# Лінійні відображення

**Означення 1.** Нехай $L_1$ та $L_2$ – векторні простори над одним і тим самим полем $F$. Тоді відображення $\varphi: L_1 \to L_2$ називається *лінійним* (або *гомоморфізмом*), якщо $\forall\ x, y \in L_1$ та $\forall\ \alpha \in F$ виконуються наступні умови:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$
2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$

**Зауваження.** Ін'єктивний гомоморфізм називають *мономорфізмом*.

Сюр'єктивний гомоморфізм називають *епіморфізмом*.

Бієктивний гомоморфізм називають *ізоморфізмом*.

**Означення 2.** Відображення $\theta: L_1 \to L_2$ називається *нульовим*, якщо усі елементи відображаються у нуль: $\theta(x) = 0_{L_2}, \forall\ x \in L_1$.

**Означення 3.** Відображення $\varepsilon: L \to L$ називається *тотожнім*, якщо кожний елемент відображаються у себе: $\varepsilon(x) = x, \forall x \in L$.

**Означення 4.** *Образом* $Im\,\varphi$ та *ядром* $Ker\,\varphi$ лінійного відображення $\varphi: L_1 \to L_2$ називають відповідно множини:

$$Im\,\varphi = \{y \in L_2 | \varphi(x) = y, \forall x \in L_1\}$$

$$Ker\,\varphi = \left\{x \in L_1 | \varphi(x) = 0_{L_2}\right\}$$

**Означення 5.** Якщо $L_1 = L_2$, то лінійне відображення називається *лінійним оператором*.

# Матриця лінійного оператора

Нехай $\varphi: : L \to L$ – лінійний оператор, $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – базис $L$.

Розглянемо $\varphi(e_k) = a_{1k}e_1 + a_{2k}e_2 + \dots + a_{nk}e_n, \forall\ k = \overline{1, n}$, тобто:

при $k = 1$: $\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ \dots + a_{n1}e_n$

при $k = 2$: $\varphi(e_k) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ \dots + a_{n2}e_n$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … … …

при $k = n$: $\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n$

Тоді матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ називається *матрицею лінійного оператора* $\varphi$ у базисі $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

Якщо $y = \varphi(x)$, то $Y = AX$ або $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Нехай $A$ – матриця лінійного оператора $\varphi$ у базисі $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$,

$A'$ – матриця лінійного оператора $\varphi$ у базисі $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$,

$T$ – матриця переходу від $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ до $\{e_1', e_2', \dots, e_n'\}$, тоді:

$$\boxed{A' = T^{-1}AT}$$