

Лабораторна робота №8

Динаміка біологічних популяцій

Модель хижак-жертва. У 1931 р Віто Вольтерра запропонував модель хижак - жертва. Нехай на деякій замкнутій території мешкають два види: вегетаріанці-жертви, які харчуються пашею, наявними в надлишку, і хижаки, що полюють на жертв. Як пари хижак-жертва можуть виступати вовки і вівці, щуки і карасі, рисі і зайці...

Якби не було хижаків, то жертви розмножувалися б безмежно, і їх чисельність описувалася б рівнянням Мальтуса:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x, \quad (1)$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд $x = x_0 e^{\alpha \cdot t}$, де $\alpha > 0$ – коефіцієнт приросту, x – їх чисельність в даний момент часу, x_0 – чисельність популяції в початковий момент часу. Якби не було жертв, то хижаки через брак їжі поступово вимирали б:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma \cdot y, \quad y = y_0 e^{-\gamma \cdot t}, \quad (2)$$

де $\gamma > 0$ – коефіцієнт втрати хижаків, y – їх чисельність в даний момент часу, y_0 – чисельність популяції в початковий момент часу.

Зростанню чисельності жертв, проте, перешкоджають їх зустрічі з хижаками, частота яких пропорційна як числу жертв, так і числу хижаків – $x \cdot y$. Тоді швидкість зміни чисельності жертв описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \quad (3)$$

де $\beta > 0$ – коефіцієнт втрати жертв при зустрічі з хижаками. Аналогічно, зустріч хижака з жертвою збільшує ймовірність виживання хижака, тобто сприяє приросту популяції хижаків

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \quad (4)$$

де $\delta > 0$ – коефіцієнт, що залежить від того, як часто зустріч хижака з жертвою закінчується трапезою.

Таким чином, модель Вольтерра задається системою рівнянь (3)-(4).

Завдання

- 1). Знайти всі точки спокою системи і встановити їх тип.
- 2). Зобразити фазовий портрет системи.
- 3). Знайти чисельне розв'язок задачі Коші для рівнянь (3)-(4) та побудувати графіки залежності x і y від t .

Варіанти завдання

№	x_0	y_0	α	β	γ	δ
1	0.5	2	0.3	3	3	3
2	2	2	2	2	2	2
3	3	7	20	10	5	10
4	2	1	1	0.1	1	0.1
5	5	2	0.5	5	2	2
6	1	1	0.1	0.1	1	0.1
7	2	3	0.1	1	0.1	1
8	3	5	5	0.5	5	0.5
9	1	1	0.1	0.1	0.1	3
10	10	15	0.8	0.5	0.4	0.1
11	0.5	1	0.3	0.1	0.1	0.1
12	2	2	0.5	1	5	1
13	3	0.3	0.3	0.5	0.1	0.5
14	2	2	2	3	0.4	3
15	5	20	20	2	3	0.1
16	1	1	1	10	2	3
17	2	0.5	0.5	0.1	5	2
18	3	0.1	0.1	5	1	10
19	1	0.1	0.1	0.1	2	0.1
20	15	5	5	1	1	2