ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра
«ЭКОНОМИКА ОТРАСЛЕЙ И РЫНКОВ»

ГЕЛЬРУД Я.Д.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

Учебно-методический комплекс

Челябинск

2010

Гельруд Я.Д. Математическая экономика: Учебно-методический комплекс. – Челябинск: Изд. ЧелГУ, 2010. – 421с.

Учебно-методический комплекс (УМК) по дисциплине «Математическая экономика» предназначен для студентов, обучающихся по специальности 08010068 «Экономика», магистерская программа 521606 – Экономика фирмы и отраслевых рынков.

УМК включает: рабочую программу дисциплины, календарно-тематический план для самостоятельной работы студентов, методические указания по самостоятельному изучению дисциплины, теоретический материал, практикум, содержащий примеры решения типовых задач, задания для контрольной работы по каждой теме и список общедоступной учебной и справочной литературы.

Теоретический материал представляет собой краткий конспект лекций, содержит необходимые утверждения и формулы (без детального обоснования и доказательств), при этом достаточно подробно демонстрируется применение математического аппарата для решения конкретных экономических задач.

УМК рассмотрен и рекомендован к публикации на заседании кафедры «Экономика отраслей и рынков».

Протокол №   от   2010г

Зав. кафедрой   Бархатов В.И.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина ДН-М.04.02 «**Математическая экономика**» является региональной (вузовской) компонентой в магистерской программе 521606 – Экономика фирмы и отраслевых рынков.

Научно-исследовательская и практическая работа современного экономиста немыслима без применения математических моделей и компьютерных технологий.

В дисциплине "Математическая экономика" рассматриваются задачи о связях экономических явлений, условия и методы построения экономических моделей, методы нахождения оптимальных решений.

Программа дисциплины включает изучение современных математических методов в экономике, теории игр, теории финансовых рынков; современных макроэкономических моделей и методов их решения для анализа текущей ситуации и последствий экономической политики, выработки рекомендаций по ее совершенствованию для органов государственного управления, учета макроэкономической ситуации при принятии управленческих решений фирмой; модели и методы принятия решений на микроуровне, методы проектного анализа, позволяющие проводить анализ и вырабатывать рекомендации для принятия внутрифирменных хозяйственных решений и совершенствования межфирменных взаимодействий.

Изучение этих прикладных разделов математики занимает важное место в формировании магистра экономики высокой квалификации и служит основой для описания, анализа и прогнозирования реальных экономических процессов.

Целью данного углубленного математического образования является:

- овладение теоретическими знаниями и приобретение практических навыков по решению конкретных задач управления бизнесом на основе применения современных экономико-математических методов, адекватных специфике ведения бизнеса в условиях постиндустриального информационного общества, отличающейся высокой степенью неопределённости и хозяйственных рисков, остротой конкурентной борьбы, высоким уровнем производительности труда и сопряжёнными с ним проблемами распределения общественного продукта, ускоренными темпами внедрения и распространения инноваций.

Задачи дисциплины:

- Привить студентам навыки применения теоретических основ и методологии экономико-математического моделирования и инструментальных методов экономики в решении практических задач управления бизнесом.

- Обучить студентов самостоятельно решать типовые задачи логистики, маркетинга, управления рисками и оптимизации инвестиционного процесса с использованием экономико-математических методов и персональных ЭВМ, при необходимости обращаясь к специальной литературе по данным вопросам.
- Сформировать навыки профессиональной коммуникации по проблемам применения математических методов в бизнесе и управлении со специалистами в данной области.
- Закрепить и развить базовые навыки подготовки и принятия управленческих решений на основе применения экономико-математических методов с учётом границ их познавательных возможностей и рисков, связанных с их применением.

В ходе изучения дисциплины «Математическая экономика» студент должен знать:

- принципы построения математических моделей;
- роль математики в экономических, финансово-кредитных исследованиях при управлении организацией;
- математические методы, используемые для информационной поддержки принятия управленческих решений по оптимизации хозяйственных рисков, управлению запасами, сбытом, товарными потоками, в том числе в условиях конфликта целей;

владеть:

- математической терминологией и содержанием понятий в объёме, достаточном для профессиональной коммуникации со специалистами в области математических методов экономики;
- программным обеспечением решения прикладных задач математической поддержки принятия решений;

иметь представление:

- об основных направлениях исследований, направленных на развитие методологии и математических методов обоснования и информационной поддержки принятия управленческих решений применительно к различным объектам бизнеса;
- о теоретических и прикладных проблемах, ограничивающих применение математических методов в бизнесе и управлении, и о перспективах их решения;

уметь:

- интерпретировать формальные записи изученных экономико-математических моделей, модифицировать их применительно к

специфике конкретного объекта приложения, объяснять их содержание в процессе профессиональной коммуникации;
- обосновывать конкретные управленческие решения на основе применяемых математических методов;
- оценивать адекватность и достоверность результатов применения изученных экономико-математических методов в бизнесе и управлении.

Краткий исторический очерк

История развития математического направления в экономике полна драматизма, ибо многие ученые-экономисты отрицали принципиальную возможность применения математики в экономических исследованиях, утверждая, что экономика слишком сложное явление в основном качественного характера и в принципе не может быть описана «сухим» количественным языком математики.

В нашей стране эта дискуссия носила особенно острый характер в 60е – 70е годы XX века. Особую остроту этой дискуссии придавала идеологическая подоплека спора: соответствует ли применение математики экономическому учению Маркса, поскольку Маркс обошелся без математических моделей (если не считать простейших арифметических выкладок), и не является ли математизация экономики идеологической диверсией – способом протаскивания буржуазных экономических теорий. (В последнем издании Советского энциклопедического словаря по этому поводу есть такое весьма характерное изречение: «Работы математической школы абсолютизируют количественный анализ и направлены против основных положений марксистской политэкономии»).

Следует отметить, что в нашей стране до сравнительно недавнего времени математика не входила в состав дисциплин, изучаемых в ВУЗах на специальностях экономического профиля.

Рассмотрим некоторые основные этапы эволюции экономической науки в аспекте применения математических методов.

Математические модели использовались еще У.Петти (1623–1687, трудовая теория стоимости), Ф.Кенэ (1694–1774, «Экономическая таблица», 1758г.), А.Смитом (1723–1790, классическая макроэкономическая модель), Д.Рикардо (1772–1823, модель международной торговли). Однако история систематического использования математических методов в экономике начинается с трудов экономистов, принадлежавших к математической школе буржуазной политэкономии. Научные достижения этой школы оставили глубокий след. Свое существование математическая школа начала с выхода в 1838 году работы Антуана Курно (1801–1877) «Исследование математических принципов в теории богатства». Представителями этой школы являлись: Л.Вальрас(1834–1910), У.Джевонс(1835–1882), В.Парето(1848–1923), Г.Кассель(1866–1945), В.К.Дмитриев(1868–1913), К.Викселль(1851–1926). Это были ученые политэкономы. Среди множества проблем, которыми они занимались, главными были следующие: экономическое равновесие, теория цен, теория спроса и предложения. Вся политэкономия 19-го века уделяла внимание именно этим вопросам. Поэтому не общность проблематики являлась основой этой школы, а общность методологии – основным научным методом изучения экономики представители этого направления считали математический аппарат (а основном дифференциальное и интегральное исчисления) и утверждали, что доказательство справедливости теоретического положения можно получить только с помощью математики. Пока нет математического доказательства какого-либо положения, это положение не более чем гипотеза.

Наиболее ярким представителем математической школы был Леон Вальрас (Швейцария), которого называли величайшим из «чистых теоретиков». Разработанный им метод экономического анализа сравнивали с достижениями теоретической физики. Этот метод содержит основы, на которых в значительной мере базируются современные экономические теории. Он выразил результаты анализа в виде системы уравнений, что было в те времена делом совершенно новым. Вальрас придал законченную математическую форму теории предельной полезности. Эта экономическая концепция не утратила своего значения и до настоящего времени. В частности, он предвосхитил многие из современных теоретических положений в отношении капитала. Вальрас разработал теорию ценообразования на капитальные блага, охватывающую все виды капитала. Значителен вклад Вальраса в теорию денег и денежного обращения, теорию ренты, теорию распределения совокупного продукта, который должен распределяться между факторами производства в соответствии с их ценами.

Актуальной и в настоящее время является критика Вальраса в адрес социалистических концепций «справедливого» перераспределения. Он утверждал, что экономическая наука должна выступать против социализма по той же причине, по какой она выступает против невежества. Особенно серьезно, по мнению Вальраса, заблуждается марксизм, ибо он исходит из несостоятельной посылки, что труд является единственным источником стоимости. Стоимость определяется полезностью вещей и их редкостью, она пропорциональна их предельной полезности. Этот принцип может быть применен к земле, капиталу и труду, причем ни один из этих факторов не может быть сведен к другому.

Труды Вальраса и других представителей математической школы являются, бесспорно, замечательным творческим вкладом в развитие экономической теории вообще и методологии экономических исследований с использованием математики в особенности.

К недостаткам этой школы следует отнести то, что построение моделей экономики базировалось на предпосылках о свободной конкуренции, на статическом равновесии; не показано, как в динамике развивается экономика, как изменяются социально-экономические отношения в условиях постоянно усложняющейся и развивающейся технологии производства, господства корпораций, приводящего к олигополистической ситуации (монополизации производства и сбыта основной массы продукции отрасли).

Представители математической школы не доводили свой анализ до численного, посему их результаты не давали возможности практического использования для принятия управленческих решений в экономике.

Математическая школа просуществовала до конца 19-го века, затем растворилась в других школах и прекратила свое существование как нечто специфическое, ибо последующие экономические течения уже воспринимали математику как естественный инструментарий экономической науки, и в этом, может быть, и состоит наибольший эффект этой школы.

Второй этап математической эволюции в экономике связан с применением методов теории вероятностей и математической статистики. Это направление, получившее название статистического, в некотором смысле противостоит математической школе, хотя и базируется на математике не в меньшей степени. Суть противостояния в том, что представителей этого течения интересовали конкретные численные выводы, на которых можно базировать реальные экономические решения, а не делать общие умозаключения и устанавливать взаимосвязи между экономическими показателями. Они провозгласили, что нет науки без измерения, что само по себе явилось прогрессивным шагом. Отрицательным было то, что представители этого статистического направления в экономической науке игнорировали значение теории и считали возможным приступать к анализу реальной экономики без построения экономико-математических моделей. Основными проблемами, которыми занимались экономисты-статистики, были прогнозы экономической конъюнктуры.

После первой мировой войны получила развитие идея экономического барометра – предсказание конъюнктуры на значительный период будущего. Путем статистического анализа различных временных рядов эмпирически «прощупываются» закономерности в поведении кривых, описывающих различные показатели экономической конъюнктуры, и их взаимосвязи.

Кривая, описывающая динамику изменения одного показателя, может повторять «падения» или «взлеты» другого с некоторым отставанием или опережением, т.е. фазы таких кривых имеют некоторый сдвиг во времени (и, возможно, различную амплитуду колебаний). При этом экономические закономерности, лежащие в основе этих кривых и их взаимосвязей, неизвестны и, по мнению экономистов-статистиков, не имеет смысла их выяснять.

Основные показатели статистического анализа были: объем денежной эмиссии, движение курса акций на бирже, объем товарооборота, объем производства, движение индекса цен.

Наиболее известен барометр, созданный в Гарвардском университете (США), который долгое время весьма удачно предсказывал колебания конъюнктуры.

Но наступил кризис мировой экономики (1929–1933) – «великая депрессия», которая не была предсказана, и интерес к статистическим методам упал. Однако следует отметить, что так называемый технический анализ финансового рынка, играющий существенную роль и в современной экономической практике, во многом базируется на идеях статистической школы.

К основным достижениям статистической школы следует отнести: разработку и совершенствование методов математической статистики для экономических исследований, и разработку методологии экономического прогнозирования. Главный недостаток – пренебрежение экономической теорией.

Третий этап применения математики в экономике – возникновение эконометрики – относится к началу 30-х годов 20-го века, когда было создано всемирное эконометрическое общество. Эконометрика – синтез математики, статистики и экономической теории. Считается, что экономика стала подлинной наукой только с развитием эконометрики. Эконометрическое направление в экономической науке дало мощный толчок развитию специальных прикладных разделов математики и возникло еще одно течение, называемое математическая экономика.

Эконометрика и математическая экономика не являются новыми науками, существующими наряду с экономической наукой, поскольку объекты, изучаемые в их рамках, те же, что и в экономике. Эконометрика и математическая экономика – это методологические направления экономической науки, в основе которых лежит метод математического моделирования.

Математическая экономика часто отождествляется с теми разделами математики, которые применяются в экономике. Такое определение устраивает математиков. С позиций же экономистов различия между эконометрикой и математической экономикой проявляются в степени использования конкретных числовых значений.

Таким образом, эконометрическими исследованиями будем считать такие исследования, в которых экономические расчеты проводятся с помощью математических методов, тогда как математико-экономическими исследованиями принято считать исследования, в которых проводится математический анализ экономических процессов, то есть экономический текст переводится на язык математических выражений.

Значительный вклад в формирование и развитие экономико-математического моделирования внесли зарубежные ученые, удостоенные Нобелевской премии по экономике: П.Сэмуэлсон (1970), Д.Хикс, К.Эрроу (1972), В.В.Леонтьев (1973), Т.Купманс (1975), М.Фридмен (1976), Л.Клейн (1980), Ф.Модильяни(1985), Х.Марковиц, М.Миллер, У.Шарп (1990) и другие.

Здесь нельзя не отметить и большой вклад отечественных ученых в развитие математического направления в экономике. Прежде всего, следует назвать академика Л.В.Канторовича, всемирно признанного «отцом» линейного программирования, математика, удостоенного Нобелевской премии в области экономики (1975); академика В.С.Немчинова, введшего, кстати, в повсеместную практику термин «экономико-математические методы»; проф. В.В.Новожилова; блестящую плеяду ученых Центрального экономико-математического института (ЦЭМИ), возглавляемого академиком Н.Федоренко; сибирскую школу, лидером которой был академик А.Аганбегян, и многих других, работавших над созданием системы моделей оптимального функционирования социалистической экономики. Но социалистическая экономика, являясь «концентрированным выражением политики», скованная идеологическими догмами марксизма и партийно-бюрократической структурой управления, оставалась маловосприимчивой к разработкам ученых-экономистов.

Представленная выше историческая картина проникновения математики в экономику отражает лишь основное русло этого течения, питающегося множеством математических «притоков» в различных специфических областях экономики. Так, например, в области финансов в первой половине 20-го века сложилось направление, именуемое финансовой математикой, которая представляет собой совокупность математических средств, ориентированных на проведение финансовых расчетов в условиях определенности, хотя важность учета факторов неопределенности и риска в финансовых проблемах осознавалась вполне четко, что привело в дальнейшем к созданию современной теории инвестиций.

Начало этой теории было положено Гарри Марковицем в 1952 году с выходом в свет его работы «Выбор портфеля». В этой статье была предложена математическая модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг, что позволило перевести задачу выбора оптимальной инвестиционной стратегии на строгий математический язык.

В дальнейшем теория инвестиций была развита Шарпом, Тобином, самим Марковицем, а также другими учеными-экономистами (Россом, Шоулсом, Блэком). Здесь важно заметить, что достижения упомянутых ученых относятся к области экономики, но их научные результаты представляют собой не что иное, как математические модели для решения соответствующих экономических проблем.

Нельзя не упомянуть еще одно специфическое направление «математизации» экономической науки – экономическую кибернетику, в рамках которой осуществляется приложение принципов и методов общей кибернетики к управлению экономическими системами. Экономическая кибернетика продвинула экономическую науку в изучении таких проблем как анализ производства и потребления (на основе производственных функций), технический прогресс и экономический рост, цикличность развития экономики.

На современном этапе математические методы широко и прочно вошли в арсенал экономики, как в области теории, так и в области экономической практики. Большое влияние развитие экономико-математических методов оказало на формирование концепций управления в системах организационного типа. Современная методология принятия управленческих решений, основу которой составляет так называемый «системный подход», в существенной мере опирается на математическое моделирование производственно-экономических ситуаций, на количественные методы оценки альтернатив и отбора на основе этих оценок лучших решений.

Методология «конструирования» и использования математических моделей в управлении организационными системами наиболее полно представлена в таких концептуальных направлениях управленческой мысли, сформировавшихся к настоящему времени в специальные дисциплины, как «Исследование операций» и «Системный анализ».

В ниже приведенных теоретических материалах содержится описание использования как классического математического инструментария (дифференциального исчисления и линейной алгебры) – раздел 1, так и специальных прикладных математических дисциплин, используемых для моделирования экономических процессов – раздел 2.

Такие прикладные математические дисциплины как Финансовая математика и Эконометрика входят в магистерскую программу обучения в виде отдельных дисциплин.

Раздел 1. Применение математического анализа и алгебры

ТЕМА 1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В МАРКЕТИНГЕ

1.1.1. Основы моделирования спроса и потребления.

Основным понятием теории потребления является *функция полезности* $U(x,y)$. Эта функция выражает меру полезности набора (x,y), где x – количество товара X, а y – количество товара Y. Чувствительность набора (x,y) к незначительному изменению x при фиксированном y называется *предельной полезностью* x и определяется как *частная производная* U'_x. Аналогично предельная полезность y определяется как U'_y. Чаще всего линии уровня функции полезности (их еще называют кривыми безразличия) являются графиками убывающих функций. Поэтому мы будем считать, что для точек $A(x_0, y_0)$ и $B(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, расположенных на одной линии уровня приращения, $\Delta x>0$, а $\Delta y < 0$. (рис. 1.1.1).

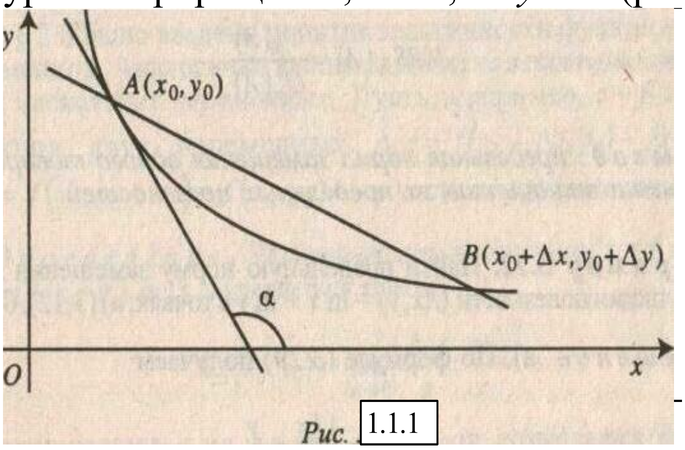


Рис. 1.1.1

В этом случае говорят, что Δx единиц первого товара замещается на $(-\Delta y)$ единиц второго товара (имеется в виду переход из точки B в точку A).

Предельной нормой замещения x на y в точке A называется предел отношения $(-\Delta y)/\Delta x$, когда точка B стремится к A, оставаясь на одной с A линии уровня функции $U(x, y)$. Предельная норма замещения обозначается MRS_{xy} или $MRS_{xy}(A)$, если необходимо явно указать ее зависимость от точки A.

Предельная норма замещения одного товара другим равна *отношению их предельных полезностей.*

$$MRS_{xy} = \frac{U'_x(A)}{U'_y(A)}. \qquad (1.1.1)$$

Пример 1.1.1**.** Найти предельную норму замещения x на y для функции полезности $U(x,y) = \ln x + \ln y$ в точках: а) (3;12), б) (2;1).

Решение. а) По формуле (1.1.1) получаем $MRS_{xy} = \frac{1/x}{1/y} = \frac{y}{x}$,

поэтому $MRS_{xy}(3;\,12) = 4$.

б). Аналогично находим $MRS_{xy}(2;\,1) = 0{,}5$.

В теории потребительского спроса на два блага x и y (к примеру, исследуемое x и все остальные y) предпочтения потребителя описываются функцией полезности U(x,y), а *бюджетное ограничение* (расходы потребителя не более его дохода) в случае, когда потребитель тратит весь свой доход на рассматриваемые блага: $xp_x + yp_y = \mathrm{I}$, где I – доход потребителя, а p_x и p_y – цены благ x и y соответственно. Для того, чтобы построить графики этих неявно заданных функций $y(x)$ в системе координат, где по оси абсцисс отложена величина блага x, а по оси ординат – y, нужно выразить в явном виде величину y как функцию от x для обеих зависимостей. Сделаем это для простейшей функции полезности U(x,y)=xy. Для уровня полезности (благосостояния) U_0 и дохода I получаем следующие функции:

$$y = \frac{U_0}{x},\ y = \frac{I}{p_y} - \frac{p_x}{p_y}x.$$

Графиком первой из этих функций (она называется *кривой безразличия*, т.к. показывает все пары (x,y), дающие одинаковое значение функции полезности) является гипербола, а графиком второй (бюджетного ограничения) – прямая линия, имеющая отрицательный наклон, равный по абсолютной величине относительной цене блага x и точку пересечения с осью ординат I/p_y, соответствующую количеству блага y, которое можно приобрести по цене p_y, если потратить на него весь доход I (построить график самостоятельно).

Другим примером функций в экономике служат функции спроса и предложения $p(q)$, выражающие связь цены блага и величины спроса или предложения блага при постоянных вкусах потребителей, ценах на другие блага и других параметрах. Пример графика функции спроса и функции предложения приводится на рис. 1.1.2. График функции предложения, в отличие от функции спроса, отражает положительную связь переменных (D(q) – связь цены блага и величины спроса, S(q) – предложения).

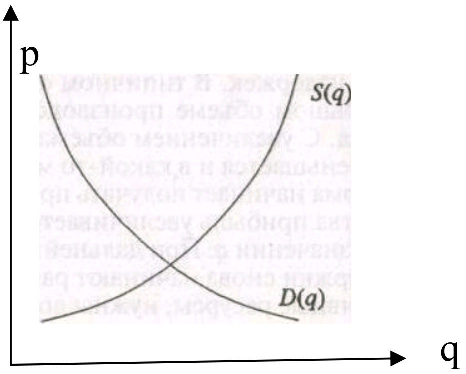


Рис. 1.1.2

В модели потребительского спроса используются также функции Торнквиста, моделирующие связь между величиной дохода I и величиной спроса потребителей *x* на:

а) малоценные товары

$$x = \frac{\alpha I(I + \beta)}{I^2 + \gamma};$$

б) товары первой необходимости

$$x = \frac{\alpha I}{I + \beta};$$

в) товары второй необходимости

$$x = \frac{\alpha (I - \gamma)}{I + \beta};$$

г) предметы роскоши

$$x = \frac{\alpha I(I - \gamma)}{I + \beta}.$$

Соответствующие им графики приведены на рис. 1.1.3.

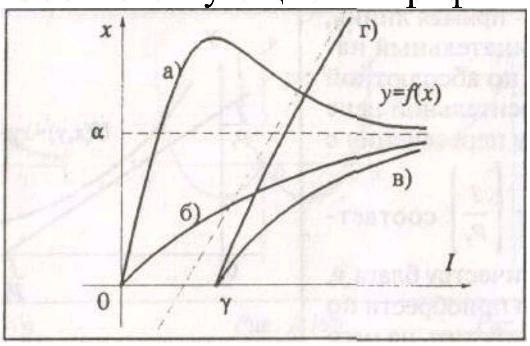


Рис. 1.1.3

1.1.2. Коэффициенты эластичности спроса по цене: практическое значение, оценивание, свойства.

Понятие эластичности было введено экономистом Аланом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. По существу, это понятие является чисто математическим и может применяться при анализе любых дифференцируемых функций.

Эластичностью функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется следующий предел

$$E_{yx}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Если из контекста ясно, в какой точке определяется эластичность, и какая переменная является независимой, то в обозначении эластичности могут опускаться отдельные символы. Эластичность E_y – это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Если, например, x увеличится на один процент, то y увеличивается (приближенно) на E_y процентов.

Для вычисления эластичности используют несколько эквивалентных формул (если существует конечная производная функции $y=f(x)$ в точке x):

$$E_y=\frac{x}{y}y'=x(\ln y)'=\frac{(\ln y)'}{(\ln x)'}.$$

Рассмотрим теперь ряд свойств эластичности.

1. Эластичность суммы $y=y_1+\ldots+y_n$ положительных функций y_i удовлетворяет соотношению $E_{min}\le E_y\le E_{max}$, где $E_{min}(E_{max})$ – это минимальная (максимальная) эластичность функций y_i.

2. Эластичность произведения функций $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x)$ и $\mathrm{v}=\mathrm{v}(x)$ равна сумме эластичностей функций u и v: $E_{uv}=E_u+E_v$.

3. Эластичность частного функций $\mathrm{u}=\mathrm{u}(x)$ и $\mathrm{v}=\mathrm{v}(x)$ равна разности эластичностей функций u и v: $E_{uv}=E_u-E_v$..

Для сложной функции $y=y(x(\mathrm{t}))$ эластичность y по t удовлетворяет равенству $E_{yt}=E_{yx}\cdot E_{xt}$..

Эластичность обратной функции удовлетворяет соотношению $E_{xy}=1/E_{yx}$..

Примеры:

$y=x+\mathrm{C}$, $$E_y=x\frac{(x+C)'}{x+C}=\frac{x}{x+C}.$$

$y=x^a$, $$E_y=x(\ln x^a)'=x(a\ln x)'=xa\frac{1}{x}=a.$$

Обратите внимание – эластичность степенной функции постоянна и равна показателю степени. В 1.1.4 мы покажем, что справедливо и обратное – если эластичность некоторой функции постоянна, то это степенная функция.

Ценовая эластичность спроса. Пусть D=D(p) – спрос (в натуральных единицах) на некоторый товар при цене p. Так как при увеличении цены спрос уменьшается, то эластичность спроса $E_D<0$. Спрос называется эластичным, если $E_D<-1$, и неэластичным, если E_D

> –1. Термин совершенно неэластичный спрос означает крайний случай, когда изменение цены не приводит ни к какому изменению спроса. В этом случае $E_D = 0$. К таким товарам относятся жизненно необходимые лекарства, например, инсулин. В другом крайнем случае, когда самое малое снижение цены побуждает покупателя увеличивать покупки от нуля до предела своих возможностей, говорят, что спрос является совершенно эластичным. Можно считать, что для совершенно эластичного спроса $E_D = -\infty$. Такие ситуации возникают в случае гиперинфляции.

Если спрос со стороны отдельных покупателей или групп покупателей является эластичным (неэластичным), то и суммарный спрос также является эластичным (неэластичным). Это утверждение следует из первого свойства эластичности.

Если продавцы обладают достаточными запасами товара, то D = D(p) – это не только количество спрашиваемого товара, но и одновременно количество проданного товара. В этом случае общая выручка всех продавцов R =pD. Находим эластичность выручки по цене:

$$E_R = \frac{R'}{R}p = \frac{D + pD'}{pD}p = 1 + \frac{D'}{D}p = 1 + E_D.$$

Следовательно, при эластичном спросе $E_R < 0$, а при неэластичном спросе $E_R > 0$.

Вывод: Если спрос эластичен, то изменение цены вызывает изменение общей выручки в противоположном направлении. Если же спрос неэластичен, то изменение общей выручки происходит в том же направлении, что и изменение цены.

Эластичность спроса зависит от многих факторов:

- наличие товаров-заменителей (одним из самых неэластичных товаров является соль, т.к. ее нельзя ничем заменить);
- удельный вес стоимости товара в бюджете потребителя;
- размеры дохода покупателей (при этом цена может не меняться, изменяется платежеспособность – чем дороже товар, тем эластичнее спрос на него);
- качество товара (чем выше качество, чем менее эластичен спрос);
- степень необходимости товара (на продукты питания спрос менее эластичен, а на предметы роскоши – более эластичен);
- размеры запасов товара;
- потребительские ожидания.

Большее значение для рыночной экономики имеет связь между спросом товара и доходом потребителей. Для большинства товаров величина коэффициента эластичности спроса по доходу является положительной. Но есть и такие товары, для которых этот коэффициент может принимать отрицательное значение. Спрос на них сокращается (при определенных условиях) по мере роста доходов потребителей. Например, при общих высоких доходах потребители при дальнейшем росте доходов начинают сокращать потребление многих пищевых продуктов – хлеба, картофеля, маргарина и пр. Кроме того, отрицательные значения E_D свидетельствуют о низком качестве продукции, так как при увеличении доходов покупатель сокращает объемы покупки, потребления продукции.

При положительном значении коэффициента эластичности по доходам можно констатировать удовлетворительное качество товаров. Причем положительная величина эластичности по доходу имеет довольно значительный разброс: от величин, близких к нулю, до величин в несколько единиц. Например, в развитых странах коэффициент эластичного спроса по доходу для многих продуктов сельского хозяйства составляет +0,2, а для автомобилей +3,0. Разница, как видим, весьма существенная. При $0 < E_D < 1$ товары данной категории относят к товарам первой необходимости, при Ед, значительно превышающем 1, – к предметам роскоши.

Информация о коэффициентах эластичности спроса по доходу имеет большое практическое значение. Она позволяет прогнозировать будущее развитие и процветание тех производств, товары которых имеют значительную величину этого коэффициента, и, наоборот, застой и сокращение производства тех товаров, для которых эластичность спроса по доходу есть величина незначительная.

1.1.3. Перекрестные коэффициенты эластичности.

В 1.1.2 было введено понятие эластичности функции одной переменной. Аналогично вводится понятие *эластичности функции нескольких переменных*. Пусть, например, $z=f(x, y)$ – функция двух переменных.

E_{zx} – коэффициент эластичности z по x показывает, на сколько процентов изменится z при увеличении x на один процент. E_{zy} – коэффициент эластичности z по y показывает, на сколько процентов изменится z при увеличении y на один процент.

Из определения вытекают следующие формулы:

$$E_{zx}(x, y) = \frac{x}{z} z'_x = x(\ln z)'_x,$$
$$E_{zy}(x, y) = \frac{y}{z} z'_y = y(\ln z)'_y. \qquad (1.1.2)$$

Пример 1.1.2. Найти коэффициенты эластичности по x и по y

функции $z = x^y$ в точке (2;3).

Согласно формулам (1.1.2) имеем

$$E_{zx}(x,y) = x(\ln z)'_x = x(y\ln x)'_x = y,$$

$$E_{zy}(x,y) = y(\ln z)'_y = y(y\ln x)'_y = y\ln x.$$

Следовательно, $E_{zx}(2,3) = 3$, $E_{zy}(2;3) = 3\ln 2$.

Формулы (1.1.2) полностью аналогичны формулам, которые использовались при выводе свойств 1–3 эластичности в 1.1.2. Поэтому первые три свойства эластичности справедливы и в случае функции нескольких переменных. Четвертое и пятое свойства также сохраняются, но формы их записи становятся сложнее. Остановимся подробнее на этих свойствах.

Свойство 4′. Для функций $z = f(x, y)$, $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ эластичность z по t в точке t_0 находится по формуле

$$E_{zt} = E_{zx}E_{xt} + E_{zy}E_{yt}, \tag{1.1.3}$$

где E_{zx}, E_{zy} – эластичности z по x и y в точке $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$, а E_{xt}, E_{yt} – эластичности x и y по t в точке t_0.

Для любой пары функций $y_1=f_1(x_1, x_2)$, $y_2=f_2(x_1, x_2)$ имеем 4 коэффициента эластичности, которые запишем в матрицу размера 2x2:

$$E_{yx} = \begin{pmatrix} E_{y_1x_1} & E_{y_1x_2} \\ E_{y_2x_1} & E_{y_2x_2} \end{pmatrix}.$$

Элементы этой матрицы, расположенные вне главной диагонали, называются *перекрестными коэффициентами эластичности*.

Свойство 5′. Пусть $x_1=g_1(y_1, y_2)$, $x_2=g_2(y_1, y_2)$ – пара обратных функций для функций $y_1=f_1(x_1, x_2)$, $y_2=f_2(x_1, x_2)$. Тогда матрица коэффициентов эластичности E_{xy} является обратной к матрице E_{yx}.

Коэффициенты эластичности используются при анализе функций спроса при любом числе различных товаров. В качестве примера рассмотрим случай с двумя товарами. Пусть x_i – количество i-го товара, p_i – его цена ($i = 1,2$). Для пары дополняющих товаров (например, чай и сахар) или заменяющих товаров (например, масло и маргарин) естественно считать, что спрос на каждый товар зависит от обеих цен p_1 и p_2:

$$x_1=D_1(p_1, p_2),\ x_2=D_2(p_1, p_2) \tag{1.1.4}$$

Предположим, что не только цены определяют спрос, но и, напротив, спрос определяет цены. Иными словами, будем считать, что систему (1.2.4) можно разрешить относительно p_1 и p_2 в следующем виде:

$$p_1=p_1(x_1, x_2),\ p_2=p_2(x_1, x_2). \tag{1.1.5}$$

Системы (1.1.4) и (1.1.5) определяют две пары взаимно обратных функций. Согласно свойству 5′ матрица коэффициентов эластичности цен по спросу может быть найдена как обратная матрица коэффициентов эластичности спроса по цене.

Пример 1.1.3. Пусть $x_1=10p_1^{-1.2}\ p_2^{0.8}$, $x_2=12p_1^{-0.9}p_2^{-0.7}$. ($x_1$ – *маргарин,* x_2 – *масло)*. Коэффициенты эластичности составят матрицу

$$E_{yx}=\begin{pmatrix}-0.7 & 0.8\\ -0.9 & -1.2\end{pmatrix}.$$

Спрос на маргарин неэластичный, на масло – эластичный, перекрестные коэффициенты эластичности показывают, что маргарин заменяет масло – повышение цены на масло на 1% ведет к повышению спроса на маргарин на 0.8%. Чтобы получить коэффициенты эластичности цены по спросу E_{xy}, достаточно найти обратную матрицу E_{yx}^{-1}.

$$E_{xy}=\frac{1}{1.56}\begin{pmatrix}-1.2 & -0.8\\ 0.9 & -0.7\end{pmatrix}.$$

1.1.4. Функции спроса, уравнение Слуцкого

Пусть p – цена товара X, q – цена товара Y, R – доход потребителя. Напомним, что функцией полезности $U(x, y)$ называется функция, задающая степень полезности (для потребителя) набора товаров, состоящего из x единиц товара X и y единиц товара Y. Будем считать, что потребитель может покупать только такие наборы (x, y), стоимость которых не превосходит его дохода, т.е. $px + qy \le R$.

Определение. Пусть функция полезности $U(x,y)$, при любых положительных p, q и R имеет на множестве

$$\{px + qy \le R,\ x\ge 0,\ y\ge 0\} \qquad (1.1.6)$$

единственную точку глобального максимума (x^*; y^*). Тогда x^*; y^* – функции от p, q и R: $x^* = x^D(p,q,R)$, $y^* = y^D(p,q,R)$.

Эти функции называются *функциями спроса***.**

Смысл данного определения в том, что потребитель стремится к наибольшему удовлетворению от купленных им товаров при ограниченных средствах.

Для любого $t > 0$ функции спроса удовлетворяют следующим тождествам:

$$x^D(tp,tq,tR)=x^D(p,q,R),\ y^D(tp,tq,tR)=y^D(p,q,R).$$

Таким образом, функции спроса являются однородными функциями степени однородности 0. Следовательно, для дифференцируемых функций спроса выполняются тождества Эйлера:

$$px'_{p}+qx'_{q}+Rx'_{R}=0,\ py'_{p}+qy'_{q}+Ry'_{R}=0, \qquad (1.1.7)$$

а также следующие уравнения для эластичности:

$$E_{xp}+E_{xq}+E_{xR}=0,\ E_{yp}+E_{yq}+E_{yR}=0.$$

Функция Лагранжа запишется так:

$$L(x,y) = U(x,y) + \lambda(R - px - qy).$$

Необходимые условия условного экстремума (условия Куна-Таккера) для функции $L(x,y)$ будут следующие:

$$\begin{cases} U'_x(x,y) - \lambda p=0,\ U'_y(x,y) - \lambda q=0, \\ (R-px - qy)=0, \\ \lambda\geq 0. \end{cases} \qquad (1.1.8)$$

Если $U'_x > 0$ или $U'_y > 0$ (чаще всего выполняются оба условия), то тогда λ можно исключить из системы. В итоге получаем систему уравнений

$$U'_x(x,y)/U'_y(x,y)=p/q,$$
$$px + qy= R. \qquad (1.1.9)$$

Пример 1.1.4**.** Найти функции спроса x^D, y^D в случае функции полезности

$$U(x,y)=\ln x + \ln y - \ln(x + y).$$

Решение. Для заданной функции полезности частные производные первого порядка таковы: $U'_x = \dfrac{y}{x(x+y)}, U'_y = \dfrac{x}{y(x+y)}$.

Система уравнений (1.1.9) имеет вид

$$\begin{cases} U'_x/ U'_x= y^2 / x^2 =p/q, \\ px + qy= R. \end{cases}$$

Поэтому функции спроса таковы: $x^D = \dfrac{R}{p+\sqrt{pq}}, y^D = \dfrac{R}{q+\sqrt{pq}}$.

В заключение выведем *уравнение Слуцкого* для функций спроса. С этой целью преобразуем выражение $q(x'_q + yx'_R)$. С учетом равенства $qx'_q = -px'_p - Rx'_R$, следующего из тождеств Эйлера (1.1.7), и равенства $qy = R - px,$ вытекающего из бюджетного равенства $px + qy = R,$ имеем

$$q(x'_q + yx'_R) = -px'_p - px \times x'_R = -(px'_p + x) + x(1 - px'_R) =$$
$$=(R - px)'_p + x(R - px)'_R = qy'_p + xqy'_R .$$

Разделив первое и последнее выражения на $q,$ получим *уравнение Слуцкого:*

$$x'_q + yx'_R = y'_p + xy'_R . \qquad (1.1.10)$$

Уравнение Слуцкого можно умножить на R/xy. Тогда оно приобретает вид

$$\beta^{-1}E_{xq} + E_{xR} = \alpha^{-1}E_{yp} + E_{yR},$$

где E_{xq} , E_{yp} – перекрестные коэффициенты эластичности спроса, E_{xR}, E_{yR} – коэффициенты эластичности спроса по доходу, $\alpha=px/R,$ $\beta=qy/R$ – доли расходов на товары X и Y в бюджете R..

1.1.5. Практический блок

Пример

Пусть в результате корреляционно-регрессионного анализа (см. дисциплину «Эконометрика») получены следующие зависимости себестоимости продукции (y) от определяющих факторов (табл. 1.1.1.):

Таблица 1.1.1.

Объем производства (x_1)	$y(x_1)$=0,62+58,74·(1/x_1) (гипербола)	$\bar{x}_1 = 2{,}64$
Трудоемкость единицы продукции (x_2)	$y(x_2)$=9,3+9,83·x_2 (линейная функция)	$\bar{x}_2 = 1{,}38$
Оптовая цена за 1т. энергоносителя (x_3)	$y(x_3)=11{,}75+x_3^{1{,}6281}$ (степенная функция)	$\bar{x}_3 = 1{,}503$
Доля прибыли, изымаемая государством (x_4)	$y(x_4)=14{,}87\cdot 1{,}016^{x4}$ (показательная функция)	$\bar{x}_4 = 26{,}3$

Тогда получаем:

a) для гиперболы $y=b+a/x$

$$\bar{Э}_{yx_1} = -\frac{a}{\bar{x}_1^2}\cdot\frac{\bar{x}_1}{b+a/\bar{x}_1} = -\frac{a}{b\bar{x}_1+a} = -0.973\%$$

b) для линейной функции $y=b+ax$

$$\bar{Э}_{yx_2} = \frac{a\bar{x}_2}{b+a\bar{x}_2} = 0.59\%$$

c) для степенной функции $y=bx^a$

$$\bar{Э}_{yx_3} = a = 1.63\%$$

d) для показательной функции $y=ba^x$

$$\bar{Э}_{yx_4} = ba^{\bar{x}_4}\cdot\frac{\ln a\cdot\bar{x}_4}{ba^{\bar{x}_4}} = \ln a\cdot\bar{x}_4 = 0.42\%$$

Из примера видно, что в наибольшей степени себестоимость зависит от оптовой цены за 1т. энергоносителя (1.63), затем от объемов производства (-0.973, т.е. с ростом объемов производства на 1% себестоимость падает почти на 1%).

Контрольные вопросы

1. Эконометрическое моделирование функции спроса.
2. Эконометрическое моделирование функции предпочтения.
3. Эластичность спроса по цене: определение и использование в практике маркетинга.
4. Методы оценивания эластичности спроса по цене.
5. Свойства эластичности спроса по цене.
6. Перекрестные коэффициенты эластичности.
7. Уравнение Слуцкого.
8. Взаимозаменяемые и взаимодополняемые товары.
9. Ценные и малоценные товары.

10. Графическая иллюстрация компенсированного изменения цены.
11. Один товар: кривая спроса и предложения.
12. Один товар: понятие равновесной цены, дефицит и излишек.
13. Один товар: индивидуальный и рыночный спрос.
14. Один товар: эластичный и неэластичный спрос. Определение, свойства.
15. Один товар: спрос постоянной эластичности.
16. Один товар: реакция потребителя на изменение цен в зависимости от коэффициента эластичности.
17. Реакция производителя товара в зависимости от эластичности спроса.
18. Понятие и математическая формализация потребительского выбора.
19. Использование моделей потребительского выбора для принятия управленческих решений.
20. Использование моделей спроса для принятия управленческих решений в условиях недостатка маркетинговых данных.

Тесты

1. Предельная производительность (предельный продукт) i – го ресурса рассчитывается по формуле:

   а) $P_{X_i} = \dfrac{f(x)}{x_i}$; б) $P_{X_i} = \dfrac{\partial x_i}{\partial f(x)}$; в) $P_{X_i} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

2. Что показывает коэффициент эластичности:

   а) на сколько изменится факторный признак при изменении результативного признака на один процент;

   б) на сколько процентов изменится результативный признак при изменении факторного признака на один процент;

   в) долю изменения результативного признака под действием факторного признака.

3. Средняя производительность (средний продукт) i – го ресурса рассчитывается по формуле:

   а) $A_{X_i} = \dfrac{f(x)}{x_i}$; б) $A_{X_i} = \dfrac{x_i}{f(x)}$; в) $A_{X_i} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

4. Оценка эластичности потребления ресурса по объему выпускаемой продукции, находиться по формуле:

   а) $\overline{Э}л = \hat{A}'_1 \dfrac{\overline{X}^2 вв}{\overline{Y}^2 рес}$; б) $\overline{Э}л = \hat{A}'_1 \dfrac{\overline{X}вв}{\overline{Y}рес}$; в) $\overline{Э}л = \hat{A}'^2{}_1 \dfrac{1}{\overline{Y}рес}$.

5. Функцией полезности $U(x, y)$ называется функция

а) задающая степень полезности (для потребителя) набора товаров, состоящего из x единиц товара X и y единиц товара Y;

б) задающая количество полезных ингридиентов в единице продукта;

в) определяющая степень полезности ресурсов для производства оптимального объема продукции.

6. Эластичность спроса зависит от факторов:

а) наличие товаров-заменителей (одним из самых неэластичных товаров является соль, т.к. ее нельзя ничем заменить);

б) удельный вес стоимости товара в бюджете потребителя;

в) размеры дохода покупателей (при этом цена может не меняться, изменяется платежеспособность – чем дороже товар, тем эластичнее спрос на него);

г) качество товара (чем выше качество, чем менее эластичен спрос);

д) п.п. а-г.

7. Свойством эластичности является:

а) Эластичность суммы $y=y_1+\ldots+y_n$ положительных функций y_i удовлетворяет соотношению $E_{min} \le E_y \le E_{max}$, где $E_{min}(E_{max})$ – это минимальная (максимальная) эластичность функций y_i.

б) Эластичность произведения функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна рзности эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u - E_v$.

в) Эластичность частного функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна сумме эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u + E_v$..

8. Свойством эластичности является:

а) Эластичность произведения функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна произведению эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u \cdot E_v$.

б) Эластичность частного функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна разности эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u - E_v$..

в) Для сложной функции $y=y(x(t))$ эластичность y по t удовлетворяет равенству $E_{yt} = E_{yx} / E_{xt}$..

9. Свойством эластичности является:

а) Эластичность произведения функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна разности эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u - E_v$.

б) Эластичность частного функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна сумме эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u + E_v$..

в) Эластичность обратной функции удовлетворяет соотношению $E_{xy}=1/E_{yx}$..

10. Свойством эластичности является:

а) Эластичность произведения функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна разности эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u - E_v$.

б) Эластичность частного функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ равна сумме эластичностей функций u и v: $E_{uv} = E_u + E_v$..

в) Для сложной функции $y=y(x(t))$ эластичность y по t удовлетворяет равенству $E_{yt} = E_{yx} \cdot E_{xt}$..

Ответы к тестам

1) в	6) д
2) б	7) а
3) а	8) б
4) б	9) в
5) а	10) в

Задания и задачи

Задача 1. Функция полезности индивида: $u = (Q_A + 4)(Q_B + 5)$, где Q_A, Q_B – количества двух различных благ, его бюджет: $M = 64$, а цены благ $p_A = 1$, $p_B = 1.5$. Запишите уравнение кривой безразличия, на которой находится потребитель в момент равновесия.

Задача 2. Функция спроса на газ имеет вид $Q_D = 3.75p_n - 5p_g$, а функция его предложения – $Q_S = 14 + 0.25p_n + 2p_g$, где p_n, p_g – соответственно цены нефти и газа. При каких ценах на данные энергоносители объемы спроса и предложения газа будут равны 20 ед.?

Задача 3. В условиях задачи 2 определить, на сколько процентов изменится объем продажи газа при увеличении цены нефти на 25%.

Задача 4. На рынке данного товара функция спроса описывается уравнением: $Q_D = 6 - P$, функция предложения: $Q_S = -3 + 2P$, где Q_D — объем спроса, млн. шт. в год; Q_S — объем предложения, млн. шт. в год;

а) определите равновесную цену и равновесный объем продажи;

б) если цена данного товара будет составлять 2 ден. ед., что образуется на рынке: излишек или дефицит товара? В каком размере?

в) какая ситуация будет на рынке, если цена возрастет до 4 ден. ед.?

Задача 5. Опытным путем установлены функции спроса $q = (p+8)/(p+2)$ и предложения $s = p + 0{,}5$, где q и s – количество товара, соответственно покупаемого и предлагаемого на продажу в единицу времени, p – цена товара. Найти: а) равновесную цену, т.е. цену, при которой спрос и предложение уравновешиваются; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода при увеличении цены на 5% от равновесной.

Задача 6. Функции спроса q и предложения s от цены p выражаются соответственно уравнениями $q = 7 - p$ и $s = p + 1$. Найти: а) равновесную цену; б) эластичность спроса и предложения для этой цены; в) изменение дохода (в процентах) при увеличении цены на 5% от равновесной.

Задача 7. Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?

Задача 8. Спрос на товар A (яблоки) описывается уравнением $Q_{dA}=100 - 2P_A + P_B$; спрос на товар B (груши) – уравнением $Q_{dB} =100-2P_B+P_A$. Предложение товара A описывается уравнением $Q_{sA} = -50 + P_A$; предложение товара B – уравнением $Q_{sB} = -50 + P_B$.

Задача 9. Определите параметры рыночного равновесия на двух рынках; как изменятся параметры рыночного равновесия, если на товар В (груши) будет введен налог в размере 10 ден. ед. за единицу товара; выгодно ли государству это делать. Рассчитайте изменение общественного благосостояния. Сравните потери общественного благосостояния в случае, если такой налог будет введен на двух рынках одновременно.

Задача 10. Потребитель выделил на приобретение двух товаров 3300 д.е. Цена первого товара 15 д.е., второго — 22 д.е. Функция полезности потребителя — $U(x,y) = 60x + 90y$. Записать задачу потребителя.

Задача 11. Потребитель выделил на приобретение двух товаров 3300 д.е. Цена первого товара 15 д.е., второго — 22 д.е. Функция полезности потребителя — $U(x,y) = 60x + 90y$. Изобразить геометрически бюджетное множество, отметить бюджетную линию.

Задача 12. Потребитель выделил на приобретение двух товаров 3300 д.е. Цена первого товара 15 д.е., второго — 22 д.е. Функция полезности потребителя — $U(x,y) = 60x + 90y$. Изобразить геометрически кривую безразличия $U(x,y) = 4500$.

Задача 13. Потребитель выделил на приобретение двух товаров 3300 д.е. Цена первого товара 15 д.е., второго — 22 д.е. Функция полезности потребителя — $U(x,y) = 60x + 90y$. Какова предельная полезность потребителя по каждому товару?

Задача 14. Потребитель выделил на приобретение двух товаров 3300 д.е. Цена первого товара 15 д.е., второго — 22 д.е. Функция полезности потребителя — $U(x,y) = 60x + 90y$. Решить задачу потребителя.

Задача 15. Потребитель выделил на приобретение двух товаров 3300 д.е. Цена первого товара 15 д.е., второго — 22 д.е. Функция полезности потребителя — $U(x,y) = 60x + 90y$. Определить максимальную полезность потребителя от потребления этих двух товаров.

Задача 16. Спрос потребителя на некоторый товар в зависимости от цены определяется функцией $d(p) = -0{,}3p + 60$. Определить коэффициент ценовой эластичности при $p = 120$, $p = 60$.

Задача 17. Спрос потребителя на некоторый товар в зависимости от цены определяется функцией $d(p) = -0{,}3p + 60$. При какой цене коэффициент эластичности равен единице?

Задача 18. Спрос потребителя на некоторый товар в зависимости от цены определяется функцией $d(p) = -0{,}3p + 60$. Эластичен ли спрос при $p = 120$, $p = 60$?

Задача 19. Исследовался спрос на товар двух групп потребителей. Функции спроса в зависимости от цены, предъявляемые каждой группой, имеют вид: $d_1(p) = -0{,}2p + 80$, $d_2(p) = -0{,}4 + 60$. Построить совокупную функцию спроса.

Задача 20. Исследовался спрос на товар двух групп потребителей. Функции спроса в зависимости от цены, предъявляемые каждой группой, имеют вид: $d_1(p) = -0{,}2p + 80$, $d_2(p) = -0{,}4 + 60$. Чему равен совокупный спрос при р = 100 д.е., р = 200 д.е.?

Задача 21. Исследовался спрос на товар двух групп потребителей. Функции спроса в зависимости от цены, предъявляемые каждой группой, имеют вид: $d_1(p) = -0{,}2p + 80$, $d_2(p) = -0{,}4 + 60$. Изобразить геометрически спрос каждой группы и совокупный спрос.

Задача 22. Для трех видов продукции А, В и С модели зависимости удельных постоянных расходов от объема выпускаемой продукции выглядят следующим образом: $y_A = 600$, $y_B = 80 + 0{,}7x$, $y_C = 40x^{0,5}$. Определить коэффициенты эластичности по каждому виду продукции.

1.1.6. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Рекомендуемые темы рефератов

1. Моделирование функции спроса и предложения.
2. Эластичность, ее свойства, перекрестные коэффициенты эластичности.
3. Понятие и математическая формализация потребительского выбора.
4. Использование моделей потребительского выбора для принятия управленческих решений.
5. Использование моделей спроса для принятия управленческих решений в условиях недостатка маркетинговых данных.

Литература для самостоятельной работы

1. Микроэкономика. Теория и российская практика: Учебник / Под ред. А. Г. Грязновой, А. Ю. Юданова. –М.: КНОРУС, 2004. –Гл. 9, 15.
2. Гальперин В.М., Игнатьев С.М., Моргунов В.И. Микроэкономика. В 2-х т. –Спб.: Экономическая школа, 2003. –Т. 2. –Гл. 11.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. –399с.
4. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
5. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

ТЕМА 1.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1.2.1. Общие понятия и определения.

Производственная функция (ПФ) выражает зависимость результата производства от затрат ресурсов. При описании экономики (точнее, ее производственной подсистемы) с помощью ПФ эта подсистема рассматривается как «черный ящик», на вход которого поступают ресурсы $R_1, ..., R_n$, а на выходе получается результат в виде годовых объемов производства различных видов продукции $X_1, ..., X_m$.

В качестве ресурсов (факторов производства) на макроуровне наиболее часто рассматриваются накопленный труд в форме производственных фондов (капитал) K и настоящий (живой) труд L, а в качестве результата – валовой выпуск X (либо валовой внутренний продукт Y, либо национальный доход N). Во всех случаях результат коротко будем называть выпуском и обозначать X, хотя это может быть и валовой выпуск, и ВВП, и национальный доход.

Остановимся несколько подробнее на обосновании состава фактора K.. Накопленный прошлый труд проявляется в основных и оборотных, производственных и непроизводственных фондах. Выбор того или иного состава K определяется целью исследования, а также характером развития производственной и непроизводственной сфер в изучаемый период. Если в этот период в непроизводственную сферу вкладывается примерно постоянная доля вновь созданной стоимости и непроизводственная сфера оказывает на производство примерно одинаковое влияние, это служит основанием напрямую учитывать в ПФ только производственные фонды.

Но производственные фонды состоят из основных и оборотных производственных фондов. Если соотношение между этими составными частями производственных фондов примерно постоянное в течение всего изучаемого периода, то достаточно напрямую учитывать в ПФ только основные производственные фонды.

Если изучаемый период достаточно продолжителен и однороден по влиянию на производство указанных выше составных частей, следует испробовать все варианты включения их в модель (от всех вместе до какого-то одного из них). Чтобы не вдаваться в детали, далее будем *K* называть фондами.

Таким образом, экономика замещается своей моделью в форме нелинейной ПФ

X= F(K, L),

т.е. выпуск (продукции) есть функция от затрат ресурсов (фондов и труда).

Производственная функция X=F(K,L) называется *неоклассической,* если она является гладкой и удовлетворяет следующим условиям, поддающимся естественной экономической интерпретации:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$

- при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно;

2) $\frac{\partial F}{\partial L} > 0, \frac{\partial F}{\partial K} > 0$

- с ростом ресурсов выпуск растет;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$

- с увеличением ресурсов скорость роста выпуска замедляется;

4) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = +\infty$

- при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет.

Мультипликативная ПФ задается выражением

$X = AK^{a_1}L^{a_2}$,

$a_1>0,\ a_2>0$,

где A – коэффициент нейтрального технического прогресса; a_1, a_2 – коэффициенты эластичности по капиталу и труду.

Таким образом, мультипликативная ПФ обладает свойством 1, адекватным реальной экономике: при отсутствии одного из ресурсов производство невозможно. Частным случаем этой функции служит функция Кобба-Дугласа

$X = AK^{a}L^{1-a}$, где $a_1=a$, $a_2=1-a$.

Мультипликативная ПФ определяется по временному ряду выпусков и затрат ресурсов $(X_t,\ K_t,\ L_t,)$, $t= 1, ..., T,$ где T – длина временного ряда, при этом предполагается, что имеет место T соотношений

$X = \delta_t AK_t^{a_1}L_t^{a_2}$,

где δ_t — корректировочный случайный коэффициент, который приводит в соответствие фактический и расчетный выпуск и отражает флюктуацию результата под воздействием других факторов, $M\delta_t = 1$. Поскольку в логарифмах эта функция линейна:

$\ln X_t = \ln A + a_t \ln K_t + a_2 \ln L_t + \varepsilon_t$, где $\varepsilon_t = \ln \delta_t$, $M\varepsilon_t = 0$,
получаем модель линейной множественной регрессии. Параметры функции A, a_1, a_2 определяются методами корреляционно-регрессионного анализа, рассматриваемого в дисциплине «Эконометрика».

В качестве примера приведем мультипликативную функцию валового выпуска Российской Федерации (млрд. руб.) в зависимости от стоимости основных производственных фондов (млрд. руб.) и числа занятых в народном хозяйстве (млн. чел.) по данным за 1960-1994 гг. (все стоимостные показатели даны в сопоставимых ценах для этого периода):

$$X=0{,}931K^{0{,}539}L^{0{,}594}$$

Мультипликативная функция обладает также свойством 2, адекватным реальной экономике: с ростом затрат ресурсов выпуск увеличивается, т.е.

$$\frac{\partial F}{\partial K} = a_1 A K^{a_1 - 1} L^{a_2} = \frac{a_1 X}{K} > 0,$$

так как $a_1 > 0$.

$$\frac{\partial F}{\partial L} = a_2 A K^{a_1} L^{a_2 - 1} = \frac{a_2 X}{L} > 0,$$

так как $a_2 > 0$.

Частные производные выпуска по факторам называются предельными продуктами или предельными (маржинальными) эффективностями факторов и представляют собой прирост выпуска на малую единицу прироста фактора:

$\frac{\partial F}{\partial K}$ – предельный продукт фондов, предельная фондоотдача (предельная эффективность фондов);

$\frac{\partial F}{\partial L}$ – предельный продукт труда, предельная производительность (предельная эффективность труда).

Для мультипликативной функции вытекает, что предельная фондоотдача пропорциональна средней фондоотдаче $\frac{X}{K}$ с коэффициентом a_1, а предельная производительность труда – средней производительности труда $\frac{X}{L}$ с коэффициентом a_2:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = a_1 \frac{X}{K}, \quad \frac{\partial X}{\partial L} = a_2 \frac{X}{L}.$$

Из чего вытекает, что при $a_1 < 1$, $a_2 < 1$ предельные отдачи факторов меньше средних; при этих же условиях мультипликативная функции обладает свойством 3, которое очень часто наблюдается в реальной экономике: с ростом затрат ресурса его предельная отдача падает, т.е.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = a_1(a_1 - 1)AK^{a_1-2}L^{a_2} = a_1(a_1 - 1)\frac{X}{K^2} < 0\text{, так как } a_1<1;$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial L^2} = a_2(a_2 - 1)AK^{a_1}L^{a_2-2} = a_2(a_2 - 1)\frac{X}{L^2} < 0\text{, так как } a_2<1.$$

Из $X = AK^{a_1}L^{a_2}$ также видно, что мультипликативная функция обладает свойством 4 , т.е. при неограниченном увеличении одного из ресурсов выпуск неограниченно растет. Таким образом, мультипликативная функция при $0 < a_1 < 1$, $0<a_2 < 1$ является неоклассической.

Перейдем теперь к экономической интерпретации параметров *A*, a_1, a_2 мультипликативной ПФ. Параметр *A* обычно интерпретируется как параметр нейтрального технического прогресса: при тех же a_1, a_2 выпуск в точке (*K, L*) тем больше, чем больше *A*. Для интерпретации a_1, a_2 необходимо вспомнить понятие эластичности, рассмотренное в 1.1.2.

Получаем a_1 – эластичность выпуска по основным фондам, а a_2 – эластичность выпуска по труду.

Например, согласно ПФ $X=0{,}931K^{0{,}539}L^{0{,}594}$ при увеличении основных фондов (ОФ) на 1% валовой выпуск повысится на 0,539%, а при увеличении занятых на 1% – на 0,594%.

Если $a_1 > a_2$ имеет место *трудосберегающий* (интенсивный) рост, в противном случае – *фондосберегающчй* (экстенсивный) рост.

Рассмотрим темп роста выпуска

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a_1}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{a_2}.$$

Если возвести обе части уравнения в степень $\frac{1}{a_1 + a_2}$, получим соотношение

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-a},$$

в котором справа – взвешенное среднее геометрическое темпов роста затрат ресурсов, при этом в качестве весов выступают относительные эластичности факторов

$$a = \frac{a_1}{a_1 + a_2}\text{ , } 1 - a = \frac{a_2}{a_1 + a_2}.$$

При $a_1 + a_2 > 1$ выпуск растет быстрее, чем в среднем растут факторы, а при $a_1 + a_2 < 1$ – медленнее. В самом деле, если факторы растут (т.е. $K_{t+1}>K_t$, $L_{t+1}>L_t$) то согласно $\frac{X_{t+1}}{X_t}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a_1}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{a_2}$ растет и выпуск (т.е. $X_{t+1}>X_t$), следовательно, при $a_1+a_2>1$

$$\frac{X_{t+1}}{X_t}>\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{a_1+a_2}}=\left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{a}\left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-a},$$

т.е. действительно, темп роста выпуска больше среднего темпа роста факторов. Таким образом, при $a_1+a_2>1$ ПФ описывает растущую экономику.

Линией уровня на плоскости *K, L,* или **изоквантой,** называется множество тех точек плоскости, для которых $F(K, L)=X_0=\text{const}$. Для мультипликативной ПФ изокванта имеет вид:

$$AK^{a_1}L^{a_2}=X_0=const \text{ или } K^{a_1}=\frac{X_0}{A}L^{-a_2},$$

т.е. является степенной гиперболой, асимптотами которой служат оси координат.

Для разных K, L, лежащих на конкретной изокванте, выпуск равен одному и тому же значению X_0, что эквивалентно утверждению о взаимозаменяемости ресурсов.

Поскольку на изокванте $F(K, L) = X_0 = \text{const}$, то

$$dF=\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0.$$

В этом соотношении $\frac{\partial F}{\partial K}>0$, $\frac{\partial F}{\partial L}>0$, поэтому dK и dL имеют разные знаки: если $dL<0$, что означает сокращение объема труда, то $dK>0$, т.е. выбывший в объеме $|dL|$ труд замещается фондами в объеме dK.

Поэтому естественно следующее определение, вытекающее из $dF=\frac{\partial F}{\partial K}dK+\frac{\partial F}{\partial L}dL=0$.

Предельной нормой замены S_K труда фондами называется отношение модулей дифференциалов ОФ и труда:

$$S_k=\frac{dK}{|dL|}=-\frac{dK}{dL}=\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K},$$

соответственно, **предельная норма замены S_L фондов трудом**

$$S_K=-\frac{dL}{dK}=\frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}, \text{ при этом } S_k S_L=1.$$

Для мультипликативной функции норма замещения труда фондами пропорциональна фондовооруженности:

$$S_K=\frac{a_2}{a_1}\frac{K}{L}=\frac{a_2}{a_1}k, \quad k=\frac{K}{L},$$

что совершенно естественно: недостаток труда можно компенсировать его лучшей фондовооруженностью.

Изоклиналями называются линии наибольшего роста ПФ. Изоклинали ортогональны линиям нулевого роста, т.е. изоквантам. Поскольку направление наибольшего роста в каждой точке *(К, L)* задается градиентом

$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial K}; \frac{\partial F}{\partial L} \right)$, то уравнение изоклинали записывается в форме $\frac{dK}{(\partial F / \partial K)} = \frac{dL}{(\partial F / \partial L)}$.

В частности, для мультипликативной ПФ получаем,

$$\frac{\partial F}{\partial K} = a_1 \frac{X}{K}; \frac{\partial F}{\partial L} = a_2 \frac{X}{L},$$

поэтому изоклиналь задается дифференциальным уравнением

$\frac{1}{a_1} KdK = \frac{1}{a_2} LdL$**,** которое имеет решение

$$K = \sqrt{\frac{a_1}{a_2} L^2 + a}, \quad a = K_0{}^2 - \frac{a_1}{a_2} L_0^2,$$

где (L_0; K_0) – координаты точки, через которую проходит изоклиналь. Наиболее простая изоклиналь при $a = 0$ представляет собой прямую

$$K = L\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}.$$

На рис. 1.2.1 изображены изокванты и изоклинали мультипликативной ПФ.

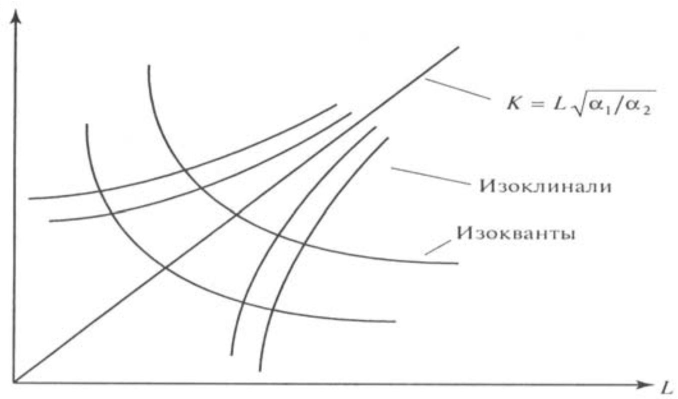


Рис. 1.2.1

При изучении факторов роста экономики выделяют *экстенсивные* факторы роста (за счет увеличения затрат ресурсов, т.е. увеличения масштаба производства) и *интенсивные* факторы роста (за счет повышения эффективности использования ресурсов).

Возникает вопрос: как с помощью ПФ выразить *масштаб и эффективность производства*? Это сравнительно легко сделать, если выпуск и затраты выражены в соизмеримых единицах, например представлены в соизмеримой стоимостной форме. Однако проблема соизмерения настоящего и прошлого труда до сих пор не решена удовлетворительным образом. Поэтому воспользуемся переходом к относительным (безразмерным) показателям. В относительных показателях мультипликативная ПФ записывается следующим образом:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{a_1} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{a_2},$$

т.е. X_0, K_0 L_0 — значения выпуска и затрат фондов и труда в базовый год.

Безразмерная форма, указанная выше, легко приводится к первоначальному виду

$$X = \frac{X_0}{K_0^{a_1} L_0^{a_2}} K^{a_1} L^{a_2} = AK^{a_1} L^{a_2}.$$

Таким образом, коэффициент $A = \frac{X_0}{K_0^{a_1} L_0^{a_2}}$ получает естественную интерпретацию – это коэффициент, который соизмеряет ресурсы с выпуском. Если обозначить выпуск и ресурсы в относительных (безразмерных) единицах измерения через x, *k, l,* то ПФ в форме

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{a_1} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{a_2}$$

запишется так:

$$x = k^{a_1} l^{a_2}.$$

Найдем теперь эффективность экономики, представленной ПФ. Напомним, что эффективность – это отношение результата к затратам. В нашем случае два вида затрат: затраты прошлого труда в виде фондов k и настоящего труда l. Поэтому имеются два частных показателя эффективности: $\frac{x}{k}$ – фондоотдача, $\frac{x}{l}$ – производительность труда.

Поскольку частные показатели эффективности имеют одинаковую размерность (точнее, одинаково безразмерны), то можно находить любые средние из них. Так как ПФ выражена в мультипликативной форме, то и среднее естественно взять в такой же форме, т.е. среднегеометрическое значение.

Итак, обобщенный показатель экономической эффективности есть взвешенное среднее геометрическое частных показателей экономической эффективности:

$$E = \left(\frac{x}{k}\right)^{a} \left(\frac{x}{l}\right)^{1-a},$$

в котором роль весов выполняют относительные эластичности $a = \dfrac{a_1}{a_1 + a_2}$, $1 - a = \dfrac{a_2}{a_1 + a_2}$, т.е. частные эффективности участвуют в образовании обобщенной эффективности с такими же приоритетами, с какими входят в ПФ соответствующие ресурсы.

Из $E = \left(\dfrac{x}{k}\right)^a \left(\dfrac{x}{l}\right)^{1-a}$ вытекает, что с помощью коэффициента экономической эффективности ПФ преобразуется в форму, внешне совпадающую с функцией Кобба-Дугласа:

$x = Ek^a\, l^{1-a}$,

где E – не постоянный коэффициент, а функция от (K, L).

Поскольку масштаб производства M проявляется в объеме затраченных ресурсов, то по тем же соображениям, которые были приведены при расчете обобщенного показателя экономической эффективности, средний размер использованных ресурсов (т.е. масштаб производства)

$M = k^a l^{1-a}$.

В результате получаем, что выпуск X есть произведение экономической эффективности и масштаба производства:

$X = EM$.

Линейная производственная функция

$X = F(K,L) = E_K K + E_L L$,

где E_K и E_L частные эффективности ресурсов.

$E_K = \dfrac{x}{k}$ – фондоотдача , $E_L = \dfrac{x}{l}$ – производитель труда.

Поскольку частные показатели эффективности имеют одинаковую размерность (точнее, одинаково безразмерны), то можно находить любые средние из них.

Пример 1.2.1. Валовой внутренний продукт США (X), измеренный в млрд. долл. в ценах 1987г. возрос с 1960 по 1995 г. в 2,82 раза, основные производственные фонды за этот же период (K) увеличились в 2,88 раза, число занятых (L) – в 1,93 раза. Пусть $X = 2{,}248K^{0{,}404}L^{0{,}803}$. Необходимо рассчитать масштаб и эффективность производства.

Решение.

Из условия $x = 2{,}82$; $k = 2{,}88$; $l = 1{,}93$.

Сначала находим относительные эластичности по фондам и труду

$$a = \frac{a_1}{a_1 + a_2} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = 0{,}3347 .$$

Затем определяем частные эффективности ресурсов

$$E_K = \frac{x}{k} = \frac{2{,}82}{2{,}88} = 0{,}98 ,$$

$$E_L = \frac{x}{l} = \frac{2{,}82}{1{,}93} = 1{,}46,$$

после чего находим обобщенный показатель эффективности как среднее геометрическое частных:

$$E = E_K^a E_L^{1-a} = 0{,}98^{0{,}3347} * 1{,}46^{0{,}6653} = 1{,}278.$$

Масштаб устанавливаем как среднее геометрическое темпов роста ресурсов

$$M = k^a l^{1-a} = 2{,}88^{0{,}3347} * 1{,}93^{0{,}6653} = 2{,}207.$$

Таким образом, общий рост ВВП с 1960 по 1995 г. в 2,82 раза произошел за счет роста масштаба производства в 2,207 раза и за счет повышении эффективности производства в 1,278 раза (2,82=1,278*2,207).

1.2.2. Функции выпуска продукции; производственные функции затрат ресурсов.

Функции зависимости издержек и дохода от объема производства.

Рассмотрим функции издержек C(q) и дохода фирмы R(q) = qp(q) в зависимости от объема производства q. Поведение функции дохода определяется функцией спроса p(q), рассмотренной выше. Поэтому рассмотрим более подробно поведение функции издержек. В типичном случае издержки фирмы велики при небольшом объеме производства q и вначале растут быстрее, чем доход. С увеличением объема производства скорость роста издержек уменьшается, и в какой-то момент они сравниваются с доходом, и фирма начинает получать прибыль. При увеличении объема производства прибыль увеличивается, достигая максимума при оптимальном значении q. При дальнейшем увеличении объема производства издержки снова начинают расти быстрее дохода (исчерпаны эффективные ресурсы, нужны дополнительные помещения, сырье, квалифицированная рабочая сила) и прибыль фирмы уменьшается, достигая отрицательных значений при достаточно больших объемах производства. Им, например, могут соответствовать функции $R(q) = aq - bq^2$, $C(q)=cq - dq^2 + eq^3$. Постройте графики функций дохода, издержек и прибыли.

1.2.3. Распределение налогового бремени, цена, предельные издержки и объем производства.

Распределение налогового бремени.

Пусть p – цена товара на некотором рынке, S(p) – его предложение при цене p, D(p) – спрос. Равновесная цена p_0 определяется уравнением $S(p_0)=D(p_0)$.

Предположим, что вводится дополнительный налог с производителей в размере t с каждой единицы товара. Так как зависимость предложения от цены определяется прибылью, то $S_t(p) = S(p - t)$, где $S_t(p)$ – функция предложения после введения налога. Таким образом, кривая предложения после введения налога сдвигается на t вверх (рис. 1.2.2).

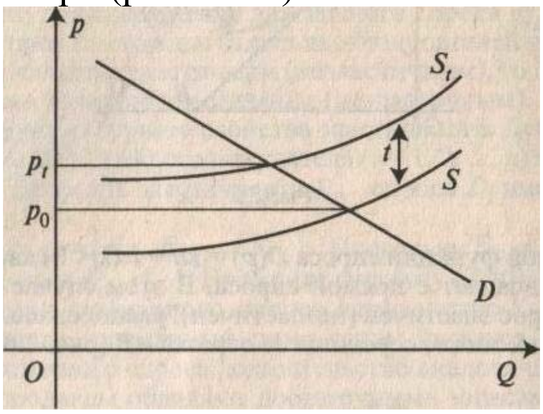


Рис. 1.2.2

Пусть p_t – новая равновесная цена. Равенство спроса и предложения при цене p_t выражается уравнением

$S(p_t - t)=D(p_t)$.

Так как $S(p_0) = D(p_0)$, то из последнего равенства следует

$$S'(p_0)\ (\Delta p - t)=D'(p_0)\Delta p.$$

Итак, после введения дополнительного налога на покупку единицы товара затраты потребителя увеличатся на величину Δp, которую можно (приближенно) рассчитать по формуле

$$\Delta p = \frac{tD'(p_0)}{S'(p_0) - D'(p_0)}.$$

Соответственно, доход производителя (также на единицу продукции) уменьшится на

$$t - \Delta p = \frac{-\,tD'(p_0)}{S'(p_0) - D'(p_0)}.$$

Следовательно, налоговое бремя распределяется между потребителями и производителями продукции в отношении

$$\Delta p:[t-\Delta p]=S'(p_0):[\,-D'(p_0)],$$

а поскольку в точке p_0 спрос равен предложению, то

$$S'(p_0):[\,-D'(p_0)]= E_S:[\,-E_D],$$

где E_S, E_D – коэффициенты эластичности спроса и предложения.

Пример 1.2.2. Пусть ценовая эластичность спроса равна (–3), ценовая эластичность предложения равна 2, а вводимый налог t = 100. Тогда цена после введения этого налога увеличится на 2/(2+3)•100 = 40, а прибыль производителя от единицы продукции уменьшится на 100 – 40 = 60.

Цена, предельные издержки и объем производства.

Пусть q – выпуск продукции (в натуральных единицах); R(q) – выручка от продаж; C(q) – издержки производства, связанные с выпуском q единиц продукции. Тогда прибыль

$$П(q)=R(q) – C(q).$$

Предельной выручкой называется выручка от единицы продукции, предельными издержками – издержки от производства единицы продукции. Эти экономические понятия соответствуют значениям производных R'(q) и C'(q).

Предположим, что максимум прибыли достигается в некоторой точке $q^*\neq 0$.

Тогда $П'(q^*) = 0$, и в точке $q = q^*$ получаем равенство

$$R'(q^*)=C'(q^*). \qquad (1.2.1)$$

В экономической теории это равенство вводится как правило, согласно которому фирма, максимизирующая свою прибыль, устанавливает объем производства таким образом, чтобы предельная выручка была равна предельным издержкам.

В случае, когда объем производства q не влияет на цену продукции p, имеем R(q) =pq, R'(q) =p. Равенство (1.2.1) принимает вид

$$p=C'(q^*). \qquad (1.2.2)$$

(для максимизации прибыли необходимо устанавливать такой объем производства, при котором цена была бы равна предельным издержкам).

Пример 1.2.3. Найти оптимальный объем производства, если p=15, $C(q)=q^3+3q$.

Решение. Прибыль при производстве q единиц продукт будет

$П(q) = 15q – q^3– 3q =q(12 – q^2)$.

Используя равенство (1.2.2), получим

$$15=C'(q^*)=3(q^*)^2+3, \text{ откуда } q^*= 2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай, когда цена продукции является функцией p=p(q) от объема выпуска q.

Из (1.2.1) получим уравнение для цены

$$R'(q^*)=p'(q^*)q^*+ p(q^*)= p(q^*)(E_{pq}(q^*)+1)= C'(q^*), \text{ откуда}$$

$$p(q^*) = \frac{C'(q^*)}{E_{pq}(q^*)+1}. \qquad (1.2.3)$$

Так как $E_{pq}(q) < 0$, то из равенства (1.2.3) следует, что цена $p(q^*)$ больше предельных издержек $C'(q^*)$.

Предположим теперь, что фирма является монополией. В этом случае при цене p фирма будет производить столько единиц продукции, сколько требуется покупателям, т.е. q = D(p), где D(p) –

функция спроса. Таким образом, функция D(p) будет обратной функцией для функции p(q). Из свойств эластичности следует что E_{pq} (q*)= E_{Dp}^{-1}(p(q*)).

Пусть p*=p(q*) цена, соответствующая выпуску q*. Тогда уравнение (1.2.3) приобретает вид

$$p^* = \frac{C'(D(p^*))}{E_{Dp}^{-1}(p^*) + 1}. \qquad (1.2.4)$$

Пусть, например, E_D = –1.2. Тогда (E_{Dp}^{-1} +1)$^{-1}$=(–5/6+1)$^{-1}$=6, т.е. цена монополиста p* в 6 раз (!) выше его предельных издержек.

При неэластичном спросе монополия, стремящаяся увеличить свою прибыль, будет снижать объем выпуска. При этом издержки будут снижаться, а цена и прибыль – увеличиваться. В некоторый момент начнется массовый отказ (из-за отсутствия средств) потребителей от продукции данной монополии. Спрос снова станет эластичным.

Пример 1.2.4. Пусть C(q)=0.5q^2 – издержки фирмы-монополиста, D(p) = 40 – 2p – функция спроса. Найдем зависимость цены p от количества произведенной продукции q. Так как q=D(p) = 40 – 2p, то p=20 – 0.5q. Итак, для функции D(p) мы нашли обратную функцию p(q). Прибыль имеет вид

$$\Pi(q)=(20 - 0.5q)q - 0.5q^2=20q - q^2.$$

В точке q* максимума прибыли выполняется равенство П'(q*)=20 – 2q*=0. Находим оптимальный (для монополии) объем производства q*=10. Соответствующая цена будет p* = p(q*)=20 – 0.5q* =15. При этом предельные издержки C'(q*)= 10. Таким образом, цена, наиболее выгодная дли монополии, в полтора раза выше ее предельных издержек. Этот же результат можно получить и по формуле (1.2.4). Проверьте самостоятельно.

1.2.4. Экономические примеры, связанные с производственной деятельностью фирм.

Пусть *z* – количество продукции, выпущенной некоторой фирмой; *x, y* – затраты ресурсов двух видов; *z=Q(x,y)* – дифференцируемая функция, устанавливающая связь *x, y* и *z*. Предположим, что величины *x, y, z* заданы в натуральных единицах, и p_x, p_y, p_z – соответствующие этим единицам *постоянные* цены. Тогда выручка (валовой доход) будет $R(x, y) = p_z Q(x, y)$, а функция прибыли запишется следующим образом:

$$\pi(x,y)= R(x, y) - p_x x - p_y y. \qquad (1.2.5)$$

Пусть *z** – оптимальный (с точки зрения прибыли) выпуск продукции; x^*, y^* – соответствующие этому оптимальному количеству затраты ресурсов. Тогда точка $M(x^*,y^*)$ является точкой локального максимума функции $\pi(x, y)$. Согласно необходимому признаку локального экстремума, в точке M обращаются в нуль частные производные первого порядка:

$$\pi'_x(M) = R'_x(M) - p_x = 0,\ \pi'_y(M) = R'_y(M) - p_y = 0,$$

или $R'_x(M) = p_x,\ R'_x(M) = p_x.$

Вывод: *в точке локального максимума прибыли предельная выручка от каждого ресурса совпадает с его ценой.* Этот вывод сохраняется и в более общем случае, когда цена p_z зависит от объема выручки: $p_z=p_z(Q)$.

