА, 2012.–44с.

ЗМІСТ