Рассмотрим теперь фирму-монополию, которая продает свою продукцию на двух независимых рынках. Пусть p_i, q_i – соответственно цена и количество продукции, проданной монополией на i-м рынке (i =1, 2). Из независимости рынков вытекает, что цена p_1 не зависит от q_2, т.е. $p_1 = p_1(q_1)$. Аналогично $p_2=p_2(q_2)$. Пусть $C(q)$ – дифференцируемая функция издержек. Тогда функция прибыли имеет вид: $\pi = p_1q_1 + p_2q_2 - C(q_1+q_2)$.

В точке локального максимума прибыли имеем

$$\begin{cases} \pi'_{q_1} = p_1'q_1 + p_1 - C' = p_1(E_{p_1q_1} + 1) - C' = 0, \\ \pi'_{q_2} = p_2'q_2 + p_2 - C' = p_2(E_{p_2q_2} + 1) - C' = 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем отношения цен:

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + E_{p_1q_1}}{1 + E_{p_2q_2}}. \qquad (1.2.6)$$

Так как рынки по предложению независимы, то, используя свойства эластичности функции одной переменной, имеем $E_{p_1q_1} = (E_{q_1p_1})^{-1}$, $E_{p_2q_2} = (E_{q_2p_2})^{-1}$.

Пример 1.2.5. На сколько процентов цена на втором из двух независимых рынков выше, если эластичность спроса на первом рынке (–2), а на втором – (–1,5)?

Решение. Используя формулу (1.2.6), находим

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1+(-2)^{-1}}{1+(-1{,}5)^{-1}} = \frac{1-1/2}{1-2/3} = 1{,}5.$$

Следовательно, на втором рынке цена на 50% больше.

Односторонняя модель Эрроу-Гурвица

Рассмотрим модель, в которой в виде участвующих субъектов участвуют:

1. Два предприятия, использующие один и тот же ресурс (труд L) и производящие один и тот же вид продукции Y.

Производственная функция здесь имеет вид:

$y_i = F(L_i^d) = c_i(L_i^d)^{a_i}$, где i=1,2,

L_i^d – спрос на труд со стороны предприятия i ,

c_i, a_i – параметры производственной функции.

2. Функция полезности с точки зрения потребителей имеет вид:

$$U(y_1,y_2)=b_1\ln y_1+b_2\ln y_2.$$

Потребители стремятся максимизировать функцию полезности, производители – функцию прибыли, выражаемую следующей формулой:

$$\Pi_i = p_i y_i - {}_i c_i = p_i y_i - w L_i^d .$$

где p_i– цена производимого продукта,
y_i– объем выпуска фирмы i,
w– цена ресурса (труда) .
В модели рассматривается рынок совершенной (абсолютной) конкуренции.

Исходные данные модели Эрроу-Гурвица

1. p_i^0 – цена на продукцию в предшествующем периоде, i=1,2,
2. w^0 – цена на ресурс в предшествующем периоде,
3. L^s– предложение труда
4. $\bar{y}_i^d$ – спрос предшествующего периода на продукцию фирмы i,
5. b_i, c_i, a_i – параметры функции полезности и производственной функции
6. α_i, β_i, γ_i – коэффициент корректировки цен.

Реакция предприятия на цены

А. $L_i^d(p,w)$ – размер спроса на ресурсы

Б. $y_i^s(p,w)$ – размер предложения продукта

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial L_i^d} = p_i \frac{\partial y_i}{\partial L_i^d} - w = 0, \text{ откуда } \frac{\partial y_i}{\partial L_i^d} = \frac{w}{p_i},$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial L_i^d} = c_i a_i (L_i^d)^{a_i - 1} \Rightarrow c_i a_i (L_i^d)^{a_i - 1} = \frac{w}{p_i} \Rightarrow L_i^d = \left(\frac{w}{c_i a_i p_i}\right)^{\frac{1}{a_i - 1}},$$

$$y_i^s = c_i (L_i^d)^{a_i} = c_i \left(\frac{w}{p_i c_i a_i}\right)^{\frac{a_i}{a_i - 1}}.$$

Реакция потребителей на цены

Потребитель определяет объем спроса пропорционально разнице между предельной полезностью и предельными затратами:

$$\frac{\partial U}{\partial y_i} = \frac{b_i}{y_i}; \qquad y_i^d = k\beta + \bar{y}_i^d;$$

$$k=\begin{cases}\dfrac{\partial U}{\partial y_i}-p_i=\dfrac{b_i}{y_i}-p_i & \text{при } \dfrac{\mathrm{b_i}}{\mathrm{y_i}}>p_i\\ 0, & \text{при } \dfrac{\mathrm{b_i}}{\mathrm{y_i}}\le p_i\end{cases}.$$

β – коэффициент пропорциональности, ускоряющий процесс сходимости итераций.

ED = $y_i^d - y_i^s$ – избыточный спрос на продукт,

EL = $L_i^d - L_i^s$ – избыточный спрос на ресурс.

Корректировка цен:

$p_i = p_i^0$ +ED×α, w= w^0+EL×γ.

Если ED>0 , то цены увеличиваются,

если ED<0, то цены падают,

если ED=0, то цены не меняются – система в состоянии равновесия

1.2.5. Практический блок

Пример

Исходные данные модели Эрроу-Гурвица

i=1, a=0.5, p=30.8, b=30,8, c=1, w=2.5

$\bar{y}^d$ =10.8, L^s=100, α=0.58, β=0.099, γ=0.01

Необходимо определить состояние равновесия с точностью 1,5.

Реакция предприятия на цены

$$L^d=\left(\frac{w}{cap}\right)^{\frac{1}{a-1}}=\left(\frac{2.5}{0.5\cdot 30.8}\right)^{-2}=37{,}95.$$

$$y^s=c\left(\frac{w}{cap}\right)^{\frac{a}{a-1}}=\left(\frac{2.5}{0.5\cdot 30.8}\right)^{-1}=6.16.$$

Реакция потребителя на цены

$$k=\begin{cases}=\dfrac{b}{y^d}-p & \text{при } \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{y}}>p\\ 0, & \text{при } \dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{y}}\le p\end{cases}.$$

Имеем $\dfrac{b}{y^d}=\dfrac{30.8}{10.8}=2.85<30.8,$ значит k=0, $y^d = \bar{y}^d$ =10.8.

ED= $y^d - y^s$ =10.8 – 6,16=4.64. EL=$L^d - L^s$=37.95 – 100= –62.05.

Равновесие не достигнуто, так как избыточный спрос превышает требуемую величину в 1,5 раза. Цена возрастает.

Проведем итерацию №1

p^1=p^0+ ED×α=30.8+4.64·0.56=33,4 w^1= w^0+EL×γ=2.5+0.01(-62.05)=1.88

$$L^d = \left(\frac{1.88}{0.5 \cdot 33.4}\right)^{-2} = 78{,}85. \qquad y^s = \left(\frac{1.88}{0.5 \cdot 33.4}\right)^{-1} = 8.88.$$

$\frac{30.8}{10.8} = 2.85 < 33.4,$ значит k=0, y^d = $\bar{y}^d$ =10.8.

ED^1= 10.8 – 8,88=1.92. EL^1=78.85 – 100= –21.15.

Равновесие не достигнуто.

Проведем итерацию №2

p^2=p^1+ED^1×α=33.4+1.92·0.56=34,51 w^2=w^1+EL^1×γ=1.88+0.01(–21.15)=1.67

$$L^d = \left(\frac{1.67}{0.5 \cdot 34.51}\right)^{-2} = 106{,}71. \qquad y^s = \left(\frac{1.67}{0.5 \cdot 34.51}\right)^{-1} = 10.33.$$

ED^2= 10.8 – 10,33=0.47. EL^2=106.71 – 100= 6.71.

ED^2= 0.47<1.5 – равновесие достигнуто с заданной точностью

Равновесие было достигнуто после проведения второй итерации.

Контрольные вопросы

1. Производственная функция: основные понятия.
2. Производственная функция: экономическое содержание.
3. Производственная функция: закон убывающей доходности.
4. Производственная функция: характер изменения при расширении масштабов производства.
5. Производственная функция: средний и предельный доходы.
6. Характеристика производств в зависимости от соотношения средних и предельных доходов.
7. Предельная норма замены.
8. Производственная функция Кобба-Дугласа. Определение.
9. Производственная функция Кобба-Дугласа. Основные свойства.
10. Производственная функция Кобба-Дугласа. Экономический смысл средних и предельных показателей.
11. Производственная функция Кобба-Дугласа. Свойства показателей эластичности.
12. Производственная функция Кобба-Дугласа. Экономическая и особая области.
13. Производственная функция Кобба-Дугласа. Изокванты.
14. Понятие равновесной цены.
15. Дана производственная функция Кобба-Дугласа: Y = 1,038 $K^{0,655}$ $L^{0.345}$. Какова норма замены труда фондами?
16. Какой экономический смысл имеют коэффициенты A, α_1, α_2 мультипликативной производственной функции F(K,L) = $A\ K^{\alpha_1} L^{\alpha_2}$?
17. Что такое изоклинали? В чем их экономический смысл?
18. Мультипликативная производственная функция и её свойства.

Тесты

1. Производственная функция типа Кобба-Дугласа записывается в виде:
   а) $y=Ax_1^{\alpha}+Bx_2^{\beta}$; б) $y=Ax_1^{\alpha}x_2^{\beta}$; в) $y=Ax_1^{\alpha}/Bx_2^{\beta}$.
2. Производственная функция записывается в виде $Y=f(x_1,x_2)$, где
   а) x_1 –стоимость основных производственных фондов, x_2 – объём выпускаемой продукции, Y– численность промышленно-производственного персонала;
   б) x_1 – стоимость товарной продукции, x_2 – численность промышленно-производственного персонала, Y– стоимость основных производственных фондов;
   в) x_1 –стоимость основных производственных фондов, x_2 – численность промышленно-производственного персонала, Y– стоимость товарной продукции.
3. К характеристикам производственной функции относятся:
   а) предельная производительность ресурса;
   б) предельная производительность ресурса;
   в) эластичность замещения ресурсов;
   г) средняя норма замещения ресурсов;
4. При росте объема производства изокванта будет смещаться:
   а) вверх и вправо; в) вверх и влево;
   б) вниз и вправо; г) вниз и влево.
5. Эластичность спроса на ресурс зависит от:
   а) эластичности спроса на продукт;
   б) соотношения издержек на труд и общих издержек;
   в) верны а) и б);
   г) ни один из перечисленных факторов не влияет на эластичность спроса на ресурс.
6. Дана производственная функция $Q(L,K)=5L^{0,3}K^{0,5}$. Для нее характерна:
   а) возрастающая экономия от масштаба;
   б) постоянная экономия от масштаба;
   в) убывающая экономия от масштаба;
   г) ничего определенного сказать нельзя.
7. Предельная норма технического замещения труда капиталом равна 1/2. Для того чтобы обеспечить предельный объем производства при увеличении капитала на 4 единицы, необходимо сократить использование труда:
   а) на 2 единицы; в) на 8 единиц;
   б) на 4 единицы; г) необходима дополнительная информация.
8. Когда предельная производительность падает, экономия от масштаба:
   а) возрастает; в) постоянна;
   б) убывает; г) данных недостаточно.
9. Изокванта объединяет точки:
   а) равных издержек;

б) одинакового выпуска продукции;
в) устойчивого равновесия производителя;
г) равенства спроса и предложения.

10. Когда предельная производительность растет, экономия от масштаба:
а) возрастает; в) постоянна;
б) убывает; г) данных недостаточно.

Ответы к тестам

1) б	6) в
2) в	7) а
3) в	8) г
4) а	9) б
5) г	10) г

Задания и задачи

1. Фирма работает в условиях совершенной конкуренции: выпускает один вид продукции, используя при этом два вида ресурсов. Производственная функция фирмы равна f(x,y) = 80xy, цена реализации продукции – 120 д.е., ресурсы приобретаются по ценам W_1 = 20 д.е., W_2 = 15 д.е. соответственно.
а) Записать функцию прибыли.
б) Записать условия максимума прибыли.
в) Решить задачу фирмы максимизации прибыли.
г) Построить изокванту f(x,y) = 6400.
д) Построить изокосту C(x,y) = 3000.

2. Предприятие вырабатывает игрушки, которые продает на совершенно конкурентном рынке по 5 ден. ед. за штуку. Производственная функция задана уравнением $Q = 30L – 0,5L^2$, где Q – количество игрушек за месяц; L – количество рабочих, чел. Напишите формулу для вычисления стоимости предельного продукта труда на данном предприятии. Если текущая ставка заработной платы составляет 50 ден. ед. в месяц, сколько рабочих наймет предприятие? Если заработная плата в данном регионе увеличится до 100 ден. ед. и предприятие вынужденное будет и себе повысить ставку заработной платы, как в результате изменятся экономические показатели предприятия: объем производства, прибыль, занятость. При какой ставке заработной платы предприятие вынужденное будет остановиться?

3. Рассмотрим ПФ $X = 2.341K^{0.264}L^{0.678}$ и показатели экономики некоторой страны: валовой продукт возрос с 2000 по 2009 г. в 1.47 раза, ОПФ за этот же период увеличились в 1.88 раза, а число занятых

– в 1.24 раза. Вычислить по ней масштаб и эффективность производства.

4. Для ПФ Кобба-Дугласа (Задача 3) найти в явном виде нормы замещения фондов трудовыми ресурсами и трудовых ресурсов фондами.

5. Производственная функция фирмы описывается функцией Кобба-Дугласа $f(x,y)=1500x^{2/5}y^{3/5}$, где x – затраты капитала, y – затраты труда.

а) Рассчитать выпуск при x = 243, y = 32.

б) Рассчитать предельную и среднюю производительность труда при x= 243, y = 32.

в) Рассчитать предельную и среднюю фондоотдачу при x = 243, y = 32.

1.2.6. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Основные понятия и экономическое содержание производственной функции.
2. Производственная функция Кобба-Дугласа. Основные свойства, экономический смысл, свойства показателей эластичности.
3. Изоклинали и их экономический смысл.
4. Мультипликативная производственная функция и её свойства.

Литература для самостоятельной работы

1. Курс экономической теории: Учебник / Под общей ред. М.Н. Чепурина, Е.А. Киселевой. –Киров: «АСА», 2002. –Гл. 7 §6.
2. Макконнелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс: Принципы, проблемы и политика: в 2-х томах / Пер. с англ. 13-го изд. –М.: ИНФРА-М, 2001. –Т.2. –Гл. 28.
3. Нуреев Р.М. Курс микроэкономики: Учебник для вузов. –М.: НОРМА-ИНФРА-М, 2002. –Гл. 8 § 1–3.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. –399с.
5. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
6. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

ТЕМА 1.3. МАКРОЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

1.3.1. Модели естественного роста

Кейнсианские модели экономического роста

Рассмотрим основные современные модели экономического роста. Как и любые модели, модели роста представляют собой абстрактное, упрощенное выражение реального экономического процесса в форме уравнений или графиков. Целый ряд допущений, предваряющих каждую модель, уже изначально отодвигает результат от реальных процессов, но, тем не менее, дает возможность проанализировать отдельные стороны и закономерности такого сложного явления, как экономический рост.

Большинство моделей роста исходит из того, что увеличение реального объема выпуска (Y) происходит, прежде всего, под влиянием роста основных факторов производства – труда (L) и капитала (K). Фактор "труд" обычно слабо поддаётся воздействию извне, тогда как величина капитала может быть скорректирована определенной инвестиционной политикой. Как известно, запас капитала в экономике со временем сокращается на величину выбытия (амортизации) и увеличивается за счет роста чистых инвестиций. Вполне очевидно, что экономический рост ценен не сам по себе, а в качестве основы повышения благосостояния населения, поэтому качественная оценка роста часто дается через оценку динамики потребления.

Анализ со стороны спроса необходимо соединить с факторами, определяющими динамику предложения, и выяснить условия динамического равновесия спроса и предложения в экономике. Стратегической переменной, с помощью которой можно управлять экономическим ростом, являются инвестиции.

Наиболее простой кейнсианской моделью роста является модель Е.Домара, предложенная в конце 40-х годов. Технология производства представлена в ней производственной функцией Леонтьева с постоянной предельной производительностью капитала (при условии, что труд не является дефицитным ресурсом). Модель Домара исходит из того, что на рынке труда существует избыточное предложение, что обусловливает постоянство уровня цен. Выбытие капитала отсутствует, отношение K/Y и норма сбережений – постоянны. Выпуск зависит фактически от одного ресурса – капитала. Для простоты можно принять также инвестиционный лаг равным нулю.

Фактором увеличения спроса и предложения в экономике служит прирост инвестиций. Если в данном периоде инвестиции выросли на ΔI, то, в соответствии с эффектом мультипликатора, совокупный спрос возрастет на

$$\Delta Y_{AD}=\Delta Im=\Delta I\frac{1}{1-b}=\Delta I(l/S),$$

где m – мультипликатор расходов,

b – предельная склонность к потреблению,

S – предельная склонность к сбережению.

Увеличение совокупного предложения составит $\Delta Y_{AS}=a\Delta K$, где a – предельная производительность капитала (по условию – постоянна). Прирост капитала ΔK обеспечивается соответствующим объемом инвестиций I, потому можно записать: $\Delta Y_{AS}=aI$.

Равновесный экономический рост будет достигнут при условии равенства спроса и предложения: $\Delta I/S= aI$ или $\Delta I/I= aS$, т.е. темп прироста инвестиций должен быть равен произведению предельной производительности капитала и предельной склонности к сбережению. Величина "a" задается технологией производства и, в соответствии с принятыми предпосылками, постоянна, а, значит, увеличить темпы прироста инвестиций может лишь рост нормы сбережений s (но для рассматриваемого периода она берется постоянной).

Поскольку в условиях равновесия инвестиции равны сбережениям, I=S, а S=sY при s=const, уровень дохода является величиной, пропорциональной уровню инвестиций, и тогда $\Delta Y/Y=\Delta I/I=as$.

Таким образом, согласно теории Е. Домара, существует равновесный темп прироста реального дохода в экономике, при котором полностью используются имеющиеся производственные мощности. Он прямо пропорционален норме сбережений и предельной производительности капитала, или приростной капиталоотдаче, (ΔY/ΔK). Инвестиции и доход растут с одинаковым постоянным во времени темпом.

Такое динамическое равновесие может оказаться неустойчивым, как только темп роста плановых инвестиций частного сектора отклоняется от уровня, заданного моделью.

Модель Е. Домара не претендовала на роль теории роста. Это была попытка расширить условия краткосрочного кейнсианского равновесия на более длительный период и выяснить, какими будут эти условия для развивающейся системы.

Р.Ф. Харрод построил специальную модель экономического роста (1939г.), включив в неё экзогенную функцию инвестиций (в отличие от экзогенно заданных инвестиций у Домара) на основе принципа акселератора и ожиданий предпринимателей (предпосылки модели Харрода остаются теми же, что и в модели Домара).

Согласно принципу акселератора, любой рост (сокращение) дохода вызывает рост (сокращение) капиталовложений, пропорциональный изменению дохода:

$I_t = v(Y_t - Y_{t-1})$, где v – акселератор.

Предприниматели планируют объем собственного производства, исходя из ситуации, сложившейся в экономике в предшествующий период: если их прошлые прогнозы относительно спроса оказались верными, и спрос полностью уравновесил предложение, то в данном периоде предприниматели оставят темпы роста объема выпуска неизменными; если спрос в экономике был выше предложения, они увеличат темпы расширения производства; если предложение превышало спрос в предшествующем периоде, они снизят темпы роста. Формализовать это можно следующим образом:

$(Y_t - Y_{t-1})/ Y_{t-1} = a(Y_{t-1} - Y_{t-2})/ Y_{t-2}$,

где a=1,если спрос в предшествующем периоде (t–1) был равен предложению; a>1,если спрос превысил предложение и a<1, если спрос был ниже предложения. Отсюда получим объём предложения в экономике:

$Y_t = Y_{t-1}\{a\ (Y_{t-1} - Y_{t-2})/ Y_{t-2} + 1\}$.

Для определения совокупного спроса используется модель акселератора (а также условие равенства I=S):

$Y_t = I_t/s = v(Y_t - Y_{t-1})/s$.

Равновесный экономический рост предлагает равенство совокупного спроса и предложения:

$v(Y_t - Y_{t-1})/s = Y_{t-1}\{a\ (Y_{t-1} - Y_{t-2})/ Y_{t-2} + 1\}$.

После небольшого преобразования получим:

$v/s\ \{(Y_t - Y_{t-1}) /(Y_{t-1})\} = a\{(Y_{t-1} - Y_{t-2})/ Y_{t-2}\} + 1$.

Предположим, что в предшествующем периоде спрос был равен предложению, т.е. a=1.Тогда, в соответствии с принятыми условиями поведения, предприниматели и в текущем периоде сохранят темпы роста производства такими же, как и в предшествующем периоде, т.е.

$(Y_t - Y_{t-1}) /Y_{t-1} = (Y_{t-1} - Y_{t-2})/ Y_{t-2} = \Delta Y_t/ Y_{t-1}$.

Тогда предыдущее выражение можно представить следующим образом:

$v/s\ (\Delta Y_t/Y_{t-1}) = (\Delta Y_t/Y_{t-1}) + 1$, отсюда равновесный темп прироста объёма выпуска составит: $\Delta Y/Y_{t-1} = s/(v - s)$. Харрод назвал выражение

$s/(v–s)$ «гарантированным» темпом роста: поддерживая его, предприниматели будут полностью удовлетворены своими решениями, поскольку спрос будет равен предложению, и их ожидания будут сбываться. Такой темп роста обеспечивает полное использование производственных мощностей (капитала), но полная занятость при этом не всегда достигается.

Анализ соотношений между гарантированным и фактическим темпами роста позволил сделать следующий вывод: если фактически запланированный предпринимателями темп роста предложения отличается от гарантированного темпа роста (превышает или не достигает его), то система постепенно отдаляется от состояния равновесия.

Помимо гарантированного темпа роста Харрод вводит понятие "естественного" темпа роста. Это максимальный темп, допускаемый ростом активного населения и техническим прогрессом. При таком темпе достигается полная занятость факторов труда и капитала.

Если гарантированный темп роста, удовлетворяющий предпринимателей, выше естественного, то вследствие недостатка трудовых ресурсов фактический темп окажется ниже гарантированного: производители будут разочаровываться в своих ожиданиях, снизят объём выпуска и инвестиции, в результате чего система будет находиться в состоянии депрессии.

Если гарантированный темп роста меньше естественного, то фактический темп может превысить гарантированный, поскольку существующий избыток трудовых ресурсов даёт возможность увеличить инвестиции. Экономическая система будет переживать бум. Фактический темп роста может быть также равен гарантированному, и тогда экономика будет развиваться в условиях динамического равновесия, вполне удовлетворяющих предпринимателей, но при наличии вынужденной безработицы.

Идеальное развитие экономической системы достигается при равенстве гарантированного, естественного и фактического темпов роста в условиях полной занятости ресурсов.

Но поскольку всякое отклонение инвестиций от условий гарантированного темпа роста, как известно, выводит систему из равновесия и сопровождается все более увеличивающимся расхождением между спросом и предложением, динамическое равновесие в модели Харрода также оказывается неустойчивым.

Часто обе модели объединяют в одну модель Харрода-Домара. Обе модели приводят к выводу, что при данных технических условиях производства темп экономического роста определяется величиной предельной склонности к сбережению, а динамическое равновесие может существовать в условиях неполной занятости.

Ограниченность данных моделей задана уже предпосылками их анализа. Например, используемая в них производственная функция Леонтьева характеризуется отсутствием взаимозаменяемости факторов производства – труда и капитала, что в современных условиях не всегда соответствует действительности. Модели Домара и Харрода неплохо описывали реальные процессы экономического роста 1920-1950-х гг., но для более поздних наблюдений (50-е – 70-е гг.) наиболее успешно использовалась неоклассическая модель Р. Солоу.

Модель Солоу

Неоклассические модели роста преодолевали ряд ограничений кейнсианских моделей и позволяли более точно описать особенности макроэкономических процессов. Р.Солоу показал, что нестабильность динамического равновесия в кейнсианских моделях была следствием невзаимозаменяемости факторов производства. Вместо функции Леонтьева он использовал в своей модели производственную функцию Кобба-Дугласа, в которой труд и капитал являются субститутами. Другими предпосылками анализа в модели Солоу являются: убывающая предельная производительность капитала, постоянная отдача от масштаба, постоянная норма выбытия, отсутствие инвестиционных лагов.

Взаимозаменяемость факторов (изменение капиталовооруженности) объясняется не только технологическими условиями, но и неоклассической предпосылкой о совершенной конкуренции на рынках факторов.

Необходимым условием равновесия экономической системы является равенство совокупного спроса и предложения. Предложение описывается производственной функцией с постоянной отдачей от масштаба: Y=F(K,L) и для любого положительного z верно: zF(K,L)= F(zK, zL).Тогда если z=1/L, то Y/L=F(K/L,1). Обозначим (Y/L) через y, а (K/L) через k и перепишем исходную функцию в форме взаимосвязи между производительностью и фондовооруженностью (капиталовооруженностью): $y= f(k)$.

Рассмотрим модель долгосрочного экономического роста Солоу без технологического прогресса. Пусть в рассматриваемой экономике государство взимает подоходный налог по ставке t, а величина государственных расходов на душу населения постоянна и равна g, причем государство не обязано иметь сбалансированный бюджет.

В равновесии совокупное предложение (– выпуск) должен быть равен совокупному спросу, который представляет собой сумму потребительских расходов домохозяйств, инвестиций частного сектора и государственных закупок (чистый экспорт в закрытой экономике равен нулю):

$$Y_t=C_t+I_t+G_t.$$

Найдем располагаемый доход при условии отсутствия трансфертов:

$$YD_t=Y_t-tY_t.$$

Учитывая, что располагаемый доход расходуется на сбережения и потребление, получаем:

$$C_t+I_t+G_t=Y_t=YD_t+tY_t=C_t+S_t+tY_t.$$

Сокращаем потребление и подставляем функцию сбережений (сбережения являются постоянной долей в располагаемом доходе $S_t=sYD_t$):

$$I_t+G_t=S_t+tY_t=s(1-t)Y_t+tY_t.$$

Учитывая, что валовые инвестиции равны сумме чистого прироста запаса капитала и амортизационных расходов ($I_t=K'+\delta K_t$), условие равновесия примет вид:

$$K'+\delta K_t+G_t=(s(1-t)+t)F(K_t,L_t).$$

Поделим обе части этого уравнения на L_t и с учетом однородности первой степени функции F получим:

$$\frac{K'}{L_t}+\delta\frac{K_t}{L_t}+\frac{G_t}{L_t}=(s(1-t)+t)\frac{F(K_t,L_t)}{L_t}=(s(1-t)+t)F(\frac{K_t}{L_t},1).$$

Перейдем от абсолютных величин к величинам на одного рабочего, обозначив через k капитал на одного рабочего ($k\equiv K/L$), через $f(k)$ – выпуск на одного рабочего ($f(k)\equiv F(K/L,1)$), через g государственные закупки на одного рабочего ($g\equiv G/L$). С учетом того, что L – экзогенная переменная с постоянным темпом роста:

$$n=\frac{\dot{L}}{L}\quad или\, L=L_0e^{nt},$$

где $L_0=L(0)$ – начальное значение трудозатрат,

$$\frac{K'}{L}=k'+kn,$$

получим уравнение накопления капитала:

$$k'=s(1-t)f(k)+(tf(k)-g)-(n+\delta)k.$$

Поясним, что показывает это уравнение. Первое слагаемое в правой части соответствует частным сбережениям на душу населения, а второе – профициту госбюджета или сбережениям государства. Таким образом, если совокупные сбережения на душу населения превышают необходимые инвестиции, то эти избыточные средства позволяют увеличить запас капитала на душу населения.

Определим стационарное состояние в рассматриваемой модели, как ситуацию, в которой капитал на одного рабочего является неизменным:

$$k' = 0.$$

Стационарный запас подушевого капитала k^* определяется из условия:

$$(s(1-t)+t)f(k^*) = g - (n+\delta)k^*.$$

Точка пересечения кривой сбережений и кривой необходимых инвестиций определяет стационарный подушевой капитал k^*. Заметим, что в модели может существовать два стационарных состояния с положительным подушевым капиталом, однако лишь одно из них будет устойчивым (это состояние, соответствующее подушевому капиталу k_2 на рис.1.3.1). В дальнейшем будем рассматривать лишь устойчивое стационарное состояние.

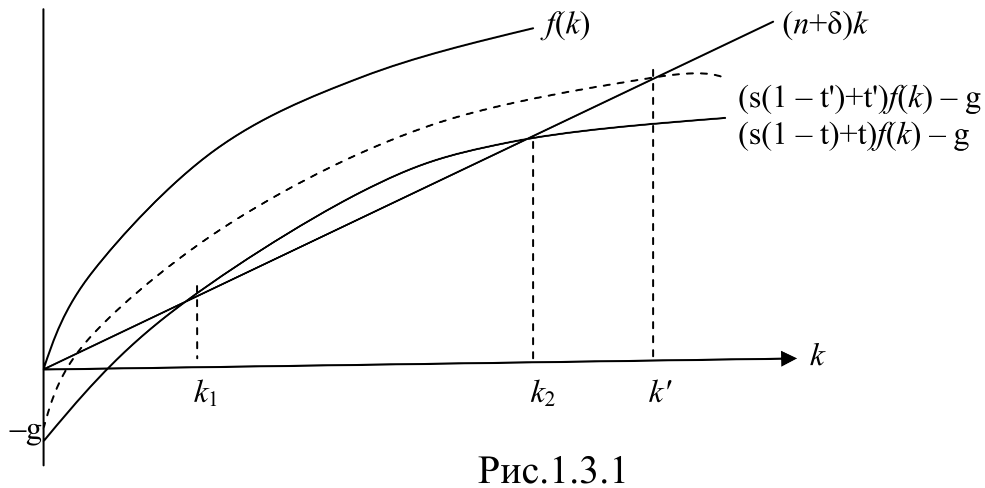


Рис.1.3.1

Исследуем влияние ставки налога на стационарный подушевой доход и капитал. Заметим, что с ростом ставки подоходного налога падают частные сбережения в силу сокращения располагаемого дохода, но при этом растут сбережения государства в силу роста доходов от подоходного налога, причем последний эффект является доминирующим и совокупные сбережения растут. В результате график функции сбережений на душу населения сдвигается вверх, что приводит к увеличению подушевого капитала ($k' > k_2$) и подушевого выпуска в новом стационарном состоянии.

Заметим, что сразу вслед за повышением ставки подоходного налога темп роста капитала становится выше темпа роста населения, а по мере приближения к новому стационарному состоянию темпы роста K и L вновь сближаются и в новом стационарном состоянии темпы роста капитала и выпуска будут вновь равны темпу роста населения.

На основе проведенного анализа можно заключить, что ставка подоходного налога не оказывает влияние на долгосрочные темпы роста выпуска, но влияет на темпы роста в процессе движения к стационарному состоянию.

Рост государственных закупок означает, что сократится профицит бюджета, что приведет к падению сбережений и, соответственно, падению подушевого стационарного капитала и выпуска (на графике кривая совокупных сбережений сдвинется параллельно вниз).

Как будет изменяться темп роста дохода с ростом g? В результате сокращения сбережений мы будем наблюдать резкое падение подушевого капитала (и дохода). Падение подушевого дохода будет означать, что темпы роста дохода будут ниже темпов роста населения. После резкого падения подушевого дохода начнется постепенное восстановление и по мере приближения к новому стационарному состоянию темп роста дохода постепенно приблизится к темпу роста населения.

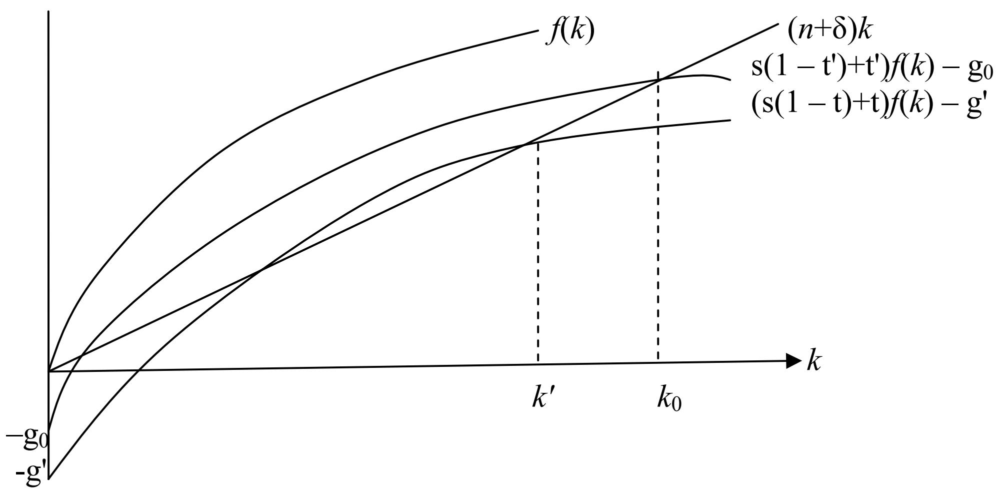


Рис.1.3.2

Как мы видели, долгосрочные темпы роста ВВП согласно модели Солоу (без технического прогресса) определяются исключительно темпом роста населения и, следовательно, профицит бюджета не может оказать положительного влияние на долгосрочный экономический рост. В краткосрочном периоде, как мы видели, увеличение профицита бюджета (рост ставки подоходного налога или сокращение государственных закупок) означает рост совокупных сбережений, что позволяет получить дополнительные средства для инвестиций и способствует увеличению темпов роста в краткосрочном периоде (при переходе к новому стационарному состоянию)

Учет в модели Солоу технологического прогресса видоизменяет исходную производственную функцию. Предполагается трудосберегающая форма технологического прогресса.

Производственная функция будет представлена как Y=F(K,LE), где E – эффективность труда, а LE – численность условных единиц труда с постоянной эффективностью E. Чем выше E, тем больше продукции может быть произведено данным числом работников. Предлагается, что технологический прогресс осуществляется путем роста эффективности труда E с постоянным темпом g. Рост эффективности труда в данном случае аналогичен по результатам росту численности занятых: если технологический прогресс имеет темп g=2%, то, например, 100 рабочих могут произвести столько же продукции, сколько ранее производили 102 рабочих. Если теперь численность занятых (L) растет с темпом n, а E растет с темпом g, то (LE) будет увеличиваться с темпом (n+g) (см.рис. 1.3.2).

Включение технологического прогресса несколько меняет и анализ состояния устойчивого равновесия, хотя ход рассуждений сохраняется. Если определить k' как количество капитала в расчете на единицу труда с постоянной эффективностью, т.е. k'=K/LE, а y'=Y/LE, то результаты роста эффективных единиц труда аналогичны росту численности занятых (увеличение количества единиц труда с постоянной эффективностью снижает величину капитала, приходящегося на одну такую единицу). В состоянии устойчивого равновесия уровень фондовооруженности k'^* уравновешивает, с одной стороны, влияние инвестиций, повышающих фондовооруженность, а, с другой стороны, воздействие выбытия, роста числа занятых и технологического прогресса, снижающих уровень капитала в расчете на эффективную единицу труда.

В устойчивом состоянии (k^*) при наличии технологического прогресса общий объём капитала (К) и выпуска (Y), будут расти с темпом (n+g). Но в отличие от случая роста населения, теперь будут расти с темпом g фондовооруженность (K/L) и выпуск (Y/L) в расчете на одного занятого; последнее может служить основой для повышения благосостояния населения. Технологический прогресс в модели Солоу является, следовательно, единственным условием непрерывного роста уровня жизни, поскольку лишь при его наличии наблюдается устойчивый рост выпуска на душу населения (y).

Рассмотренная модель Солоу позволяет описать механизм долгосрочного экономического роста, сохраняющий равновесие в экономике и полную занятость факторов. Она выделяет технический прогресс как единственную основу устойчивого роста благосостояния и позволяет найти оптимальный вариант роста, обеспечивающий максимум потребления.

Представленная модель не свободна и от недостатков. Модель анализирует состояния устойчивого равновесия, достигаемые в длительной перспективе, тогда как для экономической политики важна и краткосрочная динамика производства и уровня жизни. Многие экзогенные переменные модели Солоу – s, d, n, g – было бы предпочтительнее определять внутри модели, поскольку они тесно связаны с другими ее параметрами и могут видоизменять конечный результат. Модель не включает также целый ряд ограничителей роста, существенных в современных условиях – ресурсных, экологических, социальных. Используемая в модели функция Кобба-Дугласа, описывая лишь определенный тип взаимодействия факторов производства, не всегда отражает реальную ситуацию в экономике. Эти и другие недостатки пытаются преодолеть современные теории экономического роста.

В неоклассической модели роста объём выпуска в устойчивом состоянии растет с темпом (n+g),а выпуск на душу населения – с темпом g, т.е. устойчивый темп роста определяется экзогенно. Современные теории эндогенного роста пытаются определить устойчивый темп роста в рамках модели, эндогенно, связывая его со всеми возможными количественными и качественными факторами: ресурсными, институциональными и др.

Сторонники концепции "экономики предложения" полагают, что увеличение темпов роста при полной занятости возможно, прежде всего, путём сокращения регулирующего вмешательства извне в рыночную систему.

1.3.2. Использование дифференциальных уравнений в моделях роста.

Рост при постоянном темпе.

Пусть $y(t)$ – интенсивность выпуска продукции некоторого предприятия (отрасли). Мы будем предполагать, что имеет место аксиома о ненасыщаемости потребителя, т.е. что весь выпущенный предприятием товар будет продан, а также то, что объем продаж не является столь высоким, чтобы существенно повлиять на цену товара p, которую ввиду этого мы будем считать фиксированной (Данное предположение соответствует модели конкурентной фирмы, рассмотренной в 1.2). Чтобы увеличить интенсивность выпуска $y(t)$, необходимо, чтобы чистые инвестиции I(t) (т.е. разность между общим объемом инвестиций и амортизационными затратами) были больше нуля. В случае I(t) = 0 общие инвестиции только лишь покрывают затраты на амортизацию, и уровень выпуска продукции остается неизменным. Случай I<0 приводит к уменьшению основных фондов и, как следствие, к уменьшению уровня выпуска продукции. Таким образом, мы видим, что скорость увеличения интенсивности выпуска продукции является возрастающей функцией от I.

Пусть эта зависимость выражается прямой пропорциональностью, т.е. имеет место так называемый принцип акселерации

$$y' = mI \ (m = \text{const}), \qquad (1.3.1)$$

где $1/m$ – норма акселерации. Пусть a – норма чистых инвестиций, т.е. часть дохода py, которая тратится на чистые инвестиции, $I = apy$.

Отсюда, подставляя выражение для I в (1.3.1), получаем

$$y' = a\,mpy \text{ или } y' = ky, \qquad (1.3.2)$$

где $k = map = \text{const}$. Разделяя переменные в уравнении (1.3.2), имеем

$$\frac{dy}{y} = kdt.$$

После интегрирования обеих частей находим

$$\ln y = kt + \ln C$$

или, что то же самое, $y = Ce^{kt}$. (1.3.3)

Если $y(t_0) = y_0$, то из (1.3.3) следует, что

$$C = y_0 e^{-kt0}, \text{ т.е. } y = y_0 e^{k(t-t_0)}. \qquad (1.3.4)$$

Уравнение (1.3.4) называется уравнением естественного роста. Этим уравнением описываются также динамика роста цен при постоянном темпе инфляции, процессы радиоактивного распада и размножения бактерий.

Замечание. Модель естественного роста целесообразно применять на начальных этапах развития экономической системы в течение ограниченного промежутка времени, поскольку (как это следует из уравнения (1.3.4)) с течением времени у может принимать какие угодно большие значения, что не может не сказаться на изменении цены (в данной модели мы ее предполагали постоянной).

Логистический рост

Рассмотрим более общий случай по сравнению с предыдущим пунктом. Пусть $p = p(y)$ – убывающая функция, т.е. с увеличением выпуска будет происходить насыщение рынка и цена будет падать. Проведя аналогичные рассуждения, получим уравнение:

$$y' = kp(y)y, \qquad (1.3.5)$$

здесь $k = la$. Уравнение (1.3.5) представляет собой автономное дифференциальное уравнение. Так как $k > 0$, $p > 0$, $y > 0$, то из (1.3.5) следует, что $y(t)$ есть возрастающая функция ($y' > 0$).

Пусть, например, $p(y) = b - ay$ $(a, b > 0)$, тогда уравнение (1.3.5) принимает вид:

$$y'=k(b-ay)y. \qquad (1.3.6)$$

Разделяя переменные в уравнении (1.3.6), находим

$$\frac{dy}{y(b-ay)}=kdt,$$

или

$$\frac{dy}{b}\left(\frac{1}{y}+\frac{a}{b-ay}\right)=kdt\ ,$$

и проинтегрировав это соотношение, имеем

$$\ln|y| - \ln|b - ay| = kbt + \ln C.$$

Отсюда получим, что

$$y=\frac{Cbe^{bkt}}{1+Cae^{bkt}}. \qquad (1.3.7)$$

График функции (1.3.7) называется логистической кривой. Она также описывает некоторые модели распространения информации (рекламы), динамику эпидемий, процессы размножения бактерий в ограниченной среде обитания и др.

1.3.3. Неоклассическая модель роста

Пусть Y=F(K,L) – национальный доход, где К – объем капиталовложений (фондов), L – величина затрат труда, F(K,L) – линейно-однородная производственная функция (F(tK,tL) = tF(K,L)). Пусть $f(k)$=Y/L – производительность труда, где k= K/L – фондовооруженность.

Предполагаем, что:

1) происходит естественный прирост трудовых ресурсов, т.е.

$$L' = aL(a = \text{const}). \qquad (1.3.8)$$

2) Инвестиции направлены как на увеличение производственных фондов, так и на амортизацию, т.е. I=K' +βK (β – норма амортизации).

Пусть l – норма инвестиций (т.е. I = lY), тогда

$$K'= lY - \beta K. \qquad (1.3.9)$$

Из определения фондовооруженности вытекает

$$\ln k=\ln K - \ln L.$$

Дифференцируя эти соотношения по t получим

$$k'/k= K'/K - L'/L.$$

Подставляя сюда значения для L' и K' из (1.3.8) и (1.3.9), находим

$$k'/k=lY/K - \beta - a, \quad \text{т.е.} \qquad k'=lY/L - (\beta + a)k.$$

Учитывая, что $f(k)$=Y/L, получим

$$k'=lf(k) - (a +\beta)k. \qquad (1.3.10)$$

Уравнение (1.3.10) называется уравнением неоклассического роста (частный случай уравнения Солоу).

Замечание. У автономного дифференциального уравнения (1.3.10) существует стационарное решение k=k*. (рис.1.3.3).

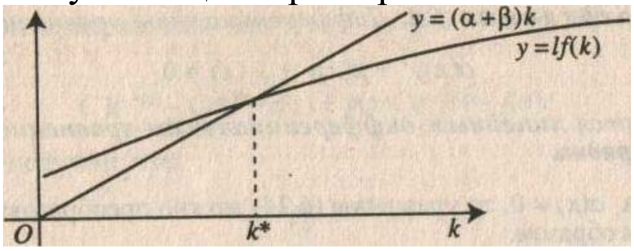


Рис. 1.3.3

Интегральная кривая уравнения (1.3.10) очень напоминает логистическую кривую (рис. 1.3.4).

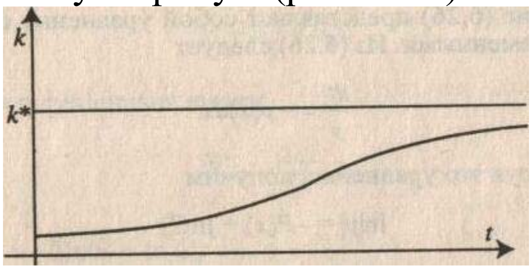


Рис. 1.3.4

Пример 1.3.1. Рассмотрим *уравнение Самуэльсона*

$$p'=k(d(p) - s(p)), \qquad (1.3.11)$$

моделирующее связь между изменением цены p и неудовлетворенным спросом d(p) – s(p) (здесь d(p) и s(p) – соответственно величины спроса и предложения при цене p, $k > 0$). Предположим, что спрос и предложение задаются линейными функциями

$$d(p) = a - bp,\ s(p) = m + np, \qquad (1.3.12)$$

где a, b, m, n – некоторые положительные числа. С учетом (1.3.12) уравнение (1.3.11) примет вид

$$p' = k(n - b)p + k(a+m). \qquad (1.3.13)$$

Уравнение (1.3.13) является линейным дифференциальным уравнением. Найдем решение соответствующего ему однородного уравнения. Имеем

$$p' = k(n - b)p;$$

$$\ln p = p' = k(n - b)t + \ln C;$$

$$p(t)=Ce^{k(n - b)\,p}.$$

В качестве частного решения уравнения (1.3.13) можно использовать стационарное равновесное решение p(t)= p = const, где p – корень уравнения d(p) = s(p) (в этом случае обе части уравнения (1.3.11) будут равны нулю). Из (1.3.13) нетрудно найти, что

$$\overline{p} = \frac{a - m}{b + n}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1.3.13) имеет вид:

$$p(t) = \frac{a-m}{b+n} + Ce^{k(n-b)t}. \tag{1.3.14}$$

Из (1.3.14), в частности, вытекает, что если n > b, то с течением времени интегральные кривые будут отдаляться от состояния равновесия p (рис. 1.3.5).

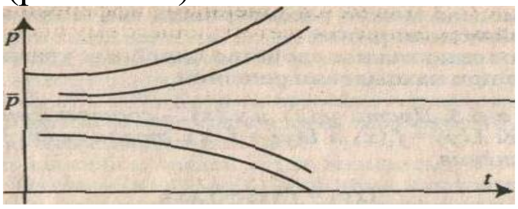


Рис. 1.3.5

Если $n = b$, то p(t) = const.

Если же n < b, то с течением времени интегральные кривые будут асимптотически приближаться к состоянию равновесия p (рис. 1.3.6).

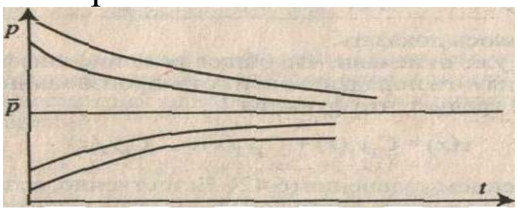


Рис. 1.3.6

1.3.4. Практический блок

Примеры

1. Экономика страны описывается производственной функцией вида $Y=AK^{0.4}L^{0.6}$. Известно, что темп прироста капитала равен 3% в год, а численности занятых – 2%. Общая производительность факторов растет с темпом 1,5% в год. Как меняется объем производства?

Решение

В неоклассической модели роста была использована производственная функция вида $Y = AF(K, L)$. Объем производства Y зависит от вклада факторов – труда L и капитала K, а также от технологии. Производственная функция имеет постоянную отдачу от масштаба, т.е. увеличение всех факторов в определенной степени приводит к росту выпуска в той же степени (если факторы увеличились вдвое, то выпуск возрастет также в 2 раза). Изменение выпуска можно представить как $\Delta Y = F(K, L)\ \Delta A + MPK\Delta K + MPL\Delta L$, где MPK и MPL - предельные производительности соответствующих факторов. Разделим это выражение на $Y = AF(K, L)$ и получим:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \frac{MPK}{Y} \cdot \Delta K + \frac{MPL}{Y} \cdot \Delta L.$$

Второе и третье слагаемые правой части уравнения умножим и разделим на К и L:

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \left(K\frac{MPK}{Y}\right) \cdot \frac{\Delta K}{K} + \left(L\frac{MPL}{Y}\right) \cdot \frac{\Delta L}{L}.$$

В скобках мы получим доли капитала и труда в общем объеме выпуска. При условии постоянной отдачи от масштаба сумма этих долей равна единице (по теореме Эйлера), тогда

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta A}{A} + \alpha \cdot \frac{\Delta K}{K} + (1-\alpha) \cdot \frac{\Delta L}{L},$$

где α – доля капитала, а (1 – α) – доля труда в доходе; *A* общая производительность факторов, мера уровня технологического прогресса, измеряемая обычно по остаточному принципу ("остаток Солоу"). В представленной функции $Y = AK^{0.4}L^{0.6}$ показатели степени представляют собой одновременно и долю факторов в доходе, то есть α=0.4, (1–α)=0.6, что можно проверить, проведя с этой функцией все указанные выше операции.

Тогда = 1,5%+ 0,4·3%+ 0,6·2% = 3,9%, т.е. выпуск растет с темпом 3,9% в год.

2. Производственная функция задана уравнением $Y = K^{1/2}L^{1/2}$. Норма сбережения *s* равна 0,2, норма выбытия *d* – 5%, темп роста населения *n* составляет 2% в год, темп трудосберегающего технологического прогресса *g* равен 3%. Каким будет запас капитала и объем выпуска в расчете на одного занятого в устойчивом состоянии? Соответствует ли устойчивая фондовооруженность уровню, при котором достигается максимальный объем потребления ("золотому правилу")? Какой должна быть норма сбережения в соответствии с "золотым правилом"?

Решение

Преобразуем производственную функцию, разделив ее на L, т.е. представим все параметры в расчете на одного занятого, тогда:

$$y = \frac{Y}{L} = \frac{K^{1/2}}{L^{1/2}} = \sqrt{\frac{K}{L}} = \sqrt{k}, \text{ где } k=\frac{K}{L}.$$

В соответствии с условием устойчивого состояния экономики инвестиции должны быть равны выбытию, т.е. i= *dk,* или *sy* = *dk,* или $s\sqrt{k}=dk$. С учетом роста населения и технологического прогресса формула принимает вид $s\sqrt{k}=(d+n+g)k$. Отсюда находим *к*:

$$\sqrt{k} = \frac{s}{d+n+g}.$$

Подставляем значения соответствующих параметров и получаем:

$$\sqrt{k} = \frac{0.2}{0,05+0,02+0,03} = 2, \quad k = 4, \ y = \sqrt{k}=2.$$

По условию "золотого правила" *MPK* = *d* + *n* + *g*. Предельный продукт капитала получим как производную функции $y = \sqrt{k}$: $y' = \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Тогда $\frac{1}{2\sqrt{k}} = d + n + g = 0.1$, откуда *к*=25. Таким образом, исходная фондовооруженность *(к* = 4*)* не соответствует условиям достижения максимума потребления. Очевидно, норма накопления в соответствии с "золотым правилом" должна быть выше. Находим ее, учитывая, что состояние экономики при условиях "золотого правила" также является устойчивым, а значит, $s{\cdot}y=(d+n+g)k$, откуда $s = \frac{(d+n+g)k}{y} = \frac{(d+n+g)k}{\sqrt{k}}$. Подставляя значения параметров $к=25$, $\sqrt{k}=5$), получаем: $s = \frac{0.1}{5}25 = 0{,}5$.

Таким образом, норма сбережения в соответствии с "золотым правилом" должна быть равна 0,5, или 50%, тогда как в исходном состоянии она равна 20%.

Тесты

1. Предположим, что в стране А предельная производительность капитала равна 1/5, а в стране В – 1/3; предельная склонность к сбережению в обеих странах одинакова. В соответствии с моделью Домара темп прироста реального выпуска в стране А:

а) на 13% ниже, чем в стране В;

б) составляет 60% от темпа прироста в стране В;

в) в 1,67 раза выше, чем в стране В;

г) на 40% выше, чем в стране В.

2. В соответствии с моделью Солоу при темпе трудосберегающего прогресса g и темпе роста населения *n* темп прироста общего выпуска в устойчивом состоянии равен:

а) n; б) g; в) 0; г) $n + g$.

3. Производственная функция имеет вид $Y = AK^{0.3}L^{0.7}$. Если общая производительность факторов растет с темпом 2%, темп роста выпуска равен 5,9%, а капитал растет с темпом 6%, то численность занятых увеличивается с темпом:

а) 3,3%; б) - 2,1%; в) 3%; г) 0,8%. (См. задачу 1 из раздела "примеры").

4. Устойчивый рост объема выпуска в расчете на одного занятого в модели Солоу объясняется:

а) ростом населения;

б) ростом нормы сбережения;

в) технологическим прогрессом;

г) ответы а) и в) верны.

5. Увеличение нормы выбытия в экономике при неизменной производственной функции, норме сбережения, неизменных темпах роста населения и технологического прогресса:

а) увеличит запас капитала на одного занятого в устойчивом состоянии;

б) снизит устойчивый уровень запаса капитала на одного занятого;

в) не изменит устойчивого уровня фондовооруженности;

г) ничего определенного сказать нельзя.

6. Производственная функция в странах А и В задана как $Y = AK^{0.5}L^{0.5}$. Норма выбытия в обеих странах составляет 6% в год. Но страна А сберегает 24% своего дохода, а страна В - 15%. В этих условиях уровень выпуска на одного занятого в устойчивом состоянии в стране А:

а) в 1,6 раза выше, чем в стране В;

б) в 2,56 раза выше, чем в стране В;

в) составляет 62,5% от соответствующего уровня в стране В;

г) составляет 80% от соответствующего показателя в стране В.

7. Производственная функция представлена как $Y = 2K^{0,5}L^{0,5}$. Рост населения составил 1% в год. Ежегодно страна сберегает 10% от объема выпуска. Норма выбытия равна 3% в год. Темп технологического прогресса составил 2% в год. В данных условиях устойчивый уровень потребления в расчете на одного занятого составит:

а) 0,5626; б) 0,6; в) 1,25; г) 6,0.

8. В модели Солоу производственная функция имеет вид $y = 0{,}64\sqrt{k}$. Норма выбытия капитала составляет 5%, население растет на 1% в год, темп технологического прогресса равен 2%. Тогда норма сбережения, соответствующая "золотому правилу", составляет:

а) 64%; б) 20%; в) 50%; г) 31,25%.

9. Производственная функция имеет вид $y = 15K^{1/3}\ L^{2/3}$. Срок службы капитала составляет 20 лет. Рост населения и технологический прогресс отсутствуют. Определите устойчивый уровень выпуска в расчете на одного занятого, соответствующий условиям "золотого правила":

а) 1000; б) 150; в) 1500; г) 300.

10. Страна А имеет производственную функцию $Y = K^{0,5}L^{0,5}$. Норма выбытия составляет 6% в год. Население увеличивается за год на 2%. Технологический прогресс отсутствует. Максимальный объем потребления в соответствии с условиями "золотого правила" составит:

а) 3,125; б) 6,25; в) 39,0625; г) 2,65.

Ответы к тестам

1) б	6) а
2) г	7) г
3) в	8) в
4) в	9) б
5) б	10) а

Задания и задачи

1. Используя модель Солоу с ПФ Кобба-Дугласа, у которой А = 10^6 и α= 1/2, найти значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, для которой норма накопления $\rho = 0{,}2$, выбытие фондов $\mu = 0{,}2$ за год, а годовой прирост трудовых ресурсов $\nu = 0{,}05$.

2. Потребительский спрос характеризуется функцией $C = 50 + 0.5Y$, а инвестиционный – $I = 200 - 25\ r$. Функция спроса на деньги имеет вид $0.1Y + 24 - 2r$. Представьте в виде функции зависимость количества находящихся в обращении денег от реальной величины эффективного спроса, если уровень цен постоянно должен быть равен 1.5.

Задания 3-12**.**

Найти значение спроса на рабочую силу в модели Кейнса при общем равновесии на рынке денег и рынке товаров, при максимуме прибыли относительно капитала и при выполнении следующих условий:

– Предложение товаров Y является функцией Кобба-Дугласа $Y = AK^{a}L^{1-a}$ с известными A и α;

– Спрос на потребительские товары задаётся линейной функцией $C(Y) = a + b \cdot Y$ с известными значениями a и b;

– Спрос на инвестиционные товары задаётся линейной функцией от нормы процента $I(r)=d - f \cdot r$ с известными d и f;

– Спрос на облигации задаётся линейной функцией $Lq(r) = h - j \cdot r$ с известными коэффициентами h и j;

– Известны значения предложений денег M_S, цена продукта p и коэффициент пропорциональности денежного дохода k.

Исходные данные приведены в таблице.

№ задачи	A	α	a	b	d	f	h	j	M_S	p	k
3	3	1/3	$1{,}5\times10^4$	0,5	$1{,}5\times10^4$	$3{,}0\times10^3$	$1{,}8\times10^4$	6	$5{,}5\times10^4$	1	0,8
4	4	¼	2.5×10^4	0,5	2.5×10^4	$4{,}0\times10^3$	2.4×10^4	8	8.5×10^4	1	0,8
5	5	1/5	$2{,}5\times10^4$	0,5	$2{,}5\times10^4$	$5{,}0\times10^3$	$2{,}8\times10^4$	10	$2{,}5\times10^4$	1	0,8
6	2	½	$1{,}5\times10^4$	0,5	$1{,}5\times10^4$	$2{,}0\times10^3$	$1{,}2\times10^4$	4	$4{,}5\times10^4$	1	0,8
7	3	1/3	$2{,}0\times10^4$	0,5	$2{,}0\times10^4$	$3{,}0\times10^3$	2.6×10^4	6	8.5×10^4	1	0,8
8	4	¼	$2{,}5\times10^4$	0,5	$2{,}5\times10^4$	$4{,}0\times10^3$	$2{,}2\times10^4$	8	$2{,}5\times10^4$	1	0,8
9	5	1/5	$2{,}0\times10^4$	0,5	$2{,}0\times10^4$	$5{,}0\times10^3$	$1{,}8\times10^4$	10	$7{,}5\times10^4$	1	0,8
10	4	¼	$1{,}5\times10^4$	0,5	$1{,}5\times10^4$	$2{,}0\times10^3$	2.2×10^4	4	4.5×10^4	1	0,8
11	3	1/3	$2{,}5\times10^4$	0,5	$2{,}5\times10^4$	$3{,}0\times10^3$	$2{,}8\times10^4$	6	$7{,}5\times10^4$	1	0,8
12	2	1/2	$2{,}0\times10^4$	0,5	$2{,}0\times10^4$	$4{,}0\times10^3$	$1{,}6\times10^4$	8	$8{,}5\times10^4$	1	0,8

13. Производство НД отображается ПФ $Y = (KL)^{0.5}$. В период t_0 в хозяйстве было 10 ед. труда и 640 ед. капитала. Темп прироста трудовых ресурсов равен 3% за период. Предельная склонность к сбережению равна 50%. В каком направлении будет изменяться темп прироста НД в соответствии с моделью экономического роста Солоу?
14. В условиях задания 1 какой объем капитала обеспечит в исходных условиях равновесный рост с периода t_1?
15. Страна располагает 256 ед. капитала и 16 ед. труда. Технология производства представлена ПФ $Y = (KL)^{0.5}$. Предельная склонность

к сбережению равна 0.2. Система цен совершенно эластична. Какой темп равновесного роста в описанных условиях не изменил бы исходной производительности труда?

1.3.5. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Кейнсианские модели экономического роста.
2. Модель Р.Солоу.
3. Неоклассическая модель роста.

Литература для самостоятельной работы

1. Макконнелл К.Р., Брю С.Л. Экономикс: Принципы, проблемы и политика: в 2-х томах / Пер. с англ. 13-го изд. –М.: ИНФРА-М, 2001. –Т.2. –Гл. 28.
2. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика. 6-е изд., испр. и доп. - М.: Высшее образование, 2006. –654 с.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. –399с.
4. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
5. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

ТЕМА 1.4. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

1.4.1. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Пусть имеется n различных отраслей, каждая из которых производит свой продукт. В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Будем вести речь о некотором определенном промежутке времени (обычно таким промежутком служит плановый год) и введем следующие обозначения:

x_i – объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый валовой выпуск отрасли i;

x_{ij} – объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе своего производства;

y_i – объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере – объем конечного потребления. Этот объем составляет обычно более 75% всей произведенной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т. д.), поставки на экспорт.

Очевидно, что при i= 1,..., n должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \tag{1.4.1}$$

означающее, что валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}$ и непроизводственное потребление, равное y_i. Будем называть (1.4.1) соотношениями баланса.

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки, киловатт-часы и т. п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают натуральный и стоимостной межотраслевой балансы. Для определенности в дальнейшем будем иметь в виду (если не оговорено противное) стоимостной баланс.

В.Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики в предвоенный период, обратил внимание на важное обстоятельство. А именно, для выпуска любого объема x_j продукции отрасли j необходимо затратить продукцию отрасли i в количестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянный коэффициент. Проще говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции (линейность существующей технологии). Принцип линейности распространяется и на другие виды издержек, например, на оплату труда, а также на нормативную прибыль.

Коэффициенты a_{ij} называют *коэффициентами прямых затрат* (коэффициентами материалоемкости).

В предположении линейности соотношения (1.4.1) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n + y_1 ,\\
x_2 &= a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n + y_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_n &= a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n + y_n,
\end{aligned}
$$

или, в матричной записи, $\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + y$, (1.4.2)

где $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$ – матрица коэффициентов прямых затрат;

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$ – столбец неизвестных объемов валового выпуска;

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix}$ – столбец объемов конечного потребления.

Соотношение (1.4.2) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ это соотношение называют также моделью Леонтьева.

Уравнения межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования. В этом случае задача ставится так: для предстоящего планового периода задается вектор $\boldsymbol{y}$ конечного потребления. Требуется определить вектор $\boldsymbol{x}$ валового выпуска. Проще говоря, нужно решить задачу: сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления? В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений, соответствующую матричному уравнению (1.4.2) с неизвестным вектором $\boldsymbol{x}$ при заданных матрице A и векторе y.

Если обратная матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то решение находится в виде

$$\boldsymbol{x} = (E - A)^{-1}\boldsymbol{y}. \qquad (1.4.3)$$

Замечание. Обратим внимание на смысл коэффициентов a_{ij} прямых затрат в случае стоимостного (а не натурального) баланса. В этом случае a_{ij} есть стоимость продукции отрасли i, вложенной в 1 руб. продукции отрасли j. Отсюда, между прочим, видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями. При таком подходе уже необязательно рассматривать «чистые», т.е. однопродуктовые, отрасли. Ведь и в случае многопродуктовых отраслей тоже можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск 1 руб. продукции другой отрасли; скажем, о вкладе промышленной сферы в выпуск 1 руб. сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы А (производство средств производства) в выпуск 1 руб. продукции группы В (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

Коэффициенты обратной матрицы $(E–A)^{-1}$ называются *коэффициентами полных затрат*.

Пример 1.4.1. Решить уравнение межотраслевого баланса, если

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.9 & 0.3 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

В данном случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.6 \\ -0.9 & 0.7 \end{pmatrix}, \quad (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix},$$

откуда получаем $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 950 \\ 1250 \end{pmatrix}.$

1.4.2. Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева – так называемую модель равновесных цен. Пусть, как и прежде, A – матрица прямых затрат, $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2,..., x_n)$ – вектор валового выпуска. Обозначим через $\boldsymbol{p}=(p_1, p_2,..., p_n)$ – вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли.

1. Часть своего дохода каждая i-я отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{1i}, второй отрасли в объеме a_{2i}, n-й отрасли в объеме a_{ni} и т.д. На покупку этой продукции ею будет затрачена сумма, равная $a_{1i}\ p_1 + a_{2i}\ p_2 +...+ a_{ni}\ p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_i отрасли необ-

ходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму, равную $x_i(a_{1i}\ p_1\ +\ a_{2i}\ p_2\ +...+\ a_{ni}\ p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, мы обозначим через V_i (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Таким образом, имеет место следующее равенство:

$x_ip_i = x_i(a_{1i}\, p_1 + a_{2i}\, p_2 +...+ a_{ni}\, p_n)+ V_i$.

Разделив это равенство на x_i, получаем

$p_i = x_i(a_{1i}\, p_1 + a_{2i}\, p_2 +...+ a_{ni}\, p_n)+ v_i$.

где $v_i = V_i/x_i$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\mathbf{p} = A^T\mathbf{p} + \mathbf{v},$$

где $\mathbf{v} = (v_1,\ v_2\ ,...,\ v_n)$ – вектор норм добавленной стоимости, A^T – транспонированная матрица.

Как мы видим, полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева с той лишь разницей, что $\boldsymbol{x}$ заменен на $\mathbf{p}$, $\boldsymbol{y}$ – на $\mathbf{v}$, A – на A^T.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример 1.4.2. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей. Назовем их условно: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство. Пусть

$$A^T = \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix}$$ – транспонированная матрица прямых затрат;

$$v = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$ – столбец норм добавленной стоимости.

Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой $\mathbf{p}=C^T\mathbf{v}$, где $C^T = (E–A^T)^{-1}$ – транспонированная матрица полных затрат. После необходимых вычислений имеем

$$C^T = (1/0{,}444)\begin{pmatrix} 0{,}58 & 0{,}14 & 0{,}18 \\ 0{,}28 & 0{,}68 & 0{,}24 \\ 0{,}25 & 0{,}29 & 0{,}69 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что $\mathbf{p} = C^T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Допустим теперь, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $\mathbf{v}$ = (5,11; 10; 4), находим, что

$$\mathbf{p} = C^T\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 11{,}45 \\ 20{,}7 \\ 15{,}625 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, продукция первой отрасли подорожала на 14,5%, второй – на 3,5%, третьей отрасли – на 4,17%. Нетрудно также, зная объемы выпуска, подсчитать вызванную этим повышением инфляцию.

1.4.3. Модель международной торговли.

Модель международной торговли (кратко: модель обмена) служит для ответа на следующий вопрос: какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т. е. не было дефицита торгового баланса для каждой из стран-участниц.

Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления, как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны.

Для простоты изложения рассмотрим три страны-участницы торговли с государственными бюджетами X_1, X_2, X_3, которые условно назовем США, Германия и Израиль. Будем считать, что весь госбюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть, скажем, США тратят половину своего бюджета на закупку товаров внутри страны, 1/4 бюджета – на товары из Германии, оставшуюся 1/4 бюджета – на товары из Израиля. Германия тратит поровну свой бюджет на закупку товаров в США, внутри страны и у Израиля. Израиль, в свою очередь, тратит 1/2 бюджета на закупку товаров у США, 1/2 бюджета на закупки в Германии и ничего не закупает внутри страны.

Введем структурную матрицу торговли:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}, \qquad (1.4.4)$$

где коэффициенты матрицы a_{ij} – часть госбюджета, которую j-я страна тратит на закупки товаров i-й страны. Заметим, что сумма элементов матрицы А в каждом столбце равна единице.

После подведения итогов торговли за год страна под номером i получит выручку $P_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3$.

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$$P_i \geq X_i, \text{ для всех } i.$$

Справедливо следующее утверждение: условием бездефицитной торговли являются равенства $P_i = X_i$, $i = 1, 2, 3$.

В матричной форме это утверждение выглядит следующим образом

$$\mathbf{AX}=\mathbf{X} \text{ или } (A - E)\mathbf{X}=0, \qquad (1.4.5)$$

где $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$.

Решая систему (1.4.5) с матрицей (1.4.4) методом Гаусса, получим бесконечное множество решений:

$$X_1=2X_3,\ X_2= 3/2X_3,$$

где X_3 принимает произвольное значение.

Это означает, что для сбалансированности торговли этих трех стран госбюджет США должен быть в 2 раза, а госбюджет Германии в полтора раза больше госбюджета Израиля.

1.4.4. Практический блок

Пример

Задание:

1) Найти объемы выпуска продукции по каждой из отраслей, предварительно обосновав сущность нестандартного решения.
2) Рассчитать новый план выпуска продукции, при условии, что конечный спрос на продукцию U-ой и ν-ой отраслей возрос соответственно на 85 и 97 единиц. Вычислить абсолютные и относительные приросты объема, выполненные по каждой из отраслей.
3) Скорректировать новый план, с учетом того, что $\mu - ая$ отрасль не может увеличить объемы выпуска своей продукции более чем на 2 единицы.

4) Рассчитать матрицу полных затрат.

Исходные данные:

$$A = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.09 & 0.06 & 0.06 \\ 0.01 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.04 \\ 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.05 & 0.08 \\ 0.05 & 0.01 & 0.08 & 0.04 & 0.03 \\ 0.06 & 0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 235 \\ 194 \\ 167 \\ 209 \\ 208 \end{bmatrix}$$

$U = 1$, $\nu = 2$, $\mu = 4$.

0) Проверим матрицу А на продуктивность:

$$\sum\nolimits_1 = 0.02 + 0.03 + 0.09 + 0.06 + 0.06 = 0.26 < 1$$

$$\sum\nolimits_2 = 0.01 + 0.05 + 0.05 + 0.06 + 0.04 = 0.22 < 1$$

$$\sum\nolimits_3 = 0.01 + 0.02 + 0.04 + 0.05 + 0.08 = 0.20 < 1$$

$$\sum\nolimits_4 = 0.05 + 0.01 + 0.08 + 0.04 + 0.03 = 0.21 < 1$$

$$\sum\nolimits_5 = 0.06 + 0.01 + 0.05 + 0.05 + 0.05 = 0.22 < 1$$

Матрица А является продуктивной матрицей.

1) (J-A)$\bar{x}$ = $\bar{c}$

J – единичная матрица;

A – заданная матрица прямых затрат;

$\bar{x}$ – вектор (план) выпуска продукции, подлежащей определению;

$\bar{c}$ – вектор конечного спроса.

Произведем расчеты, используя метод Гаусса.

$$\left(J - \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.09 & 0.06 & 0.06 \\ 0.01 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.04 \\ 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.05 & 0.08 \\ 0.05 & 0.01 & 0.08 & 0.04 & 0.03 \\ 0.06 & 0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \right) \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 235 \\ 194 \\ 167 \\ 209 \\ 208 \end{pmatrix}; \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.09 & 0.06 & 0.06 \\ 0.01 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.04 \\ 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.05 & 0.08 \\ 0.05 & 0.01 & 0.08 & 0.04 & 0.03 \\ 0.06 & 0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 235 \\ 194 \\ 167 \\ 209 \\ 208 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 0.98 & -0.03 & -0.09 & -0.06 & -0.06 \\ -0.01 & 0.95 & -0.06 & -0.06 & -0.04 \\ -0.01 & -0.02 & 0.96 & -0.05 & -0.08 \\ -0.05 & -0.01 & -0.08 & 0.96 & -0.03 \\ -0.06 & -0.01 & -0.05 & -0.05 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \bar{x} = \begin{pmatrix} 235 \\ 194 \\ 167 \\ 209 \\ 208 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} 0.98x_1 & -0.03x_2 & -0.09x_3 & -0.06x_4 & -0.06x_5 & = & 235 \\ -0.01x_1 & 0.95x_2 & -0.06x_3 & -0.06x_4 & -0.04x_5 & = & 194 \\ -0.01x_1 & -0.02x_2 & 0.96x_3 & -0.05x_4 & -0.08x_5 & = & 167 \\ -0.05x_1 & -0.01x_2 & -0.08x_3 & 0.96x_4 & -0.03x_5 & = & 209 \\ -0.06x_1 & -0.01x_2 & -0.05x_3 & -0.05x_4 & 0.95x_5 & = & 208 \end{cases};$$

Решая систему, получим:

$$x_1 = 3.0002209182E+02 = 300.02209182$$
$$x_2 = 2.4907229445E+02 = 249.7229445$$
$$x_3 = 2.2040757129E+02 = 220.40757129 \qquad \boxed{x}$$
$$x_4 = 2.6260690213E+02 = 262.0690213$$
$$x_5 = 2.6593976013E+02 = 265.93976013$$

2)

$$\begin{cases} +0.98x_1 & -0.03x_2 & -0.09x_3 & -0.06x_4 & -0.06x_5 & = & 235+85 \\ -0.01x_1 & +0.95x_2 & -0.06x_3 & -0.06x_4 & -0.04x_5 & = & 194+97 \\ -0.01x_1 & -0.02x_2 & +0.96x_3 & -0.05x_4 & -0.08x_5 & = & 167 \\ -0.05x_1 & -0.01x_2 & -0.08x_3 & +0.96x_4 & -0.03x_5 & = & 209 \\ -0.06x_1 & -0.01x_2 & -0.05x_3 & -0.05x_4 & +0.95x_5 & = & 208 \end{cases};$$

$$\begin{cases} +0.98x_1 & -0.03x_2 & -0.09x_3 & -0.06x_4 & -0.06x_5 & = & 320 \\ -0.01x_1 & +0.95x_2 & -0.06x_3 & -0.06x_4 & -0.04x_5 & = & 291 \\ -0.01x_1 & -0.02x_2 & +0.96x_3 & -0.05x_4 & -0.08x_5 & = & 167 \\ -0.05x_1 & -0.01x_2 & -0.08x_3 & +0.96x_4 & -0.03x_5 & = & 209 \\ -0.06x_1 & -0.01x_2 & -0.05x_3 & -0.05x_4 & +0.95x_5 & = & 208 \end{cases};$$

$$x_1 = 3.9091917694E+02 = 390.91917694$$
$$x_2 = 3.5294049866E+02 = 352.94049866$$
$$x_3 = 2.2214900788E+02 = 322.14900788 \qquad \boxed{x'}$$
$$x_4 = 2.6879481650E+02 = 268.79481650$$
$$x_5 = 2.7319139244E+02 = 273.19131244$$

Решение:

$$\frac{x' - x}{x} \cdot 100\%;$$

$$x_1 = \frac{390.91917694 - 300.02209182}{300.02209188} \cdot 100\% = 30.2968\%;$$
$$x_2 = \frac{352.94049866 - 249.7229445}{249.7229445} \cdot 100\% = 41.3328\%;$$
$$x_3 = \frac{322.14900788 - 220.40757129}{220.40757129} \cdot 100\% = 46.1606\%;$$
$$x_4 = \frac{268.79481650 - 262.0690213}{262.0690213} \cdot 100\% = 2.5664\%;$$
$$x_5 = \frac{273.19131244 - 265.93976043}{265.93976043} \cdot 100\% = 2.7268\%;$$

3) Скорректировать новый план, с учетом того, что $\mu - ая$ отрасль не может увеличить объем выпуска своей продукции, более чем на 2 единицы.

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 300.0220 \\ x_2 &= 249.7229 \\ x_3 &= 220.4076 \\ x_4 &= 262.0690 \\ x_5 &= 265.9398 \end{aligned}\right\} \quad \nu + 2 = x_4' \quad x_4' = 264.0690$$

Подставляя значение x_4' в исходную систему уравнений, получим:

$$\begin{cases} 0.98x_1 & -0.03x_2 & -0.09x_3 & -0.06 \cdot 264.0690 & -0.06x_5 = 320 \\ -0.01x_1 & 0.95x_2 & -0.06x_3 & -0.06 \cdot 264.0690 & -0.04x_5 = 291 \\ -0.01x_1 & -0.02x_2 & 0.96x_3 & -0.05 \cdot 264.0690 & -0.08x_5 = 167 \\ -0.06x_1 & -0.01x_2 & -0.05x_3 & -0.05 \cdot 264.0690 & 0.95x_5 = 208 \end{cases};$$

$$\begin{cases} +0.98x_1 & -0.03x_2 & -0.09x_3 & -0.06x_5 = 320 + 15.8441 \\ -0.01x_1 & +0.95x_2 & -0.06x_3 & -0.04x_5 = 291 + 15.8441 \\ -0.01x_1 & -0.02x_2 & +0.96x_3 & -0.08x_5 = 167 + 13.2035 \\ -0.06x_1 & -0.01x_2 & -0.05x_3 & +0.95x_5 = 208 + 13.2035 \end{cases};$$

$$\begin{cases} +0.98x_1 & -0.03x_2 & -0.09x_3 & -0.06x_5 = 335.8441 \\ -0.01x_1 & +0.95x_2 & -0.06x_3 & -0.04x_5 = 306.8441 \\ -0.01x_1 & -0.02x_2 & +0.96x_3 & -0.08x_5 = 180.2035 \\ -0.06x_1 & -0.01x_2 & -0.05x_3 & +0.95x_5 = 221.2035 \end{cases};$$

Решаем систему уравнений методом Гаусса:

$$x_1 = 5.0010500284E + 02 = 500.10500284$$
$$x_2 = 3.6071207410E + 03 = 3607.1207410$$
$$x_3 = 2.9494315332E + 02 = 294.94315332$$
$$x_4 = 3.1827827921E + 02 = 318.27827921$$

4) Рассчитаем матрицу полных затрат.

Произведем обращение матрицы:

$$B = (J - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0.98 & -0.03 & -0.09 & -0.06 & -0.06 \\ -0.01 & 0.95 & -0.06 & -0.06 & -0.04 \\ -0.01 & -0.02 & 0.96 & -0.05 & -0.08 \\ -0.05 & -0.01 & -0.08 & 0.96 & -0.03 \\ -0.06 & -0.01 & -0.05 & -0.05 & 0.95 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.0306 & 0.0365 & 0.1093 & 0.0765 & 0.0782 \\ 0.0187 & 1.0562 & 0.0768 & 0.0740 & 0.0545 \\ 0.0199 & 0.0245 & 1.0551 & 0.0626 & 0.0937 \\ 0.0577 & 0.0154 & 0.0966 & 1.0536 & 0.455 \\ 0.0694 & 0.0155 & 0.0683 & 0.0644 & 1.0655 \end{pmatrix}.$$

Тесты

1. Какое матричное уравнение описывает замкнутую экономическую модель Леонтьева:

   а) (Е – А)*Х = С; б) А*Х = Х; в) А*Х = Е.

2. Какое уравнение называется характеристическим уравнением матрицы А:

   а) (Е – А)*Х = Y; б) А*Х = В; в) $|A - \lambda E| = 0$.

3. В основе математического обеспечения статической модели МОБ лежит:

   а) математическая статистика;

   б) линейная алгебра;

   в) теория графов.

4. Коэффициент прямых затрат a_{ij} характеризует:

   а) количество валовой продукции i -й отрасли, которое необходимо для производства единицы конечной продукции j- й отрасли;

   б) количество валовой продукции i -й отрасли, которое необходимо для производства единицы валовой продукции j- й отрасли;

   в) количество конечной продукции i-й отрасли, которое необходимо для производства единицы валовой продукции j- й отрасли.

5. Матрица прямых затрат А характеризует в экономике:

   а) динамику финансовых процессов;

   б) динамику технологических процессов;

   в) воспроизводственные процессы.

6. Коэффициент полных затрат b_{ij} показывает:

   а) объём валовой продукции i -й отрасли, необходимый для производства единицы конечной продукции j- й отрасли;

   б) количество конечной продукции i -й отрасли, которое необходимо для производства единицы валовой продукции j- й отрасли.

   в) объём валовой продукции i -й отрасли, необходимый для производства единицы валовой продукции j- й отрасли;

7. Коэффициенты прямых материальных затрат рассчитываются:

   а) $a_{ij} = \dfrac{X_j}{x_{ij}}$; б) $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{X_j}$; в) $a_{ij} = b_{ij} Y_j$.

8. Экономико–математическая модель Леонтьева в матричной форме имеет вид:

   а) X = BX + Y; б) $X = (E-A)^{-1}Y$; в) X = AX + Y.

9. Межотраслевой баланс отражает:

   а) производство и распределение валового национального продукта по отраслям;

б) межотраслевое распределение национальной валюты;
в) использование материальных и трудовых ресурсов.

10. Первый квадрант МОБ отражает:
   а) отраслевую материальную структуру национального дохода;
   б) межотраслевые потоки валовой продукции;
   в) конечное распределение и использование национального дохода.

Ответы к тестам

1) б	6) а
2) в	7) б
3) б	8) б
4) б	9) а
5) в	10) б

Контрольные вопросы

1. Основные положения межотраслевого баланса.
2. Основные элементы межотраслевого баланса.
3. Балансовые соотношения межотраслевого баланса.
4. Матрица прямых затрат межотраслевого баланса.
5. Модель межотраслевого баланса Леонтьева: постановка.
6. Матрица полных затрат межотраслевого баланса.
7. Особенности модели Леонтьева многоотраслевой экономики.
8. Записать матрицы прямых и полных затрат в модели Леонтьева.
9. При каких условиях модель Леонтьева продуктивна?
10. Что такое векторы конечного и валового продукта в модели Леонтьева?
11. Опишите методику решения прямой и обратной задачи в модели Леонтьева.
12. Какой смысл имеют коэффициенты технологической матрицы А модели Леонтьева?
13. Условия продуктивности матрицы коэффициентов прямых материальных затрат.
14. Статистическая и динамическая модели межотраслевого баланса.
15. Модель равновесных цен.
16. Модель международной торговли.

Задания и задачи

Задача 1. Плановый межотраслевой баланс.

Общественное производство состоит из восьми отраслей. Задана матрица коэффициентов прямых затрат:

$$\begin{pmatrix}
0,01 & 0 & 0,12 & 0,03 & 0,07 & 0,14 & 0,12 & 0,01 \\
0,22 & 0,08 & 0,06 & 0,13 & 0,14 & 0 & 0,18 & 0,03 \\
0,03 & 0,09 & 0,14 & 0 & 0,02 & 0,05 & 0 & 0,04 \\
0 & 0,08 & 0,07 & 0,05 & 0,03 & 0,09 & 0,08 & 0,04 \\
0,08 & 0,04 & 0 & 0,14 & 0,01 & 0,03 & 0,08 & 0,09 \\
0,03 & 0 & 0,02 & 0,13 & 0,12 & 0,4 & 0,03 & 0 \\
0,19 & 0,3 & 0,15 & 0,09 & 0 & 0,09 & 0,14 & 0,06 \\
0 & 0,04 & 0,07 & 0,08 & 0,17 & 0,04 & 0,18 & 0
\end{pmatrix}$$

Задание 1. По заданной конечной продукции рассчитать валовую.

Отрасли	Конечная продукция
1	1831,2
2	243,4
3	941,8
4	2248,2
5	751,1
6	643,2
7	1725,0
8	2540,2

Задание 2. В таблице заданы валовые продукты отраслей.

Отрасли	Валовой продукт
1	3600
2	4500
3	1800
4	2300
5	6700
6	4300
7	5600
8	4670

Рассчитать конечные продукты отраслей. Для этого в системе уравнений все величины X_1 ,..., X_8 необходимо заменить на значения из приведенной выше таблицы, а численные значения конечной продукции – на символы y_1, ... , y_8. Решение полученной системы уравнений дает значения конечных продуктов отраслей.

Задача 2. Модель межотраслевого баланса

а) Найти объемы выпуска продукции по каждой из отраслей, предварительно обосновав сущность нестандартного решения.

б) Рассчитать новый план выпуска продукции, при условии, что конечный спрос на продукцию U-ой и V-ой отраслей возрос соответственно на 85 и 97 единиц. Вычислить абсолютные и относительные приросты объема, выполненные по каждой из отраслей.

в) Скорректировать новый план, с учетом того, что $\mu - ая$ отрасль не может увеличить объемы выпуска своей продукции более чем на 2 единицы.

г) Рассчитать матрицу полных затрат.

Исходные данные:

$$A = \begin{pmatrix} 0.02 & 0.03 & 0.09 & 0.06 & 0.06 \\ 0.01 & 0.05 & 0.06 & 0.06 & 0.04 \\ 0.01 & 0.02 & 0.04 & 0.05 & 0.08 \\ 0.05 & 0.01 & 0.08 & 0.04 & 0.03 \\ 0.06 & 0.01 & 0.05 & 0.05 & 0.05 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 235 \\ 194 \\ 167 \\ 209 \\ 208 \end{pmatrix}$$

$U = 1$, V=2, $\mu = 4$.

Задача 3.Оптимизационная модель межотраслевого баланса.

Зная запасы дополнительных ресурсов (r), нормы их затрат (D) на производство продукции каждой отрасли и цены реализации конечной продукции (p), рассчитать объемы производства продукции, обеспечивающие максимальный фонд конечного спроса. Вычислить конечный спрос и провести анализ полученного решения:

1) относительно оптимальности;
2) статуса и ценности ресурсов;
3) чувствительности.

Рассчитать объем производства.

Исходные данные:

$$D = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.5 & 0.9 & 1.1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.8 & 0.4 & 0.2 \\ 0.5 & 0.9 & 0.1 & 0.8 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad \bar{r} = \begin{pmatrix} 564 \\ 298 \\ 467 \end{pmatrix}$$

p= (121 164 951 254 168).

Требуется максимизировать цену конечного спроса.

Задача 4. Дан вектор

$Y=\begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ конечного продукта и матрица,

$A=\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$ межотраслевого баланса.

Найти вектор валового выпуска X.

Задача 5. Разработка межпродуктового баланса производства и распределения продукции предприятия

В трех цехах приборостроительного завода изготовляются датчики, приборы и их узлы, основная часть которых идет на внутреннее потребление, остальная является конечным продуктом и поставляется внешним приборостроительным и машиностроительным организациям, а также в ремонтные мастерские.

Требуется составить межпродуктовый баланс производства и распределения продукции, если известны коэффициенты прямых затрат и конечный продукт.

Исходные данные

Производящие цехи	Потребляющие цехи (коэф. прямых затрат)			Конечная продукция
	№1	№2	№3	
№1	0,15	0,10	0,30	100
№2	0,25	0,15	0,25	280
№3	0,30	0,25	0	320

Задача 6. На основании данных, приведенных в нижеследующей таблице восстановить схемы межотраслевого материального баланса.

Отрасль	Прямые межотраслевые потоки			Конечная продукция
	1	2	3	
1	50	60	80	60
2	25	90	40	25
3	25	60	40	35

Задача 7. Рассчитать коэффициенты полных материальных затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Задача 8. Проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых материальных затрат

$$A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.1 \\ 0.5 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix}$$

Задача 9. Убедиться, что модель Леонтьева продуктивна. Для нового вектора валового выпуска $X = \begin{pmatrix} 500 \\ 700 \end{pmatrix}$ найти вектор конечного продукта. Найти вектор валового выпуска для нового вектора конечного продукта $Y = \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \end{pmatrix}$.

	x_1	x_2	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}
Значения	150	800	100	80	50	110

1.4.5. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Модель межотраслевого баланса Леонтьева: основные положения, балансовые соотношения, матрица прямых и полных затрат, продуктивность.
2. Методика решения прямой и обратной задачи в модели Леонтьева.
3. Статистическая и динамическая модели межотраслевого баланса.
4. Модели равновесных цен.
5. Модели международной торговли.

Литература для самостоятельной работы

1. Тарасевич Л.С., Гребенников П.И., Леусский А.И. Макроэкономика. 6-е изд., испр. и доп. –М.: Высшее образование, 2006. –654 с
2. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. –399с.
3. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
4. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

РАЗДЕЛ 2. ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ТЕМА 2.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

2.1.1. Этапы математического моделирования.

В настоящее время в различных областях знаний завоевал большое признание метод математического моделирования. В его основе лежит приближенное описание какого-либо класса процессов и явлений символами математики и логики. Процесс математического моделирования можно разделить на четыре этапа.

Первый этап – определение класса изучаемых объектов и законов, связывающих рассматриваемые объекты. Этот этап требует знания множества фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокого проникновения в их взаимосвязи. Результатом этого этапа является запись в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами моделирования, т.е. построение математической модели.

Второй этап – это получение результатов с помощью математической модели для дальнейшего их сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. Здесь важную роль играет математический аппарат, необходимый для анализа математической модели, и вычислительная техника, позволяющая количественно решить сложные математические задачи.

Третий этап – выяснение того, удовлетворяет ли принятая гипотетическая модель критерию практики, т.е. согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели и если да, то с какой точностью. Применение критерия практики к оценке математической модели позволяет делать вывод о правильности положений, лежащих в основе изучаемой модели. Метод моделирования является единственным методом изучения непосредственно недоступных явлений макро- и микромира.

Четвертый этап состоит в анализе модели в соответствии с накопленными данными об изучаемых явлениях и процессах и в усовершенствовании модели.

Экономическое прогнозирование, которое наиболее системно реализуется с помощью математических моделей, является ключевым моментом в процессе принятия управленческих решений. Прогнозирование позволяет не только получить значения экономических показателей в будущем, оценить эффективность управленческой деятельности, но и выявить возможные ее направления в зависимости от изменения того или иного фактора, влияющего на принятие управленческих решений.

Несомненным преимуществом математических моделей является то, что оценка вариантов управленческих решений может осуществляться, с одной стороны, с учетом прогнозных значений экономических показателей, а не только фактических данных, с другой стороны, с учетом ресурсных затрат, необходимых для реализации конкретных мероприятий и программ.

Еще одним несомненным достоинством математического моделирования, облегчающим процесс анализа информации и принятия решения, является возможность использования при изучении исследуемых моделей ЭВМ.

2.1.2. Основные понятия математического моделирования.

Существует известное изречение, что правильно поставить задачу – значит наполовину решить ее. Следует признать, что правильная постановка задачи является сама по себе сложной задачей. Однако методология процесса постановки задач (как первого этапа операционного исследования) выходит за рамки проблематики данного раздела, посвященного математическим аспектам решения задач организационного управления. Для этого очень важно суть задачи словесно описать таким образом, чтобы были возможны дальнейшая формализация и разработка математической модели, то есть описание задачи на математическом языке.

Формальная структура постановки задач базируется на определенной совокупности элементов. Соотнесение всех условий задачи этим элементам позволяет «обнажить» суть задачи и, в конечном итоге, получить ее четкую, однозначно понимаемую формулировку.

Принято выделять следующие элементы общей структуры задач принятия решений:

а) цели, ради достижения которых принимается решение;

б) множество управляемых (разрешающих) переменных, значения которых могут определяться лицом, принимающим решение (ЛПР);

в) множество внешних (*экзогенных*) переменных, значения которых не контролируются ЛПР и имеют вероятностный или неопределенный характер;

г) множество параметров, которые также не контролируются, но считаются в условиях данной задачи вполне определенными;

д) ограничения – предельные значения тех параметров и неконтролируемых переменных, которые не могут быть превзойдены или не достигнуты при реализации решения;
е) решение (или стратегия) – некоторая допустимая совокупность значений управляемых переменных;
ж) критерий эффективности (показатель качества) решения, на основе которого производится оценка и сравнение вариантов решений, и выбор лучшего.

Предполагается, что приведенные выше элементы должны быть измеримыми, то есть иметь характер «количества» или, по меньшей мере, «величины».

Тогда дальнейший процесс разработки математической модели задачи будет сводиться к изучению взаимосвязей между целями, переменными и параметрами и отражению этих взаимосвязей в виде математических выражений (уравнений, неравенств и т.п.).

Среди этих выражений можно выделить две группы:

К первой отнесем условия достижения целей, т.е. выражения, отображающие зависимости между управляемыми переменными и поставленными целями.

Ко второй группе относятся выражения, отображающие условия-ограничения, описывающие связи между управляемыми переменными и теми из параметров и «внешних» переменных, которые или не могут быть превзойдены, или не достигнуты при реализации решения. (В отечественной литературе математические выражения, как правило, на упомянутые группы не подразделяются и обозначаются единым термином – «ограничения»).

Совокупность значений управляемых переменных, удовлетворяющих системе указанных выше выражений (условиям достижения целей и ограничениям), принято называть *допустимым решением* (стратегией, планом).

Множество допустимых решений называется *областью допустимых решений*.

Поскольку проблема принятия решения заключается не только в нахождении допустимого решения, но и в выборе наилучшего из них по принятому критерию, – возникает необходимость определения значения критерия в зависимости от значений контролируемых переменных.

Функция, определяющая эту зависимость, называется *целевой функцией.*

Таким образом, совокупность (система) математических выражений, отражающих условия достижения целей и условия выполнения ограничений, вместе с целевой функцией и представляют собой *математическую модель задачи*.

Допустимое решение, при котором значение целевой функции достигает экстремума (минимального или максимального значения в зависимости от условий задачи), называется *оптимальным решением*.

Приведенные понятия (элементы структуры задач принятия решений) являются наиболее общими. Далее, при рассмотрении отдельных типов задач, понятийный аппарат будет расширен. Так, например, при изучении задач массового обслуживания будут введены такие понятия, как дисциплина очереди, канал обслуживания, интенсивность обслуживания и др.; в задачах упорядочения и координации (управление проектами) – такие понятия, как критические работы, резервы времени и т.п.; в состязательных задачах (теория игр) – понятия ход, платежная матрица, чистые и смешанные стратегии и т.д.

При постановке задачи и ее моделировании необходимо прежде всего оценить, какой из формулировок принципа экономичности соответствует данная ситуация принятия решения.

Принцип экономичности может формулироваться двояко:

– заданных целей (результатов) достигнуть при минимальных затратах;

– при заданных пределах затрат достигнуть цели в максимальной степени (достичь максимума результата).

Принцип экономичности в первой формулировке иногда называют «принципом экономии средств», во второй – «принципом максимального эффекта». Если задача формулируется по «принципу максимального эффекта», то целевая функция являет собой условие достижения цели (цель – максимум результата), остальные математические выражения, входящие в модель, – суть условия-ограничения.

Часто принцип экономичности формулируют так:
«достигнуть максимальной степени реализации цели (максимального результата) при минимальных затратах». Такое определение неверно, внутренне противоречиво с содержательной точки зрения и ведет к постановке математически неразрешимой задачи.

Кроме того, у руководителей возникает искушение оптимизировать решение задачи по нескольким критериям. Например, следующим образом: «найти такое решение, которое обеспечило бы максимум прибыли при минимуме годовых издержек на содержание производства и минимуме капитальных вложений».

При всей внешней привлекательности и кажущейся естественности – такая постановка ведет к неразрешимой задаче. Желательно, как правило, стремиться так формулировать задачи, чтобы при множественности целей и ограничений, критерий оптимизации решения (а, стало быть, и целевая функция) был один. Это еще раз подтверждает важность правильного обоснования цели и критерия эффективности при постановке задачи, так как при этом определяется и выбор соответствующего варианта формулировки принципа экономичности.

Рассмотренные в данном разделе модели и методы оптимизации ориентированы преимущественно на решение однокритериальных задач.

Следует отметить, что в ряде сложных организационных задач возникает проблема многокритериальности. Некоторые подходы к постановке и решению такого рода задач будут рассмотрены в Теме 2.10.

2.1.3. Основные типы экономических моделей

Математические модели, используемые в экономике, по ряду признаков, относящихся к особенностям моделируемого объекта, цели моделирования и используемого инструментария можно разделить на следующие классы:

Макроэкономические модели описывают экономику как единое целое, связывая между собой укрупненные материальные и финансовые показатели: ВВП, потребление, инвестиции, занятость, процентную ставку, количество денег и другие.

Микроэкономические модели описывают взаимодействие структурных и функциональных составляющих экономики, либо поведение отдельной такой составляющей в рыночной среде. Вследствие разнообразия типов экономических элементов и форм их взаимодействия на рынке, микроэкономическое моделирование занимает основную часть экономико-математической теории. Наиболее серьезные теоретические результаты в микроэкономическом моделировании в последние годы получены в исследовании стратегического поведения фирм в условиях олигополии с использованием аппарата теории игр.

Теоретические модели позволяют изучать общие свойства экономики и ее характерных элементов дедукцией выводов из формальных предпосылок.

Прикладные модели дают возможность оценить параметры функционирования конкретного экономического объекта и сформулировать рекомендации для принятия практических решений. К прикладным относятся, прежде всего, эконометрические модели, оперирующие числовыми значениями экономических переменных и позволяющие статистически значимо оценивать их на основе имеющихся наблюдений.

Равновесные модели описывают такие состояния экономики, когда результирующая всех сил, стремящихся вывести ее из данного состояния, равна нулю, когда ни один из экономических субъектов не заинтересован в изменении состоянии объекта с помощью средств, которыми он располагает.

Равновесные модели занимают особое место в рыночной экономике. В нерыночной экономике неравновесие по одним параметрам (например, дефицит) компенсируется другими факторами (черный рынок, очереди и т.п.). Равновесные модели дескриптивны, описательны.

Статические модели описывают состояние экономического объекта в конкретный момент или период времени. В статических моделях обычно зафиксированы значения ряда величин, являющихся переменными в динамике, – например, капитальных ресурсов, цен и т.п.

Динамические модели включают взаимосвязи переменных во времени. Динамическая модель не сводится к простой сумме ряда статических, а описывает силы и взаимодействия в экономике, определяющие ход процессов в ней. Динамические модели обычно используют аппарат дифференциальных и разностных уравнений, вариационного исчисления.

Детерминированные модели предполагают жесткие функциональные связи между переменными модели.

Стохастические модели допускают наличие случайных воздействий на исследуемые показатели и используют инструментарий теории вероятностей и математической статистики для их описания.

2.1.4. Практический блок

Пример

Рассмотрим проблему математического моделирования на примере задачи оптимизации параметров реорганизационной политики.

Для большинства неплатежеспособных предприятий неудовлетворительная структура баланса отождествляется с отставанием фактического уровня текущей ликвидности от его норматива (Ктл<2) даже при достаточном уровне обеспеченности собственными средствами (Косс ≥0,1).

Реорганизационные политики – процедуры реструктуризации балансов – позволяют перевести их в удовлетворительную структуру за счет реализации специально подобранного комплекса организационно-технических мероприятий. Но однозначно выбрать для практической реализации из возможных вариантов реорганизационных политик один, наиболее рациональный затруднительно, так как, если по прогнозируемым показателям платежеспособности, структуры баланса они равнозначны, то по прогнозным финансовым результатам могут быть противоречивыми.

Оценить предпочтительность каждого из этих вариантов оказывается возможным, если сформулировать задачу оптимизации реорганизационных политик с помощью математической модели, которая будет определяться текущим уровнем финансовой состоятельности, прежде всего, сложившимся уровнем платежеспособности.

Задача оптимизации основных параметров текущей деятельности может быть представлена следующей общей постановкой:

$$\min F(x) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i x_i;$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \geq q; \\ w = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq \alpha; \\ p_i^{'} \leq \rho_i x_i \leq p_i^{''}; \end{cases}$$

где $F(x)$ – целевая функция задачи;

x_i – независимые искомые переменные по направлениям реорганизационной политики (вектор управления структурой имущества: искомая величина продаж одного вида средств, приобретения другого, погашения долгов);

δ_i – экспертная оценка приоритетности i-го направления реорганизации;

w – константа обеспечения текущей ликвидности (w=2КЗ – ОА; КЗ – краткосрочная задолженность, ОА – оборотные активы);

a_i – коэффициенты при неизвестных переменных в ограничении на обеспеченность собственными оборотными средствами;

q – минимально-допустимый уровень обеспеченности собственными оборотными средствами (q = ВА + 0,1ОА – КР; ВА – внеоборотные активы, КР – капитал и резервы);

a – верхний предел допустимых продаж и приобретений активов;

$p_i^{'}, p_i^{''}$ – соответственно нижняя и верхняя границы возможного изменения i-го вида активов;

ρ_i – удельный вес i-го вида активов предприятия в общей стоимости его имущества.

В частности, применительно к типичной неудовлетворительной структуре баланса Ктл < 2, Косс ≥ 0,1, характерной для большинства неплатежеспособных предприятий, ищем такие x_1 – объем продаж части активов, x_2 – размер погашения кредиторской задолженности, чтобы выполнилось условие Ктл = 2 при сохранении Косс ≥ 0,1. Тогда модель приобретает вид:

Ктл = (ОА + $x_1 - x_2$)/(КЗ – x_2) = 2, откуда $x_1 + x_2$ = 2КЗ – ОА;

Косс = (КР – ВА + x_1)/(ОА + $x_1 - x_2$) ≥ 0,1, откуда

0,9 x_1 + 0,1 x_2 ≥ ВА +0,1ОА – КР;

$x_2 - x_1 \le \alpha\cdot$ОА;

$x_1 \le \beta\cdot$ВА;

$x_2 \le \gamma\cdot$КЗ,

где α, β, γ – предельно допустимые для сохранения статуса деятельности предприятия размеры уменьшения соответственно оборотных активов (например, до 20%), внеоборотных активов (10%), краткосрочной задолженности (50%).

Целевая функция

$$\min(\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2),$$

где δ_1, δ_2 – экспертные оценки значимости продажи имущества и погашения наиболее срочных обязательств.

Приведенная выше задача может быть решена методами линейного программирования, которые будут рассмотрены в теме 2.2. Однако встречаются математические модели, которые решить аналитически невозможно. Для их решения существуют специальные методы численного решения. Особенностью таких методов является наличие погрешности в результатах. Погрешность в результатах определяется неточностью модели, т.е. ошибочностью или недостаточностью положений, лежащих в основе построенной модели, и погрешностью математических методов, с помощью которых проводился анализ изучаемой модели.

Представленные ниже в темах 2.2 – 2.10 модели и методы в основном ориентированны на те задачи, которые попадают в сферу исследования операций в управленческой и экономической деятельности и могут быть полностью или частично использованы при их математическом моделировании.

Тесты

1. Что является объектом и языком исследования в экономико-математическом моделировании:

   а) различные типы производственного оборудования и методы его конструирования;

   б) экономические процессы и специальные математические методы;

   в) компьютерные программы и языки программирования.

2. Какое из утверждений верно:

   а) экономико-математическая модель – это образ реального объекта в материальной или идеальной форме, отражающей существенные свойства моделируемого объекта и замещающий его в ходе исследования;

   б) экономико-математическая модель – это математическое описание экономического процесса, произведенное в целях его исследования;

   в) экономико-математическая модель – это математическое описание экономического процесса, необходимое для доказательства гипотез экономической теории.

3. В основе классификации экономико-математических моделей по содержательной проблеме лежит:

   а) объект моделирования;

   б) цель моделирования;

   в) специальный программный комплекс.

4. Методологическое и методическое обоснование модели предполагает:

   а) формализацию экономической проблемы;

   б) изучение особенностей объекта моделирования и их отражение с помощью структуры разрабатываемой модели;

   в) экспериментальные расчеты.

5. Что понимается под термином “исследование операций”?

   а) применение математических методов для обоснования решений;

   б) применение количественных методов для обоснования решений во всех областях целенаправленной человеческой деятельности, в том числе и в экономике;

   в) применение математических методов для исследования бухгалтерских операций;

   г) содержимое а и б пунктов;

   д) содержимое а, б и в пунктов.

6. Когда впервые появился термин “исследование операций”?

   а) в годы второй мировой войны;

   б) в 50-ые годы;

в) в 60-ые годы;
г) в 70-ые годы;
д) в 90-ые годы.

7. Назовите примеры отраслей производственной сферы, в которых легко просматриваются характерные особенности задач исследования операций в экономике?
   а) постройка участка магистрали;
   б) продажа сезонных товаров;
   в) снегозащита дорог;
   г) выборочный контроль продукции;
   д) все вышеназванное.
8. Какие решения называются оптимальными?
   а) решения, по тем или иным признакам предпочтительные перед другими;
   б) рациональные решения;
   в) все согласованные решения;
   г) все утвержденные решения;
   д) все вышеназванные.
9. В чем заключается цель исследования операций?
   а) предварительное количественное обоснование оптимальных решений;
   б) указать одно-единственное строго оптимальное решение;
   в) выделить область практически равноценных оптимальных решений, в пределах которой может быть сделан окончательный выбор;
   г) содержимое пунктов а, б, в;
   д) только содержимое пунктов а, б.
10. Что необходимо для того, чтобы сравнить между собой по эффективности разные решения?
    а) нужно иметь какой-то количественный критерий, так называемый показатель эффективности;
    б) нужно иметь целевую функцию;
    в) показатель, отражающий целевую направленность операции;
    г) содержимое пунктов а, б, в;
    д) содержимое пунктов а, б.

Ответы к тестам

1) б	6) г
2) б	7) б
3) а	8) а
4) б	9) г
5) в	10) г

Контрольные вопросы

1. Привести классификацию экономических моделей.
2. Сущность и значимость экономико-математического моделирования.
3. Этапы экономико-математического моделирования.
4. Основные экономические институты и их характеристики.
5. Область применения экономико-математических моделей.
6. Экономическая значимость каждого этапа моделирования.
7. Сущность критерия практики.
8. Обязательные элементы математической модели.

2.1.5. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Рекомендуемые темы рефератов

1. Классификация экономических моделей.
2. Сущность и значимость экономико-математического моделирования.
3. Этапы экономико-математического моделирования.
4. Основные экономические институты и их характеристики.
5. Область применения экономико-математических моделей.

Литература для самостоятельной работы

1. Волкова В.Н., Денисов А.А. Теория систем: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2006. –511 с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
3. Волкова В.Н., Денисов А.А. Теория систем: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2006. –511 с.
4. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
5. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
6. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.

ТЕМА 2.2. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.2.1. Моделирование задачи оптимизации производства методами линейного программирования.

Линейное программирование является одним из методов решения общих задач оптимизации, в которых учитывается большое число переменных, подчиненных определенным ограничениям. При решении этих задач необходимо получить оптимальное значение определенного критерия эффективности (функции цели), например прибылей, затрат, количества произведенных продуктов или других показателей, при условии, что удовлетворяются поставленные ограничения. Эти ограничения в свою очередь носят различный характер и объясняются условиями производства, управления, сбыта, хранения, наличием сырья или законодательными положениями.

Линейное программирование можно использовать для решения задач оптимизации, в которых выполняются следующие условия:

1. Необходимо наличие линейной функции цели, оптимальное значение которой необходимо отыскать. Требование линейности существенно для применения методов, изложенных в этой и следующей теме. Линейность означает, например, что для изготовления 10 изделий потребуется в10 раз больше средств, чем для получения одного изделия, или для получения 5 изделий уйдет в 5 раз больше времени, чем на изготовление одного изделия, и т.д. Если же такое допущение пропорциональной зависимости неверно или нельзя получить линейную функцию за счет преобразования переменных, то методы линейного программирования неприменимы.

2. Ограничения также должны быть заданы в виде системы линейных равенств или неравенств.

Если задача поставлена правильно, то можно использовать методы линейного программирования для ее решения.

Рассмотрим следующую производственную задачу:

Необходимо произвести два вида продукции в объемах x_1 и x_2, используя три ресурса, которые имеются в количестве b_1, b_2, b_3,

соответственно. Известны нормативы потребления ресурсов на производство единицы первого и второго вида продукции:
a_{11}-количество первого ресурса, необходимого для производства единицы первого вида продукции;
a_{12}-количество первого ресурса, необходимого для производства единицы второго вида продукции;
a_{21}-количество второго ресурса, необходимого для производства единицы первого вида продукции;
a_{22}-количество второго ресурса, необходимого для производства единицы второго вида продукции;
a_{31}-количество третьего ресурса, необходимого для производства единицы первого вида продукции;
a_{32}-количество третьего ресурса, необходимого для производства единицы второго вида продукции.

Пусть c_1 и c_2 – прибыль от реализации единицы первого и второго вида продукции. Это постоянные факторы данной задачи.

Пример 2.2.1. Придадим постоянным факторам конкретные числовые значения и сведем их в табл.2.2.1.

Таблица 2.2.1.

	Изделие 1 (x_1)	Изделие 2 (x_2)	Наличие
Ресурс 1	$a_{11} = 2$	$a_{12} = 1$	$b_1 = 12$
Ресурс 2	$a_{21} = 2$	$a_{22} = 3$	$b_2 = 18$
Ресурс 3	$a_{31} = 1$	$a_{32} = 3$	$b_3 = 15$
Прибыль	$c_1 = 5$	$c_2 = 6$	

Производственная задача формулируется следующим образом:

Найти такие объемы производства продукции x_1 и x_2, при которых потребление ресурсов в соответствии с нормативами не превышало бы их наличия, и при этом прибыль от реализации продукции была бы максимальна.

Предполагая, что количество потребляемых ресурсов, а также прибыль пропорциональны объемам производства, получаем следующую математическую модель задачи:

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{I}) & 2x_1 + 1x_2 \le 12 \\ (\mathrm{II}) & 2x_1 + 3x_2 \le 18 \\ (\mathrm{III}) & 1x_1 + 3x_2 \le 15 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \\ & F=5x_1 + 6x_2 \to \max. \end{array} \qquad (2.2.1.)$$

Система неравенств (2.2.1) отражает ограничения на потребляемые ресурсы, а целевая функция F определяет прибыль, которую необходимо максимизировать. Пару чисел x_1 и x_2, удовлетворяющих системе ограничений (2.2.1), будем называть допустимым планом, а допустимый план, дающий максимальное значение целевой функции F – оптимальным планом (решением).

2.2.2. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

Каждой паре чисел x_1 и x_2 поставим в соответствие точку плоскости (2-мерного пространства) с координатами x_1 и x_2, тогда каждое ограничение (2.2.1) задает полупространство, а вся система (2.2.1) определяет многоугольник (в n-мерном пространстве – многогранник), полученный в результате их пересечения. В общем случае многогранник может быть неограниченным или пустым (система неравенств противоречива).

В примере 2.2.1 множество допустимых планов соответствует на плоскости множеству точек многоугольника OABCD(рис 2.2.1.).

Целевая функция $F=5x_1 + 6x_2$ определяет на плоскости семейство прямых линий (в n-мерном пространстве – плоскостей), параллельных друг другу, причем, чем дальше прямая от точки O, тем большее значение принимает целевая функция. Таким образом, оптимальное решение будет в точке многоугольника OABCD, где целевая функция касается этого многоугольника при удалении от точки O.

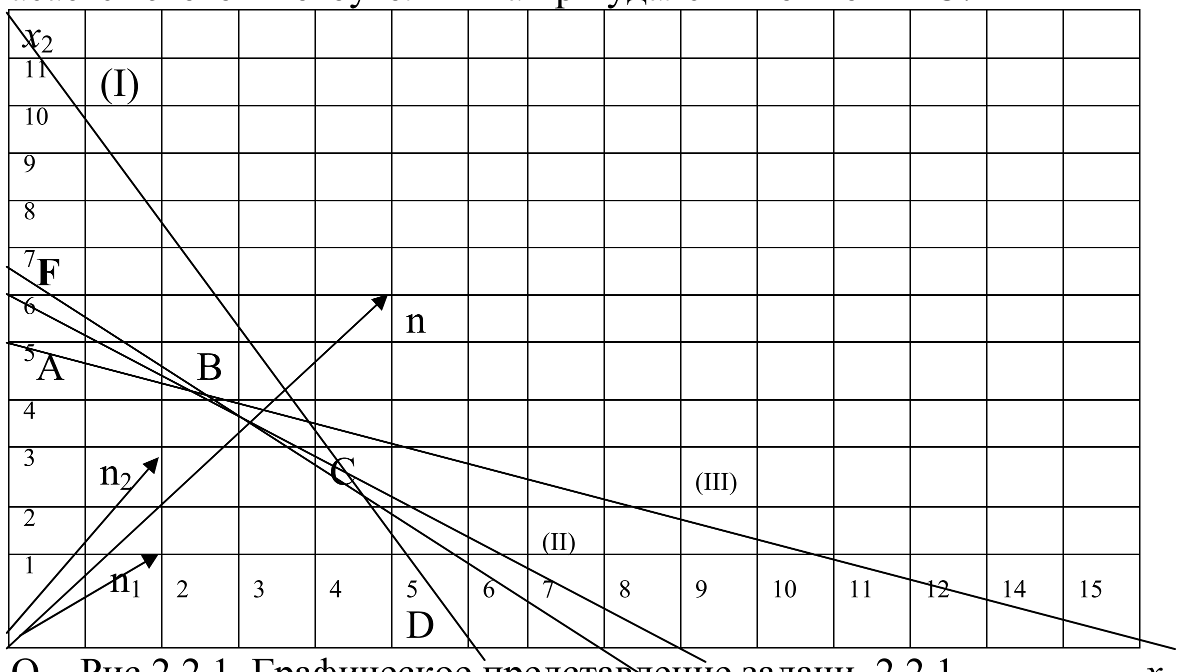


Рис.2.2.1. Графическое представление задачи 2.2.1.

В нашем примере это будет вершина многоугольника C с координатами (примерно) x_1=4.5; x_2=3. Для точного определения координат точки C рассмотрим уравнения прямых, пересечение которых ее образовало.

Получаем систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 = 18, \end{cases}$$

решив которую получим точные значения x_1=4.5; x_2=3.

Метод решения системы линейных уравнений может быть использован любой, однако, в целях сокращения объема вычислений при дальнейшем изложении предлагается метод Крамера.

Напомним кратко его суть:

Для решения системы

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2, \end{cases}$$

вычисляем $\Delta = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$,

$$\Delta 1 = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$\Delta 2 = a_{11} b_2 - b_1 a_{21},$$

и затем $x_1 = \Delta 1 / \Delta$; $x_2 = \Delta 2 / \Delta$.

В нашем примере: $\Delta = 2\times3 - 1\times2 = 4$,

$$\Delta 1 = 12\times3 - 1\times18 = 18,$$

$$\Delta 2 = 2\times18 - 12\times2 = 12,$$

откуда $x_1 = 18/4 = 4.5$, $x_2 = 12/4 = 3$ (совпало с первоначальным приближением).

Вычислим значение целевой функции в точке C:

$$F = 5 \times 4.5 + 6 \times 3 = 40.5.$$

Таким образом мы решили поставленную задачу, нашли объемы производства x_1 первого и x_2 второго вида продукции, удовлетворяющие ограничениям (2.2.1) и доставляющие максимальное значение целевой функции F = 40.5 усл.ед.

Пример 2.2.2. Рассмотрим еще одну задачу (ее часто называют задачей о диете, хотя аналогичной математической моделью можно описывать задачи, ничего общего с диетой не имеющие).

Таблица 2.2.2

Виды кормов	Содержание в 1 кг			Себестоимость 1 кг (усл. ед).
	Кормовых ед.	Белок (г)	Кальций (г)	
Сено (x_1)	0.5	50	10	1.5
Концентраты (x_2)	1	200	2	2.5
Норматив	20	2000	100	

Под нормативом понимается необходимый минимум питательных веществ суточного рациона. В этой задаче необходимо найти такие объемы кормов x_1, x_2 , чтобы обеспечить содержание в них кормовых единиц, белка и кальция не менее нормативного при минимальной стоимости. Опять же предполагая, что количество полезных веществ, а также стоимость пропорциональны объемам кормов, получаем следующую математическую модель задачи:

$$\begin{aligned} &(I) && 0.5\,x_1 + 1x_2 \ \geq\ 20 \\ &(II) && 50\,x_1 + 200\,x_2 \ \geq\ 2000 \\ &(III) && 10\,x_1 + 2\,x_2 \ \geq\ 100 \\ & && x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \\ & && F=1.5\,x_1 + 2.5\,x_2 \rightarrow \min. \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

Геометрическую интерпретацию данной задачи приведем на рис.2.2.2.

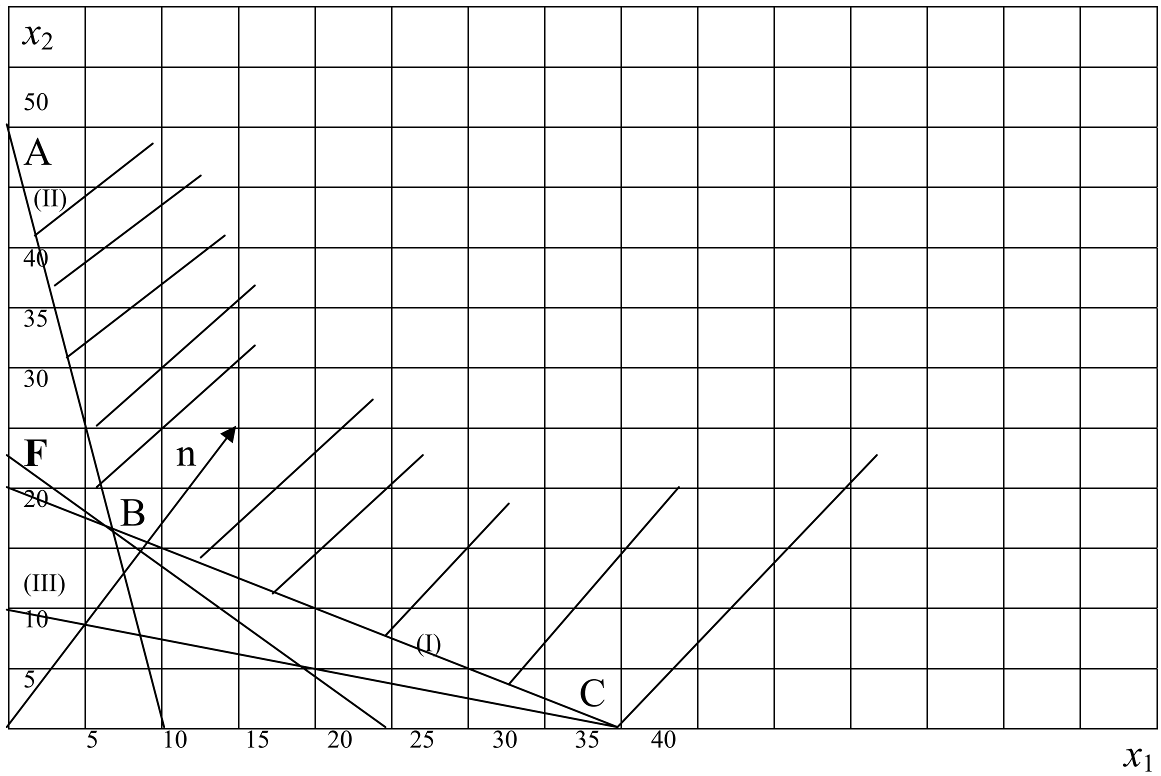


Рис.2.2.2. Графическое представление задачи 2.2.2

В данном случае множество допустимых планов представляет собой неограниченный многоугольник, заштрихованный на рис.2.2.2.

Целевая функция принимает наименьшее значение в точке B.

Визуально на графике координаты этой точки $x_1 \cong 7$, $x_2 \cong 17$.

Сделаем аналитическую проверку:

$\Delta=0.5\times2 - 1\times10 = -9,$

$\Delta1 = 20\times2 - 1\times100 = -60,$

$\Delta2 = 0.5\times100 - 20\times10 = -150.$

Откуда $x_1 = -60 / -9 = 6.67$, $x_2 = -150 / -9 = 16.67$.

2.2.3. Общая задача линейного программирования.

Мы рассмотрели сейчас предельно упрощенные примеры, преследуя исключительно иллюстративные цели, однако их анализ позволит осмыслить общие идеи и математические методы, лежащие в основе решения подобных задач.

В обоих примерах множество допустимых планов определяется точками выпуклого многогранника, полученного в результате пересечения полупространств, заданных линейными неравенствами (2.2.1) и (2.2.2). Линейная целевая функция при двух переменных задает на плоскости семейство параллельных прямых, при трех переменных – семейство параллельных плоскостей в трехмерном пространстве, а в случае n переменных – семейство параллельных (n-1)–мерных пространств (гиперплоскостей) в n-мерном пространстве.

Линейные ограничения и линейная целевая функция появились в наших примерах благодаря предположению о пропорциональной зависимости переменных и постоянных факторов.

В силу этого подобный класс задач называют задачами линейного программирования.

Геометрически решение задачи линейного программирования сводится к следующим этапам:

а) определение области допустимых планов, т.е. построение соответствующего ограничениям многогранника;

б) перемещение гиперплоскости целевой функции в пространстве параллельно самой себе до тех пор, пока она не будет максимально (минимально) удалена от начала координат и при этом будет иметь хотя бы одну общую точку с многогранником допустимых планов.

Этой точкой, как мы видели, будет вершина многогранника, хотя может быть грань или ребро в случае параллельности гиперплоскости целевой функции какой-либо грани или ребру многогранника.

Координаты этой вершины и будут определять оптимальное решение. Если целевая гиперплоскость касается грани или ребра, то в этом случае получается множество оптимальных планов, имеющих одно и тоже максимальное (либо минимальное) значение целевой функции.

Из анализа решения примеров делаем важный вывод:
оптимальному плану соответствует точка в области допустимых планов (возможно неединственная), являющаяся вершиной многогранника допустимых планов. На этом основана идея метода решения задачи линейного программирования, заключающаяся в том, что для нахождения оптимального плана достаточно просматривать лишь вершины многогранника допустимых планов.

Решение (план), которому соответствует вершина многогранника, называется базисным. Для нахождения базисного плана необходимо решить систему из n линейных уравнений с n неизвестными.

Разработанный в 1949г. Дж. Данцигом симплекс-метод основан на последовательном переходе от одной вершины многогранника допустимых планов к соседней, в которой линейная целевая функция принимает лучшее (не худшее) значение до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение.

Рассмотренные выше примеры позволяют сформулировать общую задачу линейного программирования.

Дана система m линейных неравенств с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{cases} \qquad (2.2.3)$$

и линейная функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n\,. \qquad (2.2.4)$$

Необходимо найти такое решение системы $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где

$$x_j \geq 0\ (j=1,2,\ldots n), \qquad (2.2.5)$$

при котором линейная функция F (2.2.4) принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

Система (2.2.3) называется системой ограничений, а функция F – целевой функцией, критерием или функцией цели.

Более кратко общую задачу линейного программирования можно представить в виде:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i\ (i=1,2,\ldots,m),$$

$$x_j \geq 0\ (j=1,2,\ldots n).$$

Оптимальным решением (или оптимальным планом) задачи линейного программирования называется решение системы ограничений (2.2.3), удовлетворяющее условию (2.2.5), при котором линейная функция (2.2.4) принимает оптимальное (максимальное или минимальное) значение.

В рассматриваемой задаче все неравенства вида “ ≤ “, хотя могут быть и вида “≥“, каждое такое неравенство, как мы видели на примерах, определяет полупространство в n-мерном пространстве.

Постоянные коэффициенты a_{ij} являются, как правило, нормами расхода i-го ресурса на производство единицы j-го изделия (продукта). Коэффициенты b_i задают предельные объемы использования i-го ресурса. Коэффициенты c_j определяют удельную прибыль (или затраты) от производства единицы j-го изделия (продукта).

Если мы какую-либо производственную задачу смоделировали в виде задачи линейного программирования, то в ходе ее решения можно получить следующие результаты:

1. Ограничения могут оказаться несовместными, и задача не имеет решения.
2. Целевая функция не ограничена в области допустимых планов, ее максимум (или минимум) $\rightarrow +\infty$ ($-\infty$).
3. Оптимальное решение единственное (целевая функция касается области допустимых планов в единственной вершине, ее координаты и определяют оптимальный план).
4. Существует некоторое множество оптимальных решений (планов).

Если задача экономически поставлена правильно, то 1-й и 2-ой случаи исключаются.

2.2.4. Устойчивость оптимального решения.

Рассмотрим теперь понятие устойчивости оптимального решения.

В первом примере (см. рис 2.2.1.) оптимальное решение находится в точке С, которая является пересечением двух прямых, заданных уравнениями

$$2\,x_1 + 1\,x_2 = 12, \quad \text{(I)}$$
$$2\,x_1 + 3\,x_2 = 18. \quad \text{(II)}$$

Целевая функция $F=5\,x_1 + 6\,x_2$ (здесь $c_1=5$, $c_2=6$) максимальное значение приняла в точке С. После составления плана и его реализации в конкретной производственной программе c_1 и c_2 (удельная прибыль или затраты) могут изменяться. Зададимся следующим вопросом: при каком соотношении коэффициентов целевой функции c_1 и c_2 оптимальное решение сохранится (устоит) в точке С?

Из курса высшей математики (раздел аналитической геометрии) нам известно, что коэффициенты, стоящие перед переменными x_1 и x_2 в уравнении прямой суть координаты вектора, перпендикулярного данной прямой (т.н. нормаль). На рис.2.2.1 нормаль к целевой функции обозначена $\boldsymbol{n}$, нормаль к ограничению (I) $\boldsymbol{n}_1$ и нормаль к ограничению (II) $\boldsymbol{n}_2$.

Чтобы оптимальное решение сохранялось в точке С при изменяющихся коэффициентах c_1 и c_2 необходимо, чтобы вектор нормали $\boldsymbol{n}$ лежал между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Для этого необходимо, чтобы тангенс угла между вектором $\boldsymbol{n}$ и осью x_1 (обозначим через tg($\boldsymbol{n}$, x_1)) был больше tg($\boldsymbol{n}_1$, x_1), но меньше tg($\boldsymbol{n}_2$, x_1). Таким образом, для обеспечения устойчивости оптимального решения в точке C необходимо выполнение условия:

$$\mathrm{tg}(\boldsymbol{n}_1, x_1) \le \mathrm{tg}(\boldsymbol{n}, x_1) \le \mathrm{tg}(\boldsymbol{n}_2, x_1).$$

Так как $\mathrm{tg}(\boldsymbol{n}, x_1) = c_2/\, c_1$,

$$\mathrm{tg}(\boldsymbol{n}_1, x_1) = a12\, /a11 = 1/2,$$

$$\mathrm{tg}(\boldsymbol{n}_2, x_1) = a22\, /a21 = 3/2,$$

окончательно получаем для примера 2.2.1 соотношение устойчивости оптимального решения в виде:

$$1/2 \le c_2/\, c_1 \le 3/2.$$

В случае n переменных получаем много соотношений аналогичного вида между всеми c_k и c_j ($k \neq j$) показывающих, при каких условиях изменение коэффициентов целевой функции не повлечет изменение оптимального решения.

Подставляя вместо c_1 и c_2 их значения получим проверочные соотношения

$$1/2 \le 6\,/5 \le 3/2.$$

Для второй задачи соотношение устойчивости оптимального решения будет иметь вид:

$$2/10 \le c_2/\, c_1 \le 1/0.5,$$

а проверочное соотношение

$$2/10 \le 2.5\,/1.5 \le 1/0.5.$$

2.2.5. Обьективно-обусловленные оценки.

Рассмотрим опять пример 2.2.1.

Оптимальное решение было найдено в точке C с координатами x_1=4.5; x_2=3. Существенными оказались ограничения (I) и (II), они в точке оптимального плана обращаются в равенство:

$$2\times4.5 + 1\times3 = 12,$$

$$2\times4.5 + 3\times3 = 18,$$

т.е. эти ресурсы используются полностью, тогда как третий ресурс (несущественное ограничение (III)) оказывается в избытке:

$$1\times4.5 + 3\times3 < 15$$

(избыток составляет $15 - (1\times4.5 + 3\times3) = 1.5$).

Попробуем теперь ответить на следующий вопрос:
На сколько изменится значение целевой функции (в данном примере увеличится прибыль), если ограничение увеличить на одну единицу?

Или, другими словами, какова ценность для нашей задачи каждого ресурса? Для третьего ресурса (который и так в избытке) ответ очевиден – значение целевой функции не изменится (F = 40.5). Посчитаем эти изменения целевой функции для ограничений (I) и (II), для чего решим две системы (используя также метод Крамера).

Увеличим сначала на одну единицу количество первого ресурса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 12+1, & \text{(I)} \\ 2x_1 + 3x_2 = 18. & \text{(II)} \end{cases}$$

Δ не изменилось ($\Delta=2\times3 - 1\times2 = 4$), тогда как

$\Delta1 = (12 +1) \times3 - 1\times18 = 18 + 3 = 21$,

$\Delta2 = 2 \times18 - (12 + 1) \times2 = 12 -2 =10$,

откуда координаты новой точки будут $x_1 = 21/4 =5.25$, $x_2 =10/4 = 2.5$.

Вычислим значение целевой функции в этой новой точке:

$$F_1 = 5 \times 5.25 + 6 \times2.5 = 41.25,$$

откуда $y_1 = F_1 - F = 41.25 - 40.5 = 0.75$.

Аналогично, увеличивая на одну единицу количество второго ресурса, решаем систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + 1x_2 = 12, \\ 2x_1 + 3x_2 = 18 + 1. \end{cases}$$

$\Delta1 = 12\times3 - 1\times (18 + 1) = 18 - 1 = 17$,

$\Delta2 = 2 \times (18 + 1) - 12 \times2 = 12 + 2 =14$,

откуда $x_1 = 17 / 4 = 4.25$, $x_2 = 14 / 4 = 3.5$

Вычислим значение целевой функции в этой новой точке:

$$F_2 = 5 \times 4.25 + 6 \times3.5 = 42.25,$$

откуда $y_2 = F_2 - F = 42.25 - 40.5 = 1.75$.

Таким образом, мы нашли объективно обусловленные оценки всех ресурсов (ограничений): у существенных ограничений y_1=0.75, y_2= 1.75, у третьего несущественного ограничения y_3= 0.

2.2.6. Двойственная задача линейного программирования.

В 2.2.2 мы рассматривали общую задачу линейного программирования. Рассмотрим теперь другую экономическую задачу на том же предприятии с теми же исходными данными.

Необходимо определить такие цены

$$(y_1 \geq 0, y_2 \geq 0,\ldots, y_m \geq 0) \qquad (2.2.6)$$

всех ресурсов, чтобы сумма потраченных средств на их приобретение была бы минимальна, т.е.

$$Z = b_1 y_1 + b_2 y_2 +\ldots+ b_m y_m \rightarrow \min. \qquad (2.2.7)$$

С другой стороны, предприятию будет выгодно продать ресурсы в случае, если выручка от их продажи будет не менее той суммы, которую предприятие может получить при изготовлении продукции из этих ресурсов. Т.к., на производство единицы продукции j расходуется a_{1j} единиц ресурса 1, a_{2j} единиц ресурса 2,…, a_{mj} единиц ресурса m, то для обеспечения выгодности продажи ресурсов необходимо выполнение следующих неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}\,y_1 + a_{21}\,y_2 + \ldots + a_{m1}\,y_m \ \geq \ c_1, \\ a_{12}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + \ldots + a_{m2}\,y_m \geq \ c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}\,y_1 + a_{2n}\,y_2 + \ldots + a_{mn}\,y_m \geq \ c_n, \end{cases} \qquad (2.2.8)$$

Полученная экономико-математическая модель называется двойственной или сопряженной по отношению к исходной.

Цены ресурсов y_1, y_2,…, y_m получили различные названия: учетные, неявные, теневые. В отличие от «внешних» цен c_1, c_2 ,…, c_n на продукцию, известных, как правило, до начала производства, цены ресурсов y_1, y_2,…, y_m являются внутренними, ибо они определяются непосредственно в результате решения задачи, поэтому их чаще называют *объективно обусловленными оценками* ресурсов (Л.В.Канторович).

Построим двойственную задачу для примера 2.2.1:

$$Z = 12\,y_1 + 18\,y_2 + 15\,y_3 \rightarrow \min. \qquad (2.2.9)$$

$$\begin{cases} 2\,y_1 + 2\,y_2 + \ \ y_3 \geq 5, \\ \ y_1 + 3\,y_2 + 3\,y_3 \ \geq 6, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y3 \geq 0. \end{cases} \qquad (2.2.10)$$

Из алгебраических соображений легко показать, что $F \leq Z$, откуда max$F$=min$Z$, если они существуют (основная теорема двойственности).

В нашем примере 2.2.1 max$F$ = min$Z$ = 40.5, и объективно обусловленные оценки y_1= 0.75, y_2 = 1.75, y_3 = 0, вычисленные простым счетом в 2.2.5, являются решением двойственной задачи (2.2.9)-(2.2.10).

Действительно, 12×0.75 + 18×1.75 + 15×0 = 40.5.

Из выражения (2.2.9) видно, что если увеличить в условии задачи какое-либо ресурсное ограничение b_{i} на единицу, то Z (и следовательно F) также увеличится ровно на y_i.

Однако прямая и двойственная ей задача линейного программирования имеют и экономическое истолкование. Так, в задачах на распределение ограниченных ресурсов в производстве оптимальный план можно получить, либо минимизируя издержки для заданной программы, либо максимизируя выпуск при заданной общей сумме издержек. Двойственными аспектами одной и той же задачи являются распределение ресурсов и оценка их. Если для ресурсов не существует рыночных цен, то необходимо их создать, ввести систему условных или расчетных цен.

Рассмотрим теперь пример 2.2.2 и построим для него двойственную задачу. Напомним, что в этом примере из сена и концентратов необходимо составить суточный рацион питания, калорийность которого 20 кормовых единиц, содержание белка 2000 гр., а кальция 100 грамм. Цена сена 1.5, а концентратов 2.5 усл.единиц за 1 кг. Пусть y_1, y_2, y_3 - наша оценка (за единицу) полезности каждого из этих показателей. Тогда общая (условная) оценка рациона питания:

$$Z = 20\, y_1 + 2000\, y_2 + 100\, y_3.$$

Мы будем стремиться максимизировать Z. Если 1 кг. сена содержит 0.5 кормовых единиц, 50г белка и 10 г кальция, то оценка его питательного содержания, т.е. $0.5\, y_1 + 50\, y_2 + 10\, y_3$, не может превышать его рыночной цены (1.5). Аналогично этому для концентратов оценка питательных веществ, равная $y_1 + 200y_2 + 2y_3$, не может превышать 2.5. Следовательно, двойственную задачу можно сформулировать таким образом:

Найти такие оценки питательных веществ, чтобы

$$Z = 20\, y_1 + 2000\, y_2 + 100\, y_3 \rightarrow \max \qquad (2.2.11)$$

при условии

$$\begin{cases} 0.5\, y_1 + 50\, y_2 + 10\, y_3 \le 1.5, \\ y_1 + 200\, y_2 + 2\, y_3 \le 2.5, \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, y_3 \ge 0. \end{cases} \qquad (2.2.12)$$

Мы получили двойственную задачу к примеру 2.2.2, в котором требовалось найти минимальную стоимость входящих в рацион продуктов питания при заданных рыночных ценах на эти продукты и при соблюдении ограничений в отношении потребности в питательных веществах. После введения условных оценок показателей питательности возникает двойственная задача (2.2.11) – (2.2.12), где требуется максимизировать условную оценку рациона питания при соблюдении ограничений, согласно которым расходы в расчете за единицу продукта не могут превышать его заданной рыночной цены. Цель первой, прямой задачи заключается в том, чтобы закупаемые продукты были возможно более дешевыми, удовлетворяя вместе с тем требованиям в отношении питательной ценности, а цель сопряженной двойственной задачи – в том, чтобы при заданных рыночных ценах на продукты получить рацион наиболее высокопитательный.

Имея краткую запись общей задачи линейного программирования в виде:

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i=1,2,\ldots, m),$$

$$x_j \geq 0 \ (j=1,2,\ldots n).$$

можно так же кратко записать двойственную к ней задачу:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \rightarrow \min$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ (j=1,2,\ldots, n),$$

$$y_i \geq 0 \ (i=1,2,\ldots, m).$$

Пример 2.2.3. Дана исходная задача:

максимизировать линейную функцию $F = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \rightarrow \max$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 + 3 \cdot x_2 &\leq 18, \\ 2 \cdot x_1 + x_2 &\leq 16, \\ x_2 &\leq 5, \\ 3 \cdot x_1 &\leq 21, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Требуется составить задачу, двойственную к исходной задаче.

Решение.

Сформулируем двойственную задачу:

$$Z = 18 \cdot y_1 + 16 \cdot y_2 + 5 \cdot y_3 + 21 \cdot y_4 \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_4 &\geq 2, \\ 3 \cdot y_1 + y_2 + y_3 &\geq 3, \\ y_i \geq 0, \quad i &= \overline{1, 4}. \end{aligned}$$

2.2.7. Применение основной задачи линейного программирования к решению некоторых экономических задач

Линейное программирование возникло из практических потребностей, поэтому оно находит применение при решении широкого класса различных практических, в частности, экономических задач. Рассмотрим постановку и решение некоторых из них.

1. Задача использования ресурсов.

Предприятие имеет m видов ресурсов, количество которых соответственно равно b_i, (i = 1,…,m) единиц, из которых производится n видов продукции. Предприятие может обеспечить выпуск продукции j-го вида в количестве не более d_j (j = 1,…,n) единиц. Для производства единицы j-й продукции необходимо a_{ij} единиц i-го ресурса. При реализации единицы j-й продукции прибыль составляет c_j единиц.

Необходимо составить план выпуска продукции, который обеспечивал бы получение максимальной прибыли при реализации всей выпущенной продукции.

Если обозначить через x_j (j=1,…,n) количество единиц j-й продукции, которое необходимо выпустить, то поставленная задача имеет следующую математическую модель.

Найти максимальное значение линейной функции $F = \sum_{j=1,n} (c_j \cdot x_j)$

при ограничениях $\sum_{j=1,n} (a_{ij} \cdot x_j) \le b_i$, i = 1,…, m (2.2.13)

$$0 \le x_j \le d_j, \quad j = 1,\dots, n$$

2. Задача оптимального использования удобрений.

Пусть для выращивания некоторой культуры применяется m видов удобрений, соответственно, в количестве b_i, (i = 1,…, m) единиц. Вся посевная площадь разбита из n почвенно-климатических зон, каждая по d_j, (j = 1,…,n) единиц. Пусть a_{ij} – количество i-го удобрения, вносимого на единицу площади j-й зоны, а c_j – повышение средней урожайности, получаемой с единицы площади j-й зоны. Составить такой план распределения удобрений между посевными зонами, который обеспечивал бы максимальный суммарный прирост урожайности культуры.

Обозначим через x_j (j = 1,…, n) площадь j-й зоны, которую необходимо удобрить; тогда математическая модель поставленной задачи имеет вид (2.2.13).

3. Задача составления диеты.

Дневная диета должна содержать m видов различных питательных веществ, соответственно, в ~~ко~~личестве не менее b_i (i = 1,…, m) единиц. Имеется n различных продуктов в количестве d_j (j=1,…, n) единиц.

Пусть a_{ij} – количество единиц i-го питательного вещества, содержащегося в единице j-го продукта; c_j – стоимость единицы j-го продукта.

Определить, какие продукты и в каком количестве необходимо включить в диету, чтобы она удовлетворяла минимальной дневной *потребности в каждом питательном веществе при наименьшей общей стоимости используемых продуктов.*

Обозначим через x_j ($j = 1,\ldots, n$) количество единиц j-го продукта в диете; тогда задача имеет следующую математическую модель.

Найти минимальное значение линейной функции $F = \sum_{j=1,n} (c_j \cdot x_j)$

при ограничениях $\sum_{j=1,n} (a_{ij} \cdot x_j) \geq b_i$, $i = 1,\ldots, m$ (2.2.14)

$$0 \leq x_j \leq d_j, \qquad j = 1,\ldots, n$$

К этому виду задач относятся также задачи составления дневного рациона, задачи на составление смесей, а также некоторые задачи планирования производства.

4. Задача об использовании мощностей (задача о загрузке оборудования)

Предприятию задан план производства m видов продукции по времени и номенклатуре: требуется за время T выпустить b_i ($i=1,\ldots,m$) единиц продукции каждого типа. Продукция производится на станках n типов. Для каждого станка известны производительность a_{ij} (то есть, количество продукции j-го вида, которое можно произвести на станке i-го типа) и затраты c_{ij} на изготовление продукции j-го вида на станке i-го типа в единицу времени.

Необходимо составить такой план работы станков (т.е. так распределить выпуск продукции между станками), чтобы затраты на производство всей продукции были минимальными.

Обозначим x_{ij} – время, в течение которого станок i-го типа будет занят изготовлением продукции j-го вида ($i = 1,\ldots, m$; $j = 1,\ldots, n$).

Затраты на производство всей продукции выразятся функцией $F = \sum_{j=1,n} \sum_{i=1,m} c_{ij} \cdot x_{ij}$, которую нужно минимизировать.

Для выполнения плана выпуска по номенклатуре необходимо, чтобы выполнялись следующие равенства: $\sum_{j=1,n} a_{ij} \cdot x_{ij} = b_i$ ($i=1,\ldots, n$).

Кроме того, $x_{ij} \geq 0$ ($i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots, n$).

Так как время работы каждого станка ограничено и не превышает T, то система ограничений может быть дополнена неравенствами:

$$\sum_{j=1,n} x_{ij} \leq T \quad (i = 1,\ldots, n).$$

5. Задача о раскрое материалов.

На раскрой (распил, обработку) поступает материал одного образца в количестве A единиц. Требуется изготовить из него m разных комплектующих изделий в количествах, пропорциональных числам b_i $(i = 1,\dots, m)$ – условие комплектности.

Каждая единица материала может быть раскроена n различными способами, причем использование j-го способа $(j = 1,\dots, n)$ дает a_{ij} единиц i-го изделия $(i = 1,\dots, m)$.

Необходимо найти план раскроя, обеспечивающее максимальное количество комплектов.

Обозначим x_j – число единиц материала, раскраиваемых j-ым способом,

x – число изготавливаемых комплектов изделий.

Так как общее количество материала равно сумме его единиц, раскраиваемых различными способами, то $\sum\limits_{j=1,n} x_j = A$.

Требование комплектности выразится уравнениями

$$\sum_{j=1,n} x_j \cdot a_{ij} = b_i \cdot x \quad (i = 1,\dots, m)$$

Кроме того $x_j \geq 0$ $(j = 1,\dots, n)$.

2.2.8. Практический блок

Пример

Составить математическую модель задачи линейного программирования и найти решение геометрическим способом.

1. По данным, приведенным в таблице 2.2.3 составить систему математических зависимостей (неравенств) и целевую функцию.
2. Изобразить геометрическую интерпретацию задачи и найти оптимальное решение.
3. Провести аналитическую проверку и определить значение целевой функции.
4. Определить избытки ресурсов.
5. Вычислить объективно обусловленные оценки.
6. Исследовать устойчивость решения.

Таблица 2.2.3 – Матрица удельных нормативов.

Продукция	Сырье			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
I. Изделие 1	2.4	8.0	6.2	50 (C_1)
II. Изделие 2	12.2	5.4	2.2	40 (C_2)
Наличие ресурсов	500	470	340	–

Решение:

1. Обозначим:

x_1 – объем изделия 1;

x_2 – объем изделия 2.

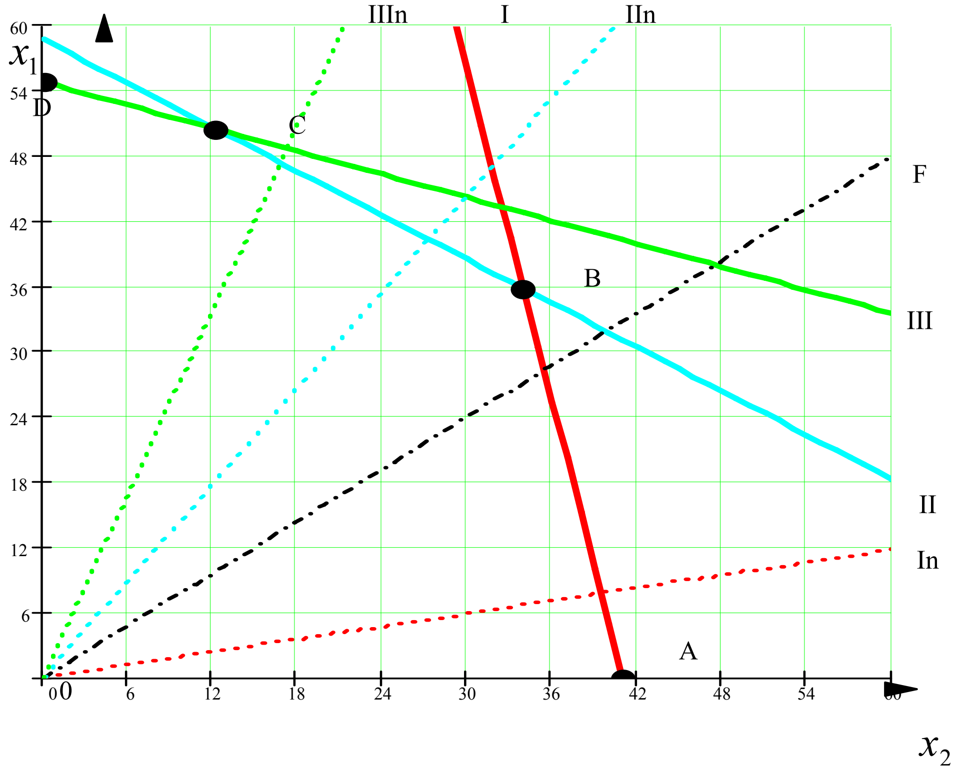
Опишем модель с помощью системы неравенств линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 > 0 \quad x_2 > 0\,; \\ 2.4 \cdot x_1 + 12.2 \cdot x_2 \le 500\,; \\ 8.0 \cdot x_1 + 5.4 \cdot x_2 \le 470\,; \\ 6.2 \cdot x_1 + 2.2 \cdot x_2 \le 340\,; \\ F = 50 \cdot x_1 + 40 \cdot x_2 \to \max \text{ – целевая функция (критерий оптимальности).} \end{cases}$$

2. Графическое решение системы и определение оптимальных объемов производства.

0ABCD – это допустимое решение системы неравенств, в пределах существующих ресурсов. Используя нормаль целевой функции, определим максимально-удаленную точку от начала координат. Это и будет решением системы неравенств. Как видно из рисунка 2.2.3, такая точка будет т.B.

Рисунок 2.2.3. Графическое решение системы линейных уравнений



Где:

I – первый ресурс;

In – нормаль первого ресурса из начала координат;

II – второй ресурс;

IIn – нормаль второго ресурса из начала координат;

III – третий ресурс;

IIIn – нормаль третьего ресурса из начала координат;

F – нормаль целевой функции.

Координаты т.B (x_1^* и x_2^*) будут пересечение прямых I и II.

3. Найдем решение системы неравенств:

$$\begin{cases} 2.4 \cdot x_1 + 12.2 \cdot x_2 = 500; \\ 8.0 \cdot x_1 + 5.4 \cdot x_2 = 470; \end{cases}$$

$x_1^* = 35.85; \quad x_2^* = 33.93;$

И рассчитаем максимальную прибыль: $F^*_{оптимальное} = 3149.57;$

4. Определим избытки ресурсов (скрытые резервы):

I ресурс: 0;

II ресурс: 0;

III ресурс: 43.10.

5. Объективно обусловленные оценки ресурсов

Объективно обусловленные оценки ресурсов (далее О.О.О.) показывают, на сколько изменится прибыль, если ресурс увеличить на единицу или сколько прибыли добавляет каждая единица ресурса.

О.О.О. 1-го ресурса.

Увеличим на единицу ограничение первого ресурса и определим оптимальный объем производства.

$$\begin{cases} 2.4 \cdot x_1 + 12.2 \cdot x_2 = 500 + 1; \\ 8.0 \cdot x_1 + 5.4 \cdot x_2 = 470; \end{cases}$$

Найдем решение системы неравенств:

$x_1' = 35.78;$

$x_2' = 34.03;$

Тогда максимальная прибыль при таких объемах производства будет:

$F_1^* = 3150.17;$

Рассчитаем О.О.О. первого ресурса:

$y_1 = F_1^* - F^*_{оптимальное} = 0.59;$

О.О.О. 2-го ресурса.

Увеличим на единицу ограничение второго ресурса и определим оптимальный объем производства.

$$\begin{cases} 2.4 \cdot x_1 + 12.2 \cdot x_2 = 500; \\ 8.0 \cdot x_1 + 5.4 \cdot x_2 = 470 + 1; \end{cases}$$

Найдем решение системы неравенств:

$x_1'' = 35.99;$

$x_2'' = 33{,}90;$

Тогда максимальная прибыль при таких объемах производства будет:

$F_2^* = 3155.65;$

Рассчитаем О.О.О. второго ресурса:

$y_2 = F_2^* - F^*_{оптимальное} = 6.07;$

О.О.О. 3-го ресурса.

О.О.О несущественного ресурса равна нулю, т.к. ресурс и так в избытке, т.е.:

$y_3 = 0;$

6. Устойчивость решения при изменении удельной прибыли.

В реальных условиях удельная прибыль от производства продукции C_1 и C_2 может меняться. Поэтому составим соотношение устойчивости, т.е. найдем пределы, до которых может отклоняться нормаль целевой функции, чтобы решение системы оставалось в точке В.. Руководствуясь правилом, что у больших углов больший тангенс, составим соотношение устойчивости:

$$\frac{2.4}{12.2} \le \frac{C_2}{C_1} \le \frac{8.0}{5.4}; \quad \frac{2.4}{12.2} \le \frac{40}{50} \le \frac{8.0}{5.4}; \quad 0.20 \le 0{,}80 \le 1.48.$$

Тесты

1. Какая задача является задачей линейного программирования:
   а) управления запасами;
   б) составление диеты;
   в) формирование календарного плана реализации проекта.
2. Тривиальными ограничениями задачи линейного программирования называются условия:
   а) ограниченности и монотонности целевой функции;
   б) не отрицательности всех переменных;
   в) не пустоты допустимого множества.
3. Если в задаче линейного программирования допустимое множество не пусто и целевая функция ограничена, то:
   а) допустимое множество не ограничено;
   б) оптимальное решение не существует;
   в) существует хотя бы одно оптимальное решение.
4. Линейное программирование – это раздел исследования операций, изучающий:
   а) методы нахождения экстремума линейной функции;
   б) методы нахождения экстремума линейной функции с линейными ограничениями;
   в) методы нахождения экстремума произвольной функции с линейными ограничениями.
5. Область допустимых решений задачи линейного программирования определяется:
   а) системой линейных неравенств и условиями неотрицательности переменных;
   б) системой уравнений общего вида и условиями неотрицательности переменных;
   в) системой линейных уравнений и условиями неотрицательности переменных.
6. Симплекс-метод решения задачи ЛП – это:
   а) метод целенаправленного перебора допустимых базисных решений в направлении оптимального значения целевой функции;
   б) метод последовательного перебора допустимых базисных решений задачи ЛП;
   в) метод нахождения допустимых базисных решений задачи ЛП.
7. Где довольно часто встречаются на практике задачи линейного программирования?

а) при решении проблем, связанных с распределением ресурсов;
б) при планировании производства;
в) при организации работы транспорта;
г) содержание п. а, б, в.
д) содержание п. а, б.

8. Объективно-обусловленные оценки ресурсов показывают:
   а) избытки несущественных ресурсов;
   б) на сколько увеличится прибыль, если ресурс увеличить на единицу;
   в) оптовую цену.
9. Соотношение устойчивости показывает:
   а) при каких диапазонах изменения коэффициентов целевой функции оптимальное решение сохранится;
   б) отношение коэффициентов целевой функции к оптимальным объемам производства;
   в) отношение коэффициентов целевой функции к нормативной потребности в ресурсах.
10. Какая задача не описывается моделью линейного программирования:
   а) управление запасами на складе;
   б) Задача использования ресурсов;
   в) Задача оптимального использования удобрений;
   г) Задача составления диеты;
   д) Задача о раскрое материалов.

Ответы к тестам

1) б	6) а
2) б	7) д
3) в	8) б
4) б	9) а
5) а	10) а

Контрольные вопросы

1. В задаче составления плана производства дать постановку экономической задачи.
2. Для задачи составления плана производства описать переменные и параметры задачи.
3. Для задачи составления плана производства описать основные экономические условия.
4. Для задачи составления плана производства сформулировать ограничения задачи.
5. Что принимается в качестве целевой функции в задаче составления плана производства?
6. Дать экономический смысл точного равенства в ограничении задачи составления плана производства.

7. Экономический смысл оптимального решения в задаче составления плана производства.
8. Экономический смысл строгого неравенства в ограничении задачи составления плана производства.
9. Для задачи составления плана производства записать двойственную задачу.
10. В двойственной задаче для задачи составления плана производства привести экономический смысл целевой функции.
11. В двойственной задаче для задачи составления плана производства привести экономический смысл ограничений.
12. В двойственной задаче для задачи составления плана производства привести экономический смысл переменных.
13. Проанализировать изменение целевой функции в линейной модели производства при изменении цен реализации продукции.
14. Проанализировать изменение целевой функции в линейной модели производства при изменении запаса дефицитного ресурса.
15. Проанализировать изменение целевой функции в линейной модели производства при изменении запаса недефицитного ресурса.
16. Привести экономический смысл связи целевых функций прямой и двойственной задач в линейной модели производства.
17. Указать отличие линейных экономических моделей от нелинейных.
18. Привести примеры задач линейного программирования.
19. Как поставить задачу линейного программирования?
20. Каковы особенности графического метода решения задачи линейного программирования: построение области допустимых значений, нахождение оптимальной точки или прямой.
21. Указать особенности двойственной задачи линейного программирования.

Задания и задачи

Задача 1. а) Построить математическую модель следующей экономической задачи, решить ее графическим методом.

б) Составить задачу двойственную к данной.

При откорме каждое животное ежедневно получает не менее 9 единиц питательного вещества А, не менее 8 единиц вещества В, не менее 12 единиц вещества С. Содержание количества единиц питательных веществ в 1 кг корма, приведены в таблице 2.2.4. Известно, что для составления рациона используются 2 вида корма. Необходимо составить дневной рацион нужной питательности, причем затраты на него должны быть минимальными.

Таблица 2.2.4

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ в 1кг корма	
	Корм 1	Корм 2
A	3	1
B	1	2
C	1	6
Стоимость 1 кг (в руб.)	4	6

Задача 2. Решите следующую задачу ЛП:

$F(\boldsymbol{x}) = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях

$x_1 + 2x_2 \le 4$

$x_1 + x_2 \le 3$

$2x_1 + x_2 \le 3$

$x_1, x_2 \ge 0$

Задача 3. а) Построить математическую модель следующей экономической задачи, решить ее графическим методом.

б) Составить задачу двойственную к данной.

Для изготовления двух видов продукции используется 3 вида сырья: А, В и С. Запасы сырья, количество единиц сырья, затрачиваемых на изготовление единиц продукции, приведены в таблице 2.2.5. Необходимо составить такой план выпуска продукции, чтобы при ее реализации получить максимальную прибыль.

Таблица 2.2.5

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущих на изготовление единицы продукции	
		Продукция 1	Продукция 2
A	20	2	5
B	30	8	5
C	40	5	6
Прибыль от продукции (у.е.)		50	40

Задача 4. Решите следующую задачу ЛП:

$F(\boldsymbol{x}) = x_1 - x_2 \rightarrow \max$ при ограничениях

$-2x_1 + x_2 \le 2$

$x_1 - 2x_2 \le 2$

$x_1 + x_2 \le 5$

$x_1, x_2 \ge 0.$

Задача 5. Фирма производит два вида продукции, используя для этого два вида ресурсов. Цены реализации – 120 д.е. и 90 д.е. Технологическая матрица задана в виде таблицы

ресурсы	продукция	
	1	2
№ 1	15	10
№ 2	6	20

Запас ресурсов – 3000 ед. ресурса № 1, 3600 ед. ресурса № 2. Требуется определить план производства, максимизирующий доход.

Записать математическую модель.

Найти наилучший план производства.

Найти максимальный доход.

Определить оценки стоимости ресурсов.

Задача 6. Составить экономико-математическую модель: Торговое предприятие реализует 4 группы товаров (A, B, C и D). Нормы затрат ресурсов на каждый тип товаров, лимиты ресурсов, а также доход на единицу каждой продукции заданы в таблице 2.2.6. Определить плановый объем продаж так, чтобы доход торгового предприятия был максимален.

Таблица 2.2.6

Виды ресурсов	Норма затрат ресурсов на 1 ед. товара				Лимит ресурсов
	A	B	C	D	
I	5	4	0	5	80
II	1	3	3	0	20
III	2	0,5	1	2	50
Доход на ед. прод., руб.	4	5	3	4	

Задача 7. Магазин продает два вида безалкогольных напитков: Кока–Колу и квас. Доход от одной банки колы составляет 5 центов, а от кваса – 7 центов. В среднем магазин продает не более 500 банок обоих напитков ежедневно. Отделом продаж определено, что объемы продаж колы и кваса в натуральном исчислении должны соотноситься не менее чем 1:2. Кроме того, известно, что магазин продает не менее 100 банок колы в день.

Как наилучшим образом спланировать руководству магазина запасы напитков в начале дня?

Задача 8. Мебельная фабрика для сборки столов и стульев привлекает к работе на 10 дней четырех столяров. Каждый столяр затрачивает 2 часа на сборку стола и 30 минут – на сборку стула. Покупатели обычно приобретают вместе со столом от четырех до шести стульев. Доход от одного стола составляет $135 и $50 – от одного стула. На фабрике установлен 8-часовой рабочий день.

Руководство фабрики хотело бы оптимизировать свое производство.

Задача 9. Банк в течение нескольких месяцев планирует вложить до \$200 000 в кредитование частных лиц и покупок автомобилей. Банковские комиссионные составляют 14% при кредитовании частных лиц и 12% при кредитовании покупок автомобилей. Оба типа кредитов возвращаются в конце годичного периода кредитования. Известно, что 3% клиентских и 2% автомобильных кредитов никогда не возвращаются. Объемы кредитов на покупку автомобилей обычно более чем в 2 раза превышают объемы кредитов для частных лиц.

Руководство банка хотело бы знать, как можно оптимизировать размещение средств по указанным типам кредитов.

Задача 10. Завод производит 2 типа микросхем, каждый на отдельно линии. Производительность этих линий составляет 600 и 750 микросхем в день. Для производства микросхем первого типа необходимо 10 единиц некоторого комплектующего, а второго типа – 8 единиц этого же комплектующего. Поставщик может обеспечить на день 8 000 единиц этого комплектующего. Доход от микросхем первого типа составляет \$60, а второго – \$40. Каким образом можно оптимально спланировать производство?

Задача 11. Мебельная фабрика собирает из готовых комплектующих 2 вида кухонных шкафов: обычные и люкс. Обычный шкаф покрывается белой краской, а люкс – лаком. Покраска и покрытие лаком производятся на одном производственном покрасочном участке. Сборочная линия фабрики ежедневно может собирать не более 200 обычных шкафов и 150 шкафов типа люкс. Лакирование шкафа типа люкс требует вдвое больше времени, чем покраска одного простого шкафа. Если покрасочный участок занят только лакированием, то за день здесь можно подготовить 180 шкафов типа люкс. Фабрика оценивает доход от обычных шкафов и шкафов люкс в \$100 и \$140 соответственно. Составьте оптимальное ежедневное расписание работы покрасочного участка.

Задача 12. Фирма Wild West выпускает ковбойские шляпы двух типов (A и B). Производство шляпы первого типа требует в 2 раза больше временных ресурсов, чем производство шляпы второго типа. Если бы фирма выпускала только шляпы типа B, суточный объем производства мог бы составить 400 таких шляп. Рынок накладывает ограничения: суточный объем сбыта шляп типа A не более 150, а шляп типа B – 200 штук. Доход от производства шляп типа A составляет \$8, а шляп типа B – \$5. Определить, как наилучшим образом спланировать производство шляп.

Задача 13. Компания производит два вида продукции: А и В. Объем продаж продукта А составляет не менее 80% от общего объема продаж продуктов А и В. Вместе с тем компания не может производить более 100 единиц продукта А в день. Для производства этих продуктов используется одно и то же сырье, поступление которого ограничено 240 кг. в день. На изготовление единицы продукта А расходуется 2 кг. сырья, а продукта В – 4 кг. Цена одной единицы продукции А и В составляет $20 и $50 соответственно. Как руководству составить оптимальную структуру производства компании?

Задача 14. Компания имеет возможность рекламировать свою продукцию по местному радио и телевидению. Бюджет на рекламу ограничен $10 000 в месяц. Одна минут рекламного времени на радио стоит $15, а на телевидении – $300. Компания предполагает, что реклама на радио по времени должна превышать рекламу на телевидении не менее чем в 2 раза. Вместе с тем известно, что нерационально использовать более 400 минут рекламы на радио в месяц. Последние исследования показали, что реклама на телевидении в 25 раз эффективнее рекламы на радио.

Как оптимальным образом спланировать рекламу?

Задача 15. Компания Woodco производит столы и стулья, которые делаются из дуба и из сосны. Компания имеет в своем распоряжении 150 кв. м. дуба и 210 кв. м. сосны. Для производства одного стола требуется 17 кв.м. дуба и 30 кв.м. сосны. Для производства одного стула необходимо 5 кв.м. дуба и 13 кв.м. сосны. Стоимость одного стола $40, одного стула – $15. Требуется определить: каким образом компания Woodco может максимизировать свою прибыль.

Задача 16. Компания Bloomington Brewery производит пиво и эль. Пиво продается по цене $5 за декалитр, а эль – $2. Для производства одного декалитра пива необходимо 5 кг. зерна и 2 кг. хмеля, а для производства эля – 2 кг. зерна и 1 кг хмеля. В распоряжении компании имеется 60 кг. зерна и 25 кг. хмеля. Необходимо определить каким образом компания может увеличить свою прибыль.

Задача 17. Завод бытовой химии производит 2 вида чистящих средств, А и В, используя при этом сырье 1 и 2. Обработка одной единицы сырья 1 стоит $8, в результате производится 0,5 единицы средства А и столько же средства В. Обработка одной единицы сырья 2 стоит $5, в результате получается 0,6 единиц средства А и 0,4 единицы средства В. Ежедневное производство средства А должно быть не менее 10 и не более 15 единиц. Аналогичные ограничения для средства В составляют 12 и 20 единиц.

Как наилучшим образом спланировать выпуск чистящих средств?

Задача 18. Предприятие электронной промышленности выпускает две модели приемников, причем каждая модель производится на отдельной технологической линии. Суточный объем производства на первой линии – 60 изделий, на второй линии – 75 изделий. На радиоприемник первой модели расходуется 10 однотипных элементов электронных схем, на радиоприемник второй модели – 8 таких же элементов. Максимальный суточный запас используемых элементов равен 800 единицам. Прибыль от реализации одного радиоприемника первой и второй моделей равна 30 и 20 долларов, соответственно. Необходимо определить оптимальный суточный производственный план.

Задача 19. Промышленная компания выпускает два вида изделий. Производство каждого изделия состоит из последовательного выполнения трех операций. Время использования этих операций для производства данных изделий ограничено 10-ю часами в сутки. Время обработки и прибыль от продажи одного изделия каждого вида приведены в Таблице 2.2.7. Найти оптимальный объем производства изделий каждого вида.

Таблица 2.2.7 Время обработки и прибыль от продажи одного изделия

Изделие	Время обработки одного изделия, мин			Удельная прибыль, $
	Операция 1	Операция 2	Операция 3	
1	10	6	8	2
2	5	20	15	3

Задача 20. Небольшая фирма выпускает два типа автомобильных деталей (А и В). Для этого она закупает литье, которое подвергается токарной обработке, сверловке и шлифовке. Данные, характеризующие производительность станочного парка фирмы, приведены в Таблице 2.2.8.

Таблица 2.2.8 Производительность станков

Тип станка	*Деталь А, шт./ч*	*Деталь В, шт./ч*
Токарный	25	40
Сверлильный	28	35
Шлифовальный	35	25

Каждая отливка, из которой изготавливается деталь А, стоит $2. Стоимость отливки для детали В – $3. Продажные цены деталей равны, 5 и 6 долларам соответственно. Стоимость часа станочного времени составляет 20, 14 и 17,5 долларов, соответственно типу станка, эти расходы считаются фиксированными – они ограничены $7000 в месяц и не включаются в прибыль. Фирма работает по обычному графику: 8 часовой рабочий день, 5 рабочих дней в неделю. Спрос на деталь В практически неограничен, а на деталь А поступает не более 900 заказов в месяц. Менеджеру по производству необходимо определить, как наилучшим образом спланировать производственный процесс.

Задача 21. Компания MarCo, занимающаяся проведением маркетинговых исследований, планирует проведение нового исследования с помощью телефонного опроса. Для проведения исследования компании требуется опросить по крайней мере 150 замужних женщин, 120 женатых мужчин, а также 100 мужчин и 110 женщин, не находящихся в браке. Звонок в дневное время стоит \$2, а звонок в вечернее время – \$5. В таблице 2.2.9 приведены характеристики опросов, основанные на опыте предыдущих исследований.

Таблица 2.2.9 Оценочные результаты телефонного опроса

Категория респондента	*Процент респондентов, ответивших в дневное время*	*Процент респондентов, ответивших в вечернее время*
Замужние женщины	30	30
Женатые мужчины	10	30
Одинокие мужчины	10	15
Одинокие женщины	10	20
Другие	40	5

Так, например, на 30% звонков в дневное время отвечают замужние женщины, а на 15% звонков в вечернее время – одинокие мужчины. Так как штат сотрудников компании ограничен, то, по крайней мере, половина звонков должна быть сделана в вечернее время. Требуется определить: каким образом компании следует наилучшим образом спланировать маркетинговое исследование.

Задача 22. Лесничество имеет 24 га свободной земли под паром и заинтересовано извлечь из нее доход. Оно может выращивать саженцы быстрорастущего гибрида новогодней ели, которые достигают спелости за один год, или бычков, отведя часть земли под пастбище. Деревья выращиваются и продаются в партиях по 1000 штук. Требуется 1.5 га для выращивания одной партии деревьев и 4 га для вскармливания одного бычка. Лесничество может потратить только 200 ч. в год на свое побочное производство. Практика показывает, что требуется 20 ч. для культивации, подрезания, вырубки и пакетирования одной партии деревьев. Для ухода за одним бычком также требуется 20 ч. Лесничество имеет возможность израсходовать на эти цели 6 тыс. руб. Годовые издержки на одну партию деревьев выливаются в 150 руб. и 1,2 тыс. руб. на одного бычка. Уже заключен контракт на поставку 2 бычков. По сложившимся ценам, одна новогодняя ель принесет чистый доход в 2,5 руб., один бычок – 5 тыс. руб. Как наилучшим образом использовать лесничеству свободную землю?

Задача 23. Исследовательская компания D&L Social Engineering планирует проведение маркетингового опроса. Для проведения опроса руководители компании рассматривают возможность привлечения студентов факультета социологии. Привлечение одного студента обходится компании в \$1000, зарплата и прочие расходы в расчете на одного штатного сотрудника составляют \$2000. В то же время, по опыту прошлых исследований, известно, что использование в исследовании более 75% студентов от общего числа исполнителей проекта нецелесообразно, так как качество их работы хуже. Кроме того, каждый штатный сотрудник может провести и обработать 8 интервью, а студент – только 6. Для координации работы на каждых 3 студентов выделяется 1 координатор, для штатных сотрудников требуется 1 координатор на 6 человек, всего компания имеет возможность привлечь к работе над проектом не более 10 координаторов (зарплата координаторов не входит в бюджет исследования). Бюджет исследования ограничен \$60 000. Руководство компании полагая, что увеличение количества интервью повышает достоверность исследования, хотело бы определить оптимальный состав исполнителей исследования.

2.2.9. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Рекомендуемые темы рефератов

1. Задача линейного программирования и ее экономическая интерпретация.
2. Понятие устойчивости решения в задаче линейного программирования.
3. Двойственная задача линейного программирования и объективно-обусловленные оценки.
4. Область применения задачи линейного программирования.

Литература для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
2. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.И. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб.пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
4. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.

ТЕМА 2.3. ЗАДАЧИ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА

2.3.1. Экономико-математическая модель транспортной задачи.

Важным частным случаем задачи линейного программирования является так называемая транспортная задача.

Классическая транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного продукта (или взаимозаменяемых продуктов) из пунктов производства в пункты потребления.

Экономико-математическая модель транспортной задачи в общем виде может быть сформулирована следующим образом:

Имеется m пунктов производства однородного продукта и n пунктов потребления. Для каждого пункта производства i задан объем производства A_i, для каждого пункта потребления j известна потребность (спрос) B_j (в тех же единицах измерения). Известны издержки c_{ij}, связанные с перевозкой единицы продукта из пункта i в пункт j.

Требуется составить план перевозок, обеспечивающий наиболее экономным путем (т.е. при наименьших транспортных издержках) удовлетворение всех пунктов потребления за счет реализации всего продукта, произведенного пунктами производства. При этом предполагается, что суммарный спрос ($B=\sum_j B_j$) равен суммарному объему производства ($A=\sum_i A_i$). Такие задачи называются **закрытыми** транспортными задачами.

Что такое **план перевозок**? План перевозок определяет:
Сколько единиц продукта перевозится от каждого пункта производства к каждому пункту потребления, т.е. план представляется набором чисел x_{ij} (всего таких чисел m×n), где x_{ij} показывает, сколько единиц продукта должно быть перевезено от i-го производителя j-му потребителю. Отметим также, что в термин «транспортные издержки» (c_{ij}) не всегда вкладывается строгий экономический смысл. Это могут быть расстояния, тарифы, время, расход топлива и т.п. В каждой конкретной задаче оговаривается конкретный смысл коэффициентов c_{ij}.

Система ограничений примет вид

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i \ (i=1,2,\ldots,m), \qquad (2.3.1)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j \ (j=1,2,\ldots n). \qquad (2.3.2)$$

Система (2.3.1) включает в себя уравнения баланса по поставщикам, а система (2.3.2) – по потребителям. Суммарные транспортные издержки выражаются в виде следующей линейной функции, которую необходимо минимизировать

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min \qquad (2.3.3)$$

Математическая модель транспортной задачи в общей постановке будет следующей: на множестве неотрицательных решений системы ограничений (2.3.1), (2.3.2) (мы будем называть такие решения *допустимые*) найти такое решение $X=(x_{11}, x_{12},\ldots,x_{ij},\ldots,x_{mn})$, при котором значение целевой функции (2.3.3) минимально. Условия транспортной задачи весьма удобно представлять в табличной форме.

Таблица 2.3.1

Пункт произ-водства i	Объем произ-водства A_i	Пункты потребления j и их спрос B_j			
		1	2	…	n
		B_1	B_2	…	B_n
1	A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}
2	A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}
…	…	…	…	…	…
m	A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}

В левом верхнем углу произвольной клетки (i,j) (i – номер строки, j–номер столбца) стоит показатель транспортных затрат c_{ij}, в правом нижнем – значения переменных x_{ij}(план перевозок). Любое решение $X=(x_{11}, x_{12},\ldots, x_{ij},\ldots, x_{mn})$ системы ограничений (2.3.1) – (2.3.2) назовем **распределением поставок.**

Рассмотрим простейший числовой пример (таб. 2.3.2).
Здесь параметры задачи принимают следующие значения:
$c_{11}=2$, $c_{12}=1$, $c_{13}=5$, $c_{21}=3$, $c_{22}=4$, $c_{23}=3$, $c_{31}=4$, $c_{32}=6$, $c_{33}=6$;
$A_1=50$, $A_2=60$, $A_3=70$, $B_1=40$, $B_2=85$, $B_3=55$.

Таблица 2.3.2

	40	85	55
50	2 x_{11}	1 x_{12}	5 x_{13}
60	3 x_{21}	4 x_{22}	3 x_{23}
70	4 x_{31}	6 x_{32}	6 x_{33}

Составим систему уравнений для этого примера.

Чтобы объем производства каждого поставщика был реализован, необходимо выполнение баланса по каждой строке таблицы, т.е.

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} &= 70 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Аналогично, чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворен, подобные уравнения баланса выписываем для каждого столбца таблицы:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 40 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 85 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 55 \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

Суммарные транспортные затраты F(целевая функция) выражаются через издержки и поставки следующим образом:

$$F = 2x_{11} + x_{12} + 5x_{13} + 3x_{21} + 4x_{22} + 3x_{23} + 4x_{31} + 6x_{32} + 6x_{33}.$$

В этом примере шесть уравнений и девять переменных, система (2.3.4)–(2.3.5) имеет бесчисленное множество решений (допустимых поставок). Вот одно из них:

Таблица 2.3.3

	40	85	55
50	2 ***40***	1 ***10***	5 ***0***
60	3 ***0***	4 ***60***	3 ***0***
70	4 ***0***	6 ***15***	6 ***55***

Суммарные транспортные затраты для данного распределения:

$F = 2\times40 + 1\times10 + 5\times0 + 3\times0 + 4\times60 + 3\times0 + 4\times0 + 6\times15 + 6\times55 = 750.$

Всего в этом примере около 3600 только целочисленных решений, а если допустить дробность – то бесконечное множество. Все допустимые решения удовлетворяют системе ограничений, но отличаются друг от друга величиной суммарных транспортных издержек.

Вот еще одна допустимая поставка:

Таблица 2.3.4

	40	85	55
50	2	1 ***50***	5
60	3 ***40***	4	3 ***20***
70	4	6 ***35***	6 ***35***

Суммарные транспортные затраты для данного распределения:

$F = 1\times50 + 3\times40 + 3\times20 + 6\times35 + 6\times35 = 650.$

Наша задача научиться находить оптимальное решение, т.е. такое, для которого целевая функция имеет наименьшее значение.

2.3.2. Исходный опорный план.

Первым шагом при решении транспортной задачи является получение допустимого решения, которое называют **исходный опорный план.** Исходный план можно легко получить, используя простой алгоритм, разработанный Данцигом и названный Чарнсом и Купером "правилом северо-западного угла", хотя исходный план, полученный этим способом, как правило, весьма далек от оптимального.

"Правило северо-западного угла" формулируется следующим образом:

1. Начать с северо-западного угла исходной таблицы – клетки (1,1), куда дать максимально возможную поставку:

   $\boldsymbol{x_{11}} = \min\{A_1, B_1\}.$

2. Следующую максимально возможную поставку дать либо в клетку (1,2), либо в клетку (2,1), в зависимости от результата первого шага.
3. Продолжить этот процесс шаг за шагом от северо-западного до юго-восточного угла таблицы.

Таким образом, в нашем примере (см. табл. 2.3.3) процесс определения исходного плана происходит следующим образом:

В клетку (1,1) даем максимально возможную поставку:

$\boldsymbol{x_{11}} = \min\{50, 40\} = 40.$

После этого спрос 1-го потребителя будет полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец таблицы выпадает из последующего рассмотрения. Переходим к клетке (1,2) и даем в нее максимально возможное значение. Учитывая, что 1-й поставщик уже отдал 40 единиц своей продукции и у него осталось только 50 – 40 = 10 единиц, получим $\boldsymbol{x_{12}} = \min\{10, 85\} = 10$. После этого объемы 1-го производителя полностью реализованы и из рассмотрения выпадает первая строка таблицы. В оставшейся таблице снова находим «северо-западный угол» и т.д. В результате получаем исходное распределение поставок (см. табл. 2.3.3).

Число заполненных клеток в полученном распределении оказалось равным m+n–1=3+3–1 = 5. Это не случайно. Действительно, на каждом шаге (кроме последнего) из рассмотрения выпадали либо строка, либо столбец, а на последнем шаге и столбец и строка.

Поэтому число заполненных клеток на единицу меньше, чем сумма числа строк и столбцов, т.е. равно m+n–1. Справедлива теорема (которую мы примем без доказательств) утверждающая, что в оптимальном решении число заполненных клеток (т.е. основных, так называемых **базисных переменных**) должно быть равно m+n–1.

Существенный недостаток метода “северо-западного угла” состоит в том, что он построен без учета значений транспортных издержек. Можно модифицировать данный метод, избавившись от этого недостатка: на каждом шаге максимально возможную поставку следует давать не в “северо-западную” клетку оставшейся таблицы, а в клетку с наименьшим значением транспортных издержек. При этом распределение поставок оказывается, вообще говоря, ближе к оптимуму, чем распределение, полученное методом “северо-западного угла”. Такой метод получения исходного плана называется **методом наименьших затрат**. Исходный план, полученный данным методом, приведен в табл. 2.3.4.

2.3.3. Распределительный метод решения транспортной задачи.

Рассмотрим сейчас так называемый **распределительный метод** решения транспортной задачи. Этот метод довольно сложен и неудобен для решения практических задач, однако мы его подробно рассмотрим, т.к. этот метод позволяет понять основные идеи, лежащие в основе решения задач линейного программирования и, в частности, транспортных задач.

Вернемся к нашему примеру и возьмем базисный план, построенный методом северо-западного угла (табл. 2.3.3). Соответствующие данному плану суммарные транспортные затраты (значение целевой функции) F=750. Чтобы определить, является ли полученный план оптимальным, необходимо «оценить» различные варианты, связанные с неиспользованием клеток, в которых нет поставок (выделенных чисел). Таких клеток в нашем примере четыре. Посмотрим, что произойдет с таблицей, если дать единичную поставку в одну из пустых клеток, например в (2,1).

Чтобы не нарушался баланс по строкам и столбцам необходимо уменьшить на единицу поставку в клетки (2,2) и (1,1). Уменьшив поставку в (1,1) мы должны увеличить на единицу поставку в клетку (1,2). Заметим, что последнее изменение восстановило баланс по столбцу 2, нарушенный уменьшением поставки в клетку (2,2). Мы получили новый допустимый план поставок (см. табл. 2.3.5).

Таблица 2.3.5

	40	85	55
50	2 ***39***	1 ***11***	5
60	3 ***1***	4 ***59***	3
70	4	6 ***15***	6 ***55***

Заметим, что число ненулевых поставок (выделенных чисел) здесь превышает m+n–1, т.е. этот допустимый план *не является базисным.*

Перераспределяя поставки мы прошли по четырем клеткам. Путь нашего движения образовал так называемый **цикл (цепь, контур).** Представим этот цикл на рис. 2.3.1. На нем изображены клетки, в которых будем менять поставки (слева от каждой клетки написан в скобках ее номер).

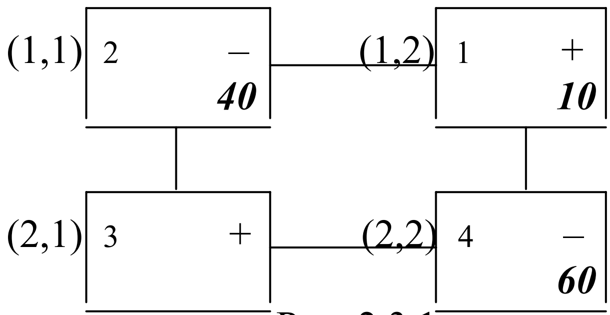


Рис. 2.3.1

При этом знаком “+” помечены те клетки, поставка в которых увеличится (*положительные вершины*). Знаком “–“ отмечены клетки, в которых поставка уменьшится (*отрицательные вершины*).

Для циклов в транспортной задаче характерны следующие особенности:

а) цикл является замкнутым многоугольником;

б) вершинами цикла являются клетки таблицы, причем одна из вершин – пустая клетка, а все остальные – клетки с поставками базисного плана (с выделенными числами);

в) все углы цикла прямые и каждый отрезок цикла, ограниченный двумя вершинами, целиком принадлежит к одному столбцу или к одной строке таблицы;

г) в цикле четное число вершин;

д) отрезки цикла могут проходить заполненные поставками клетки, не являющиеся вершинами данного цикла;

е) в цикле одинаковое количество положительных и отрицательных вершин.

Цикл, сохраняя все перечисленные свойства, может иметь самую различную форму, но всегда для любой пустой клетки цикл пересчета существует, причем единственный (доказательство этого утверждения опускаем).

Введем теперь понятие **оценки пустой клетки**. Так же как и в общей задаче линейного программирования поставим вопрос следующим образом: на сколько изменится значение целевой функции, после совершения единичной поставки в рассматриваемую пустую клетку?

Рассмотрим табл. 2.3.5. Записав единичную поставку в клетку (2.1), мы увеличили целевую функцию на 3 (c_{21} =3). Уменьшив поставку в клетку (1,1) на единицу, мы уменьшили значение целевой функции на 2 (c_{11} =2). Увеличив поставку в клетку (1.2), мы увеличили целевую функцию на 1 (c_{12} =1). И, наконец, уменьшив поставку в клетку (2,2) на единицу, мы уменьшили значение целевой функции на 4 (c_{22}=4). В итоге целевая функция изменилась на 3–2+1–4= –2 (т.е. уменьшилась на 2). Эту величину и будем называть оценкой пустой клетки (i,j) и обозначать e_{ij}. Отметим, что оценка может быть как отрицательная, так и положительная.

Только что мы вычислили e_{21} = –2. Значит каждая единичная поставка в клетку (2,1) будет уменьшать значение целевой функции на 2. Чем больше будет величина поставки в клетку (2,1), тем лучше будет план поставок. Очевидно, наибольшее значение поставки в клетке (2,1) будет равно величине меньшей из поставок в отрицательных вершинах цикла. В противном случае в одной из этих вершин появится отрицательная поставка, что противоречит условиям задачи.

Наибольшее значение $\boldsymbol{x_{21}}$ в данном случае равно 40 (перепоставка из отрицательной вершины (1,1)). Принимая $\boldsymbol{x_{21}}$ = 40, для сохранения баланса по строкам и столбцам корректируем на эту величину поставки в остальных вершинах цикла:

$$\boldsymbol{x_{11} = 0,\ x_{12} = 50,\ x_{22} = 20.}$$

Получим новый *базисный* план.

Транспортные издержки этого плана (см. табл. 2.3.6) изменились на $e_{21}\boldsymbol{x_{21}}$= –2×40 = –80, т.е. уменьшились на 80.

Суммарные транспортные затраты для данного распределения можно посчитать и по общей формуле:

$$F = 1\times50 + 3\times40 + 4\times20 + 6\times15 + 6\times55 = 670.$$

Мы видим, что и по общей формуле расчета суммарные транспортные затраты уменьшились на 750 – 670 = 80 единиц.

Таблица 2.3.6

	40	85	55
50	2	1 ***50***	5
60	3 ***40***	4 ***20***	3
70	4	6 ***15***	6 ***55***

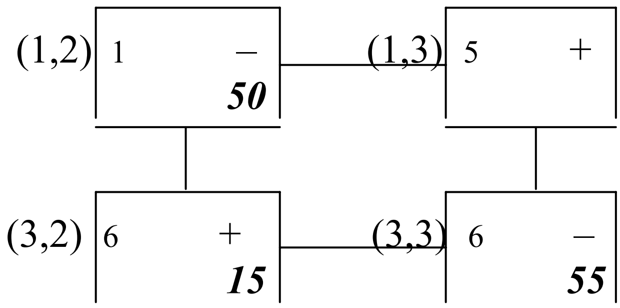
Итак, базисный план находить мы умеем (метод северо-западного угла или метод наименьших затрат). Научились определять оценки пустых клеток с помощью циклов и перераспределять по цепи поставки. Этого достаточно, чтобы решить транспортную задачу. Общий ход решения таков:

1. Находим исходный базисный план.
2. Для пустых клеток определяем оценки e_{ij}, пока не найдем клетку с отрицательной оценкой.
3. В эту клетку записываем максимально возможную поставку, производя необходимую корректировку поставок в вершинах соответствующего цикла. В результате получаем новый базисный план, лучший, чем предыдущий.
4. Для нового базисного плана выполняем опять процедуру 2.

Если все оценки $e_{ij} \geq 0$, то план поставок улучшить невозможно (суммарные транспортные издержки не уменьшаются), значит, полученный на последнем шаге план поставок **оптимальный.**

Если существует хотя бы одна клетка с отрицательной оценкой – переходим к процедуре 3. Будем придерживаться этого общего алгоритма решения для улучшения нашего нового базисного плана.

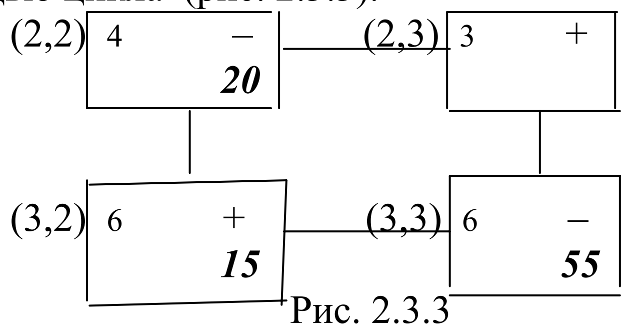
Определим оценку клетки (1,3) с помощью цикла (рис. 2.3.2).



$e_{13} = 5 - 1 + 6 - 6 = +4$

Рис. 2.3.2

Значит, давать поставку в клетку (1,3) невыгодно – приращение целевой функции положительное, т.е. это приведет к удорожанию плана перевозок. Определим оценку следующей пустой клетки (2,3) с помощью цикла (рис. 2.3.3).



$e_{23} = 3 - 4 + 6 - 6 = -1$

Рис. 2.3.3

Следовательно, рассматриваемый план не оптимален и может быть улучшен, если дать поставку (максимально возможную) в клетку (2,3). Очевидно, максимально возможная величина поставки $\boldsymbol{x_{23}} = 20$, что изменит значение целевой функции на $-1\times20 = -20$. Скорректировав соответственно поставки $\boldsymbol{x_{22}=0}$, $\boldsymbol{x_{32}=35}$, $\boldsymbol{x_{33}=35}$, получаем новый базисный план (табл. 2.3.7).

Таблица 2.3.7

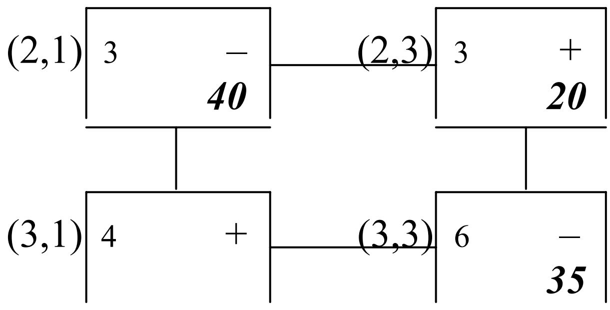
	40	85	55
50	2	1 ***50***	5
60	3 ***40***	4	***20***
70	4	6 ***35***	6 ***35***

Суммарные транспортные затраты для данного распределения:

$F = 1\times50 + 3\times40 + 3\times20 + 6\times35 + 6\times35 = 650.$

Проверим этот план на оптимальность. Для этого нужно узнать, нет ли отрицательных оценок пустых клеток.

Рассмотрим клетку (3,1). Цикл для нее изображен на рис. 2.3.4.



$e_{31} = 4 - 3 + 3 - 6 = -2$

Рис. 2.3.4

Следовательно, рассматриваемый план не оптимален и может быть улучшен, если дать максимально возможную поставку в эту клетку $\boldsymbol{x_{31}=}$ 35. Целевая функция должна уменьшиться на $2\times35 = 70$.

Скорректировав соответственно в вершинах цикла поставки $\boldsymbol{x_{21}=5}$, $\boldsymbol{x_{23}=55}$, $\boldsymbol{x_{33}=0}$, получаем новый базисный план (табл. 2.3.8).

Таблица 2.3.8

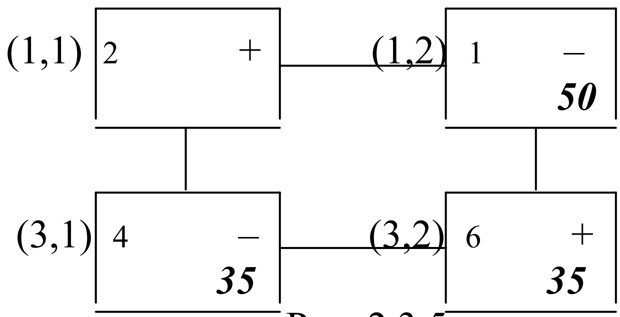
	40	85	55
50	2	1 ***50***	5
60	3 ***5***	4	3 ***55***
70	4 ***35***	6 ***35***	6

Суммарные транспортные затраты для данного распределения:

$$F = 1\times50 + 3\times5 + 3\times55 + 4\times35 + 6\times35 = 580,$$

т.е., как мы и предполагали, уменьшились на 650 – 580 = 70.

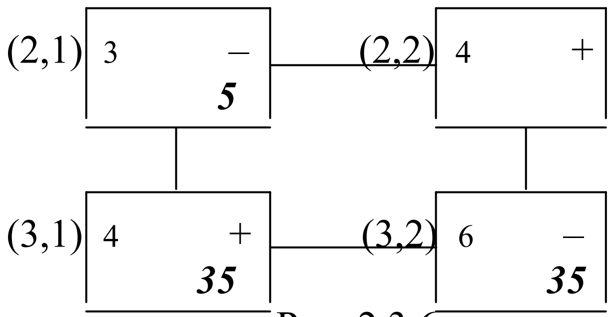
Проверим теперь этот план на оптимальность. Для этого опять вычисляем оценки пустых клеток. Рассмотрим клетку (1,1). Цикл для нее изображен на рис. 2.3.5.



$e_{11} = +2 - 1 + 6 - 4 = +3$

Рис. 2.3.5

Рассмотрим клетку (2,2). Цикл для нее изображен на рис. 2.3.6.



$e_{22} = +4 - 6 + 4 - 3 = -1$

Рис. 2.3.6

Значит, и этот план не оптимальный. Его можно улучшить, если дать максимально возможную поставку в эту клетку: $\boldsymbol{x_{22}} = 5$. Целевая функция уменьшается на $1\times5 = 5$. Скорректировав соответственно в вершинах цикла поставки $\boldsymbol{x_{21}=0}$, $\boldsymbol{x_{31}=40}$, $\boldsymbol{x_{32}=30}$, получаем новый базисный план (табл. 2.3.9).

Суммарные транспортные затраты составят:

$$F = 1\times50 + 4\times5 + 3\times55 + 4\times40 + 6\times30 = 575,$$

что как раз на 5 единиц меньше предыдущего значения целевой функции. Этот план оптимальный, оценки всех пустых клеток (e_{11}, e_{13}, e_{21}, e_{32}) неотрицательны!

Таблица 2.3.9

	40	85	55
50	2	1 ***50***	5
60	3	4 ***5***	3 ***55***
70	4 ***40***	6 ***30***	6

Студентам предоставляется возможность самим убедиться, что этот план оптимальный.

Основным недостатком распределительного метода является необходимость построения циклов с целью определения оценок клеток. Так, при таблице 25 строк на 25 столбцов на каждом шаге для проверки оптимальности плана надо строить $m \times n - (m+n-1) = 25 \times 25 - (25+25-1) = 576$ циклов. В некоторых случаях циклы имеют множество вершин и довольно сложную конфигурацию.

2.3.4. Метод потенциалов.

Рассмотрим модифицированный способ, позволяющий определять оценки клеток без построения циклов. Этот способ имеет свои разновидности. Мы рассмотрим одну из них, предложенную Дж.Данцигом в 1951 году и названную им методом МОДИ.

Следует отметить, что Л.В.Канторовичем еще в 1940 году был разработан метод, отличающийся от метода МОДИ лишь весьма несущественными деталями. Свой метод Л.В.Канторович назвал **методом потенциалов**. Мы так и будем его называть.

Идея метода заключается в том, что для определения оценок пустых клеток предварительно находятся некоторые числа (потенциалы). Потенциалы ставятся в соответствие каждой строке и каждому столбцу. Потенциал i-й строки обозначим u_i, а потенциал j-го столбца v_j. Потенциалы определяются исходя из требования: для каждой *занятой* клетки (i,j) алгебраическая сумма потенциалов i-й строки и j-го столбца должна быть равна транспортным издержкам $\mathbf{c}_{ij}$:

$$\mathbf{c}_{ij} = u_i + v_j,\ u_i = \mathbf{c}_{ij} - v_j,\ v_j = \mathbf{c}_{ij} - u_i. \qquad (2.3.6)$$

Затем оценки каждой пустой клетки определяются по формуле:

$$e_{ij} = \mathbf{c}_{ij} - (u_i + v_j). \qquad (2.3.7)$$

Как же определяются потенциалы?

Можно начать с любого столбца или строки и назначить в качестве их потенциала произвольное число. Произвольно назначается только этот первый потенциал, все остальные рассчитываются по формулам (2.3.6).

Проиллюстрируем это на примере, условия которого приведены в табл. 2.3.10 с базисным планом, полученным методом северо-западного угла.

Примем произвольно, например, для 2-й строки потенциал u_2=10.

Тогда по формулам (2.3.6) можно вычислить потенциалы 2-го и 3-го столбца, а именно:

$$v_2 = \mathbf{c}_{22} - u_2 = 5 - 10 = -5,$$
$$v_3 = \mathbf{c}_{23} - u_2 = 7 - 10 = -3.$$

Таблица 2.3.10

Ai \ Bj	55	90	40	30	20	u_i
80	5 ***55***	4 ***25***	3	2	1	9
75	3	5 ***65***	7 ***10***	5	3	10
45	5	4	3 ***30***	4 ***15***	5	6
35	2	3	4	5 ***15***	6 ***20***	7
v_j	–4	–5	–3	–2	–1	

Теперь, используя уже вычисленные потенциалы v_2 и v_3, находим потенциалы 1-й и 3-й строки:

$$u_1 = \mathbf{c}_{12} - v_2 = 4 - (-5) = 9,$$
$$u_3 = \mathbf{c}_{33} - v_3 = 3 - (-3) = 6.$$

А теперь, используя уже вычисленные потенциалы u_1 и u_3, находим потенциалы 1-го и 4-го столбца:

$$v_1 = \mathbf{c}_{11} - u_1 = 5 - 9 = -4,$$
$$v_4 = \mathbf{c}_{34} - u_3 = 4 - 6 = -2.$$

Нам осталось вычислить потенциалы 4-й строки и 5-го столбца:

$$u_4 = \mathbf{c}_{44} - v_4 = 5 - (-2) = 7,$$
$$v_5 = \mathbf{c}_{45} - u_4 = 6 - 7 = -1.$$

Зная потенциалы всех столбцов и строк по формуле (2.3.7) вычисляем оценки любой пустой клетки. В данном примере

$$e_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 3 - (9 - 3) = -3,$$
$$e_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 2 - (9 - 2) = -5,$$
$$e_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) = 1 - (9 - 1) = -7,$$
$$e_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) = 3 - (10 - 4) = -3,$$
$$e_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 5 - (10 - 2) = -3,$$

$e_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) = 3 - (10-1) = -6,$
$e_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 5 - (6-4) = 3,$
$e_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) = 4 - (6-5) = 3,$
$e_{35} = c_{35} - (u_3 + v_5) = 5 - (6-1) = 0,$
$e_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 2 - (7-4) = -1,$
$e_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 3 - (7-5) = 1,$
$e_{43} = \mathbf{c}_{43} - (u_4 + v_3) = 4 - (7-3) = 0.$

Найдя отрицательную оценку, перемещаем в соответствующую клетку поставку по циклу, как и в распределительном методе.

Можно найти сначала все отрицательные оценки, а затем выбрать клетку, перемещение поставки в которую даст наибольший эффект, т.е. наибольшую величину уменьшения целевой функции. Заметим, что эта величина зависит как от значения оценки, так и от максимально допустимой поставки, которую можно дать в данную клетку. Студентам предоставляется право самостоятельно довести решение до конца. Оптимальное решение приведено в табл. 2.3.11.

Таблица 2.3.11

Ai \ Bj	55	90	40	30	20
80	5	4 ***50***	3	2 ***30***	1
75	3 ***55***	5 ***0***	7	5	3 ***20***
45	5	4 ***5***	3 ***40***	4	5
35	2	3 ***35***	4	5	6

2.3.5. Вырожденные случаи. Открытая транспортная задача.

Некоторые замечания по частным случаям, которые могут встретиться при решении.

1. Если на некотором шаге построения базисного плана из рассмотрения выпадают одновременно и строка и столбец (случай *вырождения*), можно использовать следующий прием: дать нулевую (фиктивную) поставку в произвольную *еще не занятую* клетку данной строки или столбца. (Тем самым сохраняется число занятых клеток m+n–1 для базисного распределения поставок).
2. Если в отрицательных вершинах цикла, по которому перераспределяется поставка, две или более минимальных поставок, то все они при перераспределении обратятся в нуль. Так как на каждом шаге число занятых клеток сохраняется в количестве m+n–1, то из этих

“нулевых” клеток образуется только одна пустая клетка, а остальные считаются заполненными поставкой равной 0.

3. Если мы нашли клетку с отрицательной оценкой и построили соответствующий цикл перераспределения, в одной из отрицательных вершин которого находится нулевая поставка, то следует переместить эту нулевую поставку (значение целевой функции при этом не изменится), а затем вновь определять оценки пустых клеток в полученном базисном плане.

Рассмотрим некоторые моменты, имеющие практическое значение, но усложняющие постановку транспортной задачи:

1. Обязательные поставки.

Независимо от оптимальных расчетов некоторому поставщику вменяется определенный объем поставки некоторому потребителю (например, определенная марка бетона производится только на таком-то заводе, а некоторому потребителю необходимо определенное количество данной марки). В этом случае на величину обязательных поставок корректируются мощности и потребности, и после этого решается задача.

2. Ограничения пропускной способности.

Ранее мы исходили из того, что от любого поставщика любому потребителю можно перевозить любое количество продукта (в пределах мощности и спроса). В реальных задачах часто приходится учитывать пропускную способность коммуникаций (особенно железных дорог).

Самый простой способ учитывать пропускную способность состоит в следующем:

Пусть поставка в клетку (i,j) ограничена числом, строго меньшим B_j. Столбец j, соответствующий потребителю с ограниченной пропускной способностью, разбивается на два столбца, в одном спрос принимается равным ограничению, а в другом – остатку. Показатели транспортных затрат одинаковы для этих двух столбцов за исключением клетки (i,j) в столбце, где спрос равен разности (остатку). Здесь c_{ij} принимается очень большим, блокирующим какую-либо поставку в эту клетку.

До сих пор мы рассматривали закрытую транспортную задачу, т.е. при условии баланса спроса и объемов производства (мощностей). В практических задачах это условие далеко не всегда выполняется. При нарушении баланса возникает **открытая** транспортная задача, которая решается сведением ее к закрытой транспортной задаче.

При превышении суммарной мощности над суммарным спросом на величину Δ вводится дополнительный столбец так называемого *фиктивного* потребителя со спросом равным **Δ.** Показатели c_{in+1} (i=1,2,…,m) в этом столбце выбираются произвольно, но с одним условием, что все они равны между собой. Удобнее всего принимать их равными 0. Далее задача решается как закрытая.

Аналогично, при превышении суммарного спроса над суммарной мощностью на величину Δ вводится дополнительная строка так называемого *фиктивного* поставщика с мощностью равной Δ и с нулевыми транспортными издержками.

2.3.6. Практический блок

Пример

Экономическая модель

	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8	2	3	6
$A_2 = 38$	6	6	4	4
$A_3 = 71$	4	3	5	5
$A_4 = 11$	2	3	4	6
$A_5 = 96$	1	3	5	5

A_i – это наличие товара у поставщика i и $i = 1...5$;

B_j – это наличие потребностей у потребителя j и $j = 1...4$;

C_{ij} – это удельные затраты на перевозку товара от каждого i-го поставщика, каждому j-ому потребителю.

1. Математическая модель.

Определим неизвестные. За X_{ij} примем количество перевозимой продукции от каждого i-го поставщика, каждому j-ому потребителю.

Оптимальный план перевозок

$x_{ij} \geq 0;$

$\sum_{j=1}^{4} X_{ij} \leq A_i (i = 1...4);$ – вывезти товара, не менее, чем есть;

$\sum_{i=1}^{5} X_{ij} \geq B_j (j = 1...5);$ – привезти не менее запросов потребителя.

Допустимый план

$F = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{4} C_{ij} \cdot X_{ij} \to \min$ – сумма транспортных издержек должна стремиться к минимуму.

Чтобы выяснить, является ли система закрытой или открытой, необходимо подтвердить или опровергнуть следующее равенство:

$\sum_{i=1}^{5} A_i = \sum_{j=1}^{4} B_j$; $54 + 38 + 71 + 11 + 96 = 270$ и $100 + 40 + 80 + 50 = 270$

Получили, что суммарный спрос равен суммарному предложению, значит данная транспортная задача является закрытого типа.

2. Получение начального (опорного) плана методом северо-западного угла

Начальный (опорный) план

A_i B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8 54	2	3	6
$A_2 = 38$	6 38	6	4	4
$A_3 = 71$	4 8	3 40	5 23	5
$A_4 = 11$	2	3	4 11	6
$A_5 = 96$	1	3	5 46	5 50

Поверим по формуле, получился ли вырожденный случай:

$S = n + m - 1$; $S = 5 + 4 - 1 = 8$ (невырожденный случай).

Определим начальные (опорные) издержки:

$F_0 = 54 \cdot 8 + 38 \cdot 6 + 8 \cdot 4 + 40 \cdot 3 + 23 \cdot 5 + 11 \cdot 4 + 46 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 1451$;

3. Итерации по улучшению плана до получения оптимального решения.

Рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{24} = 4 - 6 + 4 - 5 + 5 - 5 = -3$; $\varepsilon_{34} = 5 - 5 + 5 - 5 = 0$; $\varepsilon_{44} = 6 - 4 + 5 - 5 = 2$;

$\underline{\varepsilon_{13} = 3 - 8 + 4 - 5 = -6}$; $\varepsilon_{23} = 4 - 6 + 4 - 5 = -3$; $\varepsilon_{14} = 6 - 8 + 4 - 5 + 5 - 5 = -3$;

$\varepsilon_{12} = 2 - 8 + 4 - 3 = -5$; $\varepsilon_{22} = 6 - 6 + 4 - 3 = 1$; $\varepsilon_{41} = 2 - 4 + 5 - 4 = -1$;

$\varepsilon_{51} = 1 - 4 + 5 - 5 = -3$; $\varepsilon_{42} = 3 - 3 + 5 - 4 = 1$; $\varepsilon_{52} = 3 - 3 + 5 - 5 = 0$;

Минимальная оценка в клетке (1,3). Сделаем перепоставку по контуру (23 из клетки 3,3 в клетку 1,3) и получим новый план поставки товара.

План после первой итерации

A_i B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8 **31**	2	3 **23**	6
$A_2 = 38$	6 38	6	4	4
$A_3 = 71$	4 **31**	3 40	5	5
$A_4 = 11$	2	3	4 11	6
$A_5 = 96$	1	3	5 46	5 50

$F_1 = 8 \cdot 31 + 6 \cdot 38 + 4 \cdot 31 + 3 \cdot 40 + 3 \cdot 23 + 4 \cdot 11 + 5 \cdot 46 + 5 \cdot 50 = 1313$.

Снова рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{41} = 2-8+3-4=-7$; $\underline{\varepsilon_{51} = 1-8+3-5=-9}$; $\varepsilon_{12} = 2-8+4-3=-5$;
$\varepsilon_{22} = 6-6+4-3=1$; $\varepsilon_{42} = 3-3+4-8+3-4=-5$; $\varepsilon_{52} = 3-3+4-8+3-5=-6$;
$\varepsilon_{23} = 4-3+8-6=3$; $\varepsilon_{33} = 5-3+8-4=6$; $\varepsilon_{14} = 6-3+5-5=3$;
$\varepsilon_{24} = 4-6+8-3+5-5=3$ $\varepsilon_{34} = 5-5+5-3+8-4=6$; $\varepsilon_{44} = 6-4+5-5=2$.

Минимальная оценка в клетке (5,1). Сделаем перепоставку по контуру – это будет число 31 из клетки (1,1). Рассчитаем новый план поставки товара.

План после второй итерации

A_i B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8	2	3 **54**	6
$A_2 = 38$	6 38	6	4	4
$A_3 = 71$	4 31	3 40	5	5
$A_4 = 11$	2	3	4 11	6
$A_5 = 96$	1 **31**	3	5 **15**	5 50

$F_2 = 6\cdot 38 + 4\cdot 31 + 1\cdot 31 + 3\cdot 40 + 3\cdot 54 + 4\cdot 11 + 5\cdot 15 + 5\cdot 50 = 1034$.

Снова рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{11} = 8-3+5-1=9$; $\varepsilon_{41} = 2-4+5-1=2$; $\varepsilon_{12} = 2-3+4-1+5-3=4$;
$\varepsilon_{22} = 6-6+4-3=1$; $\varepsilon_{42} = 3-3+4-1+5-4=4$; $\varepsilon_{52} = 3-3+4-1=3$;
$\underline{\varepsilon_{23} = 4-6+1-5=-6}$; $\varepsilon_{33} = 5-4+1-5=-3$; $\varepsilon_{14} = 6-3+5-5=3$;
$\underline{\varepsilon_{24} = 4-6+1-5=-6}$; $\varepsilon_{34} = 5-4+1-5=-3$; $\varepsilon_{44} = 6-4+5-5=2$.

Выбираем клетку (2,4). Сделаем перепоставку по контуру – это будет число 38 из клетки (2,1). Рассчитаем новый план поставки товара.

План после третьей итерации

A_i B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8	2	3 54	6
$A_2 = 38$	6	6	4	4 **38**
$A_3 = 71$	4 31	3 40	5	5
$A_4 = 11$	2	3	4 11	6
$A_5 = 96$	1 **69**	3	5 15	5 **12**

$F_3 = 4\cdot 31 + 1\cdot 69 + 3\cdot 40 + 3\cdot 54 + 4\cdot 11 + 5\cdot 15 + 4\cdot 38 + 5\cdot 12 = 806$.

Снова рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{11} = 8-3+5-1=9$; $\varepsilon_{21} = 6-4+5-1=6$; $\varepsilon_{41} = 2-4+5-1=2$;

$\varepsilon_{12} = 2-3+4-1+5-3=4$; $\varepsilon_{22} = 6-3+4-1+5-4=7$; $\varepsilon_{42} = 3-3+4-1+5-4=4$;

$\varepsilon_{52} = 3-3+4-1=3$; $\varepsilon_{23} = 4-4+5-5=0$; $\underline{\varepsilon_{33} = 5-4+1-5=-3}$;

$\varepsilon_{14} = 6-3+5-5=3$; $\underline{\varepsilon_{34} = 5-4+1-5=-3}$; $\varepsilon_{44} = 6-4+5-5=2$.

Выбираем клетку (3,3). Сделаем перепоставку по контуру – это будет число 15 из клетки (5,3). Рассчитаем новый план поставки товара.

План после четвертой итерации

A_i B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8	2	3 54	6
$A_2 = 38$	6	6	4	4 38
$A_3 = 71$	4 **16**	3 40	5 **15**	5
$A_4 = 11$	2	3	4 11	6
$A_5 = 96$	1 **84**	3	5	5 12

$F_4 = 4\cdot16+1\cdot84+3\cdot40+3\cdot54+5\cdot15+4\cdot11+4\cdot38+5\cdot12=761$.

Снова рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{11} = 8-3+5-4=6$; $\varepsilon_{21} = 6-4+5-1=6$; $\varepsilon_{41} = 2-4+5-4=-1$;

$\varepsilon_{12} = 2-3+5-3=1$; $\varepsilon_{22} = 6-3+4-1+5-4=7$; $\varepsilon_{42} = 3-3+5-4=1$;

$\varepsilon_{52} = 3-3+4-1=3$; $\varepsilon_{23} = 4-5+4-1+5-4=3$; $\varepsilon_{53} = 5-5+4-1=3$;

$\varepsilon_{14} = 6-3+5-4+1-5=0$; $\underline{\varepsilon_{34} = 5-4+1-5=-3}$; $\varepsilon_{44} = 6-4+5-4+1-5=-1$;

Выбираем клетку (3,4). Сделаем перепоставку по контуру – это будет число 12 из клетки (5,4). Рассчитаем новый план поставки товара.

План после пятой итерации

A_i B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8	2	3 54	6
$A_2 = 38$	6	6	4	4 38
$A_3 = 71$	4 **4**	3 40	5 15	5 **12**
$A_4 = 11$	2	3	4 11	6
$A_5 = 96$	1 **96**	3	5	5

$F_5 = 4\cdot4+1\cdot96+3\cdot40+3\cdot54+5\cdot15+4\cdot11+4\cdot38+5\cdot12=725$.

Снова рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{11} = 8 - 3 + 5 - 4 = 6$; $\varepsilon_{21} = 6 - 4 + 5 - 4 = 3$; $\underline{\varepsilon_{41} = 2 - 4 + 5 - 4 = -1}$;

$\varepsilon_{12} = 2 - 3 + 5 - 3 = 1$; $\varepsilon_{22} = 6 - 4 + 5 - 3 = 4$; $\varepsilon_{42} = 3 - 3 + 5 - 4 = 1$;

$\varepsilon_{52} = 3 - 3 + 4 - 1 = 3$; $\varepsilon_{23} = 4 - 4 + 5 - 5 = 0$; $\varepsilon_{53} = 5 - 5 + 4 - 1 = 3$;

$\varepsilon_{14} = 6 - 3 + 5 - 5 = 3$; $\varepsilon_{44} = 6 - 4 + 5 - 5 = 2$; $\varepsilon_{54} = 5 - 5 + 4 - 1 = 3$.

Выбираем клетку (4,1). Сделаем перепоставку по контуру – это будет число 4 из клетки (3,1). Рассчитаем новый план поставки товара.

План после шестой итерации (оптимальный план перевозок)

A_i \ B_j	$B_1 = 100$	$B_2 = 40$	$B_3 = 80$	$B_4 = 50$
$A_1 = 54$	8	2	3 54	6
$A_2 = 38$	6	6	4	4 38
$A_3 = 71$	4	3 40	5 **19**	5 12
$A_4 = 11$	2 **4**	3	4 **7**	6
$A_5 = 96$	1 96	3	5	5

$F_6 = 2 \cdot 4 + 1 \cdot 96 + 3 \cdot 40 + 3 \cdot 54 + 5 \cdot 19 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 38 + 5 \cdot 12 = 721$.

Снова рассчитаем оценки пустых клеток:

$\varepsilon_{11} = 8 - 3 + 4 - 2 = 7$; $\varepsilon_{21} = 6 - 2 + 4 - 5 + 5 - 4 = 4$; $\varepsilon_{31} = 4 - 5 + 4 - 2 = 1$;

$\varepsilon_{12} = 2 - 3 + 5 - 3 = 1$; $\varepsilon_{22} = 6 - 4 + 5 - 3 = 4$; $\varepsilon_{42} = 3 - 3 + 5 - 4 = 1$;

$\varepsilon_{52} = 3 - 1 + 2 - 4 + 5 - 3 = 2$; $\varepsilon_{23} = 4 - 4 + 5 - 5 = 0$; $\varepsilon_{53} = 5 - 1 + 2 - 4 = 2$;

$\varepsilon_{14} = 6 - 3 + 5 - 5 = 3$; $\varepsilon_{44} = 6 - 5 + 5 - 4 = 2$; $\varepsilon_{54} = 5 - 1 + 2 - 4 + 5 - 5 = 2$.

Как видно из расчетов все оценки положительные, т.е. не уменьшают издержки. Выбран оптимальный план перевозок $F_{\min} = 721$.

Контрольные вопросы

1. Транспортная задача: постановка.
2. Транспортная задача: экономическая значимость.
3. Транспортная задача: условия существования решения.
4. Отличие транспортной задачи от общей задачи линейного программирования.
5. Как найти начальное решение транспортной задачи методом северо-западного угла?
6. Как решается транспортная задача методом минимальной стоимости?
7. Как решается транспортная задача методом потенциалов?
8. Построение замкнутого контура (цикла) при решении транспортной задачи.
9. Открытая и закрытая транспортная задача.
10. Приведение открытой транспортной задачи к закрытому типу.

Тесты

1. Что требуется определить в транспортной задаче?

   а) такой план перевозок, чтобы все заявки не были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была бы минимальна;

   б) такой план перевозок, чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была бы минимальна;

   в) такой план перевозок, чтобы все заявки были выполнены, а общая стоимость всех перевозок была бы максимальна;

   г) такой план перевозок, чтобы все заявки были не выполнены, а общая стоимость всех перевозок была бы максимальна;

   д) содержание п. а и г.

2. Транспортные задачи являются одним из видов задач:

   а) линейного программирования;

   б) нелинейной оптимизации;

   в) динамического программирования;

   г) теории игр.

3. Система ограничений в транспортной задаче включает в себя:

   а) уравнения баланса по поставщикам;

   б) уравнения баланса по потребителям;

   в) суммарное время перевозок;

   г) п.п. а, б;

   д) п.п. а-в.

4. Целевой функцией в транспортной задаче является:

   а) суммарные транспортные издержки;

   б) суммарное время перевозок;

   в) длина маршрута перевозок.

5. Оценка пустой клетки показывает:

   а) на сколько изменится значение целевой функции, после совершения единичной поставки в рассматриваемую клетку;

   б) максимально возможную поставку в рассматриваемую клетку;

   в) стоимость перевозки единицы товара.

6. Как решается транспортная задача:

   а) методом потенциалов;

   б) методом обратной матрицы;

   в) методом «северо-западного угла».

7. Транспортная задача может быть

   а) замкнутая;

   б) закрытая;

   в) обособленная.

8. Для нахождения опорного плана транспортной задачи применяется

   а) метод скользящей средней;

   б) метод потенциалов;

в) метод «северо-западного угла».

9. Сколько занятых клеток в транспортной таблице соответствует опорному плану перевозок:

а) n+m; б) n+m – 1; в) n+m+1.

10. Всегда ли для пустой клетки транспортной таблицы существует контур перепоставки?

а) да;

б) нет;

в) при соблюдении определенных условий.

Ответы к тестам

1) б	6) а
2) а	7) б
3) г	8) в
4) а	9) б
5) а	10) а

Задания и задачи

Задача 1. Решите транспортную задачу

Aj / Bi	22	33	13
38	4	2	3
20	6	3	5
5	3	1	4

Задача 2. Решите транспортную задачу

Aj / Bi	25	35	15
15	6	5	4
35	0	1	2
45	3	2	1

Задача 3. В пунктах А и В находятся соответственно 100 и 180 т горючего. Пунктам 1, 2 и 3 требуется соответственно 60, 80 и 140 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 равна 100, 200 и 200 руб., а из пункта В в пункты 1, 2, 3 – 500, 200 и 400 руб. за 1т. соответственно. Составить план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

Задача 4. Из трех холодильников, вмещающих мороженную рыбу в количествах 320т, 280т, 250т, необходимо ее доставить в пять магазинов в количествах 140т, 150т, 110, 230т, 220т. Стоимости перевозки 1т рыбы из холодильника i в магазин j заданы в виде матрицы C={c_{ij}} размерностью 3х5. Написать математическую модель задачи и спланировать перевозки так, чтобы их общая стоимость была минимальной.

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 23 & 20 & 15 & 24 \\ 29 & 15 & 16 & 19 & 29 \\ 6 & 11 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

2.3.7. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Рекомендуемые темы рефератов

1. Постановка, экономическая значимость и условия существования решения транспортной задачи.
2. Методы решения транспортной задачи.
3. Область применения транспортной задачи.

Литература для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
2. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.И. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб.пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
4. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
5. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
6. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.

ТЕМА 2.4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СЕТЕВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

2.4.1. Построение сетевых графиков.

Методы сетевого моделирования применяются при планировании и управлении разработкой крупных народнохозяйственных комплексов, научными исследованиями, конструкторской и технологической подготовкой производства, освоения новых видов изделий, строительством и реконструкцией, капитальным ремонтом основных фондов. Сетевое моделирование основано на применении так называемой сетевой модели комплекса взаимосвязанных работ, направленных на достижение определенной цели.

Первые системы, использующие сетевые модели, были применены в США в конце 50-х годов и получили названия CPM (английская аббревиатура метода критического пути) и PERT(метод оценки и обзора программы). Система CPM была впервые применена при управлении строительными работами, метод PERT – при разработке ракетных систем “Поларис”.

В России работы по сетевому планированию начались в 60-х годах. Тогда эти методы нашли применение в строительстве и научных разработках. В дальнейшем сетевые методы стали широко применяться и в других областях народного хозяйства.

Система сетевого планирования и управления позволяет:

а) формировать календарный план реализации некоторого комплекса работ;

б) выявлять и мобилизовывать резервы времени, трудовые, материальные и денежные ресурсы;

в) осуществлять управление комплексом работ с прогнозированием и предупреждением возможных срывов в ходе работ;

г) повышать эффективность управления в целом при четком распределении ответственности между руководителями разных уровней и исполнителями работ.

Диапазон применения методов сетевого планирования и управления весьма широк: от задач, касающихся деятельности отдельных лиц, до проектов, в которых участвуют сотни организаций и десятки тысяч людей.

Для того чтобы составить план работ по осуществлению больших и сложных проектов, состоящих из тысяч отдельных исследований и операций, необходимо описать его с помощью математической модели. Таким средством описания проектов (комплексов работ) и является сетевая модель.

Сетевая модель содержит информацию о параметрах работ и их логической взаимосвязи. Основу логической взаимосвязи работ составляют:

а) технологическая зависимость работ,

в) ресурсные зависимости.

Графическое изображение сетевой модели будем называть сетевым графиком.

Сетевой график состоит из двух основных элементов: дуг (стрелок) и вершин

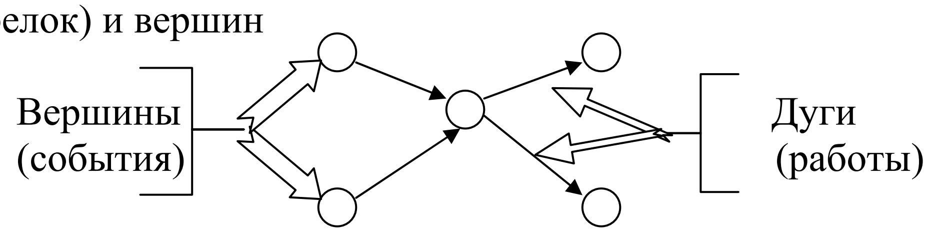


Рис. 2.4.1

Дуги графика обычно задают работы; вершины, которые какие-либо дуги соединяют, называют событиями.

Дуга (стрелка) используется для отображения:

а) действительной работы,

б) работы-ожидания,

в) фиктивной работы.

Под действительной работой будем понимать процесс, требующий для своего осуществления затрат времени и ресурсов (например, возведение фундаментов, монтаж каркаса и т.п.).

Под работой-ожиданием будем понимать процесс, требующий для своего осуществления затрат времени, но не требующий затрат ресурсов (например, твердение бетона, охлаждение цементной печи т.п.).

Фиктивная работа используется для отображения взаимосвязи между событиями.

Событие отображает результат одной или совокупный результат нескольких работ, представляющий возможность начать одну или несколько непосредственно следующих (из данного события) работ.

Если работа отображается дугой, примыкающей к некоторому событию своим концом, то такая работа называется входящей в данное событие.

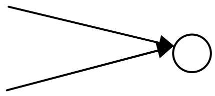


Рис. 2.4.2. Входящие работы

Если работа отображается дугой, примыкающей к некоторому событию своим началом, то такая работа называется выходящей из данного события.

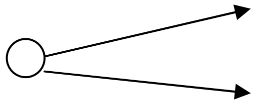


Рис. 2.4.3. Выходящие работы

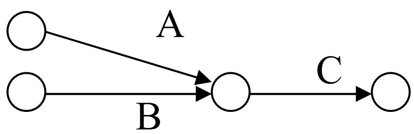
Событие считается свершившимся, если окончены все входящие в него работы. Работы, выходящие из события, могут быть начаты только после свершения данного события. Таким образом, работы, входящие в событие, должны быть выполнены ранее работ, выходящих из этого события. Событие, за которым непосредственно следует работа (из которого работа выходит) называется начальным событием данной работы. Событие, которому работа непосредственно предшествует, называется конечным событием данной работы.

Топологией сетевого графика называется его структура, определяющая взаимозависимость событий и работ. События кодируются числами. При правильной кодировке код начального события должен быть меньше кода конечного события. Работы обозначаются с помощью кодов начального и конечного событий. Если начальное событие имеет код i, а конечное событие код j, то работу, их связывающую, будем обозначать (i,j).

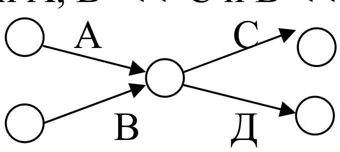
Правила построения сетевого графика

Условимся знаком << обозначать предшествование работ друг другу, т.е. запись А << В означает, что работа А должна быть завершена до начала работы В.

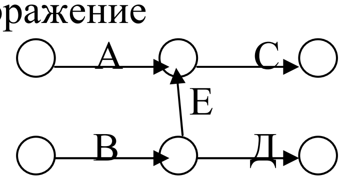
1. Если работы А и В предшествуют работе С (А, В << С), то это изображается следующим образом:



2. Если А, В << С и В << Д, то изображение



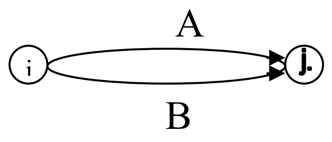
неправильно

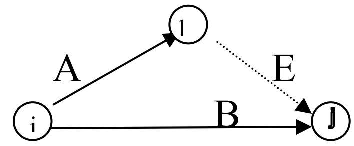


правильно

В правильном фрагменте используется фиктивная работа Е. Поскольку на работу Е не затрачиваются ни время, ни ресурсы, заданные отношения упорядочения выполняются.

3. Если для начала работ А и В необходимо свершение события i, а окончание работ А и В необходимо для свершения события j, то такая ситуация изображается так:

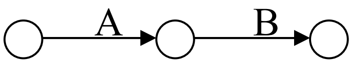


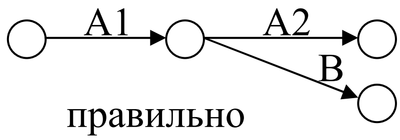


неправильно правильно

Любые два события должны быть непосредственно связаны не более чем одной работой (стрелкой).Такой способ изображения вводится для того, чтобы работы А и В различались при обозначении с помощью кодов начального и конечного события. Работу А обозначим тогда (i,l), а работу В – (i,j). Работа Е– (l,j) – фиктивная.

4. Если для начала работы В достаточно выполнить только часть работы А, то эта ситуация изображается

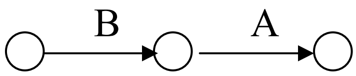


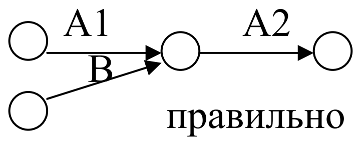


неправильно правильно

т.е. работа А разбивается на две части (работы) А1 и А2, где А1та часть работы А, после которой можно начинать работу В.

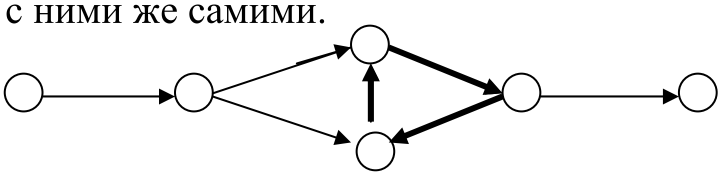
5. Если результат работы В нужен не к началу работы А, а к некоторому промежуточному моменту, то это изображается так:





неправильно правильно

6. В сетевом графике не должно быть замкнутых контуров (циклов, петель), т.е. путей, соединяющих некоторые события посредством стрелок с ними же самими.



7. В сетевом графике может быть только одно событие, которому не предшествует ни одна работа. Это событие назовем исходным. Исходное событие отражает необходимые условия для начала выполнения всего комплекса работ.

8. В сетевом графике может быть только одно событие, из которого не выходит ни одна работа. Это событие назовем завершающим. Завершающее событие отражает конечную цель выполнения всего комплекса работ.

В последующем будут рассмотрены случаи, когда требование единственности исходного и завершающего событий необязательно.

Кроме выше приведенных примеров фиктивные работы (или события) могут вводиться и в ряде других случаев, например, для отражения зависимости событий, не связанных с реальными работами. На сетевом графике такие фиктивные работы (связи) показываются пунктирными стрелками. Кроме того, фиктивные работы могут вводиться для отражения реальных отсрочек и ожидания.

2.4.2. Временные параметры сетевого графика

Каждой дуге сетевого графика поставим в соответствие некоторое число, соответствующее продолжительности работы, отображаемой данной дугой. Число, приписанное дуге (i,j), будем называть длиной дуги и обозначать tij.

Множество дуг, упорядоченное таким образом, что конечное событие одной из них является начальным событием другой, называется путем.

Рассмотрим небольшой пример.

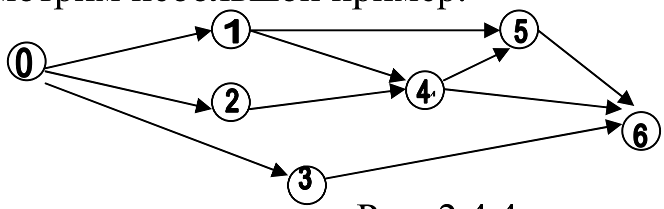


Рис. 2.4.4

Будем различать четыре вида пути:

а). Полный путь – путь, начало которого совпадает с исходным событием сети, конец – с завершающим, например, (0,1)-(1,4)-(4,5)-(5,6) или (0,2)-(2,4)-(4,6).

б). Путь, предшествующий событию – это путь от исходного события до данного события, например, для события 4 предшествующими путями будут (0,2)-(2,4) и (0,1)-(1,4).

в). Путь, следующий за событием – это путь от данного события до завершающего, например, для события 2 это пути (2,4)-(4,5)-(5,6) и (2,4)-4,6).

г). Путь между двумя событиями – путь, начало и конец которого совпадают с соответствующими событиями, например, между событиями 2 и 5 лежит путь (2,4)-(4,5).

Под длиной пути будем понимать продолжительность выполнения всей последовательности работ, составляющих данный путь.

Таким образом, длина пути равна сумме длин всех дуг данного пути.

Наиболее продолжительный полный путь в сетевом графике называется критическим. Критическими называются также работы и события, расположенные на этом пути.

Рассмотрим еще один пример сетевого графика. Цифры на каждой дуге означают продолжительности работ.

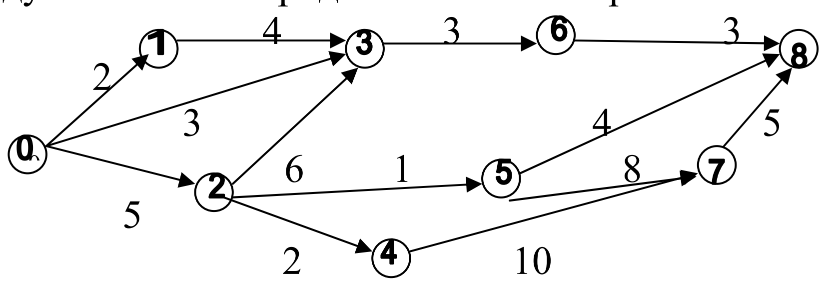


Рис. 2.4.5

Здесь полными путями будут:
путь (0,1)-(1,3)-(3,6)-(6,8) продолжительностью 2+4+3+3=12,
путь (0,3)-(3,6)-(6,8) продолжительностью 3+3+3=9,
путь (0,2)-(2,3)-(3,6)-(6,8) продолжительностью 5+6+3+3=17,
путь (0,2)-(2,5)-(5,7)-(7,8) продолжительностью 5+1+8+5=19,
путь (0,2)-(2,5)-(5,8) продолжительностью 5+1+4=10 и
путь (0,2)-(2,4)-(4,7)-(7,8) продолжительностью 5+2+10+5=22.

Перебрав все полные пути, мы видим, что последний путь имеет наибольшую продолжительность, поэтому он и является критическим (далее мы приведем способ определения критического пути без перебора всех полных путей). Продолжительность критического пути составляет 22 (например, дня), т.е. для проведения всего комплекса работ понадобится 22 дня. Быстрее комплекс выполнить нельзя, так как для достижения цели (завершающего события) работы критического пути надо выполнить обязательно. Определив критический путь, мы тем самым установили критические события сети 0, 2, 4, 7, 8 и критические работы (0,2), (2,4), (4,7), (7,8).

Критический путь имеет особое значение в системах сетевого планирования и управления. Действительно, срыв сроков выполнения какой-либо работы критического пути влечет срыв срока выполнения всего комплекса в целом, и, с другой стороны, для сокращения продолжительности проекта необходимо в первую очередь сокращать продолжительность работ, лежащих на критическом пути.

Временные параметры сети состоят из временных параметров событий и временных параметров работ. Рассмотрим содержание и алгоритм расчета параметров событий.

Временем T_j наступления (или свершения) события j считается момент окончания всех работ, входящих в это событие.

Минимальное (самое раннее) время T_j^o наступления события j равно длине максимальному из путей, предшествующих данному событию. Очевидно, что это время является и самым ранним временем начала работ, выходящих из этого события. Например, в последнем примере событие 3 может свершиться не ранее, чем через 11 дней от исходного события, т.к. наибольшая длина пути, предшествующего данному событию (пути (0,2)-(2,3)) равна 11.

Критическим временем выполнения комплекса работ будем называть раннее время наступления завершающего события. Критическое время – это минимальное количество времени, необходимое для выполнения всего комплекса работ, очевидно, совпадает с длиной критического пути.

Для вычисления T_j^o необходимо сначала рассмотреть все события i, соединенные дугой (i,j) с данным событием j, вычислить для них ранние времена и при этом на каждом шаге использовать формулу

$$T_j^o = \max_{\forall i} \{ T_i^o + t_{ij} \} \qquad (2.4.1)$$

Вычисления начинаются с исходного события и продолжаются до тех пор, пока не будет достигнуто завершающее событие всей сети.

Проиллюстрируем алгоритм вычисления ранних времен.

Принимаем $T_0^o = 0$. Поскольку в событие 1 входит только одна работа (0,1) продолжительностью $t_{01}=2$, то $T_1^o = T_0^o + t_{01} = 0+2=2$.

Рассмотрим далее событие 2 (Заметим, что событие 3 пока рассматривать нельзя, так как срок T_2^o еще неизвестен). Таким образом, $T_2^o = T_0^o + t_{02} = 0+5=5$. Перейдем теперь к событию 3. Поскольку в него входят три дуги (0,3),(2,3) и (1,3), то

$$T_3^o = \max_{i=0,1,2} \{ T_i^o + t_{i3} \} = \max\{ 0 + 3; 2+4; 5+6 \} = 11.$$

Вычисления продолжаем аналогичным образом, пока не будут определены значения T_j^o для всех событий j. Имеем

$$T_4^o = T_2^o + t_{24} = 5 + 2 = 7,$$
$$T_5^o = T_2^o + t_{25} = 5 + 1 = 6,$$
$$T_6^o = T_3^o + t_{36} = 11 + 3 = 14,$$
$$T_7^o = \max_{i=4,5} \{ T_i^o + t_{i7} \} = \max\{ 7+10; 6+8 \} = 17,$$

$$T_8^o = \max_{i=5,6,7} \{ T_i^o + t_{i8} \} = \max\{ 6+4; 14+3; 17+5 \} = 22.$$

На этом вычисления T_i^o заканчиваются.

Теперь от завершающего события к исходному (справа налево) определяем T_i^1 – максимально допустимый (**поздний) срок** завершения всех работ, входящих в данное событие, при котором критическое время выполнения всего комплекса работ останется неизменным. Если обозначить **n** – завершающее событие сети, то $T_n^1=T_n^0$ является отправной точкой алгоритма вычисления поздних сроков. В общем виде для любого события i,

$$T_i^1 = \min_{\forall j} \{ T_j^1 - t_{ij} \} \quad \text{для всех дуг } (i,j). \qquad (2.4.2)$$

Вычислим значения T_i^1 на последнем примере (рис.2.4.5).

$$T_8^1 = T_8^0=22,$$
$$T_7^1 = T_8^1 - t_{78} = 22 - 5 = 17,$$
$$T_6^1 = T_8^o - t_{68} = 22 - 3 = 19,$$
$$T_5^1 = \min_{j=7,8} \{ T_j^1 - t_{5j} \} = \min\{ 17–8; 22 - 4 \}=9,$$
$$T_4^1 = T_7^1 - t_{47} = 17 - 10 = 7,$$
$$T_3^1 = T_6^1 - t_{36} = 19 - 3 = 16,$$
$$T_2^1 = \min_{j=3,4,5} \{ T_j^o - t_{2j} \} = \min\{ 16–6; 7 - 2; 9 - 1 \}=5,$$
$$T_1^1 = T_3^1 - t_{13} = 16 - 4 = 12,$$
$$T_0^1 = \min_{j=1,2,3} \{ T_j^1 - t_{0j} \} = \min\{ 12–2; 5 - 5; 16 - 3 \}=0.$$

Определим резерв времени R_i i-го события как разность между поздним и ранним сроками его свершения:

$$R_i = T_i^1 - T_i^0 \qquad (2.4.3)$$

Резерв времени события показывает, на какой допустимый период времени можно задержать наступление данного события, не вызывая при этом увеличения срока выполнения комплекса работ. Сведем результаты вычислений значений T_i^1, T_i^o и R_i в таблицу:

Таблица 2.4.1

Номер события	Сроки свершения события		Резерв времени R_i
	Ранний T_i^o	Поздний T_i^1	
0	0	0	0
1	2	12	10
2	5	5	0
3	11	16	5
4	7	7	0
5	6	9	3
6	14	19	5
7	17	17	0
8	22	22	0

Теперь, используя данные табл. 2.4.1, можно определить работы критического пути (без полного перебора полных путей). Работа (i,j) принадлежит критическому пути, если она удовлетворяет следующим трем условиям:

$$T_i^0=T_i^1$$
$$T_j^o = T_j^1 \qquad (2.4.4)$$
$$T_j^o - T_i^o = T_j^1 - T_i^1 = t_{ij}$$

По существу, эти условия означают, что между ранним сроком начала (окончания) и поздним сроком начала (окончания) критической работы запас времени отсутствует. Условиям (2.4.4) удовлетворяют работы (0,2), (2,4), (4,7) и (7,8), т.е. они образуют критический путь, в чем мы и ранее убедились перебором всех полных путей.

Временные параметры работ.

Различают несколько разновидностей резервов времени работ, мы рассмотрим два основных вида: **полный резерв** и **свободный резерв**. Полный резерв работы (i,j) определяется по формуле:

$$R^п_{ij}=T_j^1 - T_i^0 - t_{ij} \qquad (2.4.5)$$

$R^п_{ij}$ показывает, на сколько можно увеличить время выполнения данной работы при условии, что срок выполнения всего комплекса работ не изменится. Кроме того, полный резерв времени есть разность между критическим временем и длиной максимального полного пути, проходящего через эту работу.

Полный резерв критических работ равен 0. У некритических работ $R^п_{ij}>0$. При использовании полного резерва времени только для одной работы резервы времени остальных работ, лежащих на максимальном пути, проходящем через нее, будут полностью исчерпаны, т.е. увеличение продолжительности некритической работы за счет использования всего ее полного резерва обязательно влечет появление нового критического пути, в состав которого войдет эта работа.

Опоздание начала некритической работы (i,j) по сравнению с T_i^0 на всю величину ее полного резерва влечет за собой необходимость начинать все работы, выходящие из события j в наиболее позднее допустимое время T_j^1 наступления этого события.

Свободный резерв времени R^c_{ij} работы (i,j) представляет часть полного резерва времени, на которую можно увеличить продолжительность работы, не изменив при этом раннего срока ее конечного события. Этим резервом можно располагать при выполнении данной работы в предположении, что ее начальное и конечное события свершаются в свои самые ранние сроки.

$$R^c_{ij}=T_j^0 - T_i^0 - t_{ij} \qquad (2.4.6)$$

Таким образом, свободный резерв времени может быть использован на увеличение продолжительности данной и предшествующих работ без нарушения резерва времени последующих работ.

Для рис. 2.4.5 проведем вычисления по формулам (2.4.5), (2.4.6):

Таблица 2.4.2

(i,j)	t_{ij}	T_i^0	T_j^1	$R^п_{ij}$	R^c_{ij}
(0,1)	2	0	12	10	0
(0,2)	5	0	5	0	0
(0,3)	3	0	16	13	8
(1,3)	4	2	16	10	5
(2,3)	6	5	16	5	0
(2,4)	2	5	7	0	0
(2,5)	1	5	9	3	0
(3,6)	3	11	19	5	0
(4,7)	10	7	17	0	0
(5,7)	8	6	17	3	3
(5,8)	4	6	22	12	12
(6,8)	3	14	22	5	5
(7,8)	5	17	22	0	0

В табл. 2.4.2 приведены результаты расчетов временных параметров работ. Она содержит всю необходимую для построения календарного плана (графика) информацию. Когда полный резерв равен 0, свободный резерв также должен быть равен 0. Однако обратное неверно, поскольку свободный резерв некритической работы также может быть нулевым (например, работы (0,1), (2,3)).

Конечным результатом выполняемых на сетевой модели расчетов является **календарный график (план)**. При построении календарного графика необходимо учитывать наличие ресурсов, так как одновременное выполнение некоторых работ из-за ограничений, связанных с рабочей силой, оборудованием, материальными и другими видами ресурсов, может оказаться невозможным. Проблемам оптимизации потребления ограниченных ресурсов на основе сетевых моделей посвящен пункт 2.4.8. Далее на нашем примере (исходный график на рис. 2.4.5, расчетные данные в табл.2.4.2) иллюстрируется процедура построения календарного плана при отсутствии ограничений на ресурсы. Результат на рис 2.4.6.

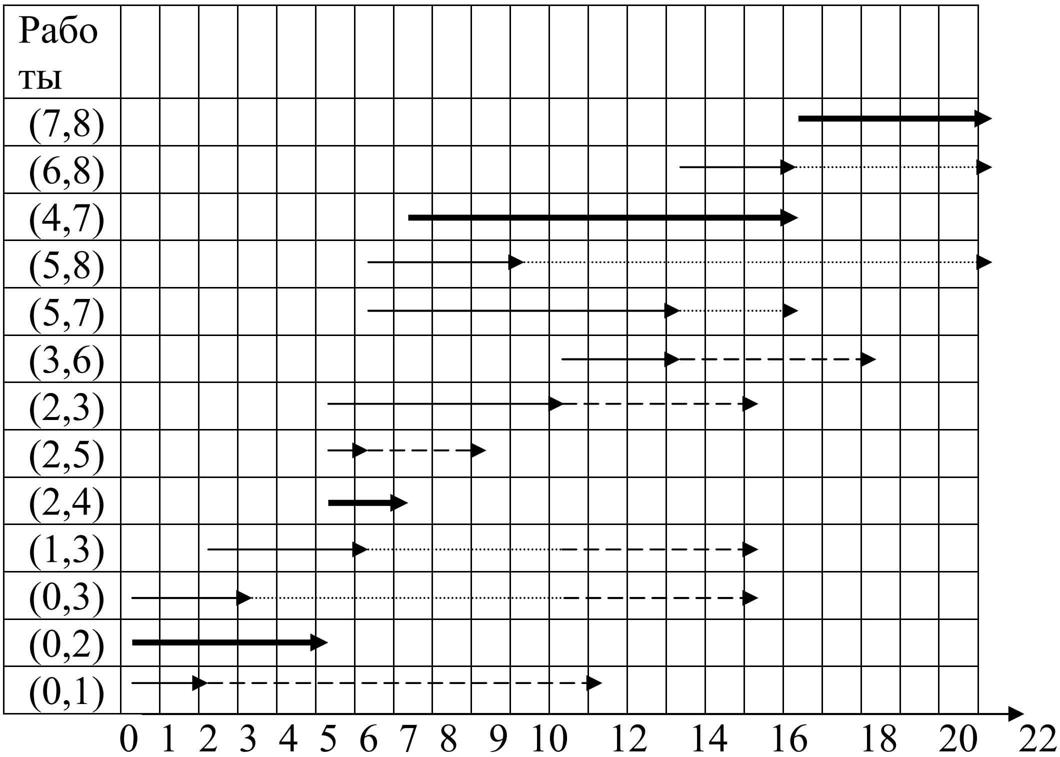


Рис. 2.4.6

Пояснения к рис. 2.4.6. Стрелками на графике обозначены:

- критические работы,
- некритические работы,
- полные резервы,
- свободные резервы (как часть полных).

Все работы выставлены на графике в *ранние сроки* начала.

2.4.3. Приведение сетевого графика к заданному сроку.

Процедура приведения сетевого графика к заданному сроку не относится к классу оптимизационных задач. На основе анализа сетевого графика нам необходимо принять некоторое целенаправленное решение, а именно, обеспечить окончание комплекса работ к заданному (директивному) сроку. Обозначим его $T^{дир}$. Речь не идет о поиске наилучшего (по какому-нибудь критерию) решения, а лишь о целенаправленном решении.

Мы рассмотрим процедуру приведения сетевого графика к заданному сроку, которая осуществляется, как правило, при использовании метода PERT или CPM. Эта процедура не формализована, т.е. не является строгим алгоритмом, как, например, при расчете параметров сетевого графика. Приведение сетевого графика к заданному сроку осуществляется при творческом анализе информации, которую дает сетевой график, и конкретных производственных условий, не отраженных в сетевой модели, так называемых *внемодельных факторов*.

Вначале сравниваем критическое время комплекса работ (T_n^0) с директивным. Если $T_n^0 \leq T^{дир}$, то сокращать ничего не нужно.

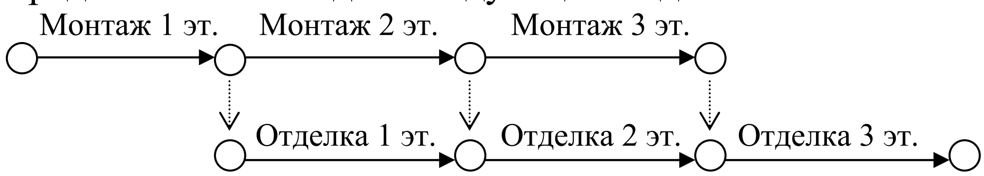
Если $T_n^0 > T^{дир}$, то критическое время необходимо сократить на величину $\Delta = T_n^0 - T^{дир}$, причем прежде всего сокращению подлежат работы критического пути. Кроме того, необходимо проанализировать пути, содержащие работы, у которых $R^п_{ij} < \Delta$. Если эти пути содержат работы критического пути, уже сокращенные на общее количество дней, меньшее Δ, или не содержат таких работ вообще, то и некоторые работы подобных (так называемых, *подкритических*) путей также необходимо сократить. В противном случае, после сокращения работ критического пути подкритический путь становится новым критическим путем.

Какие именно работы и на сколько сокращать – в этом и заключается творчество, базирующееся на доскональном знании производственной ситуации. Сокращение продолжительности работ можно достичь добавлением ресурсов (рабочей силы, механизмов и т.п.). Сокращение отдельных путей можно произвести за счет совмещения (параллельного выполнения) некоторых работ пути, при этом частично изменяется топология сетевого графика.

Рассмотрим опять наш пример (рис 2.4.5).

Пусть $T^{дир} = 18$, тогда $\Delta = 22 - 18 = 4$. Значит, необходимо на 4 дня сократить длину критического пути. Также следует рассмотреть путь, содержащий работы (2,5) и (5,7), так как $R^п_{25} = R^п_{57} = 3 < 4$. Этот путь имеет общие работы с критическим путем – (0,2) и (7,8). Если производственная ситуация позволяет сократить их продолжительность на 2 дня каждую, то критический путь и подкритический (0,2)-(2,5)-(5,7)-(7,8) сокращаются на 4 дня, что нам и требовалось.

Рассмотренные нами традиционные сетевые модели обладают рядом недостатков: в таких сетевых моделях адекватно можно отобразить только независимо или последовательно выполняемые работы. Другие схемы выполнения работ (например, параллельное или частично совмещенное их выполнение) не подаются точному описанию. Чтобы отобразить подобные ситуации в традиционных сетевых моделях, прибегают к раздроблению работ. Например, работу «монтаж коробки здания» разбивают на работы «монтаж 1-го этажа», «монтаж 2-го этажа» и т.д., работу «отделка здания» на «отделку 1-го этажа», «отделку 2-го этажа» и т.д. Фрагмент сетевой модели представляется тогда в следующем виде:



Такой прием усложняет построение модели, увеличивает число работ сети, делает модель менее гибкой по отношению, например, к последовательности раздробленных работ или к изменению их продолжительностей. Кроме того, не исключено появление календарного плана, при котором работа «монтаж коробки здания» ведется с перерывами, что может быть неприемлемым в связи с требованием использования какого-либо ресурса (бригады, механизма) без простоя.

Традиционные сетевые модели, отражая одновариантную технологию и организацию работ, обладают низкой «устойчивостью» по отношению к изменениям, происходящим в объекте моделирования в процессе его функционирования, т.к. даже незначительные изменения в технологии выполнения работ требуют внесения существенных изменений в топологию сети.

2.4.4. Обобщенные сетевые модели.

Обобщенные сетевые модели, разработанные В.И.Воропаевым в конце 60-х годов, лишены перечисленных выше недостатков.

Основные отличия обобщенных сетевых моделей от традиционных заключаются в следующем:

– вводятся дуги *отрицательной* длины;

– разрешается наличие циклов (правда, для обеспечения непротиворечивости модели, только отрицательной длины);

– можно задавать «абсолютные» ограничения на сроки свершения любых событий.

Обобщенная сетевая модель представляет собой ориентированный граф, который описывается системой неравенств:

$$T_j \geq T_i + \psi_{ij} \qquad (2.4.7)$$

для любой дуги графа и

$$l_i \leq T_i \leq L_i, \qquad (2.4.8)$$

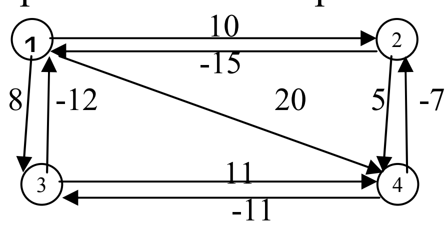
где T_i – искомые сроки свершения событий, ψ_{ij} – произвольные действительные числа, l_i и L_i – “абсолютные ограничения” (на тех событиях, где они не заданы, принимается $l_i = -\infty$, $L_i = +\infty$).

Если событие i определяет момент начала работы (i,j), а событие j момент ее окончания, то неравенство (2.4.7) при положительном значении ψ_{ij} совпадает по смыслу с аналогичным неравенством в традиционных сетях, причем ψ_{ij} равно минимальной продолжительности этой работы t_{ij}^{min}. Максимальную продолжительность работы (i,j) задают с помощью отрицательного параметра ψ_{ji}, равного $(-t_{ij}^{max})$. Требование непрерывности выполнения работы (i,j) реализуется заданием параметров $\psi_{ij} = -\psi_{ji}$.

Если события i и j принадлежат разным работам и связаны дугой (i,j), то она интерпретируется как технологическая зависимость:

– при положительном значении ψ_{ij} событие j может свершиться *не ранее* чем через ψ_{ij} единиц времени после свершения события i;

– при отрицательном ψ_{ij} событие i должно наступить *не позднее* чем через $|\psi_{ij}|$ единиц времени после свершения события j.



На приведенном фрагменте обобщенной сетевой модели заданы две работы (1,2) и (3,4), причем продолжительности работ удовлетворяют требованиям: $10 \le t_{12} \le 15$ и $t_{34}=11$ (работа (3,4) должна выполняться без перерыва). Начинать работу (3,4) можно не ранее чем через 8 дней, но и не позднее чем через 12 после начала работы (1,2). Закончена работа (3,4) должна быть не ранее чем через 5 дней и не позднее чем через 7 после окончания работы (1,2), кроме того, окончание работы (3,4) технологически связано с началом работы (1,2) – между этими событиями должно пройти не менее 20 дней.

Как мы видим даже на этом маленьком примере, обобщенные сетевые модели способны обеспечивать более адекватное моделирование технологических процессов при управлении проектами, чем традиционные сетевые модели.

Особенно большое значение такие модели приобретают при решении задач оптимизации планов по различным критериям, связанным с использованием ресурсов и соблюдением специальных технологических и организационных требований. К таким требованиям относится, например, условие непрерывности выполнения работ исполнителями на одном или разных проектах, непрерывность или ограничение перерывов между работами, ограничение сроков выполнения некоторых комплексов работ и т.п.

Обобщенные сетевые модели позволяют без существенных изменений использовать основные понятия традиционного сетевого планирования, такие как ранние и поздние сроки, резервы времени, критический путь и др. Вычисление этих параметров производится с помощью некоторым образом модифицированных алгоритмов, рассмотренных нами выше для традиционных сетей.

Высокая степень гибкости и устойчивости обобщенных сетевых моделей при практически том же порядке трудоемкости подготовки исходных данных по сравнению с традиционными моделями позволяет использовать их в качестве основы для развития и широкого внедрения методов моделирования и оптимизации в системах управления различного назначения.

2.4.5. Вероятностные сетевые модели.

Выше рассматривались постановки задач календарного планирования, не учитывающие вероятностный характер процесса проектирования. Однако во многих случаях при планировании и управлении созданием нового проекта продолжительность работ сетевого графика является случайной величиной, подчиненной некоторому закону распределения. Что касается параметров распределения, то последние задаются для каждой работы их ответственными исполнителями на основе либо нормативных данных, либо априорных соображений, либо своего производственного опыта.

В первых сетевых моделях (PERT) для каждой работы задавались три оценки продолжительности выполнения:

- наиболее вероятное время выполнение m;
- оптимистическая оценка времени a;
- пессимистическая оценка времени b.

Наиболее вероятное время определяется как время выполнения работы при нормальных условиях. Оптимистическая и пессимистическая оценки задают размах колебаний продолжительности работы под влиянием неопределенности.

Вероятностная сетевая модель типа PERT предполагает, что продолжительность любой работы t есть случайная величина, распределенная по закону бета-распределения на отрезке $[a,b]$ с плотностью

$$\varphi(t)= C(t - a)^{p-1}(b - t)^{q-1}.$$

Ожидаемая продолжительность работы приближенно определяется как $\mu=(a+4m+b)/6$. Среднеквадратическое отклонение от среднего значения $\sigma=(b - a)/6$.

Вероятностные методы, применяемые в системе PERT.

В системе PERT с помощью заданных пользователем трех оценок продолжительности всех работ по вышеприведенным формулам вычисляется средняя продолжительность μ и ее дисперсия σ^2.

Рассматривая среднее значение как фактическую (детерминированную) продолжительность работы, определяют все временные характеристики сети (и критический путь). При этом продолжительность всего проекта определяется как случайная величина, математическое ожидание которой есть сумма средних продолжительностей работ, находящихся на критическом пути, а дисперсия, аналогично, равна сумме всех дисперсий, при допущении, что продолжительности всех работ независимы.

В более общем случае ожидаемое время Mt(i)=M(i) свершения любого i–го события определяется как сумма математических ожиданий времени выполнения работ, лежащих на максимальном пути L между исходным (0) и i–м событиями:

$$M(i)=\sum\nolimits^{n}_{\nu=1}Mt(i_{\nu-1},i_{\nu}),$$

если $L=0\rightarrow i_1\rightarrow i_2\rightarrow\ldots\rightarrow i_n= i$ и $Mt(L) \geq Mt(L')$, где L' любой другой путь между 0 и i–м событиями. Аналогично определяется и дисперсия времени свершения i–м события:

$$D(i)= \sigma^2(i) =Dt(L)=\sum\nolimits^{n}_{\nu=1}Dt(i_{\nu-1},i_{\nu}).$$

Предполагая выполненными условия центральной предельной теоремы, закон распределения времени окончания проекта (в общем случае, любого события i), считают близким к нормальному, вследствие чего используют интегральную формулу Муавра-Лапласа. Таким образом, оценка p_i вероятности свершения i–го события в запланированный срок $t_{пл}(i)$ вычисляется по формуле:

$$P\{t(i) \leq t_{пл}(i)\}=(1/2)\{\Phi[(t_{пл}(i) - M(i)) / \sigma(i)]+1\},$$

где Φ – функция Лапласа.

Вероятность отсутствия резерва времени для момента окончания работы (i,j) оценивают по формуле:

$$P_1(j)=1 - \Phi[(T^1(j) - T^0(j))/ \sigma(j)].$$

Двухоценочная методика.

После анализа большого количества сетевых проектов был построен закон распределения продолжительности выполнения работ с плотностью, зависящей лишь от двух параметров:

$$p(x)=[12/(b - a)^4](x - a)(b - x)^2.$$

Это распределение относится к классу бета-распределений и имеет следующие параметры:

- математическое ожидание $M(x)=(3a+2b)/5$;
- моду $m=(2a+b)/3$;
- дисперсию $D(x)= \sigma^2(x)=0.04(b - a)^2$.

Методика оценки параметров распределения на основании двух задаваемых временных оценок отличается рядом преимуществ по сравнению с трехоценочной методикой системы PERT, прежде всего, за счет уменьшения объема информации, который требуется от исполнителя работы. Эту методику можно с одинаковым успехом применять как при расчете детерминированных (или близких к ним) сетей, так и при моделировании стохастических сетевых проектов.

Рассмотренные нами вероятностные модели и методы определения их временных характеристик использовались большей частью для временного анализа сети и иногда для решения оптимизационных задач типа «время-стоимость».

Основные результаты, получаемые в процессе моделирования вероятностных сетей, следующие:

- получение с определенным уровнем доверительности минимального и максимального времени выполнения проекта;
- получение также с некоторым уровнем уверенности минимального и максимального времени свершения наиболее важных событий;
- оценка вероятности попадания некоторого события на критический путь;
- оценка вероятности попадания работы на критический путь;
- выделение с некоторым уровнем доверительности критического и резервного подграфов.

2.4.6. Стохастические сетевые модели.

До сих пор мы рассматривали модели с детерминированной топологией сети. При моделировании сложного проекта нередко наиболее гибкими и полезными оказываются сетевые модели со стохастической структурой. Стохастическую сеть определяют как сеть, содержащую альтернативные узлы (состояния), при этом дуги (работы) характеризуются не только вероятностным распределением продолжительности, но и вероятностью их выполнения.

Стохастическая сетевая модель с множеством возможных исходов, являясь дальнейшим развитием традиционных сетей, дает возможность полнее отобразить процесс разработки и создания сложного проекта. Применяемый для анализа стохастических сетевых моделей математический аппарат позволяет вычислять вероятности различных альтернативных исходов, оценивать время их возможной реализации.

Стохастическая сетевая модель есть конечный граф $G=(\Omega,A)$, где Ω– есть множество детерминированных и альтернативных вершин, отождествляемых с событиями, а технологическая матрица $A=\{p_{ij}\}$ задает множество ориентированных дуг, отождествляемых с работами (или связями). Для стохастических сетей $0\leq p_{ij} \leq 1$, причем $p_{ij}=1$

определяет работу (i,j) аналогично принятым в традиционных сетях определениям, а $0 < p_{ij} < 1$ соответствует альтернативному событию i, из которого с вероятностью p_{ij} «выходит» работа (i,j). Другими словами p_{ij} – вероятность того, что работа (i,j) будет выполнена при условии, что узел i выполнен.

Пусть $\varphi(t_{ij})$ – плотность распределения времени выполнения работы (i,j). M[x] – математическое ожидание случайной величины x. Вводится условная производящая функция моментов случайной величины t_{ij} как $M_{ij}(s)=M[e^{st_{ij}}]$, т.е.

$$M_{ij}(s)=\begin{cases} \int e^{st_{ij}}\varphi(t_{ij})dt_{ij} & \text{(для непрерывной случайной величины),} \\ \sum e^{st_{ij}}\varphi(t_{ij}) & \text{(для дискретной случайной величины).} \end{cases}$$

В частности, $M_{ij}(s)=M[e^{sa}] = e^{sa}$ при $t_{ij}=a=const$, $M_{ij}(0)=1$.

Для каждой дуги (i,j) определяется Ψ–функция как

$$\Psi_{ij}(s) = p_{ij}M_{ij}(s).$$

Исходная сеть преобразуется в эквивалентную, используя три базисных преобразования:

- последовательные дуги,
- параллельные дуги,
- петли.

Для последовательных дуг (рис.2.4.7)

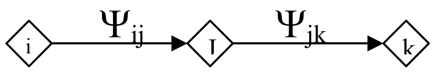


Рис. 2.4.7

$$\Psi_{ik}(s) = \Psi_{ij}(s)\Psi_{jk}(s).$$

Для параллельных дуг (рис.2.4.8)

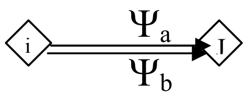


Рис. 2.4.8

$$\Psi_{ij}(s) = \Psi_a(s) +\Psi_b(s).$$

Для петель вида (рис. 2.4.9)

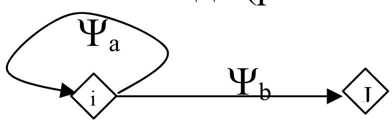


Рис. 2.4.9

$$\Psi_{ij}(s) = \Psi_b(s)/[1 - \Psi_a(s)].$$

Комбинируя базисные преобразования, любую сеть можно преобразовать в эквивалентную сеть, состоящую из одной дуги (Е-дуги).

Цель временного анализа стохастической сети состоит в вычислении математического ожидания и дисперсии времени выполнения сети (или любого ее фрагмента) и вероятности выполнения заключительного (или любого другого события) сети.

Здесь используется теория замкнутых потоковых графов, где введенная выше Ψ-функция трактуется как соответствующий коэффициент пропускания дуги. Для применения результатов этой теории к открытой сети с искомым параметром $\Psi_E(s)$ вводится дополнительная дуга с параметром $\Psi_A(s)$, соединяющая конечное событие (сток) с начальным (источником).

Затем используется топологическое уравнение для замкнутых графов, известное как правило Мейсона, следующего вида:

$$1-\sum T(L_1)+\sum T(L_2)-\sum T(L_3)+\ldots+(-1)^m\sum T(L_m)+\ldots=0, \qquad (2.4.9)$$

где $\sum T(L_m)$ – сумма эквивалентных коэффициентов пропускания для всех возможных петель m-го порядка.

Эквивалентный коэффициент пропускания для петли m-го порядка равен произведению коэффициентов пропускания m *не связанных между собой* петель первого порядка, т.е.

$$T(L_m)=\prod\nolimits^{m}_{k=1}T_k.$$

Непосредственно из правила Мейсона следует, что $1-\Psi_A(s)\Psi_E(s)=0$ или $\Psi_A(s)=1/\Psi_E(s)$. Используя данный результат, в топологическом уравнении (4.4.9) $\Psi_A(s)$ заменяется на $1/\Psi_E(s)$ и затем оно решается относительно $\Psi_E(s)$, тем самым получается эквивалентная Ψ-функция для исходной стохастической сети.

Поскольку $\Psi_E(s) = p_E M_E(s)$, а $M_E(0)=1$, то $p_E=\Psi_E(0)$, откуда следует, что

$$M_E(s)= \Psi_E(s)/p_E =\Psi_E(s) /\Psi_E(0). \qquad (2.4.10)$$

После получения аналитического выражения для $M_E(s)$, вычисляют первую и вторую частную производную по s функции $M_E(s)$ в точке s=0, т.е.

$$\mu_{1E}=\partial/\partial s[M_E(s)]_{s=0} \qquad (2.4.11)$$

$$\mu_{2E}=\partial^2/\partial s^2[M_E(s)]_{s=0} \qquad (2.4.12)$$

Первый момент μ_{1E} относительно начала координат есть математическое ожидание времени выполнения сети (преобразованной в эквивалентную ей Е-дугу), а дисперсия времени выполнения сети равна разности между вторым моментом μ_{2E} и квадратом первого, т.е.

$$\sigma^2= \mu_{2E} - (\mu_{1E})^2. \qquad (2.4.13)$$

Таким образом, описанный выше аппарат позволяет вычислять временные параметры любых интересующих пользователя событий стохастической сети, а также определять вероятность их наступления.

Используя полученную информацию, можно с помощью неравенства Чебышева оценивать вероятность любых доверительных интервалов времени окончания проекта при произвольных законах распределения времени выполнения отдельных операций. Если время выполнения каждой операции имеет нормальное распределение, то результирующее время также нормально распределено. В этом случае можно получить вероятностные оценки времени выполнения проекта, используя интегральную теорему Муавра-Лапласа. Кроме того, при достаточно большом числе работ в сети и выполнении некоторых условий (в частности, независимость работ) можно использовать предельную теорему Ляпунова и считать результирующее время выполнения проекта нормально распределенной случайной величиной с характеристиками, вычисленными по выше описанной методике.

Таким образом, стохастическая сетевая модель включает все случайные отклонения и неопределенность, возникающие непосредственно во время выполнения каждой отдельной работы.

В качестве параметра дуги мы рассматривали время выполнения операции (работы). Можно рассматривать также любой характерный параметр, который обладает аддитивностью по дугам любого пути. Это может быть стоимость работы, количество потребного накапливаемого ресурса и т.п.

Следует отметить, что до настоящего времени широкое практическое применение нашли только методы детерминированного сетевого моделирования, некоторые эвристические методы оптимального распределения ресурсов и параметрические методы оценки затрат (преимущественно в сфере воздушных и космических полетов). Хотя точное решение стоимостных задач календарного планирования на основе классических сетевых моделей теоретически найдено, но его практическое использование сопряжено с трудностью получения фактических данных о зависимостях «время-стоимость».

Каждая из рассмотренных выше моделей имеет свою предметную область, по-своему (более или менее полно) реализует базовые функции управления проектом, и только синтез анализируемых моделей и методов позволяет построить модель, адекватно отражающую процесс реализации сложного проекта в условиях неопределенности, и при этом получить приемлемое в практическом отношении решение сформулированной задачи.

2.4.7. Организационные аспекты применения сетевых моделей.

Сетевое планирование и управление комплексами работ (программами, проектами) включает три основных этапа: *структурное планирование, календарное планирование и оперативное управление.*

Этап структурного планирования начинается с разбиения проекта на четко определенные работы (операции). Затем определяются оценки продолжительности работ, и строится сетевая модель. Кстати, при поразительном сходстве независимо разработанных методов PERT и CPM (упомянутых в самом начале), существенным различием первоначально было то, что в методе CPM оценки продолжительности работ предполагались детерминированными величинами, а в методе PERT – случайными. Построение сетевой модели на этапе структурного планирования позволяет детально проанализировать все работы и внести улучшения в структуру проекта еще до начала его реализации.

Конечной целью этапа календарного планирования является построение календарного графика работ. Выявленным работам критического пути необходимо уделять особое внимание, чтобы закончить проект в директивный срок. Что касается некритических работ, то их резервы времени можно выгодно использовать при задержке выполнения таких работ или с позиций эффективного использования ресурсов.

Заключительным этапом является оперативное управление процессом реализации проекта. Этот этап включает использование сетевой модели и календарного графика для составления периодических отчетов о ходе выполнения проекта. Случаи, когда на этапе планирования удается разработать календарный план, в точности соблюдаемый на этапе реализации проекта, встречаются крайне редко. Как правило, некоторые работы выполняются быстрее или медленнее, добавляются новые и упраздняются старые, что, естественно, зависит от конкретных условий. При возникновении таких отклонений от исходного календарного плана возникает необходимость разработки нового плана для остальной части проекта. В этом случае уже законченным работам приписываются нулевые значения продолжительности. Частично выполненным работам приписываются оценки продолжительности, соответствующие их незавершенному объему. В сеть вносятся также структурные изменения, т.е. исключаются работы, которые по каким-либо причинам стали излишними, и вводятся работы, не предусмотренные ранее, но необходимые в будущем. После этого рассчитывается новый календарный план и оценивается возможное изменение продолжительности проекта. В реальных условиях частые корректировки календарного плана, как правило, требуются на начальном этапе реализации проекта. Затем процесс выполнения переходит в установившийся режим и число требуемых корректировок календарного плана существенно сокращается.

2.4.8. Постановки задач распределения ресурсов.

Выше были рассмотрены сетевые модели без учета ограниченности ресурсов, т.е. задача наилучшего распределения ресурсов как таковая не ставилась. В рассмотренных нами методах использования сетевых моделей основное внимание уделялось срокам выполнения отдельных работ и выявлению наиболее важных (критических и подкритических) цепочек работ, от которых зависит своевременное окончание проекта (ввод объекта в эксплуатацию). Таким образом, характерной особенностью этих методов является классификация информации по степени ее важности с точки зрения завершения всего комплекса работ в установленный срок.

Количественной мерой важности информации являются резервы времени работ или коэффициенты напряженности

$$K_{ij}=1 - R^{п}_{ij}/(T_n^0 - T_{кр}(i,j)), \qquad (2.4.14)$$

где $R^{п}_{ij}$ – полный резерв работы (i,j), T_n^0 – критическое время выполнения проекта, $T_{кр}(i,j)$ – продолжительность совпадающего с критическим путем отрезка максимального пути, содержащего работу (i,j). $0 \le K_{ij} \le 1$, причем, чем ближе K_{ij} к 1, тем относительно меньше резерва в запасе у работы (i,j), следовательно, выше риск ее невыполнения в заданные сроки. Например, у работы (2,5) (рис.2.4.5) $T_{кр}(2,5)=5$, $R^{п}_{25}=3$, откуда $K_{25}=1-3/(22-5)=0.82$, а у работы (5,8) $T_{кр}(5,8)=0$, $R^{п}_{58}=12$, откуда $K_{58}=1-12/(22-0)=0.45$. Работы могут обладать одинаковыми полными резервами, но степень напряженности сроков их выполнения может быть различна. И наоборот, различным полным резервам могут соответствовать одинаковые коэффициенты напряженности. Имея информацию, классифицированную подобным образом, руководитель проекта в каждый момент времени может определить, на каком участке следует сосредоточить внимание (и ресурсы) для ликвидации намечающихся отклонений от заданного срока завершения всех работ.

Остановимся подробнее на некоторых основных недостатках, присущих методам, рассмотренным выше.

Давая временную оценку продолжительности какой-либо работы, мы предполагали использование для выполнения этой работы определенных ресурсов с определенной интенсивностью (интенсивность потребления ресурса – это количество ресурса, потребляемое в единицу времени).

В момент назначения временной оценки неизвестно, когда эта работа должна будет выполняться, какие другие работы проекта, потребляющие тот же вид ресурса, будут вестись одновременно. Более того, как правило, одни и те же ресурсы могут потребоваться одновременно на разных проектах. Поэтому не исключено, что суммарная потребность в том или ином ресурсе в отдельные моменты времени может превосходить их наличный уровень. В этих случаях придется или уменьшать интенсивность потребления ресурсов на отдельных работах, либо отложить выполнение ряда работ на более поздние сроки, зачастую за пределы полных резервов этих работ. Это приводит в процессе выполнения проекта к частым корректировкам исходного плана, иными словами, к неустойчивости плана.

Очевидно, если заранее при планировании процесса выполнения проекта учесть ограниченность ресурсов, то можно получить гораздо более надежный план.

Наличный уровень ресурсов и возможные сроки завершения проекта взаимосвязаны. Время завершения всего проекта будет зависеть от того, когда и какое количество ресурсов будет выделено на каждую работу, а это в значительной мере определяется их предполагаемым наличием в каждый момент времени.

Таким образом, возникает задача о распределении ресурсов в сетевой постановке.

Вообще говоря, любой процесс производственного планирования есть не что иное, как решение задачи об эффективном использовании ресурсов.

Критерии эффективности могут быть различны, на этом важном моменте планирования (выборе и обосновании критерия) мы остановимся несколько ниже при рассмотрении конкретных задач.

Введем некоторые понятия и определения.

1. *Программой работ* назовем определенное множество операций (работ), которое нужно выполнить для достижения одной или нескольких целей, причем выполнение работ программы подчинено единому руководящему центру. Можно говорить о программе работ по пусковому комплексу, программе работ участка, строительной организации, проектного института и т.п.

2. *Однотемной программой работ* будем называть программу, состоящую из одного комплекса технологически взаимосвязанных работ, направленных на достижение одной (одноцелевая тема) или нескольких целей (многоцелевая тема).

3. *Многотемной программой работ* будем называть программу, состоящую из нескольких комплексов работ, технологически взаимосвязанных внутри каждого комплекса. Каждый комплекс работ может иметь одну или несколько конечных целей. Работы, принадлежащие разным комплексам, технологически между собой не связаны. Принадлежность тем одной многотемной программе

обуславливается единством управляющего центра и общностью резервуара ресурсов.

Рассмотрим сначала различные постановки задач распределения ресурсов для *однотемной одноцелевой программы*.

Исходя из двух возможных целевых установок при управлении проектом, описанным сетевой моделью, возможны два основных типа постановки задач. Первый тип ориентирован на жесткое соблюдение ограничений по ресурсам, тогда как второй тип предполагает строгое выполнение сроков завершения проекта.

Формулировка первого типа постановки задачи («калибровка»).

При заданных ограничениях в потреблении ресурсов найти такое их распределение с учетом технологической последовательности ведения работ, определенной топологией сетевого графика, которое обеспечивает завершение всей программы за минимальное время.

Формулировка второго типа постановки задачи («сглаживание»).

При соблюдении заданной продолжительности выполнения программы требуется так распределить ресурсы по отдельным работам, чтобы их потребление было оптимальным. Вопрос о выборе критерия оптимальности для этой постановки будет нами рассмотрен специально.

В силу разного механизма удовлетворения потребности в ресурсах их принято разделять на две группы: накапливаемые (складируемые) и ненакапливаемые (нескладируемые). Вторую группу ресурсов часто называют «ресурсы типа мощности».

К первой группе относятся ресурсы, которые по своему характеру допускают накопление с возможностью их последующего использования, например, денежные средства, различные материалы и конструкции и т.п. Ресурсные ограничения в этом случае могут быть заданы интегральной неубывающей функцией, показывающей в каждый момент времени суммарную величину поставок ресурса за весь предшествующий период.

Ко второй группе относятся ресурсы, накопление которых для последующего использования невозможно. Например, ресурсы рабочего и машинного времени. Простой рабочих и механизмов является безвозвратной потерей. Ресурсные ограничения для этой группы задаются функцией наличия ресурса в каждый момент времени.

Пусть r^k_{ij}– интенсивность потребления k-го ресурса на работе (i,j). Тогда величину $w^k_{ij} = r^k_{ij}t_{ij}$ – назовем объемом работы. Обозначим ε^k – множество работ, потребляющих ресурс k, а ε^k_t – множество работ, потребляющих ресурс k в момент времени t ($\varepsilon^k=\bigcup_{\forall t}\varepsilon^k_t$), тогда общая потребность на всю программу в k-м ресурсе равна $W^к = \sum_{(i,j)\in\varepsilon k} w^k_{ij} = \sum_{(i,j)\in\varepsilon k} r^k_{ij} t_{ij}$, причем для ресурсов второго типа этот показатель измеряется в машиносменах, человекоднях и т.п. Пусть наличие ресурсов в каждый момент времени задано функцией $A^к(t)$. Если наличие ресурсов во времени неизменно, т.е. $A^к(t)=A^к$, то величина $\max_k\{W^к/A^к\}$ – определяет минимальное время выполнения программы с точки зрения обеспеченности ресурсами. Учитывая, что время выполнения однотемной программы не может быть меньше критического(T_n^0), вычисленного без учета ограниченности ресурсов, то получаем оценку нижней границы времени, искомого в задачах «калибровки»:

$$T \geq \max\{ T_n^0, \max_k\{W^к/A^к\} \}.$$

Обозначая $F^к(t)=\sum_{(i,j)\in} \varepsilon^k_t r^k_{ij}$ – потребность в ресурсе k в момент времени t, получаем математическую модель задачи «калибровка»_в виде:

Найти такие сроки начала и окончания работ (i, j) T_i* и T_j*, что

1. $T_j^* - T_i^* - t_{ij} \geq 0$, для всех работ (i, j);
2. $A^к(t) \geq F^к(t)$, для всех t и k;
3. $T_n^* \to \min$.

Первое ограничение отображает требование соблюдения технологической последовательности работ.

Второе ограничение учитывает ограниченность ресурсов, т.е. в каждый момент времени потребность в ресурсе не должна превышать его наличия.

T_n^* – срок свершения завершающего события.

Алгоритм решения сформулированной выше задачи носит эвристический характер, и основная его идея заключается в следующем:

(для упрощения примем k =1 и $A^к(t)=A$, т.е. ресурс один и его наличие постоянно во времени).

<u>Процедура 1.</u>

Производится расчет временных параметров сетевого графика и составляется линейная диаграмма, при этом начала работ (i,j) ставятся в ранние сроки свершения событий i.

<u>Процедура 2</u>.

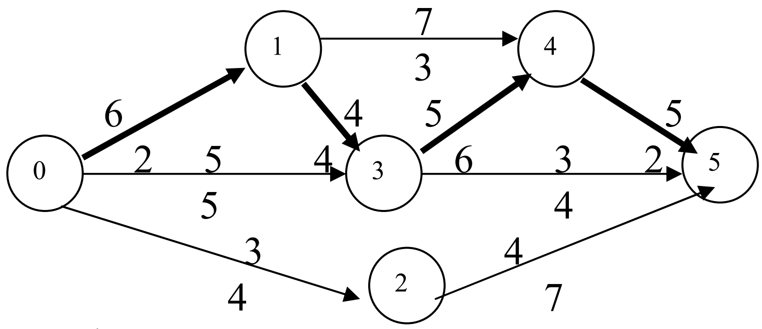
Последовательно (начиная с t=0) проверяем соотношение 2 модели. Если оно выполняется (ресурса хватает на все работы, попавшие в данный интервал), то переходим к следующему интервалу времени и так до конца, в противном случае – к процедуре 3.

Процедура 3.

Все работы, на которые в интервале τ не хватило ресурса, упорядочиваем в соответствии с K_{ij} (корректируя при этом полный резерв в (2.4.1) ранее начатых работ на число дней от их начала до τ). Сдвигаем работы по календарной шкале вправо в порядке возрастания K_{ij} (устанавливаем начало на $\tau+1$ или прерываем работу в интервале τ, если разрыв возможен), пока суммарная потребность в ресурсе оставшихся в данном интервале работ не придет в соответствие с его наличием. После этого производим пересчет временных параметров работ, расположенных в правой от τ части линейной диаграммы, возвращаемся к процедуре 2, и процесс решения продолжается с интервала $\tau+1$.

Проиллюстрируем применение алгоритма на примере.

Пример 2.4.1. Имеется сетевой график



Цифра под стрелкой означает временную оценку (t_{ij}), цифра над стрелкой задает объем необходимого ресурса (r_{ij}). Рассмотрим людской ресурс, и пусть имеется всего 12 исполнителей (т.е. $A^{к}(t)=A=12$).

Найдем суммарную трудоемкость всех работ $W=\sum w_{ij}=\sum r_{ij}t_{ij}=$ $=6\times2+5\times5+3\times4+7\times4+4\times4+5\times6+5\times2+3\times4+4\times7=173$, откуда получаем оценку для T: $T \geq \max\{T_n^0, W/A\} = \max\{14, 173/12\}=15$.

Процедура 1. В табл. 2.4.3 приведены результаты расчетов временных параметров работ

Таблица 2.4.3

(i,j)	t_{ij}	T_i^0	T_j^1	$R^{п}_{ij}$	$R^{с}_{ij}$
(0,1)	2	0	2	0	0
(0,2)	4	0	7	3	0
(0,3)	5	0	6	1	1
(1,3)	4	2	6	0	0
(2,5)	7	4	14	3	3
(1,4)	3	2	12	7	7
(3,4)	6	6	12	0	0
(4,5)	2	12	14	0	0
(3,5)	4	6	14	4	4

На рис.2.4.10 приведен календарный план при отсутствии ограничений на ресурсы. В этой линейной диаграмме начала всех работ приурочены к ранним срокам их свершения. Над каждой работой проставлена необходимая для ее выполнения потребность в ресурсе. Для наглядности под линейной диаграммой поместим *эпюру потребности в ресурсах* (график функции F(t)).

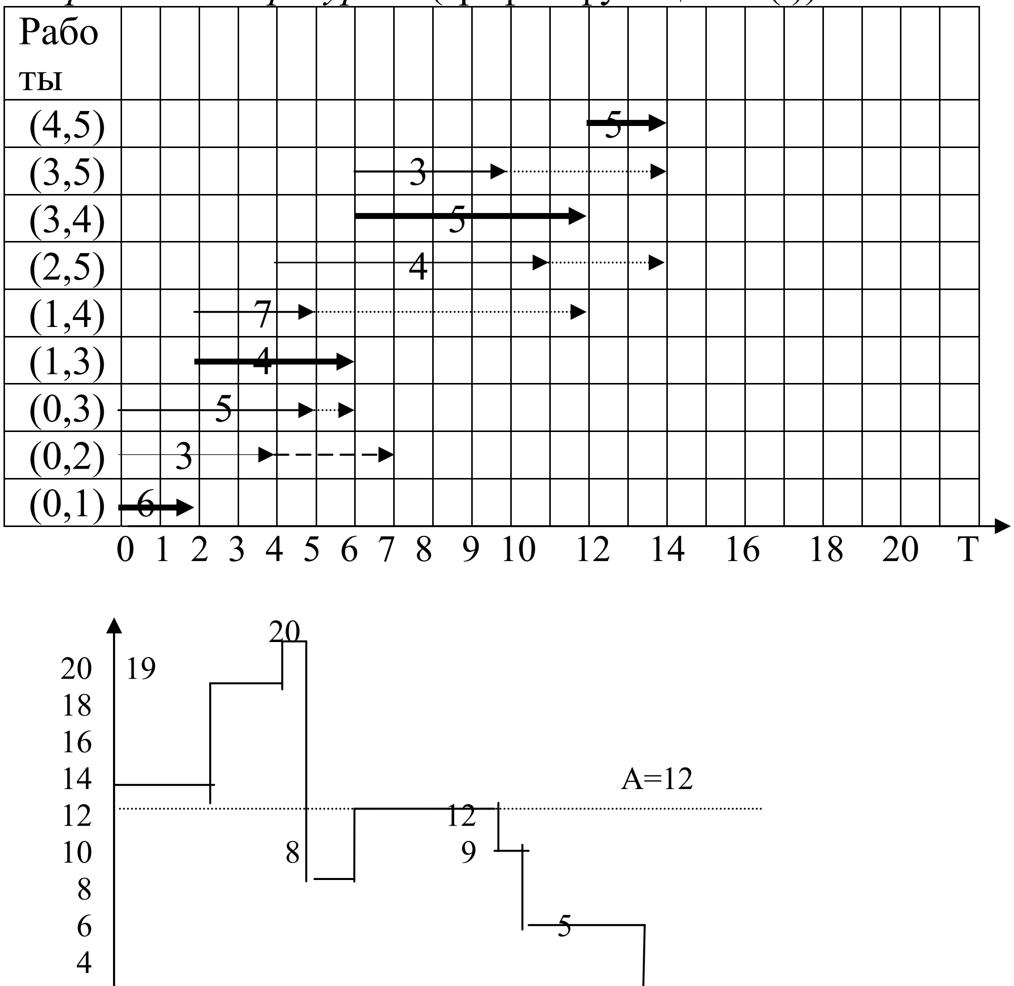


Рис 2.4.10.

<u>Процедура 2.</u> Рассматриваем начальный интервал (от 0 до 2). Здесь потребность в ресурсе превышает его наличие на 2. Значит, переходим к процедуре 3.

<u>Процедура 3</u>. Вычисляем коэффициенты напряженности для работ, выполняемых в этом интервале: $К_{01} = 1 – 0 = 1$, $К_{02} = 1 – 3/(14 – 0) = 0.79$, $К_{03}=1 – 1/(14 – 8)=0.83$. Сдвигаем работу (0,2) с меньшим коэффициентом на два дня; т.к. она не имеет свободного резерва, то соответственно сдвигается на два дня и работа (2,5) в пределах свободного резерва. Результаты этого шага отобразим на рис.2.4.11.

<u>Процедура 2.</u> Рассматриваем теперь интервал от 2 до 5. Здесь 4 работы имеют общую потребность 19, значит, опять переходим к процедуре 3.

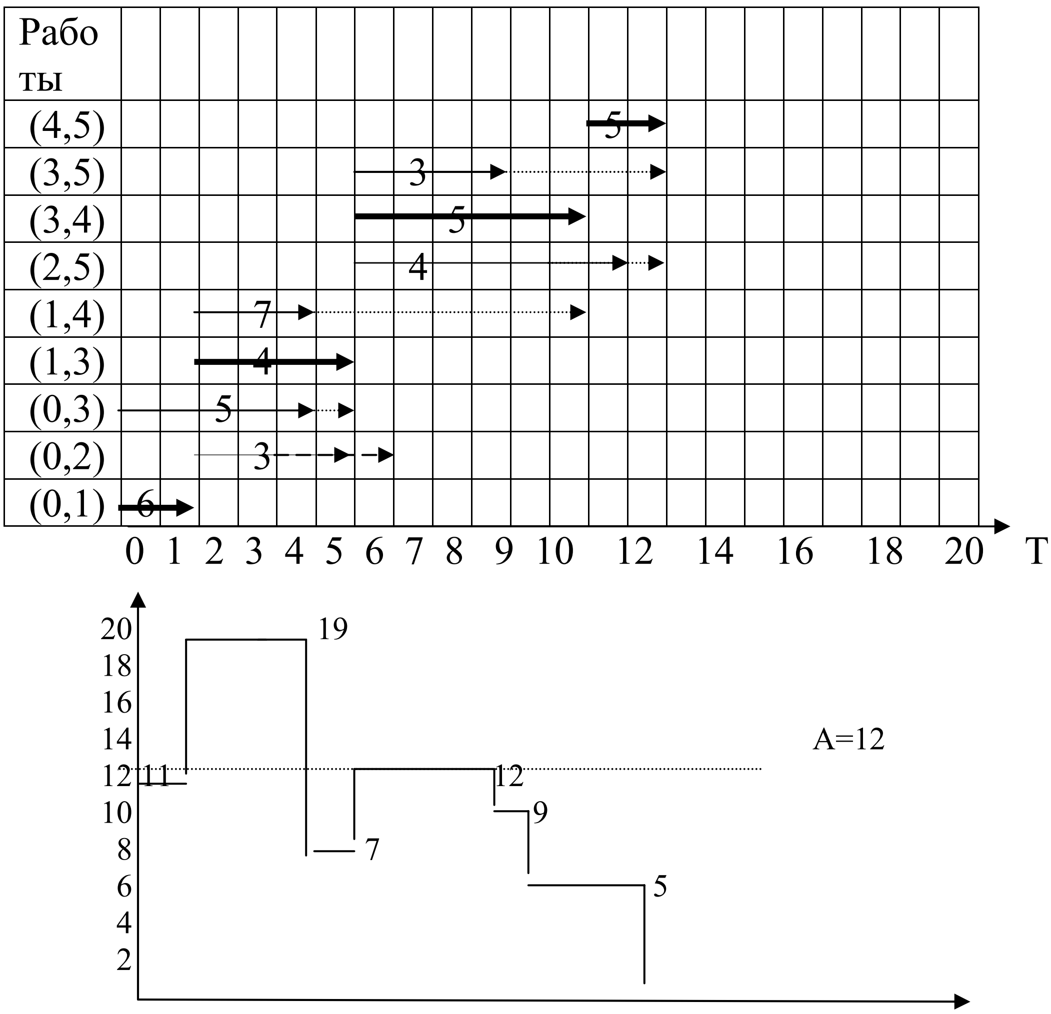


Рис 2.4.11.

Процедура 3. Вычисляем $К_{03}=1 -1/(14 - 8)=0.83$, $К_{02}=1 -1/(14 -0)=$ $=0.93$, $К_{13}=1 -0=1$, $К_{14}=1 -7/(14 - 2)=0.42$. Сдвигаем работу (1,4) на три дня в пределах ее свободного резерва. Результаты на рис.2.4.12.

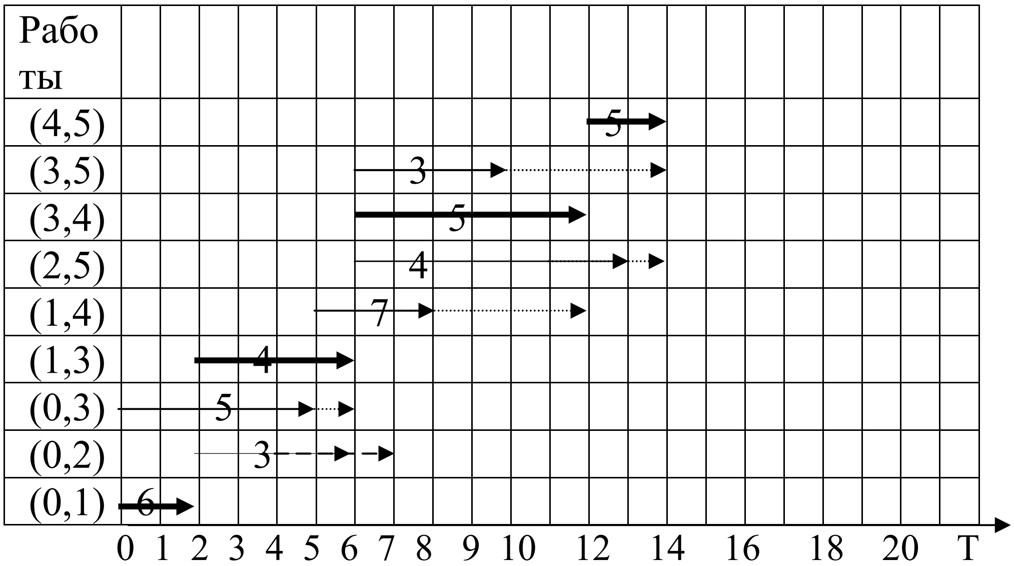
Процедура 2. Рассматриваем интервал от 5 до 6. Имеем превышение потребности ресурса над его наличием на 2.

Процедура 3. Самый меньший коэффициент напряженности у работы (1,4), $К_{14}=1 - 4/(14 - 2)=0.67$, поэтому ее сдвигаем на 1. Остаются в расписании на этот интервал работы (0,2) и (1,3) с общей потребностью 7 человек.

Процедура 2. Рассматриваем интервал от 6 до 9. Суммарная потребность составляет 19.

Процедура 3. Самый меньший коэффициент напряженности опять у работы (1,4), $К_{14}=1 -3/(14 - 2)=0.75$, поэтому ее сдвигаем на 3. Остаются в расписании на этот интервал работы (2,5), (3,4) и (3,5) с общей потребностью 12 человек.

Процедура 2. Рассматриваем интервал от 9 до 10. Суммарная потребность составляет 19.



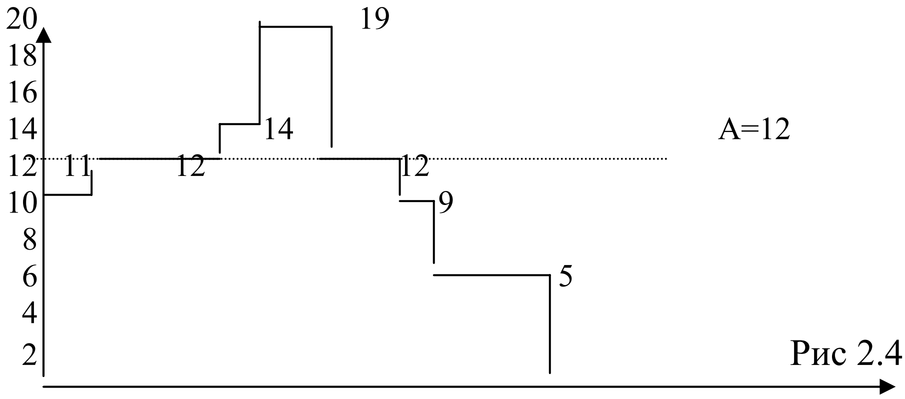


Рис 2.4.12.

<u>Процедура 3</u>. Меньший коэффициент напряженности у работы (3,5), но ее сдвиг не уменьшит потребность в ресурсе на необходимое число (7), поэтому вынуждены двигать опять работу (1,4) на 1. Остаются в расписании на этот интервал те же работы (2,5), (3,4) и (3,5) с общей потребностью 12 человек. Т.к. у работы (1,4) резерва уже не было, то соответственно подвинулась работа (4,5) также на 1.

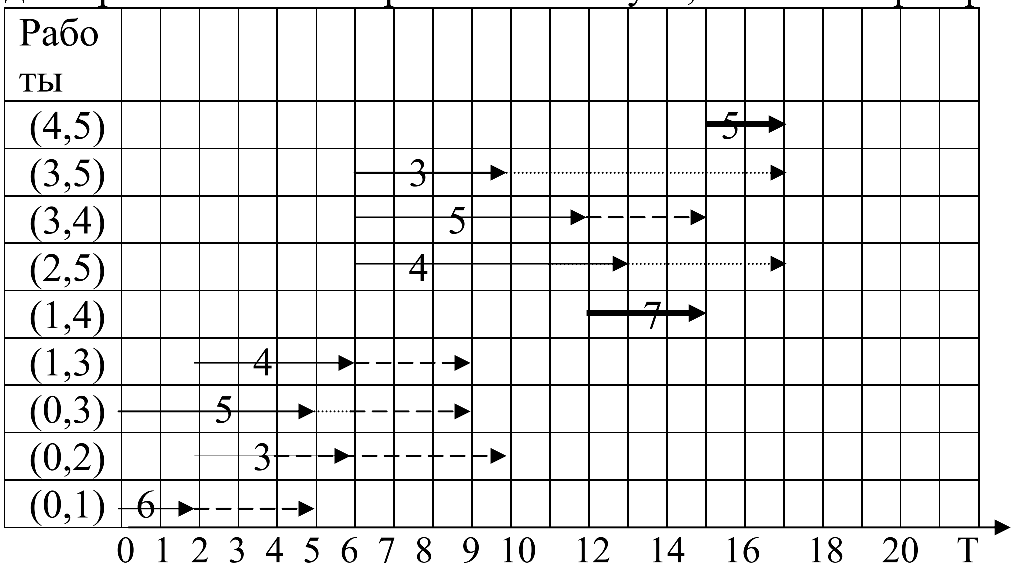
<u>Процедура 2</u>. Рассматриваем интервал от 10 до 12. Суммарная потребность составляет 16.

<u>Процедура 3</u>. Сейчас резервы времени исчерпаны, коэффициенты напряженности у всех работ равны 1, поэтому вынуждены двигать опять еще не начатую работу (1,4) на 2. Остаются в расписании на этот интервал работы (2,5) и (3,4) с общей потребностью 9 человек. Т.к. у работы (1,4) резерва уже не было, то соответственно подвинулась работа (4,5) еще на 2.

<u>Процедура 2</u>. Рассматриваем интервал от 12 до 13. Суммарная потребность составляет 11.

На интервале от 13 до 15 потребность составляет 7 и от 15 до 17 потребность 5 человек.

Алгоритм закончен, время выполнения проекта T=17. Окончательный результат представлен на рис.2.4.13. Как мы видим, совсем без резервов остались работы (1,4) и (4,5), у остальных работ, даже работ бывшего критического пути, появились резервы времени.



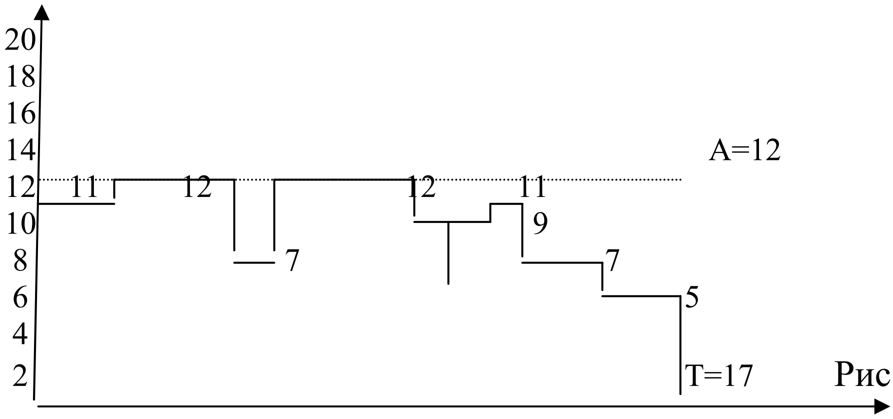


Рис 2.4.13.

Аналогичная *постановка задачи для накапливаемых ресурсов* отличается от предыдущей только видом ограничения 2, которое принимает вид:

$$2'.\ \sum_{t=1}^{\tau} A^{к}(t) \ \geq \sum_{t=1}^{\tau} F^{к}(t), \text{ для всех } \tau \text{ и } k;$$

т.е. суммарная потребность в накапливаемом ресурсе от начала планового периода к любому моменту τ не должна превышать суммарного объема поставок этого же вида ресурса за соответствующий период.

Алгоритм решения данной задачи в принципе проще предыдущего и здесь не приводится.

Оптимальное распределение ресурсов при заданном времени – “сглаживание”, является задачей, в некотором смысле обратной к рассмотренной выше. Прежде всего, необходимо определить критерий оптимальности. В большинстве случаев целесообразно в качестве критерия оптимальности принимать меру неравномерности потребления ресурсов. Если T – заданное время выполнения программы, то $R^k_{ср}=W^к/T$ – среднее потребное количество ресурса k в единицу времени. В качестве меры неравномерности потребления ресурса могут быть выбраны различные функции, например:

$$\phi_1=\sum_{\forall t}\left|F^к(t) - R^k_{ср}\right|,$$
$$\phi_2=\sum_{\forall t}(F^к(t) - R^k_{ср})^2,$$
$$\phi_3=\max_t\left|F^к(t) - R^k_{ср}\right|,$$
$$\phi_4=\max_t F^к(t),$$
$$\phi_5=\sum_{\forall t}(F^к(t) - A^k(t))^2,$$
$$\phi_6=\sum_{\forall t}(F^к(t) - A^k(t))\xi,$$

где $\xi=\begin{cases} \xi_1 \text{ – если } (F^к(t) - A^k(t)) > 0, \\ -\xi_2 \text{ – если } (F^к(t) - A^k(t)) < 0, \end{cases}$

т.е. ξ_1 – удельные затраты, связанные с превышением потребности над наличием (для ресурсов типа “мощности” – стоимость сверхурочного времени), ξ_2 – удельные затраты, связанные с избыточным наличием ресурса (для ресурсов типа “мощности” – стоимость простоя исполнителей или оборудования).

Могут быть и другие критерии. Выбор критерия связан со спецификой конкретной системы управления проектом, например, выбирая ϕ_1, мы предполагаем «равнозначность» как положительных, так и отрицательных отклонений потребности в ресурсе от его средней потребности, а также два отклонения по 1 эквивалентны одному отклонению на 2. Критерий ϕ_2 применим в случае, когда такие отклонения не эквивалентны (одно на 2 равно 4 по 1), ϕ_5 подобен ϕ_2, только отклонения анализируются не от средней потребности, а от наличия ресурса. Критерий ϕ_6 целесообразен при различной оценке превышения (положительной или отрицательной). Критерий ϕ_4 (наибольшее ежедневное потребление) часто используется при составлении проекта организации строительства отдельного объекта или комплекса работ. Таким образом, математическая модель задачи «сглаживания» имеет вид:

Найти такие сроки начала и окончания работ (i, j) T_i* и T_j*, что

1. $T_j^* - T_i^* - t_{ij} \geq 0$, для всех работ (i, j);
2. $T_n^* \leq T$;
3. $\phi_i \rightarrow \min$.

Рассмотрим идею алгоритма минимизации максимального потребления ресурса (критерий ϕ_4).

Процедура 1. Расчет временных параметров сетевой модели и составление линейной диаграммы по ранним срокам. Построение эпюры потребности в ресурсе. Вычисление уровня = $\max_t F^к(t)$.

Процедура 2. Понижаем уровень на 1. В интервалах времени, где наблюдается превышение потребности над уровнем, пытаемся сдвинуть работы в пределах их резервов. Работы для сдвига выбираем в порядке возрастания коэффициентов напряженности.

Если подобным образом удалось ликвидировать все превышения над уровнем, повторяем процедуру 2 сначала, иначе – стоп, получен оптимальный план.

Представленные выше модели предполагали постоянную продолжительность работ. Практически почти каждую работу можно выполнить за различное время в зависимости от количества ресурсов, привлекаемых для выполнения данной работы.

2.4.9. Оптимизация сетевого графика методом “время – стоимость”.

Обозначим a_{ij} – минимально возможное время выполнения работы (i,j), которому соответствуют затраты c^a_{ij}; b_{ij} – максимально возможное время выполнения работы (i,j), которому соответствуют затраты c^b_{ij}. Предполагается, что ускорение работы связано с дополнительными затратами (на привлечение дополнительной рабочей силы и оборудования, сверхурочные доплаты и т.п.). Имеем

$$a_{ij} \le t_{ij} \le b_{ij}\,,$$
$$c^b_{ij} \le c_{ij} \le c^a_{ij}; \qquad (2.4.15)$$

c_{ij} – затраты, соответствующие времени выполнения t_{ij}.

Пусть зависимость затрат от времени выполнения линейная, т.е.

$$c_{ij} = z_{ij} - y_{ij}t_{ij}\,,$$

откуда, используя (2.4.15), получаем выражение для коэффициента пропорциональности

$$y_{ij} = (c^a_{ij} - c^b_{ij})/(b_{ij} - a_{ij}) = \Delta c/\Delta t. \qquad (2.4.16)$$

Таким образом, y_{ij} характеризует затраты, связанные с сокращением продолжительности работы на единицу времени. Будем называть y_{ij} – “ценой” сокращения работы на единицу времени.

Если на всех работах принять $t_{ij} = a_{ij}$, то будет получено наименьшее критическое время $T^{кр}_{min}$. Этому времени соответствуют наибольшие затраты, равные $C_a = \sum_{\forall(i,j)} c^a_{ij}$;

Если на всех работах принять $t_{ij} = b_{ij}$, то мы получим сетевой график, которому соответствуют наименьшие затраты, равные $C_b = \sum_{\forall(i,j)} c^b_{ij}$, и наибольшее критическое время $T^{кр}_{max}$.

При наименьшем критическом времени $T^{кр}_{min}$ можно уменьшить затраты, если «удлинить» некритические работы за счет их резервов времени. Ведь увеличение t_{ij} на единицу снижает ее стоимость на y_{ij}. Обозначим эти затраты через C_d, тогда можем утверждать, что для T=

$T^{кр}_{min}$ минимальная стоимость равна C_d, и, в общем случае, для любого $T \in [T^{кр}_{min}, T^{кр}_{max}]$ существует план с минимальными затратами C(T). График функции C(T) приведен на рис 2.4.5.

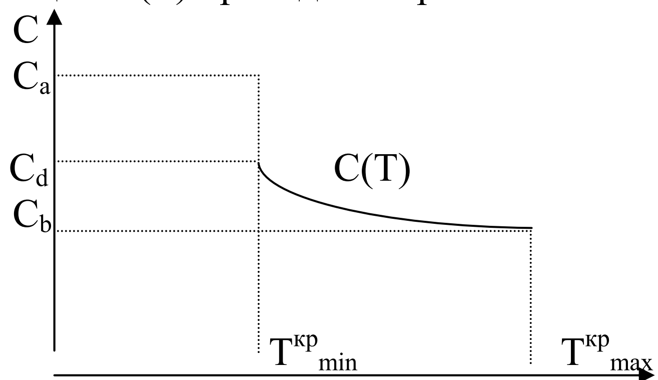


Рис 2.4.14.

Имея график оптимальной зависимости стоимости проекта от продолжительности его выполнения можно, с одной стороны, определять минимальную стоимость проекта при любом возможном сроке его выполнения, а с другой стороны, находить минимальную продолжительность выполнения проекта при заданной его стоимости. С помощью функции C(T) можно также оценить дополнительные затраты, связанные с сокращением сроков завершения проекта.

Если затраты линейно зависят от продолжительности работ, как мы выше предположили, то нахождение C(T) можно свести к решению задачи линейного программирования вида:

Найти такие продолжительности работ – t_{ij}, что

1. $T_j - T_i - t_{ij} \geq 0$, для всех работ (i, j);
2. $a_{ij} \leq t_{ij} \leq b_{ij}$,
3. $T_n^0 \leq T$,
4. $C(T)=\sum_{\forall(i,j)} c_{ij} = \sum_{\forall(i,j)} (z_{ij} - y_{ij}t_{ij}) \to \min$, что эквивалентно
   $\sum_{\forall(i,j)} y_{ij}t_{ij} \to \max$.

Однако решать такие задачи методами линейного программирования, как правило, неэффективно, в связи с чем используются специально разработанные эвристические алгоритмы. Разберем один из них на небольшом примере. Сеть приведена на рис.2.4.15.

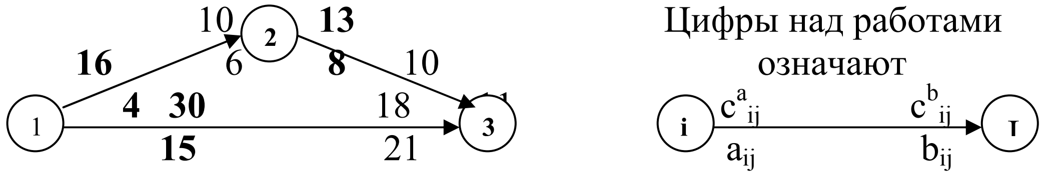


Рис.2.4.15.

Примем $t_{ij} = a_{ij}$ (выделено жирным шрифтом), тогда $T^{кр}_{min} = 15$, $C_a=\sum_{\forall(i,j)}c^a_{ij}=16+13+30=59$, $R^п_{12}=3$, $R^п_{23}=3$, $R^п_{13}=0$. Определим цены сокращения работ на единицу, согласно (2.4.16) имеем:

$y_{12}=(16 - 10)/(6 - 4)=3$, $y_{13}=(30 - 18)/(21-15)=2$, $y_{23}=(13-10)/(11- 8)=1$, т.е. увеличение продолжительности работы (1,2) на единицу удешевляет ее на 3 и т.д. Увеличим продолжительность некритических работ (1,2), (2,3) в пределах их полных резервов (т.к. они находятся на одном пути, то полный резерв у них общий). Если увеличить продолжительность работы (2,3) на 3, то это удешевит первоначальный план на $3y_{23}=3$, если же удлинить работу (1,2), а ее можно удлинить только на 2 дня, то стоимость уменьшится на $2y_{12}=6$, и еще на 1 можно будет увеличить продолжительность работы (2,3), что даст экономию еще на 1, – всего сокращение стоимости составит 6+1=7. Мы получили самый дешевый план при $T^{кр}_{min} = 15$, стоимость которого $C_d =59 - 7=52$. И мы получили общее правило для выбора работ – приоритетом является «цена» сокращения.

Мы рассматривали зависимости между затратами и временем выполнения работы, имея в виду лишь прямые затраты, поскольку выявить изменение косвенных (накладных) расходов от изменения продолжительности отдельной работы весьма затруднительно.

Косвенные затраты существенно зависят от времени завершения всей программы в целом, причем известно, что с увеличением срока выполнения проекта косвенные затраты возрастают.

В предположении линейной зависимости косвенных затрат от срока завершения проекта (что отображено на рис. 2.4.16 прямой LN) оптимальному плану (с учетом прямых и косвенных затрат) будет соответствовать точка М.

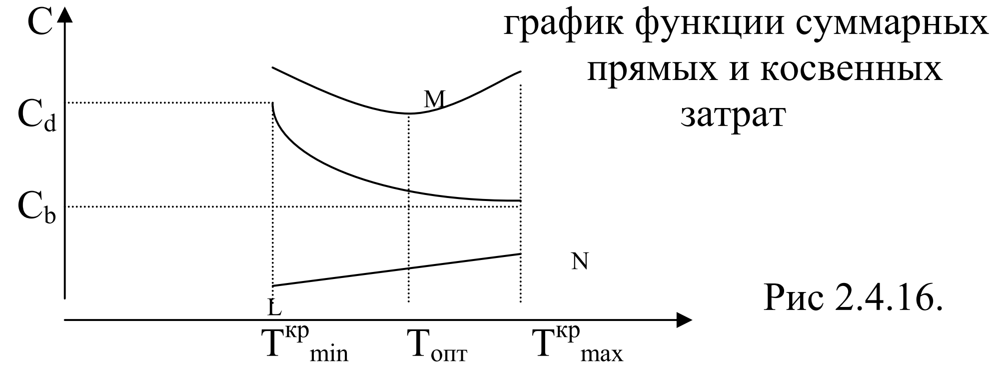


Рис 2.4.16.

С помощью вышерассмотренной модели “затраты – время” можно решить иную по сути, но аналогичную по математической постановке задачу минимизации общего числа исполнителей, необходимых при выполнении проекта при заданном сроке его окончания.

Будем трактовать c^a_{ij} как количество исполнителей, необходимое для выполнения работы (i,j) в минимально возможное время a_{ij}; соответственно c^b_{ij} – количество исполнителей, необходимое для выполнения работы (i,j) в максимально возможное время b_{ij}.

Имеем аналогичные (2.4.15) соотношения

$$a_{ij} \le t_{ij} \le b_{ij} ,$$

$$c^b_{ij} \le c_{ij} \le c^a_{ij},$$

где c_{ij} – количество исполнителей, соответствующее времени выполнения t_{ij}.

В рассматриваемой задаче "цена" сокращения y_{ij} вычисляется также по формуле (2.4.16) и показывает, сколько исполнителей надо добавить, чтобы сократить время выполнения работы на единицу времени. Рассмотрим пример (рис. 2.4.17).

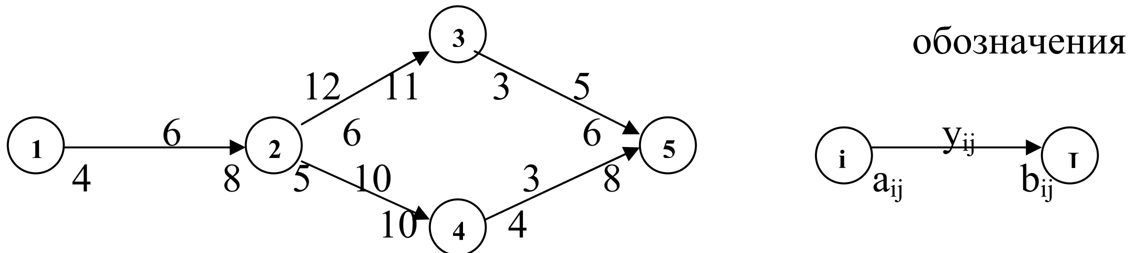


Рис. 2.4.17

Пусть заданное время T=22. Поставим на каждую работу минимально возможное количество исполнителей, тогда продолжительности работ будут максимальные, т.е. $t_{ij} = b_{ij}$. Время выполнения всего проекта в данном случае будет 8+10+8=26 (длина другого пути 8+11+6=25), что на 4 единицы больше заданного времени.

Кажется естественным найти на критическом пути работу с наименьшей ценой сокращения (это будет работа (4,5)) и сократить ее продолжительность на 4 единицы, что потребует дополнительно 3×4=12 исполнителей. Теперь другой путь стал критическим, и наименьшая цена сокращения у работы (3,5). Для сокращения ее продолжительности на 3 единицы потребуется дополнительно 5×3=15 исполнителей, таким образом, всего понадобится дополнительно 12+15=27 исполнителей.

Однако существует лучшее решение. Работу (1,2), которая является общей для обоих путей, сократим на 4 единицы времени. Это потребует 6×4=24 дополнительных исполнителей. $T^{кр}$=T=22.

Еще более эффективное решение может быть получено следующим образом: работу (1,2) сокращаем на 3 единицы, что потребует дополнительно 6×3=18 исполнителей, и работу (4,5) на 1 единицу с привлечением дополнительно 3×1=3 человек. Получили $T^{кр}$=T=22, число дополнительных рабочих 18+3=21.

Подобный подход и критерий оптимальности применяется в некоторых системах управления строительным производством, где план, обеспечивающий своевременный ввод объекта в эксплуатацию с минимальной суммой интенсивностей потребления ресурсов, считается наилучшим. В каких случаях целесообразно оптимизировать план возведения объекта по этому критерию? Это целесообразно тогда, когда затраты на возведение объекта существенно зависят от общего количества привлеченных рабочих, например, при строительстве объектов в малоосвоенных районах страны, при прокладке линий электро-передач, газопроводов, железных дорог и т.п.

При строительстве объектов в районах массовой застройки оптимизация по указанному критерию не имеет смысла, т.к. получим план выполнения работ на каждом из объектов меньшим количеством ресурсов, но при более длительном их использовании, тогда как лучшим может оказаться план, при котором на каждом из объектов концентрируется большее число рабочих, которые выполняют отдельные работы за более короткие сроки и переходят на другие объекты.

Кроме того, критерий эффективности – “суммарная интенсивность выполнения работ” – представляет собой сумму интенсивностей потребления ресурсов различного вида на работах, выполняемых в различные промежутки времени. Относительная дефицитность ресурсов различных видов значительно изменяется во времени в зависимости от производственной ситуации, складывающейся на всем множестве объектов, питаемых ресурсами из одного “резервуара”. Поэтому возможна ситуация, при которой в некоторый период времени легче, например, добавить 50 отделочников, чем 10 монтажников.

Расчеты сетевой модели отличаются простотой, но в то же время дают весьма важную информацию для календарного планирования сложных проектов.

Вследствие этого сетевые методы пользуются большой популярностью на практике. Эффективность этих методов обеспечивается благодаря наличию широкого спектра программных средств на ЭВМ, позволяющих строить, анализировать и корректировать сетевые модели проектов.

2.4.10. Многопроектные задачи сетевого планирования с учетом ограниченности ресурсов и сроков.

Выше мы рассматривали задачи календарного планирования для одного проекта, тогда как крупная организация может одновременно выполнять несколько проектов, располагая единым резервуаром ресурсов. При этом возникают задачи оптимальной очередности проектов, когда их последовательность не ограничена или частично ограничена.

В общем виде задача оптимальной очередности проектов формулируется следующим образом. Требуется найти такую последовательность выполнения проектов, которой соответствует непротиворечивый календарный план, доставляющий экстремум целевой функции при соблюдении заданных ограничений.

В зависимости от вида целевой функции и ограничений задача очередности может иметь различные постановки, учитывающие специфику конкретных условий проектной организации.

Например, для строительной организации в качестве критериев оптимальности для многопроектных задач используют минимум общей продолжительности строительства комплекса объектов, его пусковых очередей или этапов работ; минимум простоев бригад и механизмов или перерывов работ на объектах; минимум отклонений расчетных сроков выполнения работ от директивных и др.

Ограничения в многопроектных задачах сетевого планирования формулируются как требования к использованию общего резервуара накапливаемых и ненакапливаемых ресурсов, соблюдение заданных сроков или продолжительности выполнения отдельных проектов или их групп, соблюдение нормативных заделов и объемов незавершенного производства.

На практике применяются следующие критерии:

$f= f_1+f_2\omega\rightarrow\min$,

где ω – коэффициент взвешивания цели; ω предполагается существенно меньшим единицы.

Первое слагаемое целевой функции f_1 определяет меру соответствия полученных при временном расчете сроков ввода объектов директивным срокам для объектов $z\in M_1$ – подлежащих вводу в планируемый период.

Второе слагаемое f_2 определяет меру соответствия выполнения объемов работ по задельным объектам $z\in M_2$ согласно выделенным ассигнованиям.

При достаточно малом значении взвешивающего коэффициента ω ($\omega<<1$) влияние второго слагаемого целевой функции на расписание работ по объектам $z\in M_1$ неощутимо, что соответствует принципу концентрации ресурсов на сдаточных объектах.

Второе слагаемое вводится в выражение целевой функции для определения приоритетности работ по задельным объектам при включении их в расписание.

Пусть T_z* – расчетный срок ввода объекта z, $T_z^{дир}$ – директивный срок, тогда мера соответствия расчетных сроков ввода объектов директивным может быть выражена с помощью следующих функций:

$$f_1=\sum_{z\in M1}[T_z^*- T_z^{дир}], \qquad (2.4.17)$$

$$f_1=\sum_{z\in M1}[T_z^*- T_z^{дир}]^2, \qquad (2.4.18)$$

$$f_1=\sum_{z\in M1}\left| T_z^*- T_z^{дир}\right| , \qquad (2.4.19)$$

$$f_1=\sum_{z\in M11}[T_z^*- T_z^{дир}], \qquad (2.4.20)$$

где $M_{11}\subset M_1$–множество объектов, для которых получено $T_z^*> T_z^{дир}$,

$$f_1=\sum_{z\in M1}[T_z^*- T_z^{дир}]\xi^z, \qquad (2.4.21)$$

где $\xi^z = \begin{cases} \xi_1^z & \text{для } z\in M_{11}, \\ \xi_2^z & \text{для } z\in M_{12} \end{cases}$

($M_{12}\subset M_1$ – множество объектов, для которых получено $T_z^* < T_z^{дир}$),

$$f_1=\max_{z\in M1}[T_z^*- T_z^{дир}]. \qquad (2.4.22)$$

Коэффициенты ξ_1^z, ξ_2^z характеризуют соответственно потери или прибыль от задержки или досрочного ввода объекта в эксплуатацию.

В случае критерия (2.4.17) оптимальный план, которому соответствует минимальная алгебраическая сумма отклонений, допускает форсирование строительства одних объектов за счет других.

Критерий (2.4.18) является одной из лучших мер равномерности. Однако, использование этой функции не всегда целесообразно, так как она в равной мере оценивает как досрочный ввод, так и превышение директивного срока, что не совсем соответствует действительности.

Все, сказанное относительно (2.4.18), справедливо и для (2.4.19), причем при сложении абсолютных значений отклонений двухмесячное отклонение по одному объекту эквивалентно месячным отклонениям по двум объектам, что еще менее адекватно требованиям строительного производства.

Функции (2.4.20) присущи те же недостатки, что и (2.4.17), но в существенно меньшей степени, что определяет допустимость использования такого критерия для решения практических задач.

Функция (2.4.21) наилучшим образом отвечает специфике строительного производства. Однако, использование критерия такого вида предполагает обоснованное определение для каждого объекта коэффициентов ξ_1^z, ξ_2^z.

Функция (2.4.22) достаточно хорошо характеризует степень достижения основных целей строительной организации. Простота алгоритмов решения задач на минимум максимального превышения расчетных сроков над директивными предопределяет ее выбор для практического использования.

Функция f_2 может принимать выражения, аналогичные (2.4.17) - (2.4.22), где множество M_1 заменено на M_2, T_z*– на T_z^{**}(T_z^{**} срок завершения фрагмента сети, состоящей из работ объекта z, упорядоченных по возрастанию поздних сроков их начала, суммарная сметная стоимость которых равна выделенным ассигнованиям на данный объект), $T_z^{дир}$ на $T^{пл}$. В силу принятых обозначений условие выполнения заданного объема работ в стоимостном выражении по объекту $z \in M_2$ в течение планируемого периода может быть представлено как $T_z^{**} \leq T^{пл}$.

2.4.11. ПРАКТИЧЕСКИЙ БЛОК

Примеры

1. Построение сетевых графиков, согласно заданному порядку предшествования работ.

Пример 1. Задан следующий порядок предшествования работ:

$$\begin{cases} A, B, C \ll D; \\ A, B \ll E; \\ A \ll F; \\ D, E \ll G; \\ F, G \ll H. \end{cases}$$

Решение приведено на рис.2.4.18.

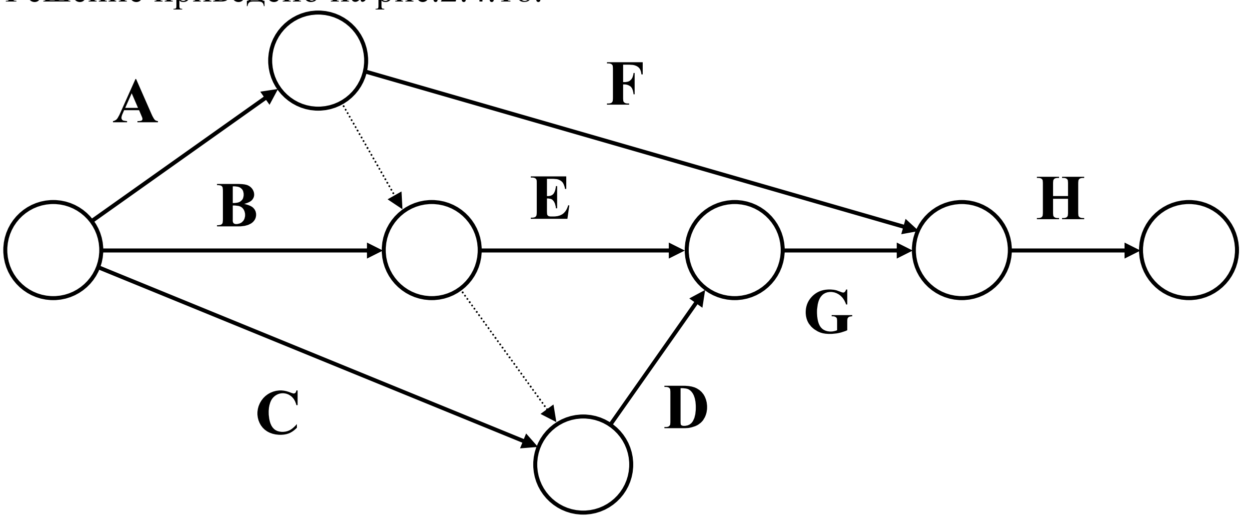


Рисунок 2.4.18. Фрагмент сетевого графика согласно порядку предшествования работ

Пример 2. Начертить фрагмент сетевого графика, удовлетворяющего следующим условиям:

$$\begin{aligned} A,\ B,\ C &\ll D; \\ A,\ C &\ll E; \\ A,\ B &\ll G; \\ B,\ E &\ll H. \end{aligned}$$

Решение приведено на рис.2.4.19.

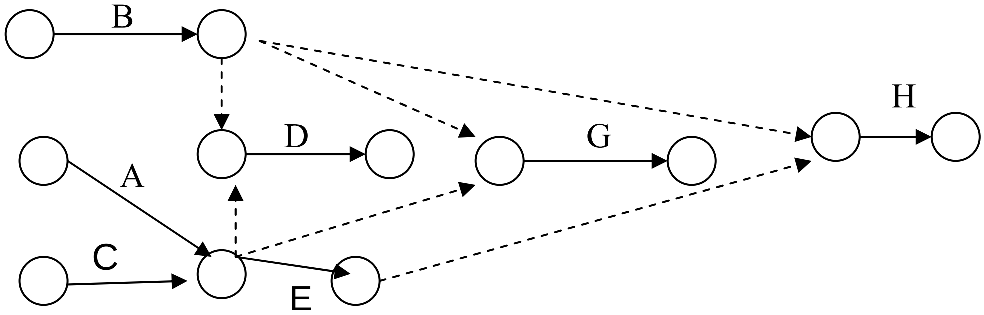


Рисунок 2.4.19 - Фрагмент сетевого графика

2. Расчет временных параметров сетевой модели и приведение критического времени к заданному сроку.

Пример 3. Исходный сетевой график приведен на рис 2.4.20.

Рассчитаем временные параметры сетевого графика.

T_i^0 – ранние сроки свершения события;

T_i' – поздний срок свершения события;

Найдем критический путь – это максимально длинная по времени цепочка, соединяющая первое и последнее событие, которое определяет минимальное время выполнения всего проекта.

$T_{КР}$ – критическое время. Результаты расчетов приведены на рис 2.4.20.

Необходимо привести $T_{КР} = T_{ДИР} = 44$. Приводить будем за счет уменьшения времени работ критического пути. Результаты расчетов приведены на рис 2.4.21.

Составим таблицу временных характеристик приведенного сетевого графика выполнения работ. Где:

$R_{ij}^{П}$ – полный резерв работ;

$R_{ij}^{С}$ – свободный резерв работ.

Свободный и полный резервы работ рассчитываются по формуле:

$R_{ij}^{П} = T_j' - T_i^0 - t_{ij}$;

$R_{ij}^{С} = T_j^0 - T_i' - t_{ij}$.

Где:

(i, j) – номер начала, номер конца события;

t_{ij} – время выполнения работы.

Результаты расчетов приведены в табл. 2.4.4.

На рисунке 2.4.22 показана линейная диаграмма, построенная по раннему сроку свершения событий.

Рисунок 2.4.20

Исходный сетевой график

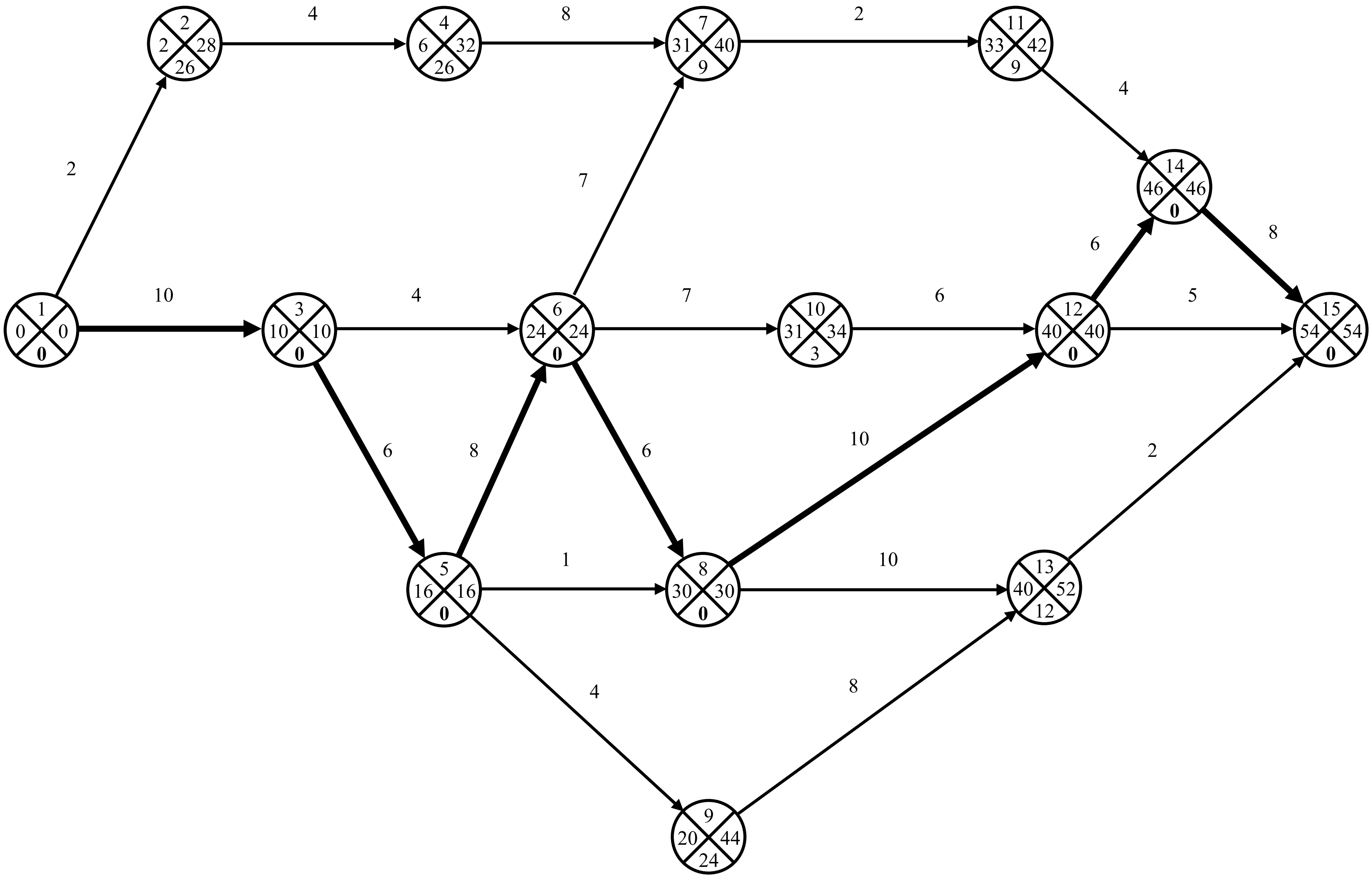


Рисунок 2.4.21

Приведенный сетевой график

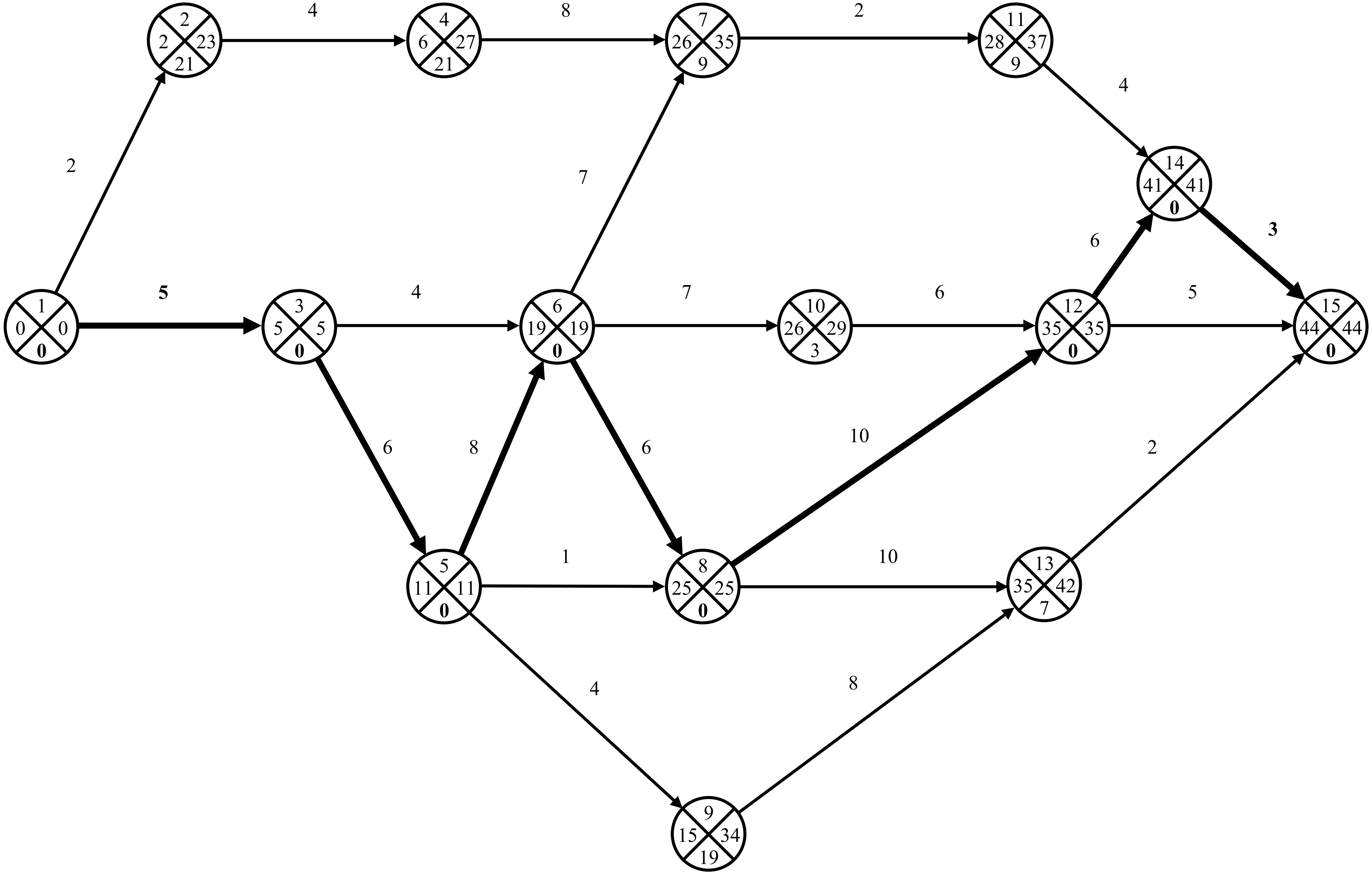


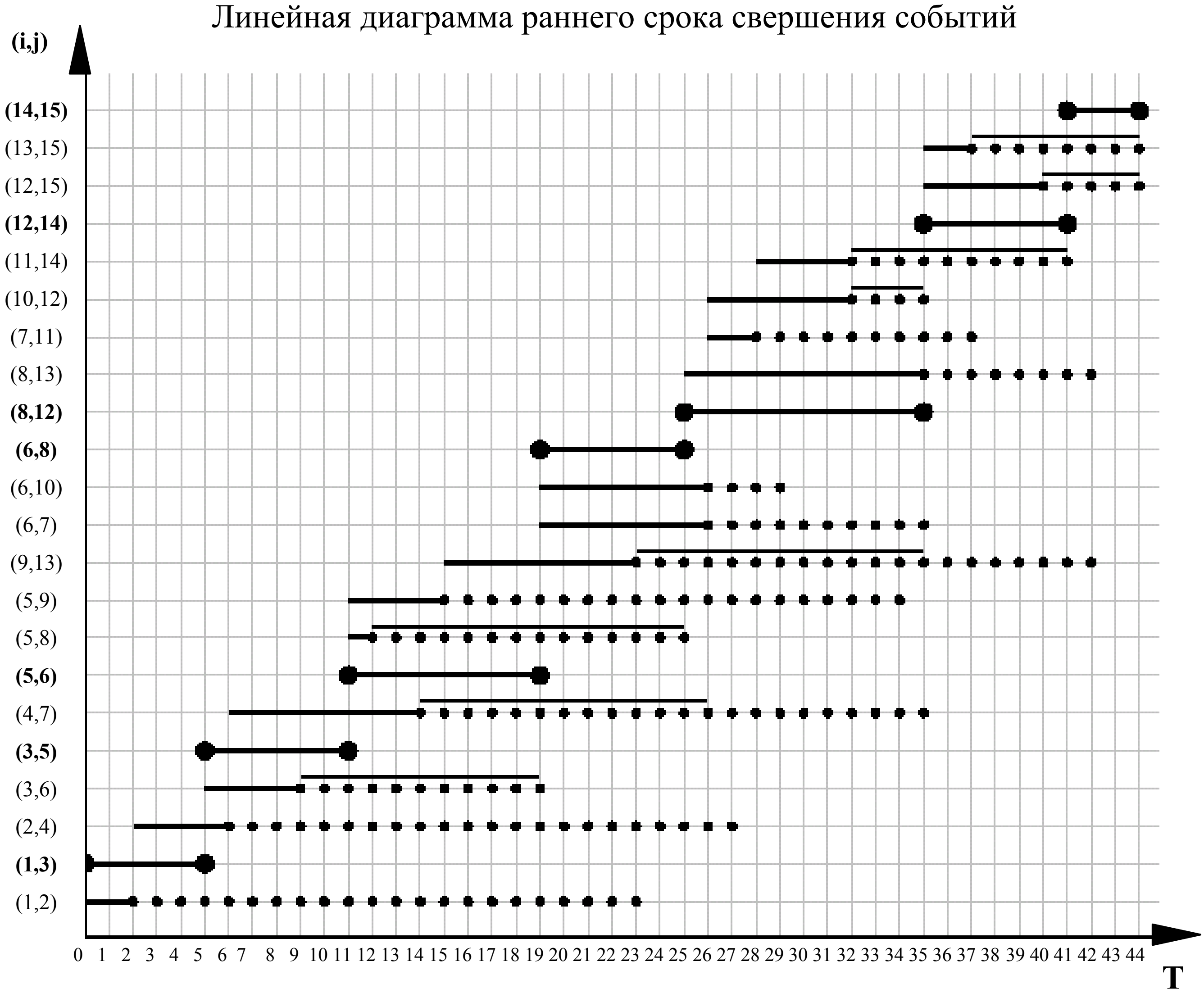
Таблица 2.4.4

Таблица временных характеристик работ

(i, j)	t_{ij}	T_i^0	$R_{ij}^{П}$	R_{ij}^{C}
(1,2)	2	0	21	0
(1,3)	5	0	0	0
(2,4)	4	2	21	0
(3,6)	4	5	10	10
(3,5)	6	5	0	0
(4,7)	8	6	21	12
(5,6)	8	11	0	0
(5,8)	1	11	13	13
(5,9)	4	11	19	0
(9,13)	8	15	19	12
(6,7)	7	19	9	0
(6,10)	7	19	3	0
(6,8)	6	19	0	0
(8,12)	10	25	0	0
(8,13)	10	25	7	0
(7,11)	2	26	9	0
(10,12)	6	26	3	3
(11,14)	4	28	9	9
(12,14)	6	35	0	0
(12,15)	5	35	4	4
(13,15)	2	35	7	7
(14,15)	3	41	0	0

Рисунок 2.4.22

Линейная диаграмма раннего срока свершения событий



Пример 4. Задан сетевой график (Рисунок 2.4.23).

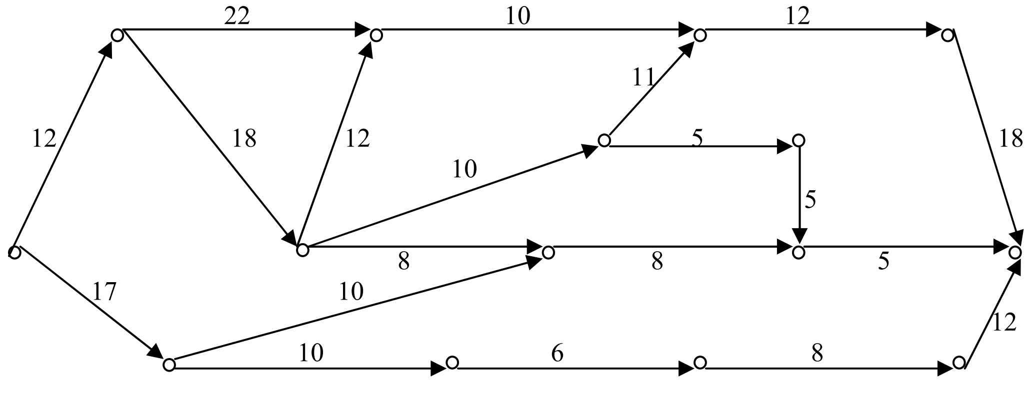


Рисунок 2.4.23 – Схема проведения работ

Необходимо выполнить расчет временных параметров. Привести $T_{кр}$ к $T_{дир}$. ($T_{дир}$ =72 дня).

Решение:

1) Рассчитываем временные характеристики событий (см. рисунок 2.4.24)

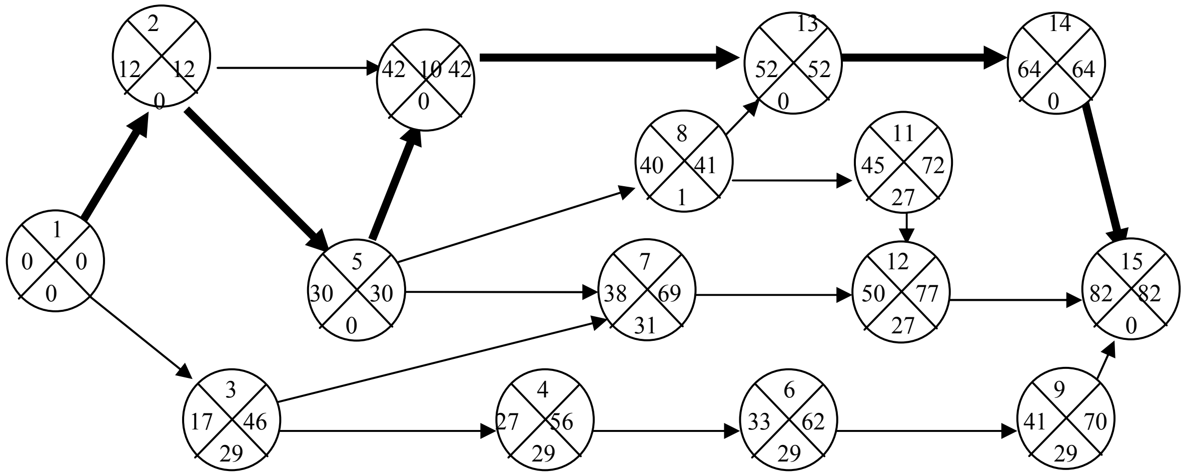


Рисунок 2.4.24 – расчет сетевого графика

2) Заносим в таблицу 2.4.5 необходимые параметры сетевого графика

Таблица 2.4.5 – Параметры сетевого графика

i,j	$t_{i,j}$	T^0_i	$R^п_{i\,j}$	$R^с_{i\,j}$
1,2	12	0	0	0
1,3	17	0	29	0
2,5	18	12	0	0
2,10	22	12	8	8
3,4	10	17	29	0
3,7	10	17	42	11
4,6	6	27	29	0
5,7	8	30	31	0
5,8	10	30	1	0
5,10	12	30	0	0
6,9	8	33	29	0
7,12	8	38	31	4
8,11	5	40	27	0
8,13	11	40	1	1
9,15	12	41	29	29
10,13	10	42	0	0
11,12	5	45	27	0
12,15	5	50	27	27
13,14	12	52	0	0
14,15	18	64	0	0

3) Приводим $T_{кр}$ к $T_{дир}$. ($T_{дир}$=72 дня). Для этого сократим время исполнения работ 13,14 и 14,15 на 4 и 6 дней соответственно за счет привлечения дополнительных ресурсов.

Тогда сетевой график будет выглядеть, как изображено на рисунке 2.4.26. А параметры откорректированного графика приведены в таблице 2.4.6.

Таблица 2.4.6 – Параметры откорректированного сетевого графика

i,j	$t_{i,j}$	T^0_i	$R^п_{ij}$	R^c_{ij}
1,2	12	0	0	0
1,3	17	0	19	0
2,5	18	12	0	0
2,10	22	12	8	8
3,4	10	17	19	0
3,7	10	17	32	11
4,6	6	27	19	0
5,7	8	30	21	0
5,8	10	30	1	0
5,10	12	30	0	0
6,9	8	33	19	0
7,12	8	38	21	4
8,11	5	40	17	0
8,13	11	40	1	1
9,15	12	41	19	19
10,13	10	42	0	0
11,12	5	45	17	0
12,15	5	50	17	17
13,14	12	52	0	0
14,15	18	64	0	0

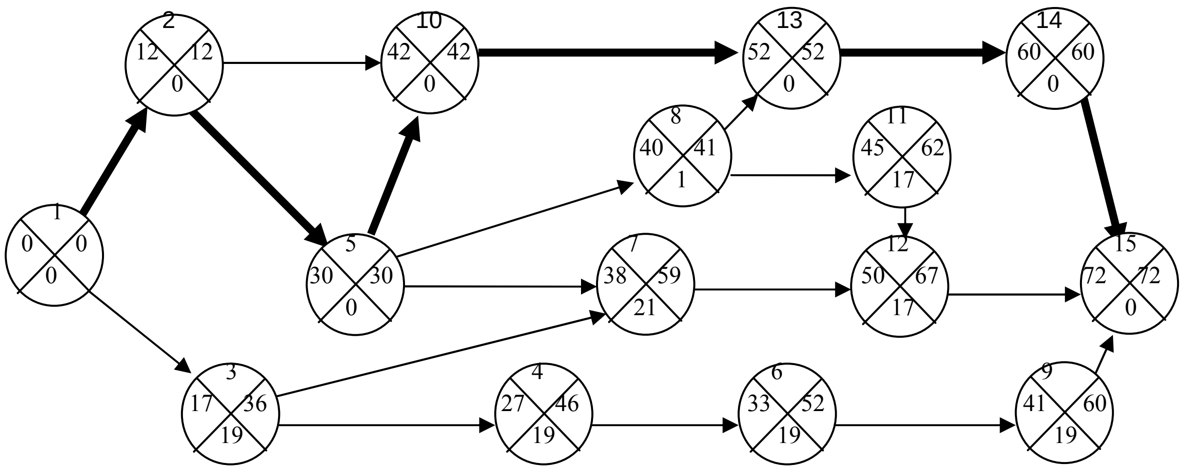
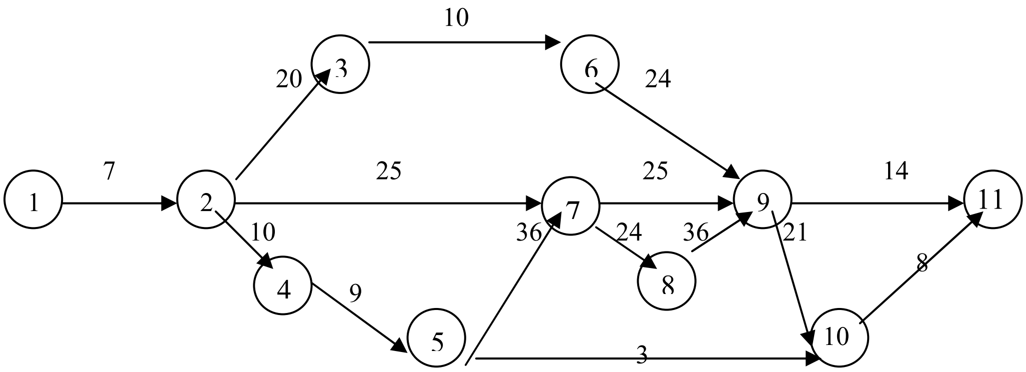


Рисунок 2.4.26 – Корректированный сетевой график

3. Моделирование задач распределения ресурсов.

п1. Пусть дан сетевой график разработки нового изделия



п2. Состав работ сетевого графика

Код работы	Наименование работы	Продолжительность		Кол-во исполнителей
		мин	макс	
1,2	Разработка ТЗ на изделие	5	10	4
2,3	Анализ требуемых характеристик	14	28	5
2,4	Составление спецификаций на необходимые материалы и детали	7	14	3
2,7	Разработка эскизного проекта	20	32	5
3,6	Разработка методики испытаний	8	12	5
4,5	Оформление заказов на необходимые материалы и детали	3	5	2
5,7	Ожидание информации о деталях	7	10	
5,10	Поставка необходимых материалов и деталей	45	90	4
6,9	Составление программы испытаний	20	30	5
7,8	Разработка технического проекта	30	45	9
7,9	Проектирование оснастки	22	30	7
8,9	Разработка рабочей документации	20	30	8
9,10	Изготовление всех составляющих	30	45	9
9,11	Составление инструкций по испытаниям	10	20	3
10,11	Монтаж и наладка изделия	15	30	9

Ожидаемая продолжительность выполнения работ вычисляется по формуле
$t=(3t_{min}+2t_{max})/5$.

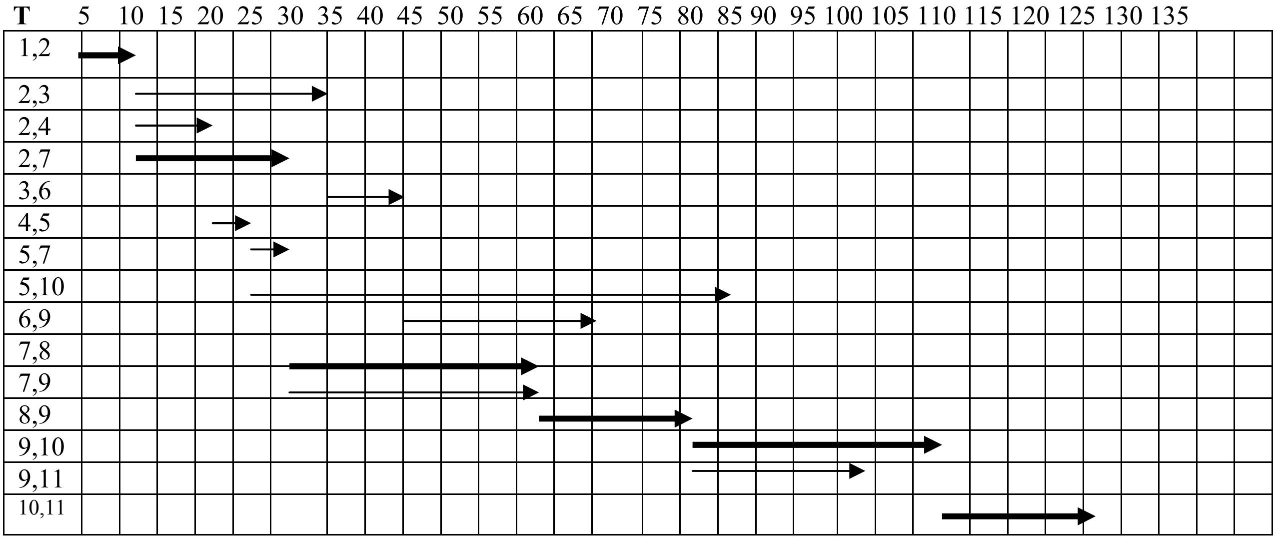
п3. Временной расчет сетевого графика

Код работы	Ожидаемая продолжительность	Сроки начала		Сроки окончания		Резервы работ		Коэф. напряженности
		ранний	поздний	ранний	поздний	полный	свободный	
1,2	7	0	0	7	7	0	0	1
2,3	20	7	38	27	58	31	0	0,635
2,4	10	7	10	17	20	3	0	0,88
2,7	25	7	7	32	32	0	0	1
3,6	10	27	58	37	68	31	0	0,635
4,5	4	17	20	21	24	3	0	0,88
5,7	8	21	24	29	32	3	3	0,88
5,10	63	21	65	84	128	44	44	0,636
6,9	24	37	68	61	92	31	31	0,635
7,8	36	32	32	68	68	0	0	1
7,9	25	32	32	92	92	35	35	0,417
8,9	24	68	68	92	92	0	0	1
9,10	36	92	92	128	128	0	0	1
9,11	14	92	92	149	149	43	43	0,246
10,11	21	128	128	149	149	0	0	1

- Ранний срок начала работы равен раннему сроку свершения ее начального события;
- Поздний срок начала работы равен разности между поздним сроком свершения ее конечного события и ожидаемой продолжительностью работы;
- Ранний срок окончания работы равен сумме раннего срока свершения ее начального события и ожидаемой продолжительностью работы;
- Поздний срок окончания работы равен позднему сроку свершения ее конечного события;
- Полный и свободный резервы вычисляются по формулам $R^{п}_{ij}=T_j^1 - T_i^0 - t_{ij}$, $R^{c}_{ij}=T_j^0 - T_i^0 - t_{ij}$;
- Коэффициент напряженности работы вычисляются по формуле $К_{ij}=1 - R^{п}_{ij}/(T_n^0-T_{кр}(i,j))$, где $R^{п}_{ij}$ – полный резерв работы (i,j), T_n^0 – критическое время выполнения проекта, $T_{кр}(i,j)$ – продолжительность совпадающего с критическим путем отрезка максимального пути, содержащего работу (i,j).

п4. График выполнения работ в минимально возможные сроки

(без привлечения дополнительных ресурсов)



- Работу (1,2) сократить нельзя;
- Работу (2,7) сокращаем на 5 дней за счет перераспределения одного исполнителя с работы (2,3);
- Работу (7,8) сокращаем на 6 дней за счет перераспределения 1,5 исполнителя с работы (7,9);
- Работу (8,9) сокращаем на 4 дня за счет перераспределения одного исполнителя с работы (6,9);
- Работу (9,10) сокращаем на 6 дней за счет перераспределения 1,5 исполнителя с работы (5,10);
- Работу (10,11) сокращаем на 2 дня за счет перераспределения одного исполнителя с работы (9,11);

Итого критический путь сокращается на 23 дня.

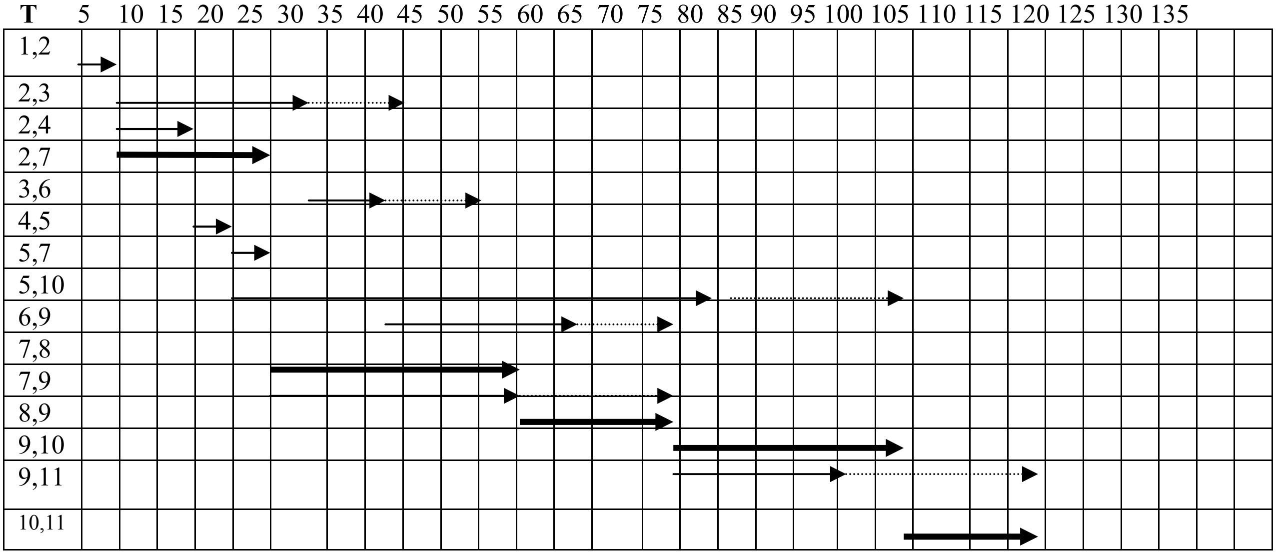
п5. Оценки стоимости работ сетевого графика (тыс.руб.)

Код работы	Наименование работы	Стоимость		Цена сокра-щения
		норм	экстр	
1,2	Разработка ТЗ на изделие	5	7	1
2,3	Анализ требуемых характеристик	14	19	0,833
2,4	Составление спецификаций на необходимые материалы и детали	7	10	1
2,7	Разработка эскизного проекта	20	30	2
3,6	Разработка методики испытаний	8	10	1
4,5	Оформление заказов на необходимые материалы и детали	3	5	2
5,7	Ожидание информации о деталях	0	0	
5,10	Поставка необходимых материалов и деталей	45	60	0,882
6,9	Составление программы испытаний	20	25	1,25
7,8	Разработка технического проекта	30	50	3,333

7,9	Проектирование оснастки	22	30	2,667
8,9	Разработка рабочей документации	20	30	2,5
9,10	Изготовление всех составляющих	30	45	2,5
9,11	Составление инструкций по испытаниям	10	15	1,25
10,11	Монтаж и наладка изделия	15	20	0,833

Цена сокращения вычисляется по формуле $y_{ij} = (c^a_{ij}–c^b_{ij})/(b_{ij}–a_{ij})=\Delta c/\Delta t$, где a_{ij} – минимально возможное время выполнения работы (i,j), которому соответствуют затраты c^a_{ij}; b_{ij} – максимально возможное время выполнения работы (i,j), которому соответствуют затраты c^b_{ij}.

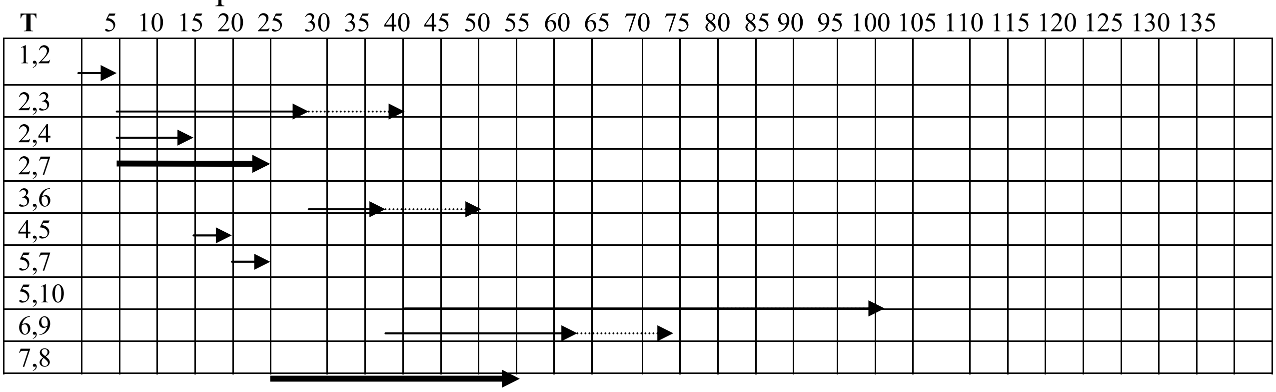
п6. График выполнения работ в минимально возможные сроки (с привлечением дополнительных ресурсов)

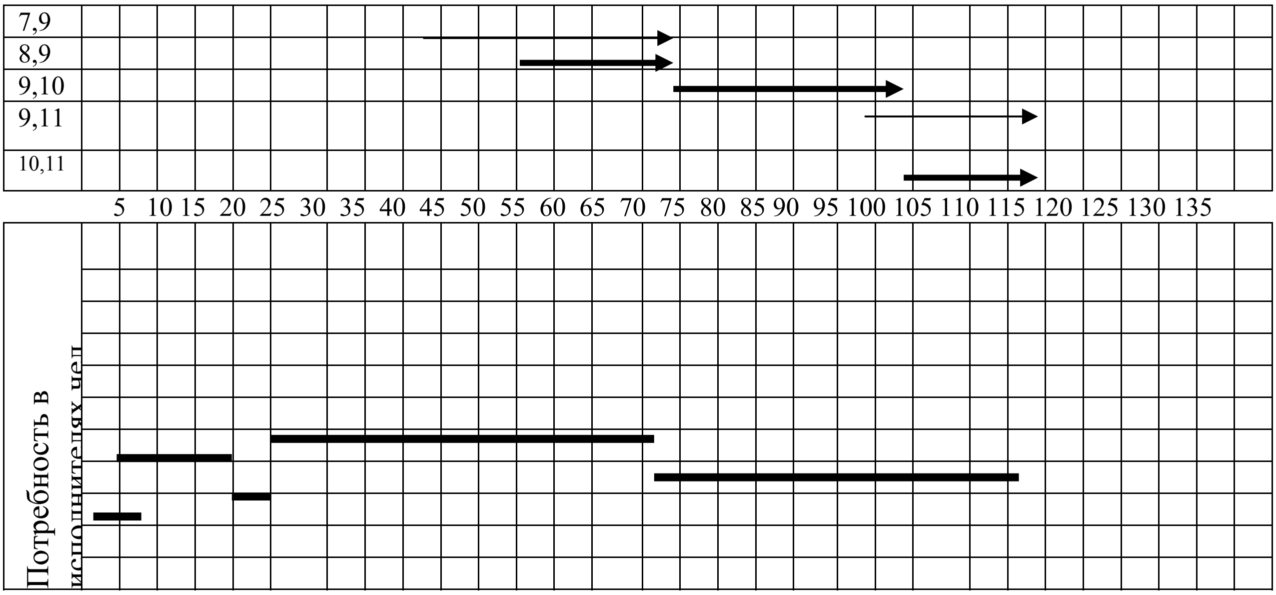


- Работу (1,2) можно сократить на 2 дня, увеличив затраты на 2 тыс. руб.;
- Работы (2,7), (7,8), (8,9) и (9,10) уже сокращены до минимума за счет внутренних резервов;
- Работу (10,11) можно сократить еще на 4 дня, увеличив затраты на 3,333.

Итого критический путь сокращается на 6 дней, при этом увеличиваются затраты на 5,333 тыс. руб.

п7. Линейная диаграмма и выровненная эпюра потребности в инженерно-технических работниках.





Вправо в пределах полного резерва сдвигаем работы (7,9), (5,10) и (9,11).

Тесты

1. Главными элементами сетевой модели являются:
    а) игровые ситуации и стратегии;
    б) состояния и допустимые управления;
    в) события и работы.
2. В сетевой модели не должно быть:
    а) контуров и петель;
    б) собственных векторов;
    в) седловых точек.
3. Критическим путем в сетевом графике называется:
    а) самый короткий путь;
    б) самый длинный путь;
    в) замкнутый путь.
4. Математической основой методов сетевого планирования является:
    а) аналитическая геометрия;
    б) теория электрических цепей;
    в) теория графов.
5. Оптимизация сетевого графика методом время-стоимость позволяет:
    а) сократить стоимость реализации проекта;
    б) сократить время реализации проекта;
    в) найти зависимость стоимости проекта от времени его реализации.
6. Из приведенного ниже списка выберите те задачи, для решения которых можно применить метод критического пути.
    а) Все виды строительных и ремонтных работ.
    б) Программа переоснащения станочного парка для массового производства.

в) Календарное планирование мелкосерийного производства.
г) Процедура запуска исследовательской ракеты.
д) Планирование бюджета.
е) Мобилизация, стратегическое и тактическое планирование.
з) Освоение новой продукции.
и) Сборка и испытания электронных систем.
к) Монтаж, программирование и отладка программ вычислительных систем.
л) а,б,д,е,з;
м) все вышеперечисленные;
н) а,б,е-к;
о) б,в,г,д,к;
п) в,д,и,к.

7. Что необходимо знать для применения методов “критического пути”?
а) информацию о требуемой последовательности выполнения операций;
б) информацию о продолжительности каждой операции;
в) информацию о затратах;
г) содержание п. а-в;
д) содержание п. а,б.

8. Критическое время это:
а) отставание от директивго срока;
б) длина критического пути;
в) крайний срок начала проекта.

9. К методам оптимизации сетевого графика относится:
а) калибровка;
б) шлифовка;
в) укладка.

10. Что не относится к временным параметрам работ?
а) свободный резерв;
б) полный резерв;
в) скрытый резерв.

Ответы к тестам

1) в	6) н
2) а	7) г
3) б	8) б
4) в	9) а
5) в	10) в

Контрольные вопросы

1. Указать основные элементы сетевой модели.
2. Каковы правила построения сетевых моделей?

3. Каков принцип оптимизации задач сетевого планирования?
4. Последовательность построения сетевых графиков.
5. Алгоритм расчета временных параметров сетевой модели.
6. Методы оптимизации потребления ресурсов при управлении проектами.
7. Область применения сетевых моделей.

Задания и задачи

Задача 1. Построить сетевую модель и календарный график выполнения работ и потребления ресурсов по указанным в таблице данным.

График построить в двух вариантах: в ранние и поздние сроки начала работ – сделать выводы.

Номера работ (операций)	Каким работам предшествует	Продолжительность работ	Потребность в трудресурсах
1	2	9	2
2	3, 4, 5	8	1
3	6	8	9
4	8	9	5
5	7	13	1
6	7	12	4
7	10, 12	14	4
8	9, 10	12	3
9	10, 12	14	8
10	11	6	4
11	14	9	1
12	13, 17	11	3
13	15	16	6
14	15	5	1
15	16	7	5
16	18	9	1
17	18	13	2
18		9	3

Задача 2. Компания «ABC» реализует проект производства некоторого изделия. Перечень работ проекта и их характеристики представлены в таблице.

Таблица. Перечень работ и их характеристики

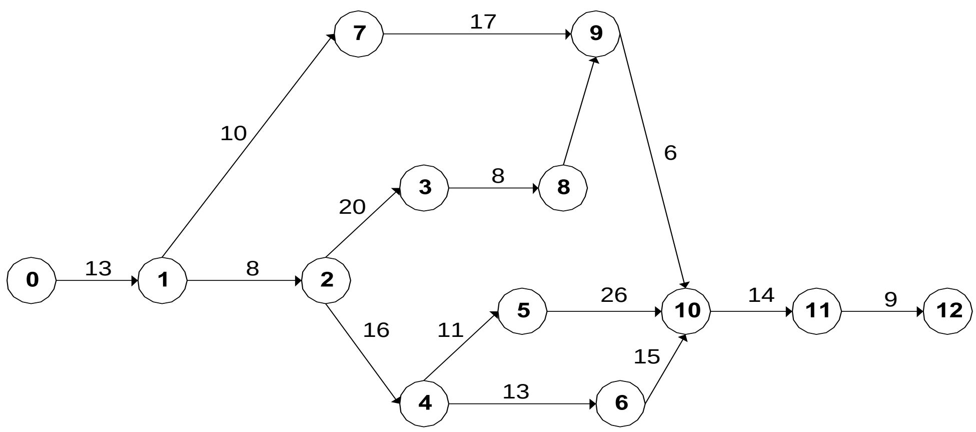
Работы	Непосредственно предшествующие работы	Продолжительность работы, недель		Трудоемкость работы
		t_{min}	t_{max}	
A	-	4	6	110

B	-	7	9	130
C	-	8	11	160
D	A	9	12	190
E	C	5	8	150
F	B, E	4	6	130
G	C	11	15	260
H	F, G	5	8	150
I	F	4	6	130
J	D,I	11	15	260
K	F	4	6	90
L	F	4	6	90
M	K	11	15	260
N	H,L	4	6	90
O	K	4	6	90
P	K	11	15	260
R	J, O	4	6	90
S	P, N	4	6	90

Задание:

1. Изобразить проект с помощью сетевой модели.
2. Определить наиболее вероятную продолжительность каждой работы.
3. Найти критический путь, ожидаемую продолжительность выполнения проекта, временные характеристики работ.
4. Разработать график реализации проекта и потребления ресурсов.

Задача 3. Выполнить расчет временных параметров сети. Вычертить календарный график работ в ранние сроки (линейную диаграмму). Исходные данные заданы сетевым графиком.



Задача 4. Изобразить проект с помощью сетевой модели. Выполнить расчет временных параметров сети. Вычертить календарный график работ в ранние сроки (линейную диаграмму). Исходные данные заданы в таблице.

Коды работ	Длительность работ (дни)
1-2	7
2-3	1
3-8	4
1-4	8
4-6	8
4-7	9
6-7	5
7-8	3
1-5	4
5-8	12
2-4	0
5-6	0

2.4.12. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Правила построения сетевых моделей.
2. Методы оптимизации задач сетевого планирования.
3. Методы оптимизации потребления ресурсов при управлении проектами.
4. Область применения сетевых моделей.

Литература для самостоятельной работы

1. Гельруд Я.Д. Модели и методы управления проектами в условиях риска и неопределенности. –Челябинск.: ЮУрГУ. 2006. – 220 с.
2. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. –399с.
3. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
4. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.

ТЕМА 2.5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ЛОГИСТИКИ

2.5.1. Экономическое содержание задач управления запасами.

Для обеспечения непрерывного и эффективного функционирования практически любой организации необходимо создание запасов. В любой задаче управления запасами требуется определять количество заказываемой продукции и сроки размещения заказов. Спрос можно удовлетворить путем однократного создания запаса на весь рассматриваемый период времени или посредством создания запаса для каждой единицы времени этого периода. Эти два случая соответствуют избыточному запасу (по отношению к единице времени) и недостаточному запасу (по отношению к полному периоду).

При избыточном запасе требуются более высокие удельные (отнесенные к единице времени) капитальные вложения, но дефицит возникает реже и частота размещения заказов меньше. С другой стороны, при недостаточном запасе удельные капитальные вложения снижаются, но частота размещения заказов и риск дефицита возрастают. Для любого из указанных крайних случаев характерны большие экономические потери. Таким образом, решения относительно размера заказа и момента его размещения могут основываться на минимизации общих издержек, включающих затраты, обусловленные потерями от избыточного запаса и дефицита.

В дальнейшем мы будем учитывать расходы трех типов:

1. Расходы, вызываемые оформлением и получением заказа при закупке или производстве.

2. Затраты на хранение запаса на складе. Сюда включаются, например, затраты на переработку, амортизационные и эксплуатационные расходы, процент на инвестированный капитал, расходы на страхование и налоги.

3. Расходы (штрафы), возникающие при истощении запасов, когда происходит задержка в обслуживании или спрос вообще невозможно удовлетворить. Эти расходы связаны с ухудшением репутации поставщика у потребителя и с потенциальными потерями прибыли.

Чрезвычайно трудно построить обобщенную модель управления запасами, которая учитывала бы все разновидности условий, наблюдаемых в реальных системах. Приведем (далеко не полный) перечень подобных условий:

1. Все затраты могут оставаться постоянными или изменяться от времени (например, в зависимости от сезона может меняться стоимость хранения продукции на складе). Затраты могут зависеть также от объема запасов (размером партии может, например, определяться оптовая скидка при покупке или стоимость хранения на складе).
2. Спрос может быть известным или неизвестным, постоянным (спрос на хлеб) или зависящим от времени (спрос на мороженое). Величина, характеризующая спрос, может быть как дискретной (плиты перекрытия), так и непрерывной (раствор).
3. Заказы на пополнение запасов могут выполняться немедленно или с определенной задержкой. Величина задержки может быть детерминированной или случайной. Заказы можно делать в любые или только в определенные моменты времени.
4. Процесс пополнения запаса может осуществляться мгновенно (заказы поступают от внешнего источника) или равномерно во времени (запасаемая продукция производится самой организацией). Размер заказа может измеряться дискретной или непрерывной величиной и может быть как постоянным, так и переменным.
5. В зависимости от отрезка времени, на котором можно надежно прогнозировать, период времени, в течение которого осуществляется регулирование уровня запаса, принимается конечным или бесконечным.
6. В систему управления запасами может входить несколько пунктов хранения запаса, образующих иерархическую структуру с различными периодами пополнения и временем поставки заказов, с возможностью обмена запасами между складами и т.п.
7. В системе управления запасами может фигурировать более одного вида продукции. Этот фактор учитывается при наличии зависимости между различными видами продукции. Так, для различных изделий может использоваться один и тот же склад или же их производство может осуществляться при ограничениях на общие производственные мощности.

Рассмотренные далее в этой теме модели соответствуют самым простым системам управления запасами. Маловероятно, что эти модели могут точно подойти для реальных условий, однако они приведены с целью разъяснения различных подходов к решению некоторых конкретных задач управления запасами.

2.5.2. Детерминированная статическая модель без дефицита.

Данная модель характеризуется постоянным во времени спросом, мгновенным пополнением запаса и отсутствием дефицита (т.е. нехватка товара не допускается, штраф при неудовлетворенном спросе бесконечно велик). Такую модель можно применять в следующих типичных ситуациях:

а) использование осветительных ламп в здании;

б) использование канцелярских товаров крупной фирмой;

в) использование таких промышленных изделий, как гайки, болты и т.п.;

г) потребление основных продуктов питания (например, хлеба и молока).

Предположим, что **интенсивность спроса** (в единицу времени) равна β. Пусть q – размер заказа, t_s – интервал времени между поступлениями заказов, R – полный спрос за все время планирования T. В данной модели наивысшего уровня запас достигает в момент поставки заказа размером q и падает до нуля спустя время t_s (рис.2.5.1).

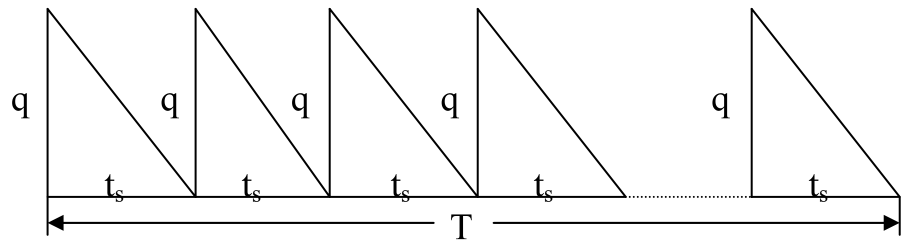


Рис. 2.5.1. Кривая запасов. Модель без дефицита.

Тогда q /2 – средний запас в течение t_s, $\beta = R/T$, $t_s = q/\beta$.

Чем меньше размер заказа q, тем чаще нужно размещать новые заказы. Однако при этом средний уровень запаса будет уменьшаться. С другой стороны, с увеличением размера заказов уровень запаса повышается, но заказы размещаются реже. Так как затраты зависят от частоты размещения заказа и объема хранимого запаса, то величина q выбирается из условия обеспечения сбалансированности между двумя видами затрат (минимизации их суммы).

Пусть c_1 – затраты на оформление заказа, имеющие место всякий раз при его размещении (при покупке или производстве), c_2 – затраты на хранение единицы продукции в единицу времени, тогда суммарные затраты в единицу времени можно представить как функцию от q в виде:

c(q) = затраты на оформление заказа в единицу времени + затраты на хранение запасов в единицу времени =

$$= c_1/ t_s + c_2 q/2 = c_1\beta/q + c_2q /2. \qquad (2.5.1)$$

В точке минимума функции c(q) ее производная равна нулю:

$$c'(q) = -c_1\beta/q^2 + c_2/2 = 0,$$

откуда находим оптимальное значение размера заказа

$$q^* = \sqrt{2 c_1\beta/ c_2}. \qquad (2.5.2)$$

Полученное выражение обычно называют **формулой экономичного размера заказа Уилсона**. Подставляя q* в (2.5.1) определим минимальные ожидаемые суммарные накладные расходы:

$$C^* = Tc(q^*) =T\sqrt{2c_1c_2\beta}\,. \qquad (2.5.3)$$

Время расхода оптимальной партии равно

$$t_s^* = q^* /\beta = \sqrt{2 c_1/(\beta c_2)}. \qquad (2.5.4)$$

Пример 2.5.1. Ежедневный спрос на некоторый товар составляет 100 ед. Затраты на размещение каждого заказа постоянны и равны 1000 руб. Ежедневные затраты на хранение единицы запаса составляют 0.2 руб. Требуется определить оптимальный размер партии, оптимальную продолжительность цикла поставок и вычислить минимум общих ожидаемых годовых затрат. Подстановка исходных данных примера в уравнения (2.5.2)-(2.5.4) нам дает

$$q^* = \sqrt{2\times100\times1000/0.2} = 1000 \text{ ед.}$$

$$C^* =365\sqrt{2\times100\times1000\times0.2} = 73000 \text{ руб.}$$

$$t_s^* = \sqrt{2\times1000/(100\times0.2)} = 10 \text{ дней.}$$

Для большинства реальных ситуаций существует (положительный) *срок выполнения* заказа от момента размещения до его действительной поставки. Тогда необходимо определять *точку возобновления заказа,* как правило, через *уровень запаса*, соответствующий моменту возобновления заказа. На практике это реализуется путем непрерывного контроля уровня запаса до момента достижения очередной точки возобновления заказа.

Пример 2.5.2. Предположим в условиях примера 2.5.1, что срок выполнения заказа L равен 12 дням. Так как оптимальная продолжительность цикла составляет 10 дней, возобновление заказа в условиях налаженного производства происходит, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения спроса на 12 – 10 = 2 дня. Таким образом, заказы должны делаться регулярно при достижении уровня запаса 2×100=200 ед. После стабилизации системы можно считать, что срок выполнения заказа равен $L - t_s^*$ при $L > t_s^*$. В описанных условиях в любой момент времени имеется более одного размещенного, но еще не выполненного заказа, и «эффективный» срок выполнения заказа принят равным 2 дням.

2.5.3. Детерминированная статическая модель с дефицитом.

Эта модель отличается от предыдущей только тем, что превышение спроса над запасами уже допускается, т.е. штраф за нехватку конечный. График изменения уровня запаса в этом случае представлен на рис. 2.5.2. Убывание запаса в область отрицательных значений в отличие от графика на рис. 2.5.1 характеризует накопление дефицита. Каждый период пополнения запаса t_s состоит в данном случае из суммы двух интервалов, где t_1 – время, в течение которого производится потребление запаса, t_2 – время, когда накапливается дефицит, который будет перекрыт в момент поступления следующей партии.

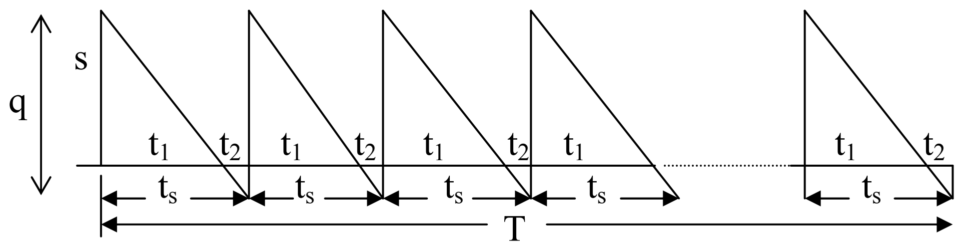


Рис. 2.5.2. Кривая запасов. Модель с дефицитом.

Необходимость покрытия дефицита приводит к тому, что максимальный уровень запаса s теперь не равен размеру заказа q, а меньше его на величину дефицита q - s, накопившегося за время t_2.

Из подобия треугольников на рис.2.5.2 имеем

$$t_1 / t_s = s / q,\quad t_2 / t_s = (q - s) / q. \qquad (2.5.5)$$

Средний запас за время t_1 равен s/2. Поэтому затраты на хранение за время t_1 составляют $t_1c_2s/2$. Пусть c_3 – величина штрафа за нехватку одной единицы продукции в единицу времени, тогда при среднем уровне дефицита за время t_2, равном (q – s)/2, штраф за это время составляет $t_2c_3(q - s)/2$. Таким образом, ожидаемые суммарные расходы за время t_s равны $c_1 + t_1c_2s/2 + t_2c_3(q - s)/2$ или, поделив на t_s, получаем общие затраты в единицу времени:

$$c_1/ t_s + (t_1 /t_s)c_2s/2 + (t_2 /t_s)c_3(q - s)/2.$$

Подставляя сюда (2.5.5) и $t_s = q / \beta$, получаем выражение для общих затрат в единицу времени как функции от q и s:

$$c(q, s) = c_1\beta/q + c_2s^2/(2q) + c_3(q - s)^2/(2q). \qquad (2.5.6)$$

Из уравнения (2.5.6) находим оптимальные значения объема заказа q* и максимального уровня запаса s*, при которых функция **c** (2.5.6) принимает минимальное значение. Для этого приравниваем частные производные $\partial c/\partial q$, $\partial c/\partial s$ к нулю и после упрощений получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} s = qc_3/(c_2 + c_3), \\ q^2 c_3 - (c_2 + c_3)s^2 = 2c_1\beta. \end{cases} \qquad (2.5.7)$$

Решая эту систему относительно q и s, находим

$$q^* = \sqrt{2 c_1 \times \beta / c_2}\,\sqrt{(c_2 + c_3)/c_3} \text{ и } s^* = q^* c_3/(c_2 + c_3). \qquad (2.5.8)$$

Определим минимальные ожидаемые суммарные накладные расходы за весь период T:

$$C^* = Tc(q^*, s^*) = T\sqrt{2c_1c_2\beta}\sqrt{c_3/(c_2 + c_3)}. \qquad (2.5.9)$$

Оптимальный интервал времени между заказами равен:

$$t_s^* = q^*/\beta = \sqrt{2 c_1/(\beta c_2)}\sqrt{(c_2 + c_3)/c_3}\,. \qquad (2.5.10)$$

При сравнении результатов, полученных для моделей без дефицита и с дефицитом, можно заметить, что уравнения (2.5.2)-(2.5.4) можно получить из уравнений (2.5.8)-(2.5.10), если $c_3 \to \infty$, действительно, отсутствие дефицита соответствует бесконечно большому штрафу за неудовлетворенный спрос. Отметим также, что ожидаемые суммарные расходы в модели с дефицитом меньше, чем в модели без дефицита, т.к. они отличаются на величину $\sqrt{\rho} = \sqrt{c_3/(c_2+c_3)} < 1$. Коэффициент ρ называется *плотностью убытков из-за неудовлетворительного спроса* и играет важную роль в управлении запасами.

Пример 2.5.3. Пусть сохраняются все условия примера 2.5.1, но только штраф c_3 за нехватку теперь равен 0.4 руб. за одно изделие в день. Из уравнений (2.5.8)-(2.5.10) получаем:

$$q^* = \sqrt{2\times1000\times100/0.2}\sqrt{(0.2 + 0.4)/0.4} = 1225 \text{ ед.},$$

$$s^* = 1225\times0.4/(0.2 + 0.4) = 817 \text{ ед.},$$

$$C^* = 365\sqrt{2\times1000\times0.2\times100}\sqrt{0.4/(0.2 + 0.4)} = 59604 \text{ руб.},$$

$$t_s^* = 1225/100 = 12.25 \text{ дней}.$$

При оптимальной стратегии ожидаемый дефицит к концу каждого периода составлял бы 1225 – 817 = 408 изделий.

2.5.4. Простая вероятностная модель (I).

Рассмотрим вначале приближенный метод, сохраняющий простоту модели экономичного размера заказа и в то же время учитывающий вероятностный характер спроса. Этот метод предусматривает создание некоторого (постоянного) резервного запаса на всем горизонте планирования. Размер резерва определяется таким образом, чтобы вероятность истощения запаса в течение *периода выполнения заказа* L не превышала наперед заданной величины α. Тогда размер резервного запаса B определяется из условия:

$$P\{\boldsymbol{x} \geq B + L\beta\} \leq \alpha,$$

где $L\beta$ представляет собой потребление в течение времени L.

Пример 2.5.4. Предположим, что ежедневный спрос в примере 2.5.2 является случайной величиной, распределенной по *нормальному закону* со средним μ =100 и средним квадратичным отклонением σ=10. Определим размер резервного запаса таким образом, чтобы вероятность истощения запаса в течение срока выполнения заказа не превышала 0.05.

Из примера 2.5.2 этот срок равен 2 дням. Так как ежедневный спрос распределен нормально, *запаздывание спроса* $\boldsymbol{x}_L$ также имеет нормальное распределение со средним $\mu_L = 2\times100 = 200$ и средним квадратичным отклонением $\sigma_L = \sqrt{2\times10^2} = 14.14$. Таким образом, нам необходимо найти B, удовлетворяющее

$$P\{\boldsymbol{x}_L \geq B + \mu_L\} \leq \alpha,$$

$$P\{(\boldsymbol{x}_L - \mu_L)/\sigma_L \geq B/\sigma_L\} \leq \alpha,$$

или

$$P\{(\boldsymbol{x}_L - \mu_L)/\sigma_L \geq B/14.14\} \leq 0.05.$$

Используя формулу доверительной вероятности для нормального распределения, получим $\Phi(B/14.14) \geq 0.9$. Из таблицы значений функции Лапласа $\Phi(\boldsymbol{x})$ получаем $B/14.14 \geq 1.645$, или $B \geq 23.26$.

В этой модели определяющим фактором является среднее квадратичное отклонение. Действительно, если среднее квадратичное отклонение равно нулю (детерминированный случай), размер резервного запаса должен быть нулевым.

2.5.5. Простая вероятностная модель (II).

При построении этой модели штрафы, связанные с дефицитом запасов, считаются конечными, и данная модель имеет следующие особенности:

1. Спрос и пополнение запасов оцениваются на основе опытных данных.
2. Рассматривается производство и потребление дискретного продукта.
3. Распределения по времени спроса и заказов на пополнение дискретные и неравномерные.

4. Известно и постоянно время выполнения заказов.

Здесь учитываются только расходы на приобретение запасных деталей, которые могут оказаться лишними, и убытки, возникающие при их нехватке.

Пусть спрос r является случайной величиной и задан закон (ряд) распределения φ(r). Тогда запасу в s деталей будут соответствовать следующие затраты: $(s - r)c_2$, если $r \le s$, т.е. запас оказался чрезмерным, и $(r - s)c_3$, если $s < r$, т.е. запасных деталей не хватило. Тогда *среднее значение суммарных затрат (математическое ожидание*) имеет вид:

$$C(s) = c_2\sum_{r=0}^{s}(s-r)\,\varphi(r) + c_3\sum_{r=s+1}^{\infty}(r-s)\varphi(r). \qquad (2.5.11)$$

Задача управления запасами при вероятностном спросе состоит в отыскании такого запаса s*, при котором математическое ожидание суммарных затрат (2.5.11) принимает минимальное значение.

Опуская доказательство, получаем, что значение s* должно удовлетворять неравенствам

$$P(s^* - 1) < c_3/(c_2 + c_3) < P(s^*), \qquad (2.5.12)$$

где $P(s) = \sum_{r=0}^{s} \varphi(r)$ – эмпирическая функция распределения спроса (вероятность того, что спрос $r \le s$).

Пример 2.5.5. Пусть стоимость одной детали, если ее заказывать заранее, составляет 100 руб. Отсутствие этой детали в запасе при поломке приводит к простою оборудования и срочный заказ детали обходится в 200 руб. Опытные данные о частоте выхода этой детали из строя приведены в табл. 2.5.1.

Таблица 2.5.1.

Потребовалось запасных деталей (r)	0	1	2	3	4	5	6 и более
Сколько случаев потребовало данное число деталей	10	20	25	20	15	10	0
Эмпирическая вероятность φ(r)	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10	0

Подсчитаем значение $c_3/(c_2 + c_3) = 200/(100 + 200) = 0.67$.

Оптимальное решение получается в результате построения эмпирической функции распределения спроса (табл. 2.5.2).

Таблица 2.5.2

s	0	1	2	3	4	5
P(s)	0.10	0.30	0.55	0.75	0.90	1.00

Так как $P(2) = 0.55 < 0.67 < 0.75 = P(3)$, то оптимальное значение $s^*= 3$.

Полученным аналитическим решением можно воспользоваться для *оценки потерь, возникающих при недостаточных запасах*. Предположим, что нам неизвестна зависимость штрафа от размера дефицита, а уровень запасов, который предприниматель стремится поддерживать, равен трем деталям. Для какого штрафа этот уровень запасов будет оптимальным? Подставляя в (2.5.12) $s^* = 3$, получим

$$P(2) < c_3 /(c_2 + c_3) < P(3),$$

$$0.55 < c_3 /(100 + c_3) < 0.75.$$

Определим минимальное значение c_3:

$$c_3/(100 + c_3) = 0.55, \text{ откуда } c_3 = 122.$$

Определим максимальное значение c_3:

$$c_3 /(100 + c_3) = 0.75, \text{ откуда } c_3 = 300.$$

Следовательно, предприниматель считает, что размер штрафа за дефицит заключен в пределах от 122 до 300 руб.

Заключение. Общее решение задачи выбора оптимальных размеров и сроков размещения заказов на запасаемую продукцию нельзя получить на основе одной модели. Мы рассмотрели некоторые простые частные случаи. В реальных условиях потери от дефицита обычно наиболее сложно оценить, так как они могут быть обусловлены нематериальными факторами, например, ухудшением репутации. С другой стороны, хотя оценку затрат на оформление заказа получить нетрудно, включение в модель этих расходов существенно усложняет математическое описание задачи.

Известные модели управления запасами редко точно описывают реальную систему. Поэтому решения, получаемые на основе моделей этого класса, следует рассматривать скорее как принципиальные выводы, а не конкретные рекомендации. В ряде сложных случаев приходится прибегать к методам динамического программирования и даже имитационного моделирования системы, чтобы получить достаточно надежное решение.

2.5.6. Практический блок

Примеры

1. Детерминированная статическая модель без дефицита.

На складе комплектующих хранится определенное количество микросхем. Ежедневная потребность сборочного участка в микросхемах составляет в среднем 135 штук. Затраты на закуп партии микросхем постоянны и составляют 2600 рублей. Затраты на хранение микросхем составляют 0,02 рубля за единицу. Необходимо определить оптимальный размер закупаемой партии микросхем, оптимальную продолжительность цикла поставок и определить минимум общих ожидаемых годовых затрат.

Решение:

1.1. Оптимальный размер партии закупа определяется по формуле (2.5.2). Подставляя в нее исходные данные, получим значение оптимального размера партии микросхем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 * 2600 * 135}{0,02}} = 5925\ шт.$$

1.2. Оптимальная продолжительность цикла поставок определяется по формуле (5.2.4). Значение продолжительности цикла поставок для нашей задачи:

$$t_s^* = \frac{q^*}{\beta} = \frac{5925}{135} = 44\ дня\ .$$

1.3.Ожидаемые годовые затраты рассчитываются по формуле (2.5.3). Для нашей задачи: $c^* = 365*\sqrt{2* 2600*0{,}02*135} = 43249$ руб.

2. Детерминированная статическая модель с дефицитом.

Условия задачи, как и в первом случае, только допускается дефицит микросхем. При этом возникнут затраты (в виде штрафов), связанные с отсутствием микросхем при сборке изделий, которые по величине равны 0,06 руб. на единицу товара в единицу времени. Требуется также определить оптимальный размер закупаемой партии микросхем, оптимальную продолжительность цикла поставок и определить минимум общих ожидаемых годовых затрат, а также максимальный уровень заказа.

Решение:

2.1. Оптимальный размер партии закупа определяется по формуле (2.5.8). Подставляя исходные данные, получим значение оптимального размера партии микросхем:

$$q^* = \sqrt{\frac{2 * 2600 * 135}{0,02}} * \sqrt{\frac{0,02 + 0,06}{0,06}} = 6842\ шт.$$

2.2. Оптимальная продолжительность цикла поставок определяется по формуле (2.5.10). Значение продолжительно цикла поставок для нашей задачи:

$$t_s^* = \frac{q^*}{\beta} = \frac{6842}{135} = 51\ день$$

2.3. Ожидаемые годовые затраты рассчитываются по формуле (2.5.9). Для нашей задачи:

$$c^* = 365\sqrt{2 * 2600 * 0,02 * 135} * \sqrt{\frac{0,06}{0,02 + 0,06}} = 37455\ руб.$$

2.4. Максимальный уровень запаса S^* определяется по формуле (2.5.7). Для нашего случая:

$$s^* = 6842 * \frac{0,06}{0,02 + 0,06} = 5132\, штуки$$

3. Вероятностная модель

Задача: ежедневный спрос сборочного цеха на галогеновые лампы составлял 0, 50, 100, 150, 200, 250, более 250 штук. Частота указанного спроса в течение года приведена в таблице 2.5.3. Необходимо определить оптимальное количество хранения ламп на складе, если известно, что затраты на приобретение ламп составляют 1150 руб., а затраты (штрафы), связанные с дефицитом ламп составляют 950 рублей.

Таблица 5.2.3

Спрос	0	50	100	150	200	250	Более 250
Частота	3	54	55	97	32	4	5
Доля	0,012	0,216	0,22	0,388	0,128	0,016	0,02
Функция распределения F	0,012	0,228	0,448	0,836	0,964	0,98	1

Решение: Оптимальное значение находится из условия (2.5.12). Подставляя значения C_2 =1150 и C_3 =950 получим следующее выражение:

$$F(S^* - 50) \le 0,452 \le F(S^*)$$

Из этого условия видно, что S^* = 150 штук.

Контрольные вопросы

1. Постановка задачи управления запасами.
2. Основные положения задач управления запасами.
3. Описать виды издержек, учитывающихся в задачах управления запасами.
4. Основные модели управления запасами.
5. Формула Уилсона.
6. Геометрическая иллюстрация движения запасов для основных моделей управления запасами.
7. Привести принципы построения целевых функций в задачах управления запасами.
8. Дать геометрическую иллюстрацию изменения издержек в основной модели управления запасами.
9. Теоретические основы применения математических методов в логистике.

10. Формулировка и экономическая интерпретация классической задачи управления запасами.
11. Методика исследования классической задачи управления запасами.
12. Математические методы оптимизации стратегии пополнения запасов.
13. Математические методы регулирования товарных запасов в системах с фиксированным размером заказа.
14. Применение математических методов для регулирования товарных запасов в системах с фиксированной периодичностью заказа.
15. Оптимизация размеров заказа для создания товарных запасов.
16. Точка заказа. Понятие, геометрическая иллюстрация.

Тесты

1. Когда возникает задача управления запасами?

а) когда имеются два вида издержек, связанных с неиспользуемыми ресурсами: издержки, возрастающие с ростом запасов, и издержки, убывающие с ростом запасов;

б) когда издержки увеличиваются с ростом запасов;

в) когда имеются три вида издержек;

г) когда издержки не меняются;

д) когда издержек нет.

2. Какие существуют основные статьи издержек, убывающих при увеличении запасов?

а) издержки, связанные с отсутствием запасов или несвоевременными поставками;

б) расходы на подготовительно-заключительные операции;

в) продажная цена, или прямые издержки производства;

г) издержки, связанные с наймом, увольнением и обучением рабочей силы;

д) все вышеназванные.

3. К основным типам моделей управления запасами относится:

а) динамическая модель;

б) вероятностная модель;

в) игровая модель.

4. Детерминированная модель управления запасами определяется

а) постоянным количеством пополнения склада;

б) постоянным количеством хранения товара на складе;

в) постоянным спросом на товар.

5. Вероятностная модель управления запасами определяется

а) переменным количеством пополнения склада;

б) переменным количеством хранения товара на складе;

в) переменным спросом на товар.

6. Формула Уилсона предназначена для расчета

а) оптимального размера склада;
б) оптимального размера пополнения склада;
в) оптимального объема хранения товара на складе.

Ответы к тестам

1) а	4) в
2) а	5) в
3) б	6) б

Задания и задачи

1. Ежедневный спрос на некоторый продукт составляет 100 ед. Затраты на приобретение каждой партии этого продукта, не зависимые от объема партии, равны 100 ден. ед., а затраты на хранение единицы продукта — 0,02 ден. ед. в сутки. Определить наиболее экономичный объем партии и интервал между поставками партий такого объема.

2. Решить задачу **1** в предположении, что возможен дефицит, который приносит 0,03 ден. ед. убытка в день на единицу продукта.

3. Кондитерское предприятие торгует вразвес своими тортами. Каждый килограмм торта приносит 2 ден. ед. прибыли. Все торты можно продать на следующий день со скидкой 0,2 ден. ед. На основании опыта получено распределение спроса на торты, представленное в табл. 5.2.4. Найти оптимальную дневную выработку тортов.

4. Склад пополняется каждый месяц некоторыми изделиями. В течение первых пяти месяцев года объемы пополнения равны соответственно 10, 20, 20, 20 и 30 изделиям. Начальный запас к началу первого месяца равен 10 изделиям. На основании опыта получено распределение спроса на товар, представленное в табл. 5.2.5. Сдвиг по времени между заказом на пополнение и доставкой на склад равен 6 мес. Издержки в расчете на одно изделие из-за излишка изделий равны 10 ден. ед, а от их нехватки — 120 ден. ед. Найти оптимальное пополнение склада на шестой месяц.

Таблица 5.2.4

Спрос	0	1	2	3	4	5
Статистическая вероятность	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1	0.1

Таблица 5.2.5

r	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
φ(r)	0,00	0,00	0,01	0.02	0.05	0,08	0,11	0,12	0,14	0,13	0,10
r	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	
φ(r)	0,08	0.05	0.03	0.02	0,02	0,01	0,01	0,01	0,01	0.00	

2.5.7. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Рекомендуемые темы рефератов

1. Основные модели управления запасами.
2. Принципы построения целевых функций в задачах управления запасами.
3. Теоретические основы применения математических методов в логистике.
4. Методика исследования классической задачи управления запасами.
5. Математические методы регулирования и оптимизации товарных запасов.
6. Область применения модели управления запасами.

Литература для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
2. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.И. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб.пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
4. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.

ТЕМА 2.6. ЗАДАЧИ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

2.6.1. Общие понятия теории очередей.

Ожидание того или иного вида обслуживания является частью нашей повседневной жизни. Мы ожидаем, чтобы пообедать в ресторане, мы стоим в очереди к кассам в магазинах и выстраиваемся в очередь в почтовых отделениях. Очередь возникает практически во всех присутственных местах: налоговых инспекциях, паспортных столах, страховых компаниях и пр. Феномен ожидания характерен не только для людей: работы, поставленные в очередь для выполнения; группа пассажирских самолетов, ожидающих разрешения на посадку в аэропорту; автомобили, движение которых приостановлено сигналом светофора на пути их следования, грузовые суда, ожидающие погрузки/разгрузки в порту, и т.п.

Изучение очередей в системах массового обслуживания позволяет определить критерии функционирования обслуживающей системы, среди которых наиболее значимыми являются среднее время ожидания в очереди и средняя длина очереди. Эта информация используется затем для выбора надлежащего уровня обслуживания, что продемонстрировано в следующем примере.

Пример 2.6.1. Физические лица, сдающие декларацию о доходах, жалуются на медленное обслуживание. В настоящее время в данном подразделении работают три налоговых инспектора. В результате расчетов, формулы для которых мы рассмотрим ниже, обнаружена следующая зависимость между числом инспекторов и временем ожидания обслуживания.

Число инспекторов	1	2	3	4	5	6	7
Среднее время ожидания (минуты)	80.2	50.3	34.9	24.8	14.9	12.9	9.4

Приведенные данные свидетельствуют о том, что при работающих в настоящее время трех инспекторах среднее время ожидания обслуживания примерно равно 35 минут. По мнению посетителей, приемлемо было бы 15 минут ожидания. Как следует из этих же данных, среднее время ожидания становится меньше 15 минут, если число инспекторов больше или равно пяти.

Результаты исследования системы обслуживания также можно использовать для оптимизации модели со стоимостными характеристиками, в которой минимизируется сумма затрат, связанных с предоставлением услуг, и потерь, обусловленных задержками в их предоставлении. На рис. 2.6.1 изображена типичная стоимостная модель системы обслуживания, где затраты на обслуживание возрастают с ростом его уровня. В то же время потери, обусловленные задержками в предоставлении услуг, уменьшаются с возрастанием уровня обслуживания.

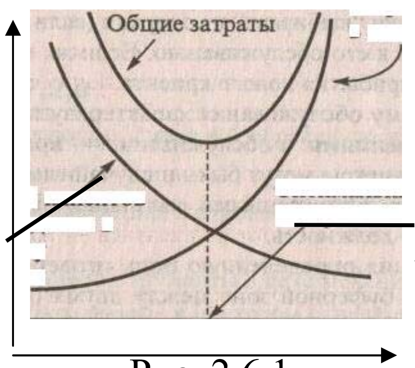


Рис. 2.6.1

Главной проблемой, связанной с применением стоимостных моделей, является трудность оценки потерь в единицу времени, обусловленных задержками в предоставлении услуг.

Задачи массового обслуживания возникают в том случае, когда ***заявки на обслуживание*** (или **требования**) не могут быть выполнены в силу занятости **обслуживающего персонала (оборудования)** или сама **обслуживающая система** оказывается бездействующей в силу отсутствия заявок. При моделировании данных задач используются фундаментальные понятия теории вероятности, т.к. случайными оказываются поток требований или длительность времени обслуживания, или и то и другое. При решении этих задач приходится определять либо оптимальное число обслуживающих каналов, либо оптимальную скорость потока (или находить моменты поступления заявок).

Класс моделей, пригодных для решения подобных задач, называют еще **теорией очередей.**

При решении задач, связанных с очередями, возможны две ситуации:

а) число заказов слишком велико; имеет место *большое время ожидания (недостаточный объем обслуживающего оборудования)*;

б) поступает недостаточное число заказов; имеет *место простой оборудования (избыток оборудования*).

Необходимо найти оптимальное соотношение между потерями, вызванными простоем оборудования, и потерями из-за ожидания.

2.6.2. Одноканальные системы массового обслуживания.

Найдем сначала среднюю длину очереди и вероятность появления очереди заданной длины *на единственной станции* обслуживания. Предположим, что скорость поступления и обслуживания случайны и не зависят от *неограниченной длины очереди.*

Модель 1.

Обозначим P_n – вероятность образования очереди из n заказов (включая и находящийся в обслуживании) в произвольный момент времени, λ – средняя скорость появления заказов, μ – средняя скорость обслуживания одного заказа.

Вероятность P_n имеет четкий смысл: она показывает среднее относительное время наличия очереди длиной n при функционировании системы в стационарном режиме. Например, если $P_0 = 1/2$, то это означает, что в среднем половину рабочего времени очереди нет (оборудование простаивает). Справедливы следующие формулы:

$$P_n = \eta^n(1-\eta). \qquad (2.6.1)$$

Величина $\eta = \lambda/\mu$ называется *интенсивностью потока заявок* или *интенсивностью нагрузки станции.* Она выражает среднее число заявок, приходящих за среднее время обслуживания одной заявки. Найдем $\overline{n}$ – *среднее число заявок, находящихся в системе*

$$\overline{n} = \lambda/(\mu-\lambda). \qquad (2.6.2)$$

Для $\bar{t}_w$ – *среднее время ожидания обслуживания*, справедливо

$$\bar{t}_w = 1/(\mu-\lambda) - 1/\mu. \qquad (2.6.3)$$

Для $\bar{n}_w$ – *средняя длина очереди*

$$\bar{n}_w = \lambda\bar{t}_w. \qquad (2.6.4)$$

Пример 2.6.2. Пусть заказы на обслуживание поступают со средней интенсивностью $\lambda = 5$ заявок в час. Продолжительность выполнения одной заявки в среднем равна 10 мин., т.е. $\mu = 60/10 = 6$ з/ч. Поскольку $\eta = \lambda/\mu = 5/6 < 1$, система может функционировать в стационарном режиме. Найдем среднее время ожидания обслуживания $\bar{t}_w = 1/(\mu-\lambda) - 1/\mu = 1/(6-5) - 1/6 = 5/6$ (50мин), тогда среднее число клиентов, ожидающих обслуживания, равно $\bar{n}_w = \lambda \bar{t}_w = 25/6 = 4.17 \approx 4$. Для «разумного» обеспечения местами прибывающих клиентов зададимся целью обеспечить одновременно сидячими местами, например, 80% клиентов. Это эквивалентно выполнению условия

$$P_0 + P_1 + P_2 + \ldots + P_w \geq 0.8,$$

где w – подлежащее определению число мест. Используя (2.6.1)

$$(1 - \eta) + \eta(1 - \eta) + \ldots + \eta^w(1 - \eta) \geq 0.8.$$

учитывая, что

$(1 - \eta) + \eta(1 - \eta) + \ldots + \eta^w(1 - \eta) = (1 - \eta)(1 + \eta + \ldots + \eta^w) = 1 - \eta^{w+1}$,

получаем $\eta^{w+1} \leq 0.2$ и окончательно $w \geq \ln(0.2)/\ln(5/6) - 1 = 7.8 \approx 8$.

Таким образом, для одновременного размещения, по крайней мере, 80% прибывающих клиентов минимальное число сидячих мест должно быть в два раза больше среднего числа ожидающих обслуживания клиентов.

Важной характеристикой является также доля времени, в течение которого станция обслуживания простаивает. Вероятность такого события

$$P_0 = 1 - \eta \approx 0.17.$$

Вероятности того, что на станции обслуживается ровно один клиент (или два – один обслуживается, второй ждет) равны соответственно:

$$P_1 = \eta(1 - \eta) \approx 0.139,$$
$$P_2 = \eta^2(1 - \eta) \approx 0.116.$$

Модель 2.

Рассмотрим случай *ограниченной очереди,* когда при наличии в системе N требований ни одна из дополнительных заявок на обслуживание не принимается либо сам клиент отказывается присоединиться к очереди из-за отсутствия места в блоке ожидания. Формулы для параметров такой системы массового обслуживания:

$$P_n = \eta^n(1 - \eta)/(1 - \eta^{N+1}), \quad n \leq N \tag{2.6.5}$$
$$P_n = 0, \quad n > N.$$

Следует отметить, что в этой модели параметр $\eta = \lambda/\mu$ не обязательно должен быть меньше единицы, поскольку число допускаемых в систему требований ограничено, и для $\eta = 1$ $P_n = 1/(N + 1)$.

Выражение для *среднего числа находящихся в системе заявок* принимает следующий вид

$$\bar{n} = \begin{cases} \eta(1-(N+1)\eta^{N} + N\eta^{N+1})/(1-\eta)/(1-\eta^{N+1}), & \text{для } \eta \neq 1, \\ N/2, & \text{для } \eta = 1. \end{cases} \qquad (2.6.6)$$

Поскольку вероятность того, что заказ не имеет возможности попасть в очередь, равняется P_N, доля заказов, поступающих в систему, равняется $1-P_N$ (*пропускная способность системы*). Отсюда характеристики системы имеют вид:

Для $\bar{n}_w$ – *среднее число заказов, ожидающих обслуживания:*

$$\bar{n}_w = \bar{n} - \lambda(1-P_N)/\mu, \qquad (2.6.7)$$

для $\bar{t}_w$ – *среднее время ожидания обслуживания*:

$$\bar{t}_w = \bar{n}_w/\lambda\ /(1-P_N). \qquad (2.6.8)$$

Пример 2.6.3. Пусть в условиях примера 2.6.2 станция располагает пятью местами для ожидающих клиентов.

В данном примере $N=5+1=6$, $\eta=5/6$, а

$$P_N = (5/6)^6(1-5/6)/(1-(5/6)^7) = 0.0774,\ N = 6.$$

Отсюда следует, что частота случаев, когда клиент не попадает на станцию равняется $\lambda P_N = 5\cdot 0.0774 = 0.387$ заявки в час, т.е. при 8-часовом режиме работы станция теряет за день $8\cdot 0{,}387 = 3$ клиента. Применяя (2.6.6) – (2.6.8), получаем

$$\bar{n} = (5/6)(1-7(5/6)^6 + 6(5/6)^7)/(1-5/6)/(1-(5/6)^7) = 2.29,$$

$$\bar{n}_w = 2.29 - 5(1-0.0774)/6 = 1.52,$$

$$\bar{t}_w = 1.52/5\ /(1-0.0774) = 0.33 \text{ часа (20 мин.)}.$$

Таким образом, при введении ограничения на количество мест для ожидания (N=6), среднее время ожидания обслуживания сократилось на полчаса. Это было достигнуто за счет «потери» в среднем 3 клиентов в день из-за недостаточности мест для ожидания. Вычислим вероятность того, что в системе обслуживаются 0, 1 или 2 клиента:

$$P_0 = (1-5/6)/(1-(5/6)^7) = 0.231,$$

$$P_1 = (5/6)(1-5/6)/(1-(5/6)^7) = 0.193,$$

$$P_2 = (5/6)^2(1-5/6)/(1-(5/6)^7) = 0.160.$$

2.6.3. Многоканальные системы массового обслуживания.

Модель 3.

Пусть параллельно могут обслуживаться не более s клиентов. Такие модели называются *многоканальными* (s – число каналов обслуживания). Здесь $\lambda_n = \lambda$ ($n \geq 0$), $\mu_n = n\mu$ при $n \leq s$, $\mu_n = s\mu$ при $n \geq s$. Рассмотрим случай *неограниченной длины очереди.*

Для данной модели расчетные формулы (Эрланга) имеют вид:

$$P_n = P_0(\lambda/\mu)^n / n! \qquad (n \le s), \qquad (2.6.9)$$

$$P_n = P_0(\lambda/\mu)^n / s!/s^{n-s} \qquad (n \ge s), \qquad (2.6.10)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!\cdot(1-\frac{\lambda}{\mu s})}}. \qquad (2.6.11)$$

Для $\bar{n}_w$ – *среднее число клиентов, ожидающих обслуживания:*

$$\bar{n}_w = P_0(\lambda/\mu)^{s+1}/(s-1)!/(s-\lambda/\mu)^2, \qquad (2.6.12)$$

для общего числа клиентов, находящихся в системе, имеем

$$\bar{n} = \bar{n}_w + \lambda/\mu, \qquad (2.6.13)$$

для $\bar{t}_w$ – *среднее время ожидания обслуживания:*

$$\bar{t}_w = \bar{n}_w/\lambda. \qquad (2.6.14)$$

Вероятность обязательного пребывания в очереди равна вероятности занятости всех каналов обслуживания. Обозначим ее через W. Тогда

$$W = P_0(\lambda/\mu)^s/s!. \qquad (2.6.15)$$

Известный интерес представляет вероятность того, что *суммарное время обслуживания и его ожидания превзойдет заданную величину t.* Обозначим эту вероятность через P(>t).

$$P(>t) = e^{-\mu t}(1+(W/s)(1-e^{-\mu st(1-\lambda/\mu s-1/s)})/(1-\lambda/\mu s-1/s)). \qquad (2.6.16)$$

Вычисления в соответствии с данной моделью могут оказаться весьма громоздкими, тогда используют приближенные методы. Например, при $\lambda/\mu \ll 1$ можно принять $P_0 \approx 1 - \lambda/\mu$, $\bar{n}_w \approx (\lambda/\mu)^{s+1}/s^2$, тогда как для значений λ/μ, близких к 1,

$$P_0 \approx (s - \lambda/\mu)(s-1)!/s^s \quad \text{и} \quad \bar{n}_w \approx (\lambda/\mu)/(s-\lambda/\mu).$$

Пример 2.6.4. Пусть на нашей станции 3 канала обслуживания (исполнителя), а мест для ожидания неограниченное число. Пусть, как и прежде $\lambda = 5$ и $\mu = 6$. Имеем $\lambda/\mu = 0.833$, $s = 3$ и

$P_0 = 1/(0.833^0/0!+0.833^1/1!+0.833^2/2!+ 0.833^3/(3!(1-0.833/3))) = 0.432$,

$$\bar{n}_w = 0.432\cdot 0.833^4/2!/(3-0.833)^2 = 0.022,$$

$$\bar{t}_w = 0.022/5 = 0.0044 \text{ часа.(16 сек.)}$$

Таким образом, при данных условиях 43.2% времени станция простаивает, среднее время ожидания обслуживания составляет 16сек. С точки зрения клиента отлично, но простой оборудования (исполнителей) влетает в копеечку. Кроме того, имеем:

$$P_1 = 0.40,\ P_2 = 0.15,\ P_3 = 0.04.$$

Вычислим параметры системы при 2 исполнителях.

$$P_0 = 1/(0.833^0/0!+0.833^1/1!+ 0.833^2 /(2!(1 –0.833/2))) = 0.412,$$

$$\bar{n}_w = 0.412\cdot 0.833^3/1!/(2–0.833)^2 = 0.17,$$

$$\bar{t}_w= 0.17/5 = 0.034 \text{ часа.(2 мин.)}$$

Простой составляет 41.2% времени, среднее время ожидания 2 мин.

Сравним с результатами примера 2.6.2, где при наличии только одного исполнителя простой составлял 17%, а среднее время ожидания 50 мин. В силу малого времени ожидания параметры W и P(>t) в данном примере интереса не представляют. P_1 =0.34, P_2 =0.14, P_3 =0.06.

Модель 4.

Рассмотрим теперь модель, которая отличается от предыдущей только тем, что число мест для ожидания обслуживания ограничено величиной k. Здесь $\lambda_n = \lambda$ при $0 \le n < k+s$ и $\lambda_n = 0$ при $n \ge k+s$; $\mu_n = n\mu$ при $n \le s$, $\mu_n = s\mu$ при $s \le n \le s+k$.

Формулы для характеристик модели имеют вид:

$$P_n = P_0(\lambda/\mu)^n / n! \qquad (n \le s), \qquad (2.6.17)$$

$$P_n = P_0(\lambda/\mu)^n / s!/s^{n-s} \qquad (s \le n \le s+k), \qquad (2.6.18)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s(1-(\frac{\lambda}{\mu s})^{k+1})}{s!\cdot(1-\frac{\lambda}{\mu s})}}, \qquad \lambda/\mu \ne s, \qquad (2.6.19)$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s-1}\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^s(k+1)}{s!}}, \qquad \lambda/\mu = s, \qquad (2.6.20)$$

Для $\bar{n}_w$ *– среднее число клиентов, ожидающих обслуживания:*

$$\bar{n}_w=P_0(\lambda/\mu)^{s+1}(1–(\lambda/\mu s)^k–k(\lambda/\mu s)^k(1–\lambda/\mu s))/(s–1)!/(s–\lambda/\mu)^2, \quad \lambda/\mu \ne s, \qquad (2.6.21)$$

$$\bar{n}_w=P_0(\lambda/\mu)^s k(k+1)/(2s!), \qquad \lambda/\mu = s, \qquad (2.6.22)$$

для $\bar{t}_w$ *– среднее время ожидания обслуживания:*

$$\bar{t}_w = \bar{n}_w/\lambda/(1– P_{k+s}). \qquad (2.6.23)$$

Пример 2.6.5. Пусть в дополнение к последнему примеру наша станция располагает двумя местами для ожидания обслуживания (k=2 и s=2). Тогда получим:

$$P_0=1/(0.833^0/0!+0.833/1!+0.833^2(1–(0.833/2)^{2+1})/2!/(1–0.833/2)) = 0.423,$$

$$\bar{n}_w=0.423\cdot 0.833^3(1–(0.833/2)^2–2(0.833/2)^2(1–0.833/2))/1!/(2–0.833)^2=0.25,$$

и $\bar{t}_w$=0.25/5/(1– P_{2+2})= 0.25/5/(1 – 0.423·0.833^4 /2!/2^2)=0.05 час.

Для двух каналов обслуживания входной поток заказов очень слабый, изменим его, пусть λ=12, тогда λ/μ=2= s и мы имеем

P_0=1/(2^0/0! +2/1!+2^2(2+1)/2!)= 0.111,

$\bar{n}_w$=0.111*2^2*2*3/(2*2!)=0.67,

$\bar{t}_w$=0.67/12/(1–P_{2+2})=0.67/12/(1–0.111·2^4/2!/2^2)=0.07 ч.

При таком входном потоке простой оборудования составляет 11.1%, а среднее время ожидания обслуживания 0.07·60= 4.3 мин.

Рассмотрим более крупный пример, на котором нагляднее иллюстрируются формулы моделей 3 и 4.

Пример 2.6.6.

Вариант 1. Имеем станцию с 4 каналами обслуживания и с неограниченным количеством мест для ожидания. Пусть λ=20 заявок в час, время обслуживания одной заявки 11.5 мин. (μ=60/11.5=5.217), тогда λ/μ=20/5.217=3.83 и s=4. Используем (2.6.11):

P_0 = 1/(3.83^0/0!+3.83/1!+3.83^2/2!+3.83^3/3!+3.83^4/4!/(1–3.83/4))=0.0042.

Из (2.6.12)–(2.6.14) получаем *среднее время ожидания:*

$\bar{t}_w$ =0.0042·3.83^5/3!/(4–3.83)^2/20= 1 час.

Вероятность обязательного пребывания в очереди (2.6.15):

W= 0.0042·3.83^4/4!=0.886.

Найдем вероятность того, что суммарное время обслуживания и ожидания превзойдет величину t=0.5 (30 мин.). Применим (2.6.16):

P(>0.5) =e$^{-5.217/2}$(1+0.886/4)(1–e$^{-5.217\cdot 4/2(1-3.83/4-1/4)}$)/(1–3.83/4–1/4))=0.7.

Таким образом, 88.6% клиентов обязательно проходят через очередь, причем 70% находятся в ней более получаса (правда, включая время обслуживания).

Вариант 2. Добавим к варианту 1 ограничение на количество мест для ожидания. Пусть k=16, тогда из (2.6.19) находим сначала

P_0=1/(1+3.83+3.83^2/2!+3.83^3/3!+3.83^4(1–(3.83/4)^{17})/4!/(1–3.83/4))=0.00759

и, следовательно, из (2.6.21) получаем

$\bar{n}_w$=0.00759·3.83^5(1–(3.83/4)^{16}–16(3.83/4)^{16}(1–3.83/4))/3!/(4–3.83)^2=5.82.

Поскольку P_{20}=3.83^{20}·0.00759/4!/4^{16}=0.03397, используя (2.6.23), имеем для среднего времени ожидания обслуживания:

$\bar{t}_w$=5.82/20/(1–0.03397) =0.301 часа.(18 мин.)

Сравнивая варианты 1 и 2, видим, что при ограничении мест для ожидания, продолжительность ожидания сокращается более чем в три раза, причем это достигается ценой потери около 3.4% потенциальных клиентов (P_{20}=0.03397).

2.6.4. Прикладные аспекты теории массового обслуживания.

Рассмотренные модели дают методику определения средней длины очереди и среднего времени ожидания для случаев, когда скорости поступления заказов и их обслуживания являются случайными величинами с известными нам законами распределения (в основном, пуассоновским и экспоненциальным). Возможно построение моделей и с другими распределениями вероятностей. Анализ этих моделей гораздо сложнее и его результаты не позволяют получить такой большой объем полезной информации, как в случае моделей пуассоновского типа.

Если издержки, связанные с пребыванием в очереди и обслуживанием, определены, то можно установить и оптимальное отношение между ними. Оптимальный уровень обслуживания выбирается таким образом, чтобы значение суммы прибыли (качества обслуживания), получаемой за счет предоставления услуг, и потерями прибыли (качества обслуживания), обусловленными задержками в предоставлении услуг, было минимальным. Труднее всего количественно определить «цену» ожидания, т.к. связанная с этим потеря потенциальных клиентов не имеет однозначного денежного выражения (хотя оценка простоев оборудования не вызывает серьезных трудностей). Проиллюстрируем прикладные возможности модельного обеспечения задач принятия решений в сфере обслуживания клиентов, рассмотрев два типа **стоимостных моделей**. Модели первого типа ориентированны на определение *оптимальной средней скорости обслуживания* при одноканальной системе массового обслуживания, модели второго типа направлены на определение *оптимального числа обслуживающих каналов* в случае многоканальной системы.

Для определения оптимального значения μ построим стоимостную модель на основе одноканальных моделей 1, 2.

Пусть c_1 – затраты на обслуживание одного заказа, отнесенные к единице времени, c_2 – обусловленные вынужденным ожиданием потери в единицу времени в расчете на один заказ, тогда $C(\mu) = c_1\mu + c_2\bar{n}$ – суммарные затраты в единицу времени, минимизация которых даст нам оптимальное значение μ^*.

Например, для модели 1, применяя (2.6.2), имеем

$$C(\mu) = c_1\mu + c_2\lambda/(\mu - \lambda),$$

откуда, приравнивая к нулю первую производную, получаем

$$\mu^* = \lambda + \sqrt{c_2\lambda / c_1}.$$

В случае модели 2 величина N рассматривается тоже как переменная, оптимальное значение которой (вместе с μ) определяется путем минимизации $C(\mu,N) = c_1\mu + c_2\bar{n} + c_3N + c_4\lambda P_N$, где c_3 – затраты на оборудование одного места в блоке ожидания, c_4 – потери, связанные с потерей потенциального клиента (приведены к единице времени). Подставляя (2.6.5)–(2.6.7), получим довольно сложное уравнение, для решения которого необходимо прибегать к соответствующим численным методам.

Для определения оптимального числа обслуживающих приборов (каналов) суммарный стоимостной показатель, отнесенный к единице времени, задается формулой

$$C(s) = c_1 s + c_2\bar{n}(s),$$

где c_1 – отнесенные к единице времени затраты на функционирование одного обслуживающего канала, c_2 – как и выше, затраты, связанные с ожиданием. Тогда оптимальное значение s^* находится из условия

$$\bar{n}(s^*) - \bar{n}(s^*+1) \le c_1/c_2 \le \bar{n}(s^*-1) - \bar{n}(s^*).$$

Пример 2.6.7. Пусть заказы поступают на обслуживание со средним числом λ=17.5 заявок в час. Каждое оборудованное обслуживающее место способно удовлетворить в среднем μ=10 заявок в час. Затраты, связанные с добавлением одного обслуживающего места, оцениваются в c_1=6 руб. в час. Пусть потери из-за ожидания составляют c_2=30 руб. в час. Вычислим по формулам (2.6.11) и (2.6.13) P_0 и $\bar{n}$ для разных значений s и результаты поместим в таблицу 2.6.2.

Таблица 2.6.2

s	P_0	$\bar{n}$	$\bar{n}(s^*-1) - \bar{n}(s^*)$
1	0	∞	–
2	0.067	.745	∞
3	0.156	0.468	5.28
4	0.170	0.092	0.376
5	0.173	0.019	0.073
6	0.174	0.004	0.015

Следует обратить внимание на то, что $\bar{n}(1) = \infty$, так как $\lambda > \mu$.

Поскольку $c_1/c_2 = 6/30 = 0.2$, имеем

$$\bar{n}(4) - \bar{n}(5) = 0.073 \le 0.2 \le 0.375 = \bar{n}(3) - \bar{n}(4).$$

Следовательно, оптимальное количество моечных мест s^*=4.

Можно учесть еще потери, связанные с простоями оборудования, для этого необходимо по формуле (2.6.9) найти вероятности того, что обслуживаются ровно n (n=0,1,2,…< s) автомашин.

Также можно учесть ограничение на вместимость блока ожидания (модель 4), но получаемые стоимостные модели весьма сложны и требуют для своего решения специальных численных методов. При возникновении подобных трудностей, а также в случае невозможности выразить в аналитическом виде характеристики системы массового обслуживания, используют *метод статистического моделирования (метод Монте–Карло)*.

Согласно методу Монте–Карло перебирают (с помощью ЭВМ) все возможные состояния системы с различной интенсивностью и разными законами распределения вероятностей входного и выходного потоков. В результате многократного искусственного воссоздания работы системы рассчитывают характеристики обслуживания, как если бы они были получены при наблюдении над реальным потоком клиентов. Для сложных систем обслуживания метод статистического моделирования оказывается проще аналитического.

2.6.5. Практический блок

Примеры

1. Одноканальная система обслуживания с неограниченной очередью

В компанию приходят клиенты за консультацией о продаваемой продукции с интенсивностью 8 посещений в час. Работник компании тратит на обслуживание каждого клиента в среднем 6 минут. Необходимо определить вероятность нахождения в приемной комнате 1, 2 и 3-х клиентов, среднее количество клиентов за час, среднее количество ожидающих консультации клиентов, среднее время ожидания.

Решение: Исходные данные для нашей задачи следующие:

$$\lambda = 8; \quad \mu = 10 \text{ (60 мин./6 мин.)}; \quad \eta = \lambda/\mu = 0{,}8.$$

Вероятность нахождения в системе обслуживания n клиентов определяется по формуле (2.6.1).

Среднее количество клиентов за час определяется по формуле (2.6.2).

Среднее количество ожидающих клиентов определяется по формуле (2.6.4).

Среднее время ожидания своей очереди определяется по формуле (2.6.3).

Подставляя исходные данные в формулы получим:
вероятность отсутствия клиентов $p_0 = 0{,}2$;
вероятность нахождения в приемной 1-го клиента $p_1 = 0{,}16$;
вероятность нахождения в приемной 2-х клиентов $p_2 = 0{,}13$;
вероятность нахождения в приемной 3-х клиентов $p_3 = 0{,}10$;
среднее количество клиентов, находящихся в компании за 1 час - 4 человека.
Среднее количество ожидающих обслуживания клиентов - 3,2 человека в час.
Среднее время ожидания в очереди – 0,4 часа (24 минуты).

2. Одноканальная система обслуживания с ограниченной очередью.

В условия предыдущей задачи вводим дополнительные сведения, а именно: количество мест в приемной комнате равно 4.

Решение: Исходные данные для такой задачи следующие:

$$\lambda = 8; \quad \mu = 10; \quad \eta = 0{,}8; \quad K = 4; \quad N = S + K = 1 + 4 = 5.$$

Подставляя исходные данные в формулы (2.6.5) – (2.6.8) получим:
вероятность отсутствия клиентов $p_0 = 0{,}27$;
вероятность нахождения в приемной 1-го клиента $p_1 = 0{,}22$;
вероятность нахождения в приемной 2-х клиентов $p_2 = 0{,}17$;
вероятность нахождения в приемной 3-х клиентов $p_3 = 0{,}14$;
среднее количество клиентов, находящихся в компании за 1 час ≈ 2 человека.
Среднее количество ожидающих обслуживания клиентов - 1,13 человека в час
Среднее время ожидания в очереди – 0,15 часа (9 минут).

3. Многоканальная система обслуживания с неограниченной очередью.

В компанию приходят клиенты за консультацией о продаваемой продукции с интенсивностью 8 посещений в час. Два работника компании тратит на обслуживание каждого клиента в среднем 6 минут. Необходимо определить вероятность нахождения в приемной комнате 1, 2 и 3-х клиентов, среднее количество клиентов за час, среднее количество ожидающих консультации клиентов, среднее время ожидания.

Решение: Исходные данные для нашей задачи следующие:

$$\lambda = 8; \quad \mu = 10; \quad \eta = 0{,}8; \quad S = 2.$$

Подставляя исходные данные в формулы (2.6.9) – (2.6.14) получим:
вероятность отсутствия клиентов $p_0 = 0{,}429$;
вероятность нахождения в приемной 1-го клиента $p_1 = 0{,}343$;
вероятность нахождения в приемной 2-х клиентов $p_2 = 0{,}137$;

вероятность нахождения в приемной 3-х клиентов $p_3 = 0{,}055$;

среднее количество клиентов, находящихся в компании за 1 час 0,95 человека.

Среднее количество ожидающих обслуживания клиентов – 0,152 человека.

Среднее время ожидания в очереди - 0,019 часа (1,14 минуты).

4. Многоканальная система обслуживания с ограниченной очередью.

В компанию приходят клиенты за консультацией о продаваемой продукции с интенсивностью 8 посещений в час. Два работника компании тратит на обслуживание каждого клиента в среднем 6 минут. Количество мест в приемной для клиентов равно 3. Необходимо определить вероятность нахождения в приемной комнате 1, 2 и 3-х клиентов, среднее количество клиентов за час, среднее количество ожидающих консультации клиентов, среднее время ожидания.

Решение: Исходные данные для нашей задачи следующие:

$$\lambda = 8; \quad \mu = 10; \quad \eta = 0{,}8; \quad S = 2; \quad K = 3; \quad N = 5.$$

Подставляя исходные данные в формулы (2.17) – (2.23) получим:

вероятность отсутствия клиентов $p_0 = 0{,}431$;

вероятность нахождения в приемной 1-го клиента $p_1 = 0{,}345$;

вероятность нахождения в приемной 2-х клиентов $p_2 = 0{,}138$;

вероятность нахождения в приемной 3-х клиентов $p_3 = 0{,}055$;

Среднее количество ожидающих обслуживания клиентов – 0,126 человека.

Среднее время ожидания в очереди - 0,0159 часа (0,95 минуты).

Контрольные воросы

1. Каковы виды заявок на обслуживание в коммерческой деятельности?
2. Что является каналами обслуживания в коммерческой деятельности?
3. Каковы механизмы массовости поступления заявок на обслуживание в коммерческой деятельности?
4. Какие трудности в реализации обеспечения массового обслуживания в коммерческой деятельности?
5. Зачем нужны характеристики СМО?
6. Как пользоваться характеристиками СМО с отказами в коммерческой деятельности?
7. Как применять характеристики СМО с ожиданием в коммерческой деятельности?
8. Как аргументировать построение СМО с ограничением на длину очереди в коммерческой деятельности?

9. Каким образом можно оценить свою деятельность с помощью характеристик СМО?
10. Как можно провести оценку работы вашего руководителя на основе характеристик СМО?
11. Проведите оценку работы характеристиками СМО минимаркета, книжного киоска или любого другого торгового предприятия.
12. Проведите оценку согласованности взаимодействия студентов в группе с помощью характеристик СМО в процессе выполнения фрагментов учебного процесса: выполнения курсовых работ, подготовки и сдачи зачетов, экзаменов.
13. Дайте оценку взаимодействия членов вашей семьи утром характеристиками СМО.
14. Понятие и экономическая интерпретация системы массового обслуживания.
15. Использование теории очередей в управлении потоками товаров и услуг.
16. Расчёт средней длины очереди к системе массового обслуживания.
17. Расчёт вероятности превышения пороговой длины очереди к системе массового обслуживания.
18. Расчёт среднего времени ожидания в очереди к системе массового обслуживания.
19. Необходимое условие работоспособности системы массового обслуживания, его обоснование и экономическое значение.
20. Анализ проектов расширения обслуживающих мощностей с использованием теории очередей.
21. Оптимизация обслуживающих мощностей с использованием теории очередей.
22. Формулировка и экономическая интерпретация модели системы массового обслуживания.

Тесты

1. Предметом теории массового обслуживания является:

а) разработка математического и программного обеспечения;

б) построение математических моделей, связывающих заданные условия работы системы с показателями эффективности функционирования с целью нахождения наилучших вариантов управления этими системами;

в) построение оптимизационных моделей.

2. Каждая система массового обслуживания (СМО) состоит из одного или нескольких обслуживающих устройств, которые называются:

а) очередью;

б) входящим потоком заявок;

в) каналами обслуживания;

г) выходящим потоком обслуженных заявок.

3. Вероятностной характеристикой случайного потока заявок служит:
   а) время поступления заявок;
   б) интенсивность поступления заявок;
   в) количество поступивших заявок.
4. Признаками классификации СМО не являются:
   а) число каналов обслуживания;
   б) время обслуживания;
   в) длина очереди
5. Показателями эффективности СМО являются:
   а) интенсивность потока заявок;
   б) среднее время обслуживания заявки;
   в) абсолютная пропускная способность СМО;
6. Какие примеры потоков событий Вы знаете?
   а) поток вызовов на телефонной станции;
   б) поток отказов (сбоев) ЭВМ;
   в) поток железнодорожных составов, поступающих на сортировочную станцию;
   г) поток частиц, попадающих на счетчик Гейгера;
   д) все вышеназванные.
7. Какие примеры систем массового обслуживания Вы знаете?
   а) телефонные станции;
   б) ремонтные мастерские;
   в) билетные кассы, справочные бюро;
   г) магазины, парикмахерские;
   д) все вышеназванные.
8. Что может служить в качестве каналов системы массового обслуживания?
   а) линии связи;
   б) кассиры, продавцы;
   в) лифты;
   г) автомашины;
   д) все вышеназванное.
9. Что можно выбрать в качестве показателей эффективности системы массового обслуживания?
   а) среднее число заявок, обслуживаемых СМО в единицу времени;
   б) среднее число занятых каналов;
   в) среднее число заявок в очереди и среднее время ожидания обслуживания;
   г) вероятность того, что число заявок в очереди превысит какое-то значение;
   д) все вышеназванные.
10. Какие одноканальные СМО с очередью Вы знаете?

а) врач, обслуживающий пациентов;
б) телефон-автомат с одной будкой;
в) ЭВМ, выполняющая заказы пользователей;
г) содержимое п.п. а,б;
д) содержимое п.п. а,б,в.

Ответы к тестам

1) б	6) д
2) в	7) д
3) а	8) д
4) б	9) д
5) в	10) д

Задания и задачи

1. Рассматривается круглосуточная работа пункта проведения профилактического осмотра автомашин с одним каналом (одной группой проведения осмотра). На осмотр и выявление дефектов каждой машины затрачивается в среднем 0,5 ч. На осмотр поступает в среднем 36 машин в сутки. Если машина, прибывшая в пункт осмотра, не застает ни одного канала свободным, она покидает пункт осмотра необслуженной. Определить вероятности состояний и характеристики обслуживания профилактического пункта осмотра.

2. Решить задачу 1 для случая s = 4 канала (групп проведения осмотра). Найти число каналов, при котором относительная пропускная способность пункта осмотра будет не менее 0,9.

3. Анализируется работа междугородного переговорного пункта в небольшом городке. Пункт имеет один телефонный аппарат для переговоров. В среднем за сутки поступает 240 заявок на переговоры. Средняя длительность переговоров (с учетом вызова абонентов в другом городе) составляет 5 мин. Никаких ограничений на длину очереди нет. Определить предельные вероятности состояний и характеристики обслуживания переговорного пункта в стационарном режиме.

4. Решить задачу 3 для случая s = 3 телефонных аппаратов.

5-6. Решить задачи 1, 2 при условии, что машина, прибывшая на пункт осмотра, покидает этот пункт лишь в случае, если в очереди на осмотр стоят более 5 машин.

7-8. Решить задачи 3, 4 при условии, что длина очереди не должна превышать 60 чел.

2.6.6. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Понятие и экономическая интерпретация системы массового обслуживания.
2. Использование теории очередей в управлении потоками товаров и услуг.
3. Условия работоспособности системы массового обслуживания, их обоснование и экономическое значение.
4. Анализ проектов расширения обслуживающих мощностей с использованием теории очередей.
5. Оптимизация обслуживающих мощностей с использованием теории очередей.

Литература для самостоятельной работы

1. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.
3. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.И. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб.пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444с.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
5. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

ТЕМА 2.7. СОСТЯЗАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

2.7.1. Основные понятия теории игр.

Решение многих экономических задач для индивидуального участника экономических отношений (производителя, потребителя, продавца, покупателя и т.п.) сводится к максимизации полезности при условии сбалансированности своего бюджета. Задачи часто выражаются альтернативно, как, например, максимизация выпуска продукции при заданных издержках или минимизация издержек при данном выпуске. Каждый индивидуум старается достичь максимума своей прибыли, и на его действия не оказывают влияния действия других индивидуумов.

Однако в других экономических ситуациях возникают конфликты интересов, которые должны быть разрешены. Конфликты интересов возникают между продавцом и покупателем, между конкурирующими продавцами (производителями). Более сложные ситуации возникают, если образуются коалиции лиц, участвующих в столкновении интересов, например, в том случае, когда ставки заработной платы определяются союзами рабочих и предпринимателей. Решение таких проблем поднимает более сложные вопросы о стратегиях поведения участников, и соответствующие математические формулировки этих проблем и методы их решения составляют теорию игр.

Игра – это совокупность правил и процедур, которым подчиняются ее участники для достижения своей цели. Каждый участник (игрок) имеет множество возможных *ходов*, выбрать один из них – значит *сделать ход*. *Партия* – это последовательность ходов, сделанных в соответствии с правилами игры и приводящих ее к конечному состоянию. Во многих играх достижение цели сопровождается каким-нибудь выигрышем. Выигрыш в игре будем рассматривать в количественном выражении, причем отрицательное значение выигрыша интерпретируется как проигрыш.

Игра с нулевой суммой – это такая игра, в которой сумма выигрышей участников равна нулю.

Стратегия – это установленный игроком метод выбора решения при каждом ходе в течение игры.

Будем рассматривать *конечную игру*, то есть игру с конечным числом ходов и конечным числом стратегий.

Платежная матрица – это таблица, которая определяет, какие выигрыши должны быть получены игроками после завершения игры.

Рассмотрим игру двух лиц с нулевой суммой.

Обозначим игроков А и В, и пусть А имеет *n* вариантов хода, а В имеет *m* вариантов. Пусть игра заключается в том, что игроки делают по одному ходу и А выигрывает у В сумму a_{ij}, если А выбрал вариант i (i=1,2,…,*n*), а В выбрал вариант j (j=1,2,…,*m*). Тогда платежная матрица для игрока А имеет вид:

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Платежную матрицу для игрока В нет необходимости рассматривать самостоятельно, так как **В** = – **А**.

Лучшая (*оптимальная*) стратегия игрока заключается в выборе такого варианта хода (из своих возможных), при котором будет получен максимальный выигрыш при отсутствии информации о ходе противника. Определение оптимальных стратегий для игроков составляет *решение* игры.

Игрок следует *чистой стратегии* в повторяющихся партиях, если в каждой партии он выбирает из всех альтернатив одну и ту же, использование комбинаций чистых стратегий называется *смешанной стратегией.* Для решения игры будем использовать критерий **минимакса – максимина**. Этот критерий предписывает игроку А выбирать такую стратегию (чистую или смешанную), которая максимизирует его минимальный выигрыш, причем минимум берется по всем стратегиям игрока В. Игрок В в свою очередь выбирает стратегию, которая минимизирует его максимальный проигрыш, где максимум берется по стратегиям игрока А.

Рассмотрим применение данного критерия на примере.

$$\begin{array}{c} \text{Игрок В} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Пусть задана платежная матрица, определяющая выигрыш игрока А. Если игрок А выбирает первую стратегию, его выигрыш будет не меньше $\min\{-2, -4\} = -4$ независимо от поведения игрока В. При выборе игроком А второй стратегии гарантированный выигрыш будет равен $\min\{-1, 3\} = -1$, и, наконец, если он выберет третью стратегию, гарантированный выигрыш будет равен $\min\{1,2\}= 1$. Тогда игрок А, выбирая третью стратегию, максимизирует свой минимальный выигрыш. Его значение равно $\max\{-4,\ -1,\ 1\}=1$. Выбранная игроком А стратегия называется **максиминной стратегией**, а соответствующее ей значение выигрыша – **максиминным (нижним) значением** игры.

Игрок В хочет минимизировать свой проигрыш. Выбрав первую стратегию, он может проиграть не более чем $\max\{-2,\ -1,\ 1\}=1$ независимо от выбора своего противника. При второй стратегии проигрыш составит не более $\max\{-4,\ 3,\ 2\}=3$. Игрок В выберет тогда первую стратегию, для которой проигрыш составит $\min\{1,\ 3\}=1$. Эта стратегия называется **минимаксной**, а соответствующее ей значение проигрыша игрока В – **минимаксным (верхним) значением** игры.

2.7.2. Математическая модель игры.

В математических обозначениях «максимин для А» выражается $\max_i\min_j a_{ij}$, аналогично, «минимакс для В» есть $\min_j\max_i a_{ij}$, причем, очевидно, имеет место $\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j\max_i a_{ij}$. В случае, когда имеет место равенство, т.е. $\max_i \min_j a_{ij} = \min_j\max_i a_{ij} = a_{i0j0}$, соответствующие чистые стратегии (i_0 для игрока А и j_0 для В) будут оптимальными, а про игру говорят, что она имеет *седловую точку.* Тогда a_{i0j0} является *значением игры*. Легко видеть, что игра имеет седловую точку тогда и только тогда, когда в платежной матрице имеется элемент a_{i0j0}, наименьший для всех элементов своей строки i_0 и наибольший для всех элементов своего столбца j_0.

При отсутствии седловой точки невозможно получить оптимальное решение, пользуясь чистыми стратегиями. В этом случае для получения решения игры будем пользоваться смешанными стратегиями, которые заключаются в применении чистых стратегий с некоторыми частотами (вероятностями). Пусть $p_1,p_2,..,p_n$ и $q_1,q_2,..,q_m$ – наборы вероятностей, с которыми игроки А и В соответственно выбирают свои чистые стратегии. Естественно

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{j=1}^{m} q_j = 1, \qquad p_i,\ q_j \ge 0 \text{ для всех i и j.}$$

Если игрок А выбирает свои чистые стратегии с вероятностями p_i, то его ожидаемый выигрыш должен составить

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + \ldots + a_{n1}p_n,$$

при ответном выборе игроком В своей первой чистой стратегии,

$$a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + \ldots + a_{n2}p_n,$$

при ответном выборе игроком В своей второй чистой стратегии, и т.д.

$$a_{1m}p_1+ a_{2m}p_2+\ldots+ a_{nm}p_n$$

при выборе игроком В m-й чистой стратегии. С другой стороны, если игрок В выбирает свои чистые стратегии с вероятностями q_j, то его ожидаемый проигрыш должен составить

$$a_{11}q_1+ a_{12}q_2+\ldots+ a_{1m}q_m\,,$$

если игрок А выберет свою первую чистую стратегию,

$$a_{21}q_1+ a_{22}q_2+\ldots+ a_{2m}q_m,$$

если игрок А выберет свою вторую чистую стратегию и

$$a_{n1}q_1+ a_{n2}q_2+\ldots+ a_{nm}q_m,$$

при выборе игроком А n-й чистой стратегии.

Если игрок А выбрал стратегию $(p_1,p_2,..,p_n)$ и при этом игрок В выбрал $(q_1,q_2,..,q_m)$, то ожидаемый выигрыш игрока А (он же проигрыш игрока В) составит

$$g= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, p_i q_j\ .$$

Тогда игрок А при выборе p_i стремится максимизировать свой наименьший ожидаемый выигрыш по столбцам, тогда как игрок В выбирает q_j с целью минимизировать наибольший ожидаемый проигрыш по строкам. Справедлива теорема фон.Неймана, которую мы примем без доказательств, утверждающая, что для любой конечной игры существуют оптимальные стратегии игроков А $(p_1^*,p_2^*,..,p_n^*)$ и В $(q_1^*,q_2^*,..,q_m^*)$, при этом максимум наименьшего ожидаемого выигрыша игрока А совпадает с минимумом наибольшего ожидаемого проигрыша игрока В (обозначим это значение игры через g). Таким образом, математическую модель конечной игры для игрока А можно представить в следующем виде:

Найти такие $p_i \geq 0$, для которых выполняются соотношения

$$\begin{cases} p_1+p_2+\ldots+p_n=1, \\ a_{11}p_1+ a_{21}p_2+\ldots+ a_{n1}p_n \geq g, \\ a_{12}p_1+a_{22}p_2+\ldots+a_{n2}p_n\geq g, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}p_1+ a_{2m}p_2+\ldots+ a_{nm}p_n\geq g, \end{cases} \qquad (2.7.1)$$

и функция Z=g принимает максимальное значение.

Упростим полученную задачу, разделив все ограничения (2.7.1) на значение игры $g > 0$ и положив $x_i = p_i/g$ для всех i. (Проведение аналогичных рассуждений для случая $g \leq 0$ предоставляется читателю). В силу того, что

$$\max g = \min 1/g = \min(p_1/g+p_2/g+\ldots+p_n/g) = \min(x_1+x_2+\ldots+x_n)$$

задача принимает вид

$$\text{минимизировать } Z= x_1+x_2+\ldots+x_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\ldots+a_{n1}x_n \geq 1, \\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{n2}x_n \geq 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}x_1+a_{2m}x_2+\ldots+ a_{nm}x_n\geq 1, \end{cases} \qquad (2.7.2)$$

$$x_1, x_2,\ldots,x_n \geq 0.$$

Мы получили задачу линейного программирования (см. 2.2). Решая ее (например, симплекс–методом), находим оптимальное решение x_1^*, $x_2^*,\ldots,x_n^*$, откуда, разделив на $Z^*=x_1^*+x_2^*+\ldots+x_n^*$, получаем оптимальную стратегию для игрока А ($p_1^*,p_2^*,..,p_n^*$), которая заключается в применении i-й чистой стратегии с частотой $p_i^*= x_i^*/ Z^*$.

Двойственная ЗЛП – максимизировать $F=y_1+y_2+...+y_m\rightarrow\max$;

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1+ a_{12}y_2+ \ldots+ a_{1m}y_m \leq 1; \\ a_{21}y_1+ a_{22}y_2+ \ldots+ a_{2m}y_m \leq 1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}y_1+ a_{n2}y_2+ \ldots+ a_{nm}y_m \leq 1; \end{cases} \qquad (7.2.3)$$

$$y_1\geq 0;\ y_2\geq 0;\ \ldots\ y_m \geq 0.$$

Здесь строка ограничения формируется из строки платежной матрицы.

Решая данную ЗЛП, находим оптимальное решение y_1^*, $y_2^*,\ldots,y_m^*$, откуда, разделив на $F^*=y_1^*+y_2^*+\ldots+y_m^*$, получаем оптимальную стратегию для игрока В (q_1^*, q_2^*,.., q_m^*), которая заключается в применении j-й чистой стратегии с частотой $q_j^*= y_j^*/ F^*$.

Затем находим цену игры $g =1/Z^*=1/F^*$.

Правила упрощения платежной матрицы:

Если к каждому элементу платежной матрицы прибавить одно и то же число, то решение ($p_1^*,p_2^*,..,p_m^*$) не изменится, а цена игры изменится ровно на добавленную величину.

Если каждый элемент платежной матрицы умножить на одно и то же число (не 0), то решение ($p_1^*,p_2^*,..,p_m^*$) не изменится, а цена игры изменится ровно во столько же раз.

Если какая-либо строка платежной матрицы *доминирует* над другой строкой (или линейной комбинацией строк), то доминируемые строки не войдут в оптимальную смешанную стратегию и их можно удалить.

Проиллюстрируем использование рассмотренных методов при описании и решении некоторых состязательных задач.

Пример 2.7.1. Рассмотрим тотализатор на ипподроме. Пусть выплаты в случае победы одной из трех лошадей относятся к ставке как 1:1, 3:1 и 4:1. Тогда платежная матрица игрока на скачках примет вид:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

Если прибавить к каждому элементу матрицы число К, то оптимальные стратегии не изменятся, а значение игры увеличится на К. Для упрощения матрицы добавим К=1, тогда получим:

$$A=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

В соответствие с (2.7.2) задача принимает вид:

минимизировать $Z= x_1+x_2+x_3$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2x_1+ 0x_2+0x_3 \geq 1, \\ 0x_1+ 4x_2+0x_3 \geq 1, \\ 0x_1+ 0x_2+5x_3 \geq 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Легко заметить, что решение этой задачи:

$$x_1^*=1/2,\ x_2^*=1/4,\ x_3^*=1/5.$$

Значение упрощенной игры $1/Z^*=1/(x_1^*+x_2^*+x_3^*)=20/19$, откуда (при К=1) значение исходной игры равно $20/19 - 1 = 1/19$,

$$p_1^*=x_1^*/Z^*=10/19,\ p_2^*=x_2^*/Z^*=5/19,\ p_3^*=x_3^*/Z^*=4/19.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока на скачках в данном примере заключается в смешанной стратегии делать ставки на всех трех лошадей в пропорции 10:5:4, при этом выигрыш игрока (игра имеет положительное значение!) будет равным 1/19 суммы его ставок, независимо от результата гонок. (Если цена игры отрицательна, то не следует в нее играть, так как даже при оптимальной стратегии гарантирован проигрыш, правда, минимальный).

Пример 2.7.2. Предлагается три варианта инвестиций в сельское хозяйство и прогноз получения доходов за год (дивиденды и повышение стоимости капитала) при различных перспективах на урожай.

Варианты инвестиций	Перспективы на урожай		
	хорошие	средние	плохие
1. АО «Сельхозтехника»	40	30	20
2. АО «Агроимпорт»	0	100	250
3. АО «Агроэкспорт»	150	50	–50

Доходы в платежной матрице приведены в процентах от вложенного капитала. Как распорядиться капиталом, чтобы получить наибольший доход? Рассматриваем «игру» против природных сил, руководствуясь максиминным принципом, т.е. хотим получить максимальный доход, принимая во внимание наихудшее, что может случиться. Искомые переменные p_1, p_2, p_3 определяют пропорции вложений. Заметим, что элементы первой строки платежной матрицы меньше средних арифметических соответствующих элементов второй и третьей строк, и она может быть удалена (первый вариант инвестиций заведомо неэффективен по сравнению с комбинацией второго и третьего вариантов – вкладывать деньги поровну во второй и третий проект). Получаем задачу линейного программирования

минимизировать $Z= x_2+x_3$

при ограничениях

$$\begin{cases} 0x_2 + 150x_3 \geq 1, \\ 100x_2+50x_3 \geq 1, \\ 250x_2 - 50x_3 \geq 1, \\ x_1=0,\ x_2,\ x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Решая данную задачу стандартными средствами (см.2.2) получим следующее решение

$$x_1^*=0,\ x_2^*=1/150,\ x_3^* =1/150.$$

Значение игры $1/Z^*=1/(x_1^*+x_2^*+x_3^*)=150/2=75$, откуда

$$p_1^*=0,\ p_2^*=x_2^*/Z^*=75/150=1/2,\ p_3^*=x_3^*/Z^*=75/150=1/2.$$

Таким образом, оптимальной стратегией является вложение капитала равными долями во второй и третий варианты, при этом гарантированный доход составит 75%.

2.7.3. Игры с природой

Если нет игрока В с противоположными интересами, а необходимо выбрать одно из альтернативных решений, характеризующееся различными исходами, то возникает задача игры с природой или задача принятия решений в условиях неопределенности и риска. Если вероятности исходов не известны, это ситуация неопределенности, при известных вероятностях исходов – ситуация риска.

Рассмотрим сначала правила принятия решений в условиях неопределенности (без использования численных значений вероятностей исходов – правила максимакса, Вальда, Сэвиджа, Лапласа).

Пример **2.7.3.** Пусть себестоимость пирожного в нашей кондитерской составляет 7 руб., свеженькое продаем за 13 руб., а невостребованное за день сдаем на свиноферму за 3 руб. Сколько пирожных надо производить в день, если известно лишь, что спрос на них составляет от 1 до 5?

Составим *таблицу возможных доходов* (табл.2.7.1), расположив построчно наши альтернативы (производить от 1 до 5 пирожных), а в столбцах исходы (продать от 1 до 5), имея в ввиду, что доход от продажи одного пирожного составляет 6 руб., а потери при не продаже составляют 4 руб.

Таблица 2.7.1 – Доход (прибыль) в день.

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожных в день				
	1	2	3	4	5
1	6	6	6	6	6
2	2	12	12	12	12
3	–2	8	18	18	18
4	–6	4	14	24	24
5	–10	0	10	20	30

Правило максимакса – максимизация максимального дохода. В каждой альтернативе найдем исход с максимальной оценкой (в табл.2.7.1 они все находятся в последнем столбце), и выбираем альтернативу, позволяющую получить самый большой доход. В нашем примере это соответствует решению производить 5 пирожных. Данный подход использует азартный карточный игрок (или пан или пропал).

Правило максимина (Вальда) – максимизация минимального дохода. В каждой альтернативе найдем исход с минимальной оценкой (в табл.3 они все находятся в первом столбце), и выбираем альтернативу, позволяющую максимизировать доход в самых худших для нас исходах. В нашем примере это соответствует решению производить 1 пирожное. Это очень осторожный подход к принятию решений – стратегия крайнего пессимиста.

Правило минимакса (Сэвиджа) – минимизация максимально возможных потерь. Составим таблицу возможных потерь или упущенной выгоды (Табл.2.7.2). Она составляется из таблицы доходов следующим образом:

для каждого исхода (столбца) находится максимальный доход, затем вычисляются максимально возможные потери всех альтернатив данного исхода (из максимального дохода вычитается доход соответствующей альтернативы).

Для каждой альтернативы находятся максимально возможные потери (выделены жирным цветом). Затем выбирается та альтернатива, которой соответствует минимальное значение максимальных потерь. В данном примере этому правилу подходят альтернативы выпускать три или четыре пирожных в день.

Таблица 2.7.2 – Возможные потери в день.

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожных в день				
	1	2	3	4	5
1	0	6	12	18	**24**
2	4	0	6	12	**18**
3	8	4	0	6	**12**
4	**12**	8	4	0	6
5	**16**	12	8	4	0

Правило, основанное на принципе неопределенности **Лапласа**. В соответствие с этим принципом предполагается, что все исходы равновозможные, поэтому выбирается альтернатива, дающая максимальный средний доход. В нашем примере этому правилу отвечают те же альтернативы выпускать три или четыре пирожных в день, имеющие средний доход 12 (у первой альтернативы средний доход 6, у второй и пятой – 10).

Критерий Гурвица – компромиссный способ принятия решений.

Этот способ принятия решения представляет собой компромисс между осторожным правилом максимина (Вальда) и оптимистичным правилом максимакса. ЛПР задает уровень пессимизма α (вероятность худшего исхода), тогда оптимистичному исходу дается вероятность $1–\alpha$, и выбирается альтернатива, дающая наибольший средневзвешенный доход при наличии только пессимистического и оптимистического исходов с заданными вероятностями.

Так, в нашем примере, худший исход – спрос на одно пирожное в день, лучший – пять пирожных. Зададим уровень пессимизма 0.4, тем самым мы предполагаем, что на каждые 4 дня худшего спроса в одно пирожное приходится 6 дней лучшего спроса в 5 пирожных. Рассчитаем средневзвешенные доходы для каждой альтернативы (табл. 2.7.3).

Таблица 2.7.3 – Критерий Гурвица.

Объем производства	Доход при спросе в день		вероятность исхода		Средневзвешенный доход
	1	5	0.4	0.6	
1	6	6	2.4	+3.6	=6
2	2	12	0.8	+7.2	=8
3	–2	18	–0.8	+10.8	=10
4	–6	24	–2.4	+14.4	=12
5	–10	30	–4.0	+18.0	=**14**

В данном случае максимальный средневзвешенный доход имеет решение выпускать пять пирожных в день.

Правила принятия решений с использованием численных значений вероятностей исходов.

Пусть теперь нам известны вероятности всех исходов.
Например, дана статистика продаж за последние 50 дней (табл. 2.7.4).
Таблица 2.7.4 – Относительные частоты (вероятности) дневного спроса на пирожные.

Продано пирожных в день	1	2	3	4	5
Частота	5	10	15	15	5
Относительная частота (вероятность)	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1

Правило максимальной вероятности – максимизация наиболее вероятных доходов.

Наибольшая вероятность 0.3 соответствует спросу в три и четыре пирожных в день. Рассмотрим теперь доходы при каждом из этих исходов и выберем альтернативу, дающую наибольший доход (см. табл. 3). При спросе в 3 пирожных наибольший доход дает альтернатива производить 3 пирожных (доход составляет 18 руб.), при спросе в 4 пирожных наибольший доход дает альтернатива производить 4 пирожных (доход составляет 24 руб.), следовательно, по этому правилу надо производить 4 пирожных в день.

Оптимизация математического ожидания (правило Байеса) Выбирается решение либо с наибольшим ожидаемым доходом, либо с наименьшими возможными потерями. Использование критерия математического ожидания наиболее приемлемо в случаях многократного принятия решения в одинаковых условиях, позволяя максимизировать среднюю прибыль (или минимизировать средние убытки) при большом временном промежутке. В соответствии с *законом больших чисел* (который мы проходили в разделе 3

«Математики») при многократном принятии решения мы как раз и получим математическое ожидание (среднее значение) дохода либо потерь.

а) Максимизация ожидаемого дохода.

Составим таблицу ожидаемых доходов для каждой альтернативы(табл.2.7.5).

Таблица 2.7.5. Возможный доход (вероятность×доход из табл. 2.7.1).

Объем производства	Возможные исходы: спрос пирожных в день					Ожидаемый доход
	1	2	3	4	5	
1	0.6	1.2	1.8	1.8	0.6	6
2	0.2	2.4	3.6	3.6	1.2	11
3	–0.2	1.6	5.4	5.4	1.8	**14**
4	–0.6	0.8	4.2	7.2	2.4	**14**
5	–1.0	0.0	3.0	6.0	3.0	11

Максимальное значение ожидаемого дохода 14 руб. в день, следовательно, используя критерий максимизации ожидаемого дохода необходимо производить три или четыре пирожных в день.

б) Минимизация возможных потерь.

Составим таблицу возможных потерь для каждой альтернативы (табл.2.7.6).

Минимальные ожидаемые возможные потери равны 4.6 руб. в день, т.е. наилучшее решение – также как и в случае *а,* производить три или четыре пирожных в день.

Таблица 2.7.6 Возможные потери (вероятность×потери из табл. 2.7.2).

Объем производства	Возможные потери: спрос пирожных в день					Ожидаемые возможные потери
	1	2	3	4	5	
1	0	1.2	3.6	5.4	2.4	12.6
2	0.4	0	1.8	3.6	1.8	7.6
3	0.8	0.8	0	1.8	1.2	**4.6**
4	1.2	1.6	1.2	0	0.6	**4.6**
5	1.6	2.4	2.4	1.2	0	7.6

Значения вероятностей из табл.2.7.4 основаны на статистической либо экспертной информации, которая подвержена изменениям. Исследование зависимости выбора решения от изменений значений вероятностей называется *анализом чувствительности решения*.

Таблица 2.7.7. Зависимость выбора решения от изменений значений вероятностей

Наименование показателей	Возможные решения: объем производства в день				
	1	2	3	4	5
Базовые вероятности	0.1	0.2	0.3	0.3	0.1
Ожидаемый доход в день	6	11	**14**	**14**	11
Альтернативные вероятности (1)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
Ожидаемый доход в день (1)	6	10	**12**	**12**	10
Альтернативные вероятности (2)	0.1	0.2	0.2	0.2	0.3
Ожидаемый доход в день (2)	6	11	14	**15**	14

В альтернативном варианте (1) решение, дающее максимальный доход, не претерпело изменений, хотя средняя прибыль снизилась с 14 руб. до 12 руб. В альтернативном варианте (2) решение изменилось, наибольший средний доход 15 руб. дает альтернатива производить 4 пирожных в день. Таким образом, выбор решения оказался нечувствителен к варианту (1) изменений вероятностей, но чувствителен к варианту (2).

Пример 2.7.4. Рассмотрим схожую с предыдущей задачу управления запасами. Пусть спрос на некоторый товар описывается следующим рядом распределения вероятностей:

Спрос	0	1	2	3	4	5
Вероятность спроса	0.10	0.15	0.40	0.15	0.10	0.10

Определить уровень запасов, при котором вероятность полного истощения запасов не превышает 0.45. Определить также уровень запасов при условии, что средние значения дефицита и превышения запасов не должны быть больше 1 и 2 единиц соответственно.

Будем анализировать данную задачу как игру уровня запасов со спросом. Для каждого значения уровня запасов последовательно вычисляем вероятность его полного истощения. Она равна сумме вероятностей событий, когда спрос превышает данный запас. Затем вычисляем средний дефицит для каждого уровня запаса. Для уровня 0 средний дефицит равен $1{\cdot}0.15+2{\cdot}0.4+3{\cdot}0.15+4{\cdot}0.1+5{\cdot}0.1=2.3$, для уровня 1 получаем $1{\cdot}0.4+2{\cdot}0.15+3{\cdot}0.1+4{\cdot}0.1=1.4$ и т.д. Аналогично вычисляем среднее превышение запасов, например, для уровня 0 превышения нет, для уровня 1 среднее превышение составляет $1{\cdot}0.1=0.1$, для уровня 2 получаем $2{\cdot}0.1+1{\cdot}0.15=0.35$ и т.д. Сведем все результаты расчетов в таблицу 2.7.8.

Таблица 2.7.8

Уровень запаса Q	Вероятность полного истощения	Средний дефицит	Среднее превышение запасов
0	0.9	2.3	0
1	0.75	1.4	0.1
2	0.35	0.65	0.35
3	0.2	0.3	1.0
4	0.1	0.1	1.8
5	0	0	2.7

Из табл. 2.7.8 получаем ответы на все интересующие нас вопросы:

При Q ≥2 вероятность полного истощения запасов не превышает 0.45. При 4≥Q≥2 средние значения дефицита и превышения запасов не больше 1 и 2 единиц соответственно.

Пример 2.7.5. Введем в пример 2.7.4 условие, чтобы ожидаемый дефицит был меньше превышения хотя бы на 1.

Тогда из табл. 2.7.8 находим уровень запасов, удовлетворяющий этому условию, Q ≥4.

2.4. Стоимость достоверной информации.

Неопределенность при принятии решений может быть уменьшена путем сбора дополнительной информации, за которую нужно платить. Максимальная сумма денег, которую стоит заплатить, и является *стоимостью достоверной информации*. Так, если бы мы в нашей кондитерской заранее знали спрос на следующий день, то готовили бы столько пирожных, сколько обеспечивают максимальный доход (см. диагональ табл.2.7.1). В этом случае ожидаемый доход был бы равен

$$6\times0.1+12\times0.2+18\times0.3+24\times0.3+30\times0.1=18.6$$

Стоимость достоверной информации есть разница между этим ожидаемым доходом и максимальным ожидаемым доходом без достоверной информации. Это число 18.6 – 14 = 4.6 равно минимальным ожидаемым возможным потерям. Таким образом, наша кондитерская может заплатить 4.6 руб. в день за информацию о спросе да следующий день, т.е. это максимальная плата за маркетинговые услуги.

Использование математического ожидания и среднего квадратичного отклонения для оценки риска.

Если решение принимается однократно, то необходимо определить степень отклонения от математического ожидания, т.е. вычислить дисперсию и среднее квадратичное отклонение для оценки риска.

Чем меньше среднее квадратичное отклонение, тем больше уверенности, что принятое решение даст результат, близкий к математическому ожиданию.

Рассмотрим применение среднего квадратичного отклонения для оценки риска на небольшом примере.

***Пример* 2.7.6.** Предприятие производит некоторую продукцию, спрос на которую в течение месяца 6, 7, 8 или 9 ящиков с вероятностями 0,1; 0,3; 0,5; 0,1 соответственно. Затраты на производство одного ящика равны 45 тыс. руб. Предприятие продает один ящик по цене 95 тыс. руб. Если ящик с продукцией не продается в течение месяца, то она портится и предприятие не получает дохода. Сколько ящиков следует производить?

Рассчитаем доходы по каждой альтернативе и каждому исходу, математическое ожидание дохода и среднее квадратичное отклонение по каждой альтернативе и занесем в табл. 2.7.9.

Таблица 2.7.9.

Объем производства (ящиков)	Возможные исходы: спрос ящиков в месяц				Ожидаемый доход (тыс. руб.)	Среднее квадратичное отклонение
	6 (0,1)	7 (0,3)	8 (0,5)	9 (0,1)		
6	300	300	300	300	300	0
7	255	350	350	350	340,5	28,5
8	210	305	400	400	**352,5**	63,73
9	165	260	355	450	317	76

Поясним расчеты для альтернативы производить 8 ящиков.
Если спрос 6 ящиков, то доход составит $6\times95 - 8\times45 = 210$ тыс. руб.
Если спрос 7 ящиков, то доход составит $7\times95 - 8\times45 = 305$ тыс. руб.
Если спрос 8 ящиков, то доход составит $8\times95 - 8\times45 = 400$ тыс. руб.
Если спрос 9 ящиков, то доход тот же, так как произведено всего 8.
Ожидаемый доход $210\times0,1+305\times0,3+400\times0,5+400\times0,1=352,5$.

Дисперсия дохода составит $(210 - 352,5)^2\times0,1 + (305-352,5)^2\times0,3 + (400-352,5)^2\times0,5+(400-352,5)^2\times0,1=4061,25$.

Среднее квадратичное отклонение равно $\sqrt{4061{,}25}$=63,73.

Итак, если принимаемое решение будет многократно использовано, то лучшая альтернатива производить 8 ящиков в месяц, при этом будет обеспечен максимальный средний доход 352,5 тыс. руб. Но если необходимо принять разовое решение, то предпочтительнее произвести 7 ящиков, при этом ожидаемая прибыль несколько меньше, зато риск резко сокращается: в первом случае ожидаемая прибыль будет лежать в пределах 352,5 ± 63,73, а во втором случае ожидаемая прибыль будет лежать в пределах 340,5 ± 28,5. В любом случае решение должен принимать руководитель с учетом его опыта, склонности к риску и степени достоверности оценок вероятностей спроса. Вся информация для принятия решения содержится в табл. 2.7.9.

Использование понятия полезности при определении размеров риска.

На принятие решения оказывают большое влияние субъективные качества лица, принимающего решение (ЛПР), такие как:

- финансовое состояние ЛПР;
- отношение ЛПР к риску вообще;
- настроение или состояние здоровья ЛПР;
- множество других, даже непосредственно не относящихся к бизнесу причин.

Теория полезности позволяет ЛПР влиять на денежный результат исходов согласно своим оценкам их полезности. Каждый может приспосабливать процесс принятия решения к своим запросам.

***Пример* 2.7.7.** Для примера рассмотрим два варианта инвестиций 1000 руб.

По первому варианту без риска можно получить 10% прибыли на вложенный капитал, по второму варианту можно, либо потерять весь капитал с вероятностью 0.6, либо его удвоить с вероятностью 0.4.

В первом случае гарантированный выигрыш составит 100 руб., во втором случае средний выигрыш равен 0×0.6+1000×0.4=400 руб.

Относительно получаемого среднего выигрыша вторая альтернатива явно предпочтительна, и если игрок безразличен к риску, он ее и выберет. Если он к риску не безразличен, а подавляющее число людей именно таковыми и являются, то выбор будет зависеть главным образом от финансового состояния игрока. Игроки, имеющие скромный денежный доход, предпочтут не рисковать, и выберут гарантированный доход в 100 руб. Для игрока, обладающего достаточно крупным капиталом, проигрыш 1000 руб. невелик, и он предпочтет рискнуть. Рисковать будут также игроки, патологически склонные к финансовым авантюрам.

Таким образом, каждый игрок по-разному оценивает *полезность* того или иного исхода. Американскими учеными Дж. Нейманом и О. Моргенштерном была предложена методика численного определения *функции полезности*, и было показано, что игрок при принятии решения (выбор альтернативы) будет стремиться к максимизации ожидаемой полезности, которая вычисляется как математическое ожидание полезностей всех исходов, составляющих данную альтернативу.

Процедура построения индивидуальной функции полезности U(x) состоит из двух этапов.

Этап 1. Присваиваются произвольные значения полезностей выигрышам для худшего (x_{min}) и лучшего (x_{max}) исходов (например, $U(x_{min})=0$ и $U(x_{max})=100$). Тогда полезности промежуточных выигрышей будут находиться в интервале от 0 до 100.

Этап 2. Игроку предлагается на выбор: получить некоторую гарантированную сумму v, находящуюся между x_{min} и x_{max}, либо принять участие в игре, в которой с вероятностью p выигрывается сумма x_{max} и с вероятностью (1 – p) сумма x_{min}. При этом вероятность p меняется до тех пор, пока игрок станет безразличным в отношении к выбору между получением гарантированной суммы v и игрой. Пусть указанное значение вероятности равно p_0. Тогда

$$U(v)= p_0U(x_{max})+ (1 - p_0)U(x_{min}).$$

Таким образом, строится функция полезности для любого v.

В общем случае график функции полезности может быть трех типов (рис. 2.7.1).

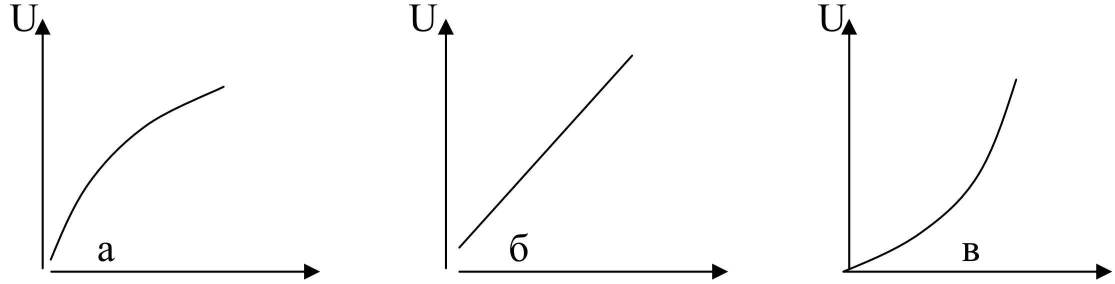


Рис. 2.7.1. Типы функций полезности Неймана – Моргенштерна для игрока, не склонного к риску (а), безразличного к риску (б), склонного к риску (в).

В рассмотренном выше примере x_{min}= –1000, а x_{max} =1000. Пусть $U(x_{min})$=0 и $U(x_{max})$=100. Необходимо оценить полезность гарантированного выигрыша v=100. Если игрок (средне обеспеченный) согласен принять участие в игре (выиграть 1000 с вероятностью p или проиграть 1000 с вероятностью (1 – p)) вместо гарантированного выигрыша в 100 руб. при условии, что p не менее 0.8, значит p_0=0.8 и U(100)=0.8×100+0.2×0 =80.

Ожидаемая полезность первой альтернативы будет равна 80, а ожидаемая полезность второй альтернативы 0.6×0+0.4×100=40, то есть для данного игрока предпочтительнее первая (безрисковая) альтернатива. В данном случае это решение прямо противоположно выбору, сделанному на основе критерия ожидаемого дохода, из-за учета риска, связанного с возможным исходом инвестиций по второму варианту.

2.7.4. Биматричные игры

В случае, когда интересы игроков различны, получаются две платежные матрицы: одна – матрица выплат игроку А, другая – матрица выплат игроку В. такие игры называются *биматричными*.
В общем случае биматричная игра – это игра с ненулевой суммой.

Примеры биматричных игр

Примеры этого раздела описывают некоторые типические конфликтные ситуации, приводящие к биматричным играм. Сначала мы обсудим вопросы, связанные с формализацией рассматриваемых конфликтов (построение платежных матриц), а позднее – с рекомендациями по их разрешению.

Борьба за рынки

Небольшая фирма (игрок А) намерена сбыть партию товара на одном из двух рынков, контролируемых другой, более крупной фирмой (игрок В). Для этого фирма А готова сделать на одном из рынков соответствующие приготовления (например, развернуть рекламную кампанию). Господствующая на рынках фирма В может попытаться воспрепятствовать этому, приняв на одном из рынков предупредительные меры (разумеется, в рамках закона). Не встречая противодействия на рынке, фирма А захватывает его; при наличии препятствий – терпит поражение.

Будем считать для определенности, что проникновение фирмы А на первый рынок более выгодно для нее, нежели на второй. Естественно также считать, что и борьба за первый рынок потребует вложения больших средств. Например, победа фирмы А на первом рынке принесет ей вдвое больший выигрыш, чем победа на втором, но зато и поражение при попытке освоиться на первом рынке полностью ее разорит, а фирму B избавит от конкурента.

Что же касается второго рынка, то при поражении фирмы A ее потери будут не столь разорительны, но и победа принесет не много. Таким образом, у фирмы A две стратегии:

A_1 – выбор первого рынка, A_2 – выбор второго рынка.

Такие же стратегии и у фирмы B:

B_1 – выбор первого рынка, B_2 – выбор второго рынка.

Для того чтобы составить платежные матрицы игроков, нужны расчетные количественные показатели, которые мы приведем здесь в условных единицах:

$$A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Посмотрим на выписанные матрицы выплат. Из сказанного выше ясно, что если оба игрока выберут один и тот же рынок, то победа останется за более сильной фирмой *B*.

То, что в ситуации (A_1, B_1) выигрыш игрока B равен 5, а в ситуации (A_2,B_2) – 1, подчеркивает, что первый рынок более выгоден (удобно расположен, хорошо посещаем и т. п.), чем второй. Выигрыш (–10) игрока A в ситуации (A_1,B_1) (а точнее, проигрыш) в сопоставлении с его выигрышем (–1) в ситуации (A_2,B_2) выглядит, разумеется, вполне сокрушительно. Что же касается ситуации, когда фирмы уделяют основное внимание разным рынкам – (A_1,B_2) и (A_2, B_1), то здесь фирму A ждет настоящий выигрыш, больший на более выгодном рынке. Потери, которые при этом несет фирма B, оказываются прямо противоположными.

Дилемма узников

Игроками являются два узника, находящиеся в предварительном заключении по подозрению в совершении преступления. При отсутствии прямых улик возможность их осуждения в большой степени зависит от того, заговорят они или будут молчать.

Если оба будут молчать, то наказанием будет лишь срок предварительного заключения (потери каждого из узников составят (–1)). Если сознаются, то получат срок, учитывающий признание как смягчающее обстоятельство (потери каждого из узников составят в этом случае (– 6)). Если же заговорит только один из узников, а другой будет молчать. то в этом случае заговоривший будет выпущен на свободу (его потери равны 0), а сохраняющий молчание получит максимально возможное наказание (его потери будут равны (– 9)).

Эта конфликтная ситуация приводит к биматричной игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии – молчать (М) или говорить (Г).

Выигрыши игроков А и В соответственно описываются так;

	(М)	(Г)
(М)	–1	–9
(Г)	0	–6

	(М)	(Г)
(М)	–1	0
(Г)	–9	–6

Семейный спор

Два партнера договариваются о совместном проведении одного из двух действий, (1) и (2), каждое из которых требует их совместного участия.

В случае осуществления первого из этих двух действий выигрыш первого партнера (игрок А) будет вдвое выше выигрыша второго партнера (игрок В). Напротив, в случае осуществления второго из этих двух действий выигрыш игрока А будет вдвое меньше выигрыша игрока *В*. Если же партнеры выполнят различные действия, то выигрыш каждого из них будет равен нулю.

Эта конфликтная ситуация приводит к биматричной игре, в которой каждый из игроков имеет по две стратегии. Выигрыши игроков А и *В* описываются таблицами следующего вида:

	(1)	(2)
(1)	2	0
(2)	0	1

	(1)	(2)
(1)	1	0
(2)	0	2

Пояснение. Понятно, что различные конфликтные ситуации могут иметь одну и ту же формализацию. В частности, рассмотренная биматричная игра часто интерпретируется как одновременный выбор супругами совместного развлечения: посещение оперного спектакля или хоккейного матча. При этом в посещении оперного театра жена заинтересована в большей степени, чем муж, а при посещении стадиона наблюдается обратная картина. В случае же непреодолимости разногласий, возникших при выборе, день оказывается вообще испорченным. Отсюда и название, вынесенное в заголовок.

Студент - преподаватель

Рассмотрим следующую ситуацию. Студент (игрок А) готовится к зачету, который принимает преподаватель (игрок В). Можно считать, что у студента две стратегии – подготовиться к сдаче зачета (+) и не подготовиться (–). У преподавателя также две стратегии — поставить зачет [+] и не поставить зачета [–]. В основу значений функций выигрыша игроков положим следующие соображения:

Выигрыш студента

	[+]	[–]
(+)	Оценка заслужена	Очень обидно
(–)	Удалось обмануть	Оценка заслужена

Выигрыш преподавателя

	[+]	[–]
(+)	Все нормально	Был неправ
(–)	Дал себя обмануть	Опять придет

Количественно это можно выразить, например, так

$$\begin{array}{c|cc} & [+] & [-] \\ \hline (+) & 2 & -1 \\ (-) & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|cc} & [+] & [-] \\ \hline (+) & 1 & -3 \\ (-) & -2 & -1 \end{array}$$

Смешанные стратегии

В приведенных примерах описаны ситуации, в которых интересы игроков не совпадают. Естественно встает вопрос о том, какие рекомендации необходимо дать игрокам для того, чтобы моделируемая конфликтная ситуация разрешилась.

Иными словами, что мы будем понимать под решением биматричной игры?

Попробуем ответить на этот вопрос так: вследствие того, что интересы игроков не совпадают, нам нужно построить такое (компромиссное) решение, которое бы в том или ином, но в одинаковом смысле удовлетворяло обоих игроков.

Иначе говоря, попробуем найти некую равновесную ситуацию, явное отклонение от которой уменьшает выигрыш игрока.

Подобный вопрос мы ставили и при рассмотрении матричных игр. Напомним, что возникавшее при разработке минимаксного подхода понятие равновесной ситуации приводило нас к поиску седловой точки, которая, как оказалось, существует далеко не всегда.

Естественно ожидать, что в более сложном случае биматричной игры дело вряд ли будет обстоять проще.

В матричных играх эта трудность была преодолена путем перехода к смешанным стратегиям, т. е. к такому поведению игроков, при котором они чередуют свои собственные чистые стратегии.

Иными словами, любая матричная игра в смешанных стратегиях разрешима.

Поэтому, рассматривая здесь биматричные игры, разумно попробовать сразу же перейти к смешанным стратегиям игроков. Тем самым мы предполагаем, что каждая игра может быть повторена в неизменных обстоятельствах многократно.

2×2 - биматричные игры. Ситуация равновесия

В $2{\times}2$ - биматричной игре платежные матрицы игроков имеют следующий вид:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Вероятности выбора стратегий игрока A $p_1=p$, $p_2=1-p$, игрока B $q_1=q$, $q_2=1-q$, а средние выигрыши вычисляются по формулам

$$H_A(p, q) = a_{11}pq + a_{12}p(1 - q) + a_{21}(1 - p)q + a_{22}(1 - p)(1 - q),$$
$$H_B(p, q) = b_{11}pq + b_{12}p(1 - q) + b_{21}(1 - p)q + b_{22}(1 - p)(1 - q),$$

где

$$0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1.$$

Определение. Будем говорить, что пара чисел

$$(p^*, q^*), \quad 0 \le p^* \le 1, \quad 0 \le q^* \le 1,$$

определяет *равновесную ситуацию,* если для любых p и q, подчиненных условиям $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$, одновременно выполнены следующие неравенства:

$$H_A(p, q^*) \le H_A(p^*, q^*), \qquad H_B(p^*, q) \le H_B(p^*, q^*). \qquad (2.7.3)$$

Пояснение. Неравенства (2.7.3) означают следующее: ситуация, определяемая смешанной стратегией (p^*, q^*), является равновесной, если отклонение от нее одного из игроков при условии, что другой сохраняет свой выбор, приводит к уменьшению выигрыша первого. Тем самым получается, что если равновесная ситуация существует, то отклонение от нее невыгодно самому игроку.

ТЕОРЕМА (Дж. Нэш). *Всякая биматричная игра имеет хотя бы одну равновесную ситуацию (точку равновесия) в смешанных стратегиях.*

Итак, равновесная ситуация существует. Но как ее найти?

Для обоснования способа определения равновесной ситуации сошлемся на следующий теоретический результат.

ТЕОРЕМА. Выполнение неравенств (2.7.3) равносильно выполнению неравенств

$$H_A(0, q^*) \le H_A(p^*, q^*), \quad H_B(p^*, 0) \le H_B(p^*, q^*), \qquad (2.7.4)$$
$$H_A(1, q^*) \le H_A(p^*, q^*), \qquad H_B(p^*, 1) \le H_B(p^*, q^*).$$

Иными словами, для того чтобы убедиться, что пара (p^*, q^*) определяет равновесную ситуацию, достаточно проверить справедливость неравенств (2.7.2) только для двух чистых стратегий игрока A ($p = 0$ и $p = 1$) и для двух чистых стратегий игрока *B* ($q = 0$ и $q = 1$).

Пропуская промежуточные алгебраические выкладки, приходим к следующему результату:

Для того чтобы в биматричной игре пара (p^*, q^*) определяла равновесную ситуацию, необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих неравенств:

$$\begin{aligned}&(p-1)(Cq-\alpha) \geq 0,\\ &p(Cq-\alpha) \geq 0,\\ &(q-1)(Dp-\beta) \geq 0,\\ &q(Dp-\beta) \geq 0,\\ &0 \leq p \leq 1,\ 0 \leq q \leq 1,\end{aligned} \qquad (2.7.5)$$

где

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},\ \alpha = a_{22} - a_{12},$$
$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22},\ \beta = b_{22} - b_{21},$$

Поиск равновесных ситуаций

Геометрический смысл условий (2.7.4) рассмотрим на примерах описанных выше биматричных игр.

Борьба за рынки

Напомним, что ситуация, сложившаяся в этой задаче, задается платежными матрицами следующего вида:

$$A=\begin{pmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Заменяя в неравенствах (2.7.4) величины C, α, D и β их конкретными значениями

C= -10 -2-1-1= -14, α = -1-2= -3, D= 5+2+1+1= 9, β= 1+1= 2,

получаем

(l) $(p-1)(-14q-(-3)) \geq 0$, $p(-14q-(-3)) \geq 0$, (r) $(q-1)(9p-2) \geq 0$, $q(9p-2) \geq 0$.

Рассмотрим сначала левую пару неравенств (l):

$$(p-1)(-14q+3) \geq 0, \quad p(-14q+3) \geq 0.$$

Возможны следующие три случая:

1) p=1, 2) p=0, 3) $0<p<1$.

Рассмотрим каждый из этих случаев подробно.

1. Полагая $p = 1$, получаем

$$0 \geq 0, \quad -14q+3 \geq 0.$$

Отсюда $q \geq 3/14$.

2. Полагая $p= 0$, получаем

$$0 \geq 0,\ -(-14q+3) \geq 0,\ 0 \geq 0, \text{ откуда}$$
$$14q-3 \geq 0$$

и, значит, $q \le 3/14$.

3. Наконец, положив $0 < p < 1$, получим

$$-14q+3 \ge 0,$$

$$-14q+3 \le 0,$$

что возможно лишь в случае, если

$$-14q+3=0,$$

т. е. $q = 3/14$.

Перенесем теперь полученные результаты на чертеж. Введем на плоскости прямоугольную систему координат (p, q) и выделим на ней единичный квадрат, соответствующий неравенствам $0 \le p \le 1$, $0 \le q \le 1$, (рис.2.7.2).

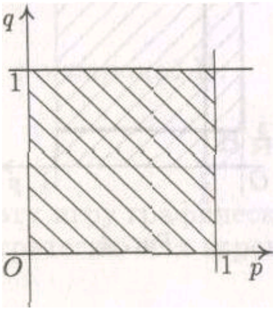


Рис. 2.7.2

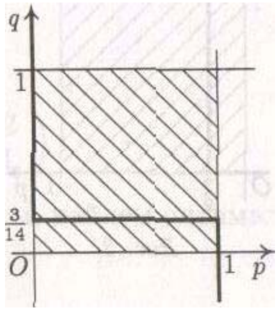


Рис. 2.7.3

Нанесем на этот чертеж то множество точек, которое описывается условиями 1, 2 и 3. Это множество на рис. 2.7.3 выделено жирной линией и состоит из трех прямолинейных участков – двух вертикальных лучей и одного горизонтального отрезка – и представляет собой "зигзаг".

Теперь обратимся к правой части неравенств (r):

$$(q-1)(9p-2) \ge 0, \qquad q(9p-2) \ge 0.$$

Три интересных для нас случая:

1) $q=1$, 2) $q = 0$, 3) $0 < q < 1$

приводят к следующему результату:

1°. $q=1$, $p \ge 2/9$,

2°. $q=0$, $p \le 2/9$,

3°. $0 < q < 1$, $p=2/9$.

Перенося его на чертеж, получим второй "зигзаг", но уже горизонтальный.

Теперь остается только объединить полученное на рис. 2.7.4. Общая точка построенных зигзагов – точка равновесия – имеет координаты

$$\left(\frac{2}{9}, \frac{3}{14}\right).$$

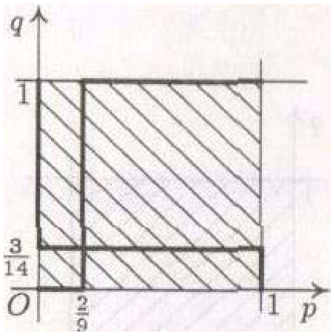


Рис. 2.7.4

Соответствующие смешанные стратегии игроков имеют следующий вид:

$$P=\left\{\frac{2}{9},\frac{7}{9}\right\},\quad Q=\left\{\frac{3}{14},\frac{11}{14}\right\},$$

а средние выигрыши игроков таковы:

$$H_A\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)=-\frac{4}{7},\quad H_B\left(\frac{2}{9},\frac{3}{14}\right)=\frac{1}{3}.$$

Дилемма узников

Выигрыши игроков A и B описываются соответствующими матрицами выплат:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -9\\ 0 & -6\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -9 & -6\end{pmatrix}.$$

Проведем необходимые вычисления. Имеем:

$C= -1-(-9)-0+(-6)=2$, $\alpha= -6-(-9)=3$,

$D = -1-0-(-9)+(-6)=2$, $\beta= -6-(-9)=3$.

Отсюда

(l) $(p\text{-}1)(2q\text{-}3)\geq 0$, $\quad p(2q\text{-}3)\geq 0$, $\qquad$ (r) $(q\text{-}1)(2p\text{-}3)\geq 0$, $\quad q(2p\text{-}3)\geq 0$.

и тогда получаем, что

1^l. $p=1$, $q\geq 3/2$, $\quad 2^l$. $p=0$, $q\leq 3/2$, $\quad 3^l$. $0<p<1$, $q=3/2$;

1^r. $q=1$, $p\geq 3/2$, $\quad 2^r$. $q=0$, $p\leq 3/2$, $\quad 3^r$. $0<q<1$, $p=3/2$.

Полученные зигзаги изображены на рис. 2.7.5.

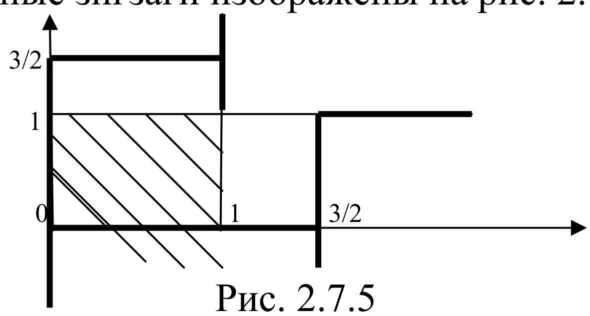


Рис. 2.7.5

Единственная равновесная ситуация – (0,0). Это ситуация, в которой каждый из игроков выбирает вторую чистую стратегию –

сознаться – и его потери составляют 6.

Как мы уже отмечали ранее, отклонение от ситуации равновесия одного из игроков не дает ему никаких преимуществ. Однако при одновременном отклонении обоих каждый из них может получить больший выигрыш, нежели в равновесной ситуации. Например, в ситуации (1,1), когда оба игрока выбирают первую чистую стратегию – молчать, каждый из них теряет лишь 1.

Напомним, что по условию задачи сговор (создание коалиции) между игроками недопустим.

Совершенно ясно, однако, что в рассматриваемых обстоятельствах ситуация (1,1) неустойчива – любой из узников, изменяя свою стратегию, увеличивает свой выигрыш (избегает наказания).

Семейный спор

Выигрыши игроков А и *B* в этой биматричной игре задаются так:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Проводя необходимые вычисления:

$$C= 2-0-0+1=3,\ \alpha= 1-0=1,$$
$$D = 1-0-0+2 =3,\ \beta= 2-0 = 2$$

и рассуждения:

$$(l)\quad (p-1)(3q-1)\ge 0,\qquad (r)\quad (q-1)(3p-2)\ge 0,$$
$$p(3q-1)\ge 0,\qquad q(3p-2)\ge 0,$$

получаем, что

$1^l.\ p=1,\ q\ge 1/3,\quad 2^l.\ p=0,\ q\le 1/3,\quad 3^l.\ 0<p<1,\ q=1/3;$

$1^r.\ q=1,\ p\ge 2/3,\quad 2^r.\ q=0,\ p\le 2/3,\quad 3^r.\ 0<q<1,\ p=2/3.$

Геометрически полученный результат изображен на рис. 2.7.6.

Данная игра имеет три точки равновесия. Две из них отвечают чистым стратегиям игроков:

$p=1,\quad q=1:\qquad H_A(1, 1)=2,\ H_B(1, 1)=1,$

$p=0,\quad q=0:\qquad H_A(0, 0)=1,\ H_B(0, 0)=2,$

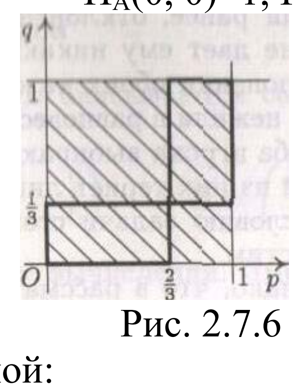


Рис. 2.7.6

одна — смешанной:

$$p=\frac{2}{3}, q=\frac{1}{3}: \qquad \text{Н}_\text{A}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}, \quad \text{Н}_\text{B}\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

В полученных результатах больше вопросов, чем ответов.

Ситуации (1,1) и (0,0) означают одновременный выбор игроками первых или соответственно вторых стратегий, т. е. определенную договоренность о совместных действиях.

Однако в данном случае есть еще одна ситуация равновесия, состоящая в выборе игроками вполне определенных смешанных стратегий. В ней оба игрока получают одинаковые выигрыши, правда, меньшие тех, которые давали две другие равновесные ситуации.

Какой же из этих трех ситуаций равновесия следует отдать предпочтение?

Если бы игроки договорились выбрать одновременно, скажем, первую чистую стратегию, причем игрок А за получение большего выигрыша, чем игрок В, заплатил бы ему 1/2, то выигрыш каждым полутора единиц можно было бы считать и выгодным, и справедливым. Однако в рамках теории бескоалиционных игр такого рода дележи не рассматриваются.

Студент - преподаватель

Наконец, обратимся к последнему из приведенных выше примеров биматричных игр – студент-преподаватель. Ожидания каждого из них относительно результатов общения в матричном виде выглядят следующим образом;

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & -1\end{pmatrix}.$$

Проводя необходимые вычисления:

C= 2+ 1 – 1+0=2, α= 0+ 1=1,

D = 1 +3+2 – 1 =5, β= – 1+2 = 1

и рассуждения:

(l) $(p\text{-}1)(2q\text{-}1) \geq 0$, $\qquad$ (r) $(q\text{-}1)(5p\text{-}1) \geq 0$,

$p(2q\text{-}1) \geq 0$, $\qquad$ $q(5p\text{-}1) \geq 0$,

получаем, что

1^l. $p=1$, $q \geq 1/2$, $\quad 2^l$. $p=0$, $q \leq 1/2$, $\quad 3^l$. $0 < p < 1$, $q=1/2$;

1^r. $q=1$, $p \geq 1/5$, $\quad 2^r$. $q=0$, $p \leq 1/5$, $\quad 3^r$. $0 < q < 1$, $p=1/5$.

(рис. 2.7.7).

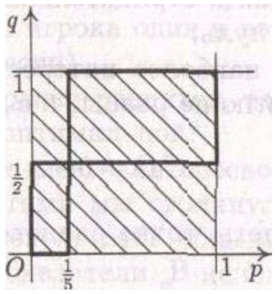


Рис. 2.7.7

Число точек пересечения у зигзагов (равновесных ситуаций) равно трем.

Две из них отвечают чистым стратегиям игроков:

p=1, q =1: $H_A(1, 1)=2$, $H_B(1, 1)=1$,

p=0, q =0: $H_A(0, 0)=0$, $H_B(0, 0)= -1$,

одна – смешанной:

$$p=\frac{1}{5}, q=\frac{1}{2}: \qquad H_A\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}, \quad H_B\left(\frac{1}{5},\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{5}.$$

В данной задаче в отличие от предыдущей все довольно ясно, наилучшим является выбор каждым из игроков первой чистой стратегии – хорошо подготовиться к зачету и поставить зачет.

Как нетрудно заметить, тем самым в этой задаче реализуется весьма редкая возможность, когда функции выигрыша каждого из игроков достигают своих максимумов одновременно.

Выгодность такой ситуации совершенно ясна. Ее устойчивость также вполне очевидна: любое отклонение от ситуации (1,1) одного из игроков или обоих игроков может привести разве что к уменьшению их выигрышей.

Некоторые итоги

Из приведенных примеров видно, что числа C и D могут быть как положительными, так и отрицательными. Они могут, в частности, даже обращаться в нуль.

Рассмотрим, однако, наиболее интересный в приложениях случай, когда ни C ни D нулю не равны. Тогда, как нетрудно видеть, точка равновесия определяется парой

$$p=\frac{\beta}{D}, q=\frac{\alpha}{C}.$$

Эти формулы являются весьма примечательными: в равновесной ситуации выбор игрока А полностью определяется элементами платежной матрицы игрока В,

$$p=\frac{b_{22}-b_{21}}{b_{11}-b_{12}-b_{21}+b_{22}}$$

(и не зависит от элементов его собственной платежной матрицы), а выбор игрока B в равновесной ситуации полностью определяется элементами платежной матрицы игрока А,

$$q = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

(и не зависит от элементов его собственной платежной матрицы).

Иными словами, равновесная ситуация обоих игроков определяется не столько стремлением увеличить собственный выигрыш, сколько желанием держать под контролем выигрыш другого игрока (минимизировать этот выигрыш). И если, например, заменить в биматричной игре матрицу выплат игроку А, а матрицу выплат игроку B оставить прежней, то игрок А никак не изменит своего "равновесного" поведения (просто не обратит внимания на эту замену), в то время как игрок B изменит свою стратегию на новую, равновесную.

Таким образом, в биматричной (неантагонистической) игре мы вновь встречаемся с антагонизмом. Правда, теперь это уже не *антагонизм интересов* (как было в антагонистической, матричной игре), а *антагонизм поведения.*

Отметим, что в биматричных играх (в отличие от матричных) при наличии нескольких ситуаций равновесия средний выигрыш игрока в разных равновесных ситуациях различен (напомним, что в матричной игре выигрыш игрока один и тот же вне зависимости от количества точек равновесия).

Но если средние выигрыши разнятся, то какую равновесную ситуацию следует считать оптимальной?

Наконец, еще одно, не менее интересное обстоятельство. Вспомним, с какими трудностями мы столкнулись, пытаясь перевести эмоциональные оценки результатов общения студент-преподаватель в количественные показатели. В целом сохраняя основные соотношения, эти количественные оценки могут, конечно, изменяться как от студента к студенту, так и от преподавателя к преподавателю. Однако если эти изменения будут не слишком значительными – элементы платежной матрицы "пошевельнутся" слегка – то слегка "пошевельнутся" и зигзаги, не изменяя ни своей общей формы, ни взаимного расположения, а значит, число равновесных ситуаций не изменится. Впрочем, сказанное относится лишь к случаю, когда множество ситуаций равновесия конечно и состоит из нечетного числа точек (одной или трех).

Как принято говорить в подобных случаях, это число *устойчиво относительно малых шевелений.*

Конечно, в некоторых биматричных играх равновесные ситуации случаются и в чистых стратегиях (в последнем из разобранных примеров таких ситуаций даже две). Но, как показывают разобранные примеры, во-первых, чистой ситуации равновесия может вовсе не быть, и, во-вторых, даже при ее наличии не исключено существование равновесных ситуаций в смешанных стратегиях. И, чтобы найти их все, неизбежно приходится обращаться к описанному выше подходу.

2.7.5. Понятие коалиционных игр.

Ситуация значительно усложняется, когда в игре принимают участие более двух игроков. Водится понятие *коалиции* игроков, которые пользуются согласованной стратегией против интересов игроков, не входящих в их коалицию. Тогда могут быть вычислены ожидаемые выигрыши (значения игры) для каждой коалиции. В частности, вычисляются значения игры для каждого игрока в предположении, что он играет против коалиции всех других игроков. Обозначим эти значения $g_1, g_2, \ldots, g_n$. Нормальный выигрыш игрока должен быть не меньше соответствующего значения игры, назовем такой выигрыш *обязательством.* Таким образом, $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ – обязательство, если $s_i \geq g_i$ для $i=1,2,\ldots,n$ и $\sum_i s_i = G$, где G – значение игры (суммарный выигрыш всех игроков, не обязательно равный нулю). Тогда решением для игры n лиц будет такое множество обязательств, что ни одно обязательство этого множества не доминирует над другими обязательствами того же множества и для любого обязательства, не принадлежащего этому множеству, найдется обязательство нашего множества, доминирующее над ним. (Теорема фон Неймана и Моргенштейна). Отношение *доминирования* используется только для двух игроков или больше и заключается в превышении выигрышей этих игроков в одном обязательстве по отношению к выигрышам этих же игроков в другом обязательстве.

В заключение приведем оценку теории игр, данную Вильямсом: «…хотя в настоящее время уже выяснены, несмотря на множество ограничений теории, многие ее специфические приложения, ее наибольший, пока неявный, вклад состоит в том, что она дает людям, имеющим дело со сверхсложными проблемами, самую общую ориентацию. Даже если эти проблемы не подаются строгому решению, она дает основу для работы над ними. Идея стратегии, различия между игроками, роль случайных событий, понятие матрицы выигрышей, идеи чистой и смешанной стратегии и т.д. дают драгоценную ориентацию лицам, которым необходимо обдумывать сложные конфликтные ситуации».

2.7.6. Практический блок

Примеры

Пример 1. ЗАО «ПК Элина» продает свой товар в основном бюджетным организациям. Объём продаж зависит от финансирования организаций. Распределение объемов продаж различного вида товара от степени финансирования представлено в таблице 2.7.10.

Таблица 2.7.10 – Распределение объёмов продаж от степени финансирования

Наименование товара	Финансирование		Прибыль, руб./шт.	Затраты на хранение, руб./шт.
	«Хорошее»	«Плохое»		
«Южный Урал»	200	400	100	10
«Патриот»	400	70	300	10
«Смерч-100»	150	200	200	5
«Смерч-200»	100	20	300	5

Необходимо определить оптимальный объем производства каждого вида товара, обеспечивающий максимальную прибыль.

Решение: Для решения задачи воспользуемся теорией игр.

На основании исходных данных строим платежную матрицу, где 1-я стратегия: объем производства, рассчитанный на хорошее финансирование, 2-я стратегия: объём производства, рассчитанный на плохое финансирование.

Таблица 2.7.11 – Платежная матрица

	«хорошее»	«плохое»
1-я стратегия	200000	73300
2-я стратегия	74750	107000

Элементы платежной матрицы вычисляются следующим образом:

$a_{11} = 200 * 100 + 400 * 300 + 150 * 200 + 100 * 300 = 200000$

$a_{12} = 200 * 100 + 70 * 300 + 150 * 200 + 20*300 – 330*10 – 80*5= 73300$

$a_{21} = 200 * 100 + 70 * 300 + 150 * 200 + 20*300 – 200*10 – 50*5= 74750$

$a_{22} = 400 * 100 + 70 * 300 + 200 * 200 + 20 * 300 = 107000$

Преобразуем платежную матрицу следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 200000 & 73300 \\ 74750 & 107000 \end{bmatrix} - 73300 = \begin{bmatrix} 126700 & 0 \\ 1450 & 33700 \end{bmatrix} : 1450 = \begin{bmatrix} 87,38 & 0 \\ 1 & 23,24 \end{bmatrix}$$

Тогда система уравнений запишется в виде:

$$\begin{cases} 87,38\, x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0,011 \\ x_2 = 0,043 \end{cases}$$

Целевая функция $F^* = x_1 + x_2 = 0,011 + 0,043 = 0,054$

Частота использования стратегий определяется как $p_i = x_i * g = x_i / F^*$, т.е для наших данных
$$\begin{cases} p_1 = 0{,}011/0{,}054 = 0{,}2 \\ p_2 = 0{,}043/0{,}054 = 0{,}8 \end{cases}$$

Произведем противоположные действия преобразованию платежной матрицы и получим минимальную прибыль (цену игры):

$\upsilon = (1/ F^*) * 1450 + 73300 = (1/0{,}054) * 1450 + 73300 = 100152$ руб.

Теперь определим объём производства каждого вида товара:

«Южный Урал»: 200 * 0,2 + 400 * 0,8 = 360 штук,

«Патриот»: 400 * 0,2 + 70 * 0,8 = 136 штук,

«Смерч-100»: 150 * 0,2 + 200 * 0,8 = 190 штук,

«Смерч-200»: 100 * 0,2 + 20 * 0,8 = 36 штук.

Пример 2

Решить игру

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 12 & 10 \\ 10 & 0 & 5 & 20 \end{bmatrix}.$$

Чтобы гарантировать v > 0, прибавим ко всем элементам матрицы H константу +1. Тогда получим матрицу

$$\mathbf{H}' = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 4 & 1 \\ 11 & 6 & 13 & 11 \\ 11 & 1 & 6 & 21 \end{bmatrix}.$$

Пара двойственных задач линейного программирования будет в данном случае выглядеть следующим образом:

Минимизировать

$$T = x_1' + x_2' + x_3'$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} 6x_1' + 11x_2' + 11x_3' &\geq 1, \\ 7x_1' + 6x_2' + x_3' &\geq 1, \\ 4x_1' + 13x_2' + 6x_3' &\geq 1, \\ x_1' + 11x_2' + 21x_3' &\geq 1, \\ x_1' \geq 0,\ x_2' \geq 0,\ x_3' &\geq 0. \end{aligned}\right\}$$

Максимизировать

$$L = y_1' + y_2' + y_3' + y_4'$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned}
&6y_1' + 7y_2' + \ \ 4y_3' + \ \ \ y_n' \le 1,\\
&11y_1' + 6y_2' + 13y_3' + 11y_n' \le 1,\\
&11y_1' + \ \ y_2' + \ \ 6y_3' + 21y_n' \le 1,\\
&y_1' \ge 0,\ y_2' \ge 0,\ y_3' \ge 0, y_4' \ge 0.
\end{aligned}\right\}$$

После применения симплексного метода получим оптимальное решение второй задачи:

$$y_1'^{*} = 0,\ y_2'^{*} = \frac{10}{71},\ y_3'^{*} = 0,\ y_4'^{*} = \frac{1}{71}\ \ и\ \ L_{max} = T_{min} = \frac{11}{71}.$$

Отсюда

$$v' = \frac{1}{L_{max}} = \frac{1}{T_{min}} = \frac{71}{11}\ \ и\ \ y_1^{*} = \frac{71}{11}\cdot 0 = 0,\ y_2^{*} = \frac{71}{11}\cdot\frac{10}{71} = \frac{10}{11},$$

$$y_3^{*} = \frac{71}{11}\cdot 0 = 0,\ y_4^{*} = \frac{71}{11}\cdot\frac{1}{71} = \frac{1}{11}.$$

Таким образом, оптимальная стратегия игрока II есть

$$\mathbf{Y}^{*} = \left[0,\ \frac{10}{11},\ 0,\ \frac{1}{11}\right],\ v = v' - 1 = \frac{71}{11} - 1 = \frac{60}{11}.$$

Оптимальное решение первой задачи:

$$x_1'^{*} = \frac{5}{71},\ x_2'^{*} = \frac{6}{71},\ x_3'^{*} = 0,$$

откуда

$$x_1^{*} = \frac{71}{11}\cdot\frac{5}{71} = \frac{5}{11},\ x_2^{*} = \frac{71}{11}\cdot\frac{6}{71} = \frac{6}{11},\ x_3^{*} = \frac{71}{11}\cdot 0 = 0$$

и

$$\mathbf{X}^{*} = \left[\frac{5}{11},\ \frac{6}{11},\ 0\right].$$

Итак,

$$(\mathbf{X}^{*}, \mathbf{Y}^{*}, v) = \left(\left[\frac{5}{11},\ \frac{6}{11},\ 0\right], \left[0,\ \frac{10}{11},\ 0,\ \frac{1}{11}\right],\ \frac{60}{11}\right).$$

Пример 3

Пусть ежедневный спрос на булочки в магазине задается следующим распределением вероятностей:

спрос	100	150	200	250	300
Вероятность спроса	0.20	0.25	0.30	0.15	0.10

Магазин закупает булочки по 2.5 руб. и продает по 4.9 руб. за штуку. Если булочка не продана в тот же день, то она реализовывается по 1.5 руб. Какое наибольшее число булочек необходимо заказывать ежедневно, если величина заказа может принимать одно из возможных значений спроса?

Прибыль от продажи «свежей» булочки составляет 4.9–2.5=2.4 руб.

Потеря от продажи «черствой» составляет 2.5–1.5=1 руб.

Представим модель данной задачи в виде игры магазина со спросом. Стратегия магазина – ежедневный объем заказа, при этом спрос может принимать одно из своих возможных значений. Составим платежную матрицу игры для магазина:

Заказ магазина	Возможный ежедневный спрос					Ожид. прибыль
	100	150	200	250	300	
100	240	240	240	240	240	240
150	240-50	360	360	360	360	326
200	240-100	360-50	480	480	480	369.5
250	240-150	360-100	480-50	600	600	362
300	240-200	360-150	480-100	600-50	720	329

На пересечении строки с некоторым объемом заказа и столбца с возможным спросом находится элемент a_{ij} – ожидаемая прибыль магазина в этой ситуации. В последней колонке вычислена ожидаемая (средняя) прибыль в случае распределения вероятностей спроса в соответствии с условиями примера. Например, для третьей строки имеем 140*0.2+310*0.25+480*0.3+480*0.15+480*0.1=369.5. Кстати, выбор этой стратегии (ежедневный заказ – 200 булочек) и будет оптимальным, т.к. обеспечивает максимальную прибыль.

Тесты

1. Платежной матрицей называется матрица, элементами которой являются:
   а) годовые прибыли отраслевых предприятий;
   б) выигрыши, соответствующие стратегиям игроков;
   в) налоговые платежи предприятий.
2. Возможно ли привести матричную игру к задаче линейного программирования:
   а) возможно;
   б) невозможно;
   в) возможно, если платежная матрица единичная.
3. Матричная игра – это:
   а) игра двух лиц с несовпадающими интересами (неантагонистическая);
   б) игра двух лиц с противоположными интересами;
   в) игра многих (более двух) лиц.
4. Биматричная игра – это:
   а) игра двух лиц с несовпадающими интересами;
   б) игра двух лиц с противоположными интересами;
   в) игра многих (более двух) лиц.
5. Чистые стратегии игры соответствуют:
   а) однозначно принимаемым решениям;
   б) решениям, принимаемым с определенной вероятностью;

в) произвольным решениям.

6. Смешанные стратегии игры соответствуют:
   а) однозначно принимаемым решениям;
   б) решениям, принимаемым с определенной вероятностью;
   в) произвольным решениям.
7. Всегда ли матричная игра имеет решение?
   а) да, в чистых стратегиях;
   б) да, в смешанных стратегиях;
   в) не всегда.
8. В чем заключается задача теории игр?
   а) обеспечить минимальный средний выигрыш;
   б) выявление оптимальных стратегий игроков;
   в) выявление стратегий игроков;
   г) содержание п.п.а-в;
   д) содержимое п.п. а,б.
9. Какие классы состязательных задач Вы знаете?
   а) когда с полной определенностью можно считать действия конкурента (выбор или метод, которым он пользуется при выборе своих действий) известными заранее;
   б) выбор, сделанный конкурентом, не известен точно, но его можно предсказать с некоторой ошибкой. Следовательно, существует риск ошибиться, ибо выбор, произведенный конкурентами, точно не известен;
   в) заранее ничего не известно о действительном или вероятном поведении конкурента. Такая ситуация возникает перед руководством промышленной фирмы при оценке реакции конкурентов в случае подготовки выпуска на рынок совершенно новой продукции;
   г) заранее ничего не известно о действительном или вероятном поведении конкурента при составлении планов войны против предполагаемого противника, когда не известны ни место, ни время ее вспышки;
   д) все вышеназванное.
10. Где эффективно используется теория состязаний?
   а) в промышленности для разработки тактики торгов;
   б) для разработки политики цен;
   в) для разработки стратегии рекламы;
   г) для выбора момента выпуска новых товаров на рынок;
   д) все вышеназванное.

Ответы к тестам

1) б	6) б
2) а	7) б
3) б	8) б
4) а	9) б
5) а	10) д

Контрольные вопросы

1. Назовите виды игр и приведите их определения.
2. Как составляется платежная матрица?
3. Как определить верхнюю и нижнюю цену игры? Что такое седловая точка игры?
4. Что означает решение игры в смешанных стратегиях.
5. Каковы основные термины и определение теории игр?
6. Определите и запишите антагонистическую матричную игру.
7. Каков принцип минимакса?
8. Когда следует использовать смешанные стратегии и как их найти?
9. Понятие и примеры матричных антагонистических игр с нулевой суммой.
10. Задача определения оптимальной смешанной стратегии в антагонистической матричной игре с нулевой суммой и её экономическая интерпретация.
11. Понятие и экономическая интерпретация цены игры. Определение цены матричной антагонистической игры с нулевой суммой.
12. Оптимальные смешанные стратегии: понятие, причины использования, приёмы практической реализации.
13. Подготовка исходных данных для анализа матричной антагонистической игры с нулевой суммой в целях подготовки управленческого решения.

Задания и задачи

Задача 1. Коммерческое предприятие заключило договор на централизованную поставку овощей из теплиц на сумму 10 000 руб. ежедневно. Если в течение дня овощи не поступают, магазин имеет убытки в размере 20 000 руб. от невыполнения плана товарооборота. Магазин может осуществить самовывоз овощей фермера. Для этого он может сделать заказ в транспортном предприятии, что вызовет дополнительные расходы в размере 500 руб. Однако опыт показывает, что в половине случаев посланные машины возвращаются без овощей. Можно увеличить вероятность получения овощей от фермера до 80%, если предварительно посылать туда своего представителя, что требует дополнительных расходов в размере 400 руб. Существует возможность заказать дневную норму овощей у другого надежного поставщика – плодоовощной базы по повышенной на 50% цене. Однако в этом случае, кроме расходов на транспорт (500 руб.), возможны дополнительные издержки в размере 300 руб., связанные с трудностями реализации товара, если в тот же день поступит и централизованная поставка от фермера. Построить игровую модель этой задачи. Какой стратегии надлежит придерживаться магазину, если заранее неизвестно, поступит или не поступит централизованная поставка.

Задача 2. Найдите решение биматричной игры:

а) $A=\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$.

б) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 3. Определить верхнюю и нижнюю цену игры и, если возможно, седловую точку.

2	4	1	5
1	-1	3	2
5	2	-4	0
-2	5	-3	-4

Задача 4. Зная платежную матрицу

$$\begin{Vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 10 & 8 & 11 \\ 8 & 5 & 4 & 7 & 3 \end{Vmatrix}$$

определить нижнюю и верхнюю цены игры и найти решение игры.

2.7.7. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Основные термины и определения теории игр.
2. Задача определения оптимальной стратегии в антагонистической матричной игре с нулевой суммой и её экономическая интерпретация.
3. Понятие и экономическая интерпретация биматричной игры.
4. Оптимальные смешанные стратегии: понятие, причины использования, приёмы практической реализации.
5. Подготовка исходных данных для анализа матричной игры в целях подготовки управленческого решения.

Литература для самостоятельной работы

1. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.
3. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
4. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
5. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.

ТЕМА 2.8. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.8.1. Область применения моделей динамического программирования.

Элементы динамики и учет времени играли важнейшую роль в некоторых прикладных задачах исследования операций, рассмотренных в предыдущих темах. Однако ранее основное внимание уделялось эффективным методам отыскания численных решений задач большой размерности.

В данной теме решающее значение по-прежнему имеет одновременный учет всех ограничений системы, однако излагаемый здесь материал в основном посвящен динамическим структурным зависимостям оптимизационных моделей. Вначале рассматриваются детерминированные задачи, так что в каждой из них процесс решения приводит к однозначному результату. Затем исследуются вероятностные модели.

Ниже мы изучим условия, которым должен удовлетворять оптимальный многошаговый процесс принятия решений, и покажем, каким образом использовать эти условия для нахождения лучшего варианта. Подобный анализ часто называют **динамическим программированием**. Будем рассматривать конечный плановый период, в конце темы обсудим особенности оптимизации в условиях бесконечного планового периода с учетом дисконтирования во времени и приведения экономических показателей к исходному моменту времени.

Вот некоторые типичные области применения моделей динамического программирования при принятии решений:

- Разработка правил управления запасами, устанавливающих момент пополнения запасов и размер пополняющего заказа.
- Разработка принципов календарного планирования производства и выравнивания занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию.

- Определение необходимого объема запасных частей, гарантирующего эффективное использование дорогостоящего оборудования.
- Распределение дефицитных капитальных вложений между возможными новыми направлениями их использования.
- Выбор методов проведения рекламной кампании, знакомящей покупателя с продукцией фирмы.
- Систематизация методов поиска ценного вида ресурса.
- Составление календарных планов текущего и капитального ремонта сложного оборудования.
- Разработка долгосрочных правил замены выбывающих из эксплуатации основных фондов.

2.8.2. Основные идеи динамического программирования.

Общей особенностью всех моделей динамического программирования является сведение задачи принятия решений к получению рекуррентных соотношений. Для тех, кто не пользовался подобными формализованными методами для решения задач, связанная с этим система математических обозначений может показаться странной, поэтому рекомендуется прочитать текст не менее двух раз. При первом чтении следует постараться понять смысл поставленной задачи и хорошо ознакомиться с условными обозначениями; при втором чтении больше внимания целесообразно уделить деталям постановки и характеру математических выражений (это правило относится, кстати, и к изучению других тем).

На небольшом примере объясним важные идеи динамического программирования, а также введем необходимые условные обозначения.

Пример 2.8.1. Рассмотрим транспортную сеть (задача о кратчайшем маршруте).

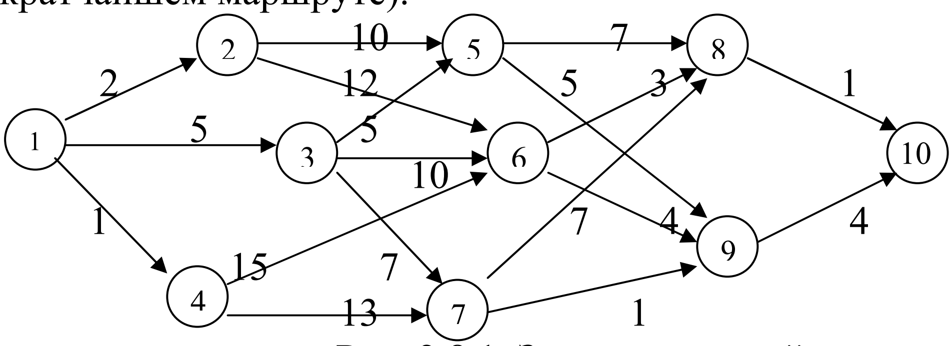


Рис. 2.8.1. Задача о кратчайшем маршруте.

Пусть c_{ij} – расстояние (или стоимость переезда) от пункта i в пункт j (на рисунке заданы числами у каждой стрелки). Необходимо выбрать такой путь от пункта 1 до пункта 10, для которого его длина (или общая стоимость переезда) является минимальной.

Из пункта 1 можно переехать в пункт 2, 3 или 4; из пункта 2 в пункт 5 или 6 и т.д. Назовем нахождение в пункте – *состоянием* системы, переезд из пункта в пункт – *процессом* перехода из одного состояния в другое. Таким образом, переезд из пункта 1 в пункт 3 есть одношаговый процесс, а скажем, из пункта 1 в пункт 10 – *многошаговый процесс* перехода из состояния 1 в состояние 10.

Выбор процесса перехода из состояния i в состояние j назовем *стратегией*. Допустим, мы нашли оптимальный (в данном случае минимальный) маршрут и находимся в его промежуточном пункте, тогда, независимо от пути достижения этого пункта (состояния), оптимальный путь из данного пункта до конечного состояния есть часть общего оптимального пути. Этот **принцип оптимальности** впервые был сформулирован Р.Беллманом в 1953 г. Приведем этот принцип в формулировке Елены Сергеевны Вентцель[5]:

Каково бы ни было состояние системы в результате некоторого числа шагов, на текущем шаге нужно выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих шагах приводило к оптимальному выигрышу на всех оставшихся шагах, включая данный. Этот принцип верен для задач динамического программирования, в которых процесс управления происходит без обратной связи, т.е. управление на каждом шаге не оказывает влияния на предшествующие шаги.

Введем следующие обозначения:

$f_n(s)$ – стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат для пути от состояния s до конечного состояния, если до него остается n шагов;

$x_n(s)$ – решение, позволяющее достичь $f_n(s)$.

Т.е. $x_n(s)$ соответствует пути минимальной длины от состояния s до конечного состояния, которое достигается за n шагов.

Вернемся к нашему примеру. Рассмотрим последовательно все состояния от *последнего* до *первого*.

Имеем $f_0(10)=0$ для $x_0(10)=$ остановка. Затем

$f_1(8)=1+0=1$ для $x_1(8)=10$,

$f_1(9)=4+0=4$ для $\boldsymbol{x_1(9)=10}$. Далее

$f_2(5)=\min(7+1,5+4)=8$ для $x_2(5)=8$,

$f_2(6)=\min(3+1,4+4)=4$ для $x_2(6)=8$,

$f_2(7)=\min(7+1,1+4)=5$ для $\boldsymbol{x_2(7)=9}$.

Для третьего (с конца) шага имеем:

$f_3(2)=\min(10+8,12+4)=16$ для $x_3(2)=6$,

$f_3(3)=\min(5+8,10+4,7+5)=12$ для $\boldsymbol{x_3(3)=7}$**,**

$f_3(4)=\min(15+4,13+5)=18$ для $x_3(4)=7$.

И, наконец, $f_4(1)=\min(2+16,5+12,1+18)=17$ для $\boldsymbol{x_4(1)=3}$.

Мы получили оптимальный путь (наименьшей длины или стоимости) равный 17. Он проходит через события 1-3-7-9-10. (При последовательном рассмотрении всех состояний оптимальные переходы выделялись жирным шрифтом).

Заметим, что на каждом шаге мы пользовались **динамическим рекуррентным соотношением:**

$$f_n(s)=\min_{\forall(s,j)}(\, c_{sj} + f_{n-1}(j)), \qquad n=1,2,3,4 \qquad (2.8.1)$$

Очевидно, динамическое программирование здесь более эффективно, чем прямой перебор всех возможных маршрутов, сопровождаемый их оценкой. В данном примере имеется 14 возможных путей; чтобы для каждого определить оценку, придется суммировать четыре числа. Следовательно, для простого перебора потребуется 3×14=42 операции сложения, тогда как мы управились за 16 операций. Преимущество рекуррентного подхода может оказаться огромным при практическом применении, когда полный перебор обычно неосуществим.

2.8.3. Распределение Q средств между N предприятиями.

Пусть x_n – средства, выделенные n-му предприятию; они приносят в конце года прибыль $c_n(x_n)$.

Будем считать, что x_n принимает только целые значения, прибыль $c_n(x_n)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия и суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия. Тогда модель имеет вид:

Найти целочисленные неотрицательные переменные x_n (n=1,2,…,N), удовлетворяющие ограничению:

$$\sum_n x_n = Q, \qquad (2.8.2)$$

и обращающие в максимум функцию

$$C=\sum_n c_n(x_n). \qquad (2.8.3)$$

Здесь процесс распределения средств можно рассматривать как многошаговый, номер шага совпадает с номером предприятия; состояние будет определяться величиной s_n – количество средств, подлежащих распределению на n-м шаге (с конца).

Обозначим $f_n(s_n)$ – условную оптимальную прибыль, полученную от последних n предприятий при распределении между ними s_n средств и вычисляемую в соответствие с динамическим рекуррентным соотношением**:**

$$f_n(s_n)=\max_{\forall x}(c_n(x_n)+f_{n-1}(s_{n-1})),\ n=1,2,\ldots,N. \qquad (2.8.4)$$

Пример 2.8.2. Пусть N = 4, Q =5, значения $c_n(x_n)$ заданы в табл. 2.8.1.

Таблица 2.8.1.

x	$c_4(x)$	$c_3(x)$	$c_2(x)$	$c_1(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Как и в предыдущем примере начинаем анализ с последнего предприятия. Индекс «1» соответствует последнему предприятию, а индекс «4» – первому. Для n=1 прибыль проставлена в последней колонке.

Для **n=2**

$f_2(0)=\max[c_2(0)+f_1(0)]=0$ при $x_2(0)=0$,

$f_2(1)=\max[c_2(1)+f_1(0),c_2(0)+f_1(1)]=\max[3+0,0+4]=4$ при $x_2(1)=0$,

$f_2(2)=\max[c_2(2)+f_1(0),c_2(1)+f_1(1),c_2(0)+f_1(2)]=$
$=\max[4+0,3+4,0+6]=7$ <u>при $x_2(2)=$</u>1,

$f_2(3)=\max[c_2(3)+f_1(0),c_2(2)+f_1(1),c_2(1)+f_1(2),c_2(0)+f_1(3)]=$
$=\max[7+0,4+4,3+6,0+8]=9$ при $x_2(3)=1$,

$f_2(4)=\max[c_2(4)+f_1(0),c_2(3)+f_1(1),c_2(2)+f_1(2),c_2(1)+f_1(3),c_2(0)+f_1(4)]=$
$=\max[11+0,7+4,4+6,3+8,0+13]=13$ при $x_2(4)=0$,

$f_2(5)=\max[c_2(5)+f_1(0),c_2(4)+f_1(1),c_2(3)+f_1(2),c_2(2)+f_1(3),c_2(1)+f_1(4),c_2(0)+f_1(5)]$
$=\max[18+0,11+4,7+6,4+8,3+13,0+16]=18$ при $x_2(5)=5$.

Для **n=3**

$f_3(0)=\max[c_3(0)+f_2(0)]=0$ при $x_3(0)=0$,

$f_3(1)=\max[c_3(1)+f_2(0),c_3(0)+f_2(1)]=\max[6+0,0+4,]=6$ при $x_3(1)=1$,

$f_3(2)=\max[c_3(2)+f_2(0),c_3(1)+f_2(1),c_3(0)+f_2(2)]=$
$=\max[9+0,6+4,0+7]=10$ при $x_3(2)=1$,

$f_3(3)=\max[c_3(3)+f_2(0),c_3(2)+f_2(1),c_3(1)+f_2(2),c_3(0)+f_2(3)]=$
$=\max[11+0,9+4,6+7,0+9]=13$ при $x_3(3)=1$ или 2,

$f_3(4)=\max[c_3(4)+f_2(0),c_3(3)+f_2(1),c_3(2)+f_2(2),c_3(1)+f_2(3),c_3(0)+f_2(4)]=$
$=\max[13+0,11+4,9+7,6+9,0+13]=16$ <u>при $x_3(4)=2$</u>,

$f_3(5)=\max[c_3(5)+f_2(0),c_3(4)+f_2(1),c_3(3)+f_2(2),c_3(2)+f_2(3),c_3(1)+f_2(4),c_3(0)+f_2(5)]$

$=\max[15+0,13+4,11+7,9+9,6+13,0+18]=19$ при $x_3(5)=1$.

И, наконец, для **n=4**

$f_4(0)=\max[c_4(0)+f_3(0)]=0$ при $x_4(0)=0$,

$f_4(1)=\max[c_4(1)+f_3(0),c_4(0)+f_3(1)]=\max[8+0,0+6,]=8$ при $x_4(1)=1$,

$f_4(2)=\max[c_4(2)+f_3(0),c_4(1)+f_3(1),c_4(0)+f_3(2)]=$

$=\max 10+0,8+6,0+10]=14$ при $x_4(2)=1$,

$f_4(3)=\max[c_4(3)+f_3(0),c_4(2)+f_3(1),c_4(1)+f_3(2),c_4(0)+f_3(3)]=$

$=\max[11+0,10+6,8+10,0+13]=18$ при $x_4(3)=1$,

$f_4(4)=\max[c_4(4)+f_3(0),c_4(3)+f_3(1),c_4(2)+f_3(2),c_4(1)+f_3(3),c_4(0)+f_3(4)]=$

$=\max[12+0,11+6,10+10,8+13,0+16]=21$ при $x_4(4)=1$,

$f_4(5)=\max[c_4(5)+f_3(0),c_4(4)+f_3(1),c_4(3)+f_3(2),c_4(2)+f_3(3),c_4(1)+f_3(4),c_4(0)+f_3(5)]$

$=\max[18+0,12+6,11+10,10+13,8+16,0+19]=24$ при $\underline{x_4(5)=1}$.

Теперь соберем оптимальное решение (при последовательном рассмотрении всех состояний оптимальные переходы подчеркивались):

Для первого предприятия, когда $s_4=5$, видим, что $x_4(5)=1$, значит, первое предприятие получает 1 и остается $s_3=s_4-x_4(5)=5-1=4$. Находим лучшее размещение средств для второго предприятия (на третьем с конца шаге) при $s_3=4$. Это $x_3(4)=2$, остается $s_2=s_3-x_3(4)=4-2=2$. На втором (с конца) шаге $x_2(2)=1$ и на последнее предприятие (первый с конца шаг) остается $s_1= s_2 - x_2(2)=2-1=1$ и $x_1(1)=1$.

Максимум суммарной прибыли равен 24 у.е.

2.8.4. Динамическая задача управления запасами.

Применим изложенный выше подход к решению простейшей задачи управления запасами.

Пример 2.8.3. Необходимо разработать такую календарную программу выпуска изделия на плановый период, состоящий из Т временных отрезков, при которой общая сумма затрат на производство и на содержание запасов минимизируется при условии полного и своевременного удовлетворения спроса. Обозначим:

d_n – спрос на отрезке n от конца;

$c_n(x,s)$ – затраты на отрезке n, связанные с выпуском x единиц изделия и с содержанием запасов, объем которых на конец отрезка равен s единиц. В этой системе обозначений подстрочный индекс «1» соответствует конечному, а «Т» – начальному состоянию.

Состояние системы в начале каждого отрезка определяется уровнем запасов, поэтому для принятия решения об объеме выпуска не нужно знать, каким образом достигнут этот уровень, т.е. опять же имеем систему без обратной связи.

Пусть $f_n(s)$ – стоимость, отвечающая стратегии минимальных затрат на n оставшихся отрезках при уровне запасов s на начало n-го от конца отрезка;

$x_n(s)$ – объем выпуска, обеспечивающий достижение $f_n(s)$.

Пусть уровень запасов на конец планового периода равен нулю, тогда при уровне запасов s на начало последнего (1-го от конца) отрезка выпуск $x_1(s)=d_1-s$ и

$$f_1(s)= c_1(x,0)= c_1(d_1 - s,0),\ s=0,1,\dots,d_1.$$

Заметим, что если начальный уровень запасов отрезка n равен s, а объем выпуска – x, то величина $(s+x-d_n)$ – есть уровень запасов на конец данного отрезка, отсюда получаем общее рекуррентное соотношение в виде:

$$f_n(s) = \min_x[c_n(x,\ s+x-d_n)+ f_{n-1}(s+x-d_n)],\ n=1,\dots,T,\ s=0,1,\dots,d_1+\dots+ d_n.$$

Для упрощения вычислений предположим, что производственные мощности и складские площади ограничены, пусть $x=0,1,\dots,5$ и $s=0,1,\dots,4$. Допустим также, что спрос и затраты постоянны во времени, и пусть $d_n=3$, а $c_n(x,\ s)= c(x)+hs$, где первое слагаемое относится к производству, а второе определяется стоимостью содержания запасов (арендная плата за складские помещения, проценты за кредит для создания запасов, страховые взносы и собственно расходы по содержанию запасов). Пусть $c(0)=0$, $c(1)=15$, $c(2)=17$, $c(3)=19$, $c(4)=21$, $c(5)=23$; $h=1$.

Для n=1 $f_1(0)=c(3)=19$ при $x_1(0)=3$,

$f_1(1)=c(2)=17$ при $x_1(1)=2$,

$f_1(2)=c(1)=15$ при $x_1(2)=1$,

$f_1(3)=c(0)=0$ при $x_1(3)=0$.

Для n=2 $f_2(0)=\min[c(3)+0+f_1(0),c(4)+1+f_1(1),c(5)+2+f_1(2)]=$

$=\min[19+19,21+1+17,23+2+15]=38$ при $x_2(0)=3$,

$f_2(1)=\min[c(2)+0+f_1(0),c(3)+1+f_1(1),c(4)+2+f_1(2),c(5)+3+f_1(3)]=$

$=\min[17+19,19+1+17,21+2+15,23+3+0]=26$ при $x_2(1)=5$,

$f_2(2)=\min[c(1)+0+f_1(0),c(2)+1+f_1(1),c(3)+2+f_1(2),c(4)+3+f_1(3)]=$

$=\min[15+19,17+1+17,19+2+15,21+3+0]=24$ при $x_2(2)=4$,

$f_2(3)=\min[c(0)+0+f_1(0),c(1)+1+f_1(1),c(2)+2+f_1(2),c(3)+3+f_1(3)]=$

$=\min[0+19,15+1+17,17+2+15,19+3+0]=19$ при $x_2(3)=0$,

$f_2(4)=\min[c(0)+1+f_1(1),c(1)+2+f_1(2),c(2)+3+f_1(3)]=$

$=\min[0+1+17,15+2+15,17+3+0]=18$ при $x_2(4)=0$.

Для n=3 $f_3(0)=\min[c(3)+0+f_2(0),c(4)+1+f_2(1),c(5)+2+f_2(2)]=$

$=\min[19+38,21+1+26,23+2+24]=48$ при $x_3(0)=4$,

$f_3(1)=\min[c(2)+0+f_2(0),c(3)+1+f_2(1),c(4)+2+f_2(2),c(5)+3+f_2(3)]=$

$=\min[17+38,19+1+26,21+2+24,23+3+19]=45$ при $x_3(1)=5$,

$f_3(2)=\min[c(1)+f_2(0),c(2)+1+f_2(1),c(3)+2+f_2(2),c(4)+3+f_2(3),c(5)+4+f_2(4)]=$
$=\min[15+38,18+26,21+24,24+19,23+4+18]=43$ при $x_3(2)=4$,
$f_3(3)=\min[c(0)+0+f_2(0),c(1)+1+f_2(1),c(2)+2+f_2(2),c(3)+3+f_2(3),c(4)+4+f_2(4)]=$
$=\min[0+38,16+26,19+24,22+19,25+18]=38$ при $x_3(3)=0$,
$f_3(4)=\min[c(0)+1+f_2(1),c(1)+2+f_2(2),c(2)+3+f_2(3),c(3)+4+ f_2(4)]=$
$=\min[1+26,17+24,20+19,23+18]=27$ при $x_3(4)=0$.

И, наконец, для n=4

$f_4(0)=\min[c(3)+0+f_3(0),c(4)+1+f_3(1),c(5)+2+f_3(2)]=$
$=\min[19+48,21+1+45,23+2+43]=67$ при $x_4(0)=3$ или 4,
$f_4(1)=\min[c(2)+0+f_3(0),c(3)+1+f_3(1),c(4)+2+f_3(2),c(5)+3+f_3(3)]=$
$=\min[17+48,19+1+46,21+2+43,23+3+38]=64$ при $x_4(1)=5$,
$f_4(2)=\min[c(1)+f_3(0),c(2)+1+f_3(1),c(3)+2+f_3(2),c(4)+3+f_3(3),c(5)+4+f_3(4)]=$
$=\min[15+48,18+45,21+43,24+38,23+4+27]=54$ при $x_4(2)=5$,
$f_4(3)=\min[c(0)+0+f_3(0),c(1)+1+f_3(1),c(2)+2+f_3(2),c(3)+3+f_3(3),c(4)+4+f_3(4)]=$
$=\min[0+48,16+45,19+43,22+38,25+27]=48$ при $x_4(3)=0$,
$f_4(4)=\min[c(0)+1+f_3(1),c(1)+2+f_3(2),c(2)+3+f_3(3),c(3)+4+ f_3(4)]=$
$=\min[1+45,17+43,20+38,23+27]=46$ при $x_4(4)=0$.

Сведем результаты вычислений в таблицу 2.8.2.

Таблица 2.8.2.

s	n=1		n=2		n=3		n=4		n=5		n=6		n=7		n=8	
	x_1	f_1	x_2	f_2	x_3	f_3	x_4	f_4	x_5	f_5	x_6	f_6	x_7	f_7	x_8	f_8
0	3	19	3	38	4	48	3,4	67	5	79	4	96	3,4	115	5	127
1	2	17	5	26	5	45	5	64	5	74	5	93	5	106	5	123
2	1	15	4	24	4	43	5	54	4	72	4	91	5	102	4	120
3	0	0	0	19	0	38	0	48	0	67	0	79	0	96	0	115
4			0	18	0	27	0	46	0	65	0	75	0	94	0	107

Читателю предоставляем возможность проверить результаты вычислений для n = 5 ÷ 8. Теперь, задаваясь различным уровнем запасов на начало планового периода, можно определить оптимальные стратегии для любого T от 1 до 8. Так, например, если исходный уровень запасов на начало планового периода равен нулю, то оптимальный календарный план при T=4 будет:

$x_4(0)=3$, $x_3(0)=4$, $x_2(1)=5$, $x_1(3)=0$ или
$x_4(0)=4$, $x_3(1)=5$, $x_2(3)=0$, $x_1(0)=3$

и минимальная общая сумма затрат составит 67.

Пусть T=8, тогда минимальная общая сумма затрат составит 127 и $x_8(0)=5$, останется на следующий отрезок 5-3=2, имеем $x_7(2)=5$, значит на следующий отрезок останется 2+5-3=4 и $x_6(4)=0$, останется 4-3=1 и

$x_5(1)=5$, останется 1+5-3=3, $x_4(3)=0$, останется 3-3=0, $x_3(0)=4$, останется 4-3=1, $x_2(1)=5$, останется 1+5-3=3 и $x_1(3)=0$.

В таблицу 2.8.3 сведем оптимальные стратегии (планы выпуска) для плановых периодов длительностью Т и начальным уровнем запасов равным нулю.

Обратим внимание на Т=4. Здесь два оптимальных решения, дающих минимальные затраты 67. При Т=7 имеем три решения с одинаковым значением целевой функции 115.

Таблица. 2.8.3

Плановый период Т	n=8 янв	n=7 фев	n=6 мар	n=5 апр	n=4 май	n=3 июн	n=2 июл	n=1 авг	Общая сумма затрат	Средне-месячные затраты
1	3								19	19
2	3	3							38	19
3	4	5	0						48	16
4	3 4	4 5	5 0	0 3					67	16.75
5	5	5	0	5	0				79	15.8
6	4	5	0	4	5	0			96	16
7	3 4 4	4 5 5	5 0 0	0 3 4	4 4 5	5 5 0	0 0 3		115	16.43
8	5	5	0	5	0	4	5	0	127	15.9

Анализ оптимальных вариантов производственной программы, приведенных в табл. 2.8.3, свидетельствует о том, что январский выпуск поначалу возрастает с ростом Т, а затем колеблется около 5, аналогично, среднемесячные затраты испытывают колебания (при минимальном их значении 15.8). Проводя подобный анализ для следующих месяцев (при достаточно большом Т), получим оптимальное решение для бесконечного периода планирования. В условиях настоящего примера таким решением будет повторение производственного цикла (5,5,0,5,0,…) при среднемесячных затратах 15.8. (вычисления опускаем).

Приведем общую оценку отличительных особенностей метода динамического программирования. В его основе лежит разбиение задачи с многими ограничениями и большим числом переменных на последовательность шагов, на каждом из которых решается оптимизационная задача меньшей размерности, т.е. задача сводится к следующему виду:

1) Управляемые переменные и соответствующие ограничения группируются по шагам, и многошаговый процесс принятия решений исследуется в определенной последовательности.

2) Для выбора оптимальных значений переменных на рассматриваемом шаге используется значение состояния только на данном шаге.

3) Решение, принимаемое при заданном текущем состоянии системы, оказывает прогнозируемое влияние на состояние системы на последующем шаге.

4) Оптимальность текущего решения оценивается в терминах прогнозируемого экономического эффекта для рассматриваемого шага и всех последующих шагов.

2.8.5. Стохастическое динамическое программирование.

В рассмотренных примерах управляемые переменные, а также переменные состояния и шага принимали только целочисленные значения. (Задачи такого рода называют задачами *дискретного программирования*). Кроме того, на результаты и переходы из одного состояния в другое не оказывали влияния случайные факторы. Учет случайного характера параметров модели есть предмет анализа *стохастического динамического программирования*.

Рассмотрим небольшой пример, иллюстрирующий основные идеи и методы стохастического динамического программирования.

Пример 2.8.4. Задача садовника.

Предположим, что каждый год почва может находиться в одном из трех состояний: хорошем (1), удовлетворительном (2) или плохом (3). Пусть k=1 и 2 – две возможные стратегии поведения садовника: не удобрять или удобрять. Оптимальное поведение садовника определяется такой стратегией, при которой он получает наибольший ожидаемый доход через N лет. Обозначим $p_{ij}(k)$ – вероятность перехода почвы из состояния i в состояние j при применении садовником стратегии k.

Пусть

$$\{p_{ij}(1)\}=\begin{vmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \{p_{ij}(2)\}=\begin{vmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{vmatrix}$$

Поясним суть приведенных данных:

Если садовник не применяет удобрения (k=1), то при хорошем состоянии почвы (строка 1) вероятность ее перехода в хорошее состояние – 0.2, в удовлетворительное – 0.5 и в плохое – 0.3. При плохом состоянии (строка 3) с вероятностью 1 почва остается плохой.

Если садовник применяет удобрения (k=2), то при хорошем состоянии почвы (строка 1) вероятность ее перехода в хорошее состояние – 0.3, в удовлетворительное – 0.6 и в плохое – 0.1. При плохом состоянии (строка 3) с вероятностью 0.05 почва станет хорошей, с вероятностью 0.4 удовлетворительной и с вероятностью 0.55 останется плохой.

Обозначим $r_{ij}(k)$ – доход (или убыток), который получит садовник за одногодичный период, если почва перейдет из состояния i в состояние j при применении садовником стратегии k.

Пусть

$$\{r_{ij}(1)\}=\begin{vmatrix} 7 & 6 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \{r_{ij}(2)\}=\begin{vmatrix} 6 & 5 & -1 \\ 7 & 4 & 0 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix}.$$

Поясним суть приведенных данных:

Если садовник не применяет удобрения (k=1), то при переходе из хорошего состояния почвы (строка 1) в хорошее доход составит 7 единиц, в удовлетворительное – 6 и в плохое – 3. При переходе из плохого состояния (строка 3, вспомним, что в этом случае с вероятностью 1 почва остается плохой) доход составит –1 (убыток).

Если садовник применяет удобрения (k=2), то при переходе из хорошего состояния почвы (строка 1) в хорошее доход составит 6, в удовлетворительное – 5 и в плохое – убыток в размере 1 (не в коня корм). При переходе из плохого состояния (строка 3) в хорошее доход составит 6, в удовлетворительное – 3 и в плохое – убыток 2.

Обозначим $v_i(k)$ – ожидаемый доход, обусловленный одним переходом из состояния i при стратегии k, тогда

$$v_i(k)=\sum_j p_{ij}(k) r_{ij}(k).$$

Если удобрения не применяются (k=1), тогда

$$v_1(1)=0.2\times7+0.5\times6+0.3\times3=5.3,$$
$$v_2(1)=0\times0+0.5\times5+0.5\times1=3,$$
$$v_3(1)=0\times0+0\times0+1\times(-1)=-1.$$

При использовании удобрений (k=2) имеем

$$v_1(2)=0.3\times6+0.6\times5+0.1\times(-1)=4.7,$$
$$v_2(2)=0.1\times7+0.6\times4+0.3\times0=3.1,$$
$$v_3(2)=0.05\times6+0.4\times3+0.55\times(-2)=0.4.$$

Как и прежде будем анализировать плановый период с конца, обозначим $f_n(i)$ – оптимальный *ожидаемый* доход за n лет до конца периода, тогда рекуррентные соотношения примут вид:

$f_1(i)=\max_k\{v_i(k)\}$,

$f_n(i)=\max_k\{v_i(k)+\sum_j p_{ij}(k)f_{n-1}(j)\}$, $n=2,3,\ldots,N$. (2.8.4)

Проведем вычисления при N=4. Результаты поместим в таблицы 2.8.4 – 2.8.7.

n=1 Таблица. 2.8.4

i	$v_i(k)$		Оптимальное решение	
	k=1	k=2	$f_1(i)$	k*
1	5.3	4.7	5.3	1
2	3	3.1	3.1	2
3	–1	0.4	0.4	2

n=2 Таблица. 2.8.5

i	$v_i(k)+p_{i1}(k)f_1(1)+p_{i2}(k)f_1(2)+p_{i3}(k)f_1(3)$		Оптимальное решение	
	k=1	k=2	$f_2(i)$	k*
1	5.3+.2×5.3+.5×3.1+.3×.4= =8.03	4.7+.3×5.3+.6×3.1+.1×.4= =8.19	8.19	2
2	3+0×5.3+.5×3.1+.5×.4= =4.75	3.1+.1×5.3+.6×3.1+.3×.4= =5.61	5.61	2
3	–1+0×5.3+0×3.1+1×0.4= = –0.6	.4+.05×5.3+.4×3.1+.55×.4= =2.13	2.13	2

n=3 Таблица. 2.8.6

i	$v_i(k)+p_{i1}(k)f_2(1)+p_{i2}(k)f_2(2)+p_{i3}(k)f_2(3)$		Оптимальное решение	
	k=1	k=2	$f_3(i)$	k*
1	5.3+.2×8.19+.5×5.6+.3×2.13= =10.38	4.7+.3×8.19+.6×5.61+.1×2.13= =10.74	10.74	2
2	3+0×8.19+.5×5.61+.5×2.13= =6.87	3.1+.1×8.19+.6×5.61+.3×2.13= =7.92	7.92	2
3	–1+0×8.19+0×5.61+1×2.13= = 1.13	4+.05×8.19+.4×5.6+.55×2.13= =4.23	4.23	2

n=4 Таблица. 2.8.7

i	$v_i(k)+p_{i1}(k)f_3(1)+p_{i2}(k)f_3(2)+p_{i3}(k)f_3(3)$		Оптим. решение	
	k=1	k=2	$f_4(i)$	k*
1	$5.3+.2\times10.74+.5\times7.92+.3\times4.23=$ $=12.68$	$4.7+.3\times10.74+.6\times7.92+.1\times4.23=$ $=13.097$	13.10	2
2	$3+0\times10.74+.5\times7.92+.5\times4.23=$ $=9.075$	$3.1+.1\times10.74+.6\times7.92+.3\times4.23=$ $=10.195$	10.19	2
3	$-1+0\times10.74+0\times7.92+1\times4.23=$ $=3.23$	$.4+.05\times10.74+.4\times7.92+.55\times4.23$ $=6.4315$	6.43	2

Из оптимального решения следует, что в 1-й,2-й и 3-й годы садовник должен применять удобрения (k*=2) при любом состоянии почвы, а в 4-й год (n=1) садовнику следует применять удобрения только при условии, что состояние почвы удовлетворительное или плохое. Суммарный ожидаемый доход за четыре года составит $f_4(1)=13.10$ при хорошем состоянии почвы в первый год, $f_4(2)= 10.19$ при удовлетворительном состоянии и $f_4(3)=6.43$ при плохом состоянии.

Приведенный выше метод решения задачи называют еще методом **итераций по стратегиям**.

Задачу садовника можно обобщить в двух отношениях. Во-первых, переходные вероятности и значения дохода не обязательно одни и те же в любой год; в этом случае они являются функциями n-го этапа: $p_{ij}(k,n)$ и $r_{ij}(k,n)$. Во-вторых, можно использовать коэффициент дисконтирования ожидаемых доходов, вследствие чего значения $f_N(i)$ будут представлять собой *приведенные величины* ожидаемых доходов по всем этапам. Если α – годовой коэффициент дисконтирования, вычисляемый по формуле $\alpha=1/(1+t)$, где t – годовая норма процента, то рекуррентное соотношение (4.9.4) преобразуется к виду:

$$f_n(i)=\max_k\{ v_i(k)+\alpha\sum_j p_{ij}(k)f_{n-1}(j)\},\ n=2,3,\ldots,N. \qquad (2.8.5)$$

Упражнение. Решите задачу садовника при коэффициенте дисконтирования $\alpha=0.6$. (ответ приводится в таблице 2.8.8).

Таблица. 2.8.8

i	n=1		n=2		n=3		n=4	
	$f_1(i)$	k*	$f_2(i)$	k*	$f_3(i)$	k*	$f_4(i)$	k*
1	5.3	1	6.94	1	7.77	1	8.26	1
2	3.1	2	4.61	2	5.43	2	5.92	2
3	0.4	2	1.44	2	2.19	2	2.66	2

Заметим, что использование коэффициента дисконтирования приводит к другим оптимальным стратегиям. В данном случае при хорошем состоянии почвы удобрения не требуются в течение всех четырех лет.

Для определения оптимальной *долгосрочной* стратегии применяют два метода. Первый метод основан на переборе *всех* возможных *стационарных* стратегий управления и может быть использован при их малом числе. Второй метод (итераций по стратегиям) более эффективен в том смысле, что определяет оптимальную стратегию за малое число итераций. Идея метода заключается в использовании соотношения (2.8.4) при $n \to \infty$.

Итак, задача стохастического динамического программирования включает в себя матрицу переходных вероятностей системы из состояния i в момент времени t_{n-1} в состояние j в момент t_n. Матрица переходных вероятностей совместно с исходными вероятностями состояний полностью определяет **марковскую цепь**. Можно задачу стохастического динамического программирования (Марковскую задачу принятия решений) сформулировать как задачу линейного программирования (см. тему 2.2), однако в вычислительном отношении метод итераций по стратегиям более эффективен. Для задач с K альтернативами решений на каждом шаге и N состояниями соответствующая модель линейного программирования включает (N+1) ограничений и NK переменных.

2.8.6. Задачи износа и замены оборудования

Основными задачами теории замен являются прогноз затрат, связанных с обновлением оборудования, и выработка наиболее экономичной стратегии замен. В зависимости от характера оборудования процессы замен делятся на два класса. Первый связан с оборудованием, которое, устаревая в процессе эксплуатации, становится менее производительным физически вследствие износа или морально в результате появления новых, более совершенных машин (сюда относятся, например, металлорежущие станки, автомобили и т.д.). Эксплуатация устаревшего оборудования связана с ростом производственных затрат, удлинением времени простоя, увеличением числа отказов и длительности ремонта и т.д. Вместе с тем замена старого оборудования новым также сопряжена с расходами. Необходимо определить такой срок службы оборудования, при котором экономия за счет приобретенного нового оборудования начинает превышать компенсацию его первоначальной стоимости. При аренде оборудования необходимо учитывать подобные соображения: при увеличении срока аренды уменьшается арендная плата в единицу времени, зато возрастают эксплутационные расходы.

Второй класс задач связан с оборудованием со случайной длительностью срока службы (например, лампы освещения, элементы микросхем). При решении задач второго класса приходится определять, какие именно единицы оборудования следует заменить и как часто следует проводить замену с тем, чтобы минимизировать общие затраты. Если замену оборудования производить лишь после его выхода из строя, то при минимуме затрат на обновление возрастают расходы, связанные с простоями, тогда как замена деталей до их поломки приводит к высокой стоимости оборудования, но зато к малым затратам на некомплектность. Базой для решения этих задач является наличие закона распределения вероятностей повреждения (отказа) оборудования в зависимости от срока его службы, для чего должны быть задействованы методы математической статистики.

Пусть c_i – затраты на приобретение (включаются в c_1) и эксплуатацию оборудования в период i. Здесь учитываются только эксплутационные затраты, которые изменяются с ростом срока службы. Тогда период n, после которого должна быть произведена замена, определяется из следующих соображений:

1. Если издержки в следующем периоде ниже *средней* величины прошлых затрат, то оборудование заменять не следует.
2. Если же издержки в следующем периоде превосходят величину средних затрат, то оборудование следует заменить.

Т.е. должны выполняться следующие неравенства

$$c_n < (c_1 + c_2 + \ldots + c_{n-1})/(n-1), \qquad (2.8.6)$$

$$c_{n+1} > (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)/n. \qquad (2.8.7)$$

Пример 2.8.5. Пусть расходы, связанные с приобретением и заменой оборудования, представлены в табл. 2.8.9.

Таблица 2.8.9

Период	затраты	средние
1	50	50
2	10	30
3	20	26,7**
4	30	27,5
5	40	30
6	50	33,3

В третьей колонке вычисляем средние значения затрат и видим, что замена оборудования должна производиться в третий период, т.к.

$c_3 = 20 < (c_1 + c_2)/2 = 30$, а $c_4 = 30 > (c_1 + c_2 + c_3)/3 = 26{,}7$.

Цена денег, ввиду наличия процентов на капитал, меняется со временем. Проведем расчеты с учетом коэффициента дисконтирования. Пусть r – учетный процент в течение каждого периода, тогда обозначим d=1/(1+r/100). В правой части неравенств (2.8.6) – (2.8.7) средние затраты заменяются на *средневзвешенные* затраты:

$$c_n < (c_1 + c_2\, d + \ldots + c_{n-1}\, d^{\,n-2})/(1 + d + \ldots + d^{\,n-2}), \qquad (2.8.8)$$

$$c_{n+1} > (c_1 + c_2\, d + \ldots + c_n\, d^{\,n-1})/(1 + d + \ldots + d^{\,n-1}). \qquad (2.8.9)$$

Пример 2.8.6. Пусть расходы, связанные с приобретением и заменой оборудования, аналогичны предыдущему примеру и r =5%. В колонке 3 табл. 2.8.10 вычисляем средневзвешенные затраты (d=0,952):

Таблица 2.8.10

Период i	Затраты c_i	Средне-взвешенные
1	50	50
2	10	30.49
3	20	27.16*
4	30	28.82
5	40	30.02
6	50	32.96

В данном случае замена оборудования должна производиться также в третий период, т.к. соотношения (2.8.8) – (2.8.9) выполняются для n=3. В обоих примерах мы предполагали, что затраты на эксплуатацию стареющего оборудования возрастали со временем.

Рассмотрим теперь задачу замены оборудования как многошаговый процесс динамического программирования.

Пусть величина c_{ij} представляет собой сумму покупной цены и ожидаемых расходов на ремонт и обслуживание оборудования, приобретенного в начале года i, за вычетом остаточной стоимости этого оборудования на начало года j.

Примем следующее обозначение:

f_i – величина затрат, соответствующая стратегии замены, минимизирующей эти затраты в интервалах i, i+1,…, n, в предположении, что новое оборудование приобретается в год i.

Тогда для нахождения оптимальной стратегии нам необходимо вычислить f_1(минимальные затраты и соответствующую стратегию с первого шага), пользуясь следующим рекуррентным соотношением:

$$f_{n+1} = 0,$$
$$f_i = \min_{j>i}\{c_{ij} + f_j\},\ i=n,\ n-1,\ \ldots,\ 1. \qquad (2.8.10)$$

Предположим, что затраты, отвечающие некоторой стратегии замены, включают две составляющие:

p_{ik} – стоимость замены оборудования возраста k на интервале i за вычетом его остаточной стоимости;

r_{ik} – стоимость эксплуатации оборудования возраста k на интервале i.

Пусть $f_i(k)$ – стратегия, минимизирующая затраты на интервалах i, i+1,…, n, при условии, что в начале интервала i возраст оборудования составляет k лет.

Если оптимальное решение состоит в сохранении оборудования в интервале i, то

$$f_i(k) = r_{ik+1} + f_{i+1}(k+1),$$

но если оптимальное решение сводится к его замене, то

$$f_i(k) = p_{ik} + r_{i1} + f_{i+1}(1).$$

Таким образом, имеем

$$f_i(k)=\min\{r_{ik+1}+f_{i+1}(k+1), p_{ik}+r_{i1}+f_{i+1}(1)\},\ i=1,2,\ldots,n, \qquad (2.8.11)$$

где $f_{n+1}(k)=0$ для всех k. Пусть К – возможный срок службы оборудования.

Мы планируем на n лет, поэтому начало (n+1)-го периода соответствует концу нашего планового периода.

Нахождение оптимального решения заключается в вычислении $f_1(k_0)$, где k_0 – возраст оборудования на начало планового периода. Если в это время рассматриваемая единица оборудования отсутствует, то нет смысла говорить о его сохранении при i=1, а решение о замене есть просто покупка нового оборудования.

Пример 2.8.7. Необходимо составить план замены оборудования на пять лет при условии отсутствия его в начале первого года, прогнозируемые затраты сведены в таблицы 2.8.11 и 2.8.12.

Таблица 2.8.11. Значения r_{ik}

	1	2	3	4	5
1	10				
2	8	16			
3	6	12	18		
4	4	8	12	20	
5	0	0	10	15	20

Таблица 2.8.12. Значения p_{ik}

	1	2	3	4
1	100			
2	55			
3	60	80		
4	65	85	105	
5	70	90	110	115

Пустые клетки в таблицах образовались из того факта, что в начале планового периода оборудования нет, оно только приобретается, поэтому нет нужды прогнозировать некоторые затраты, например, в год 3 не будет оборудования с возрастом 4, или на начало любого года не будет оборудования с пятилетним возрастом, поэтому колонка 5 в табл. 2.8.12 отсутствует.

Применим рекуррентное соотношение (2.8.11):

$f_6(k)=0$ для всех k.

<u>i=5</u> (в начале года 5 возраст не может быть больше 4):

$f_5(4)=\min\{r_{55}+f_6(5),\ p_{54}+r_{51}+f_6(1)\}=\min\{200+0,115+10+0\}=125$,

$f_5(3)=\min\{r_{54}+f_6(4),\ p_{53}+r_{51}+f_6(1)\}=\min\{85+0,110+10+0\}=85$,

$f_5(2)=\min\{r_{53}+f_6(3),\ p_{52}+r_{51}+f_6(1)\}=\min\{\mathbf{40+0},90+10+0\}=\mathbf{40}$,

$f_5(1)=\min\{r_{52}+f_6(2),\ p_{51}+r_{51}+f_6(1)\}=\min\{20+0,70+10+0\}=20$.

<u>i=4</u> (в начале года 4 возраст не может быть больше 3):

$f_4(3)=\min\{r_{44}+f_5(4),\ p_{43}+r_{41}+f_5(1)\}=\min\{120+125,105+14+20\}=139$,

$f_4(2)=\min\{r_{43}+f_5(3),\ p_{42}+r_{41}+f_5(1)\}=\min\{52+85,85+14+20\}=119$,

$f_4(1)=\min\{r_{42}+f_5(2),\ p_{41}+r_{41}+f_5(1)\}=\min\{\mathbf{28+40},65+14+20\}=\mathbf{68}$.

<u>i=3</u> (в начале года 3 возраст не может быть больше 2):

$f_3(2)=\min\{r_{33}+f_4(3),\ p_{32}+r_{31}+f_4(1)\}=\min\{68+139,\mathbf{80+16+68}\}=\mathbf{164}$,

$f_3(1)=\min\{r_{32}+f_4(2),\ p_{31}+r_{31}+f_4(1)\}=\min\{32+119,60+16+68\}=144$.

<u>i=2</u> (в начале года 2 возраст не может быть больше 1):

$f_2(1)=\min\{r_{22}+f_3(2),\ p_{21}+r_{21}+f_3(1)\}=\min\{\mathbf{36+164},55+18+144\}=200$.

Т.к. по условию примера в начале первого года мы приобретаем новое оборудование, то

$f_1(0)=p_{11}+r_{11}+f_2(1)=100+20+200=320$.

Таким образом, оптимальная стратегия заключается в следующем:

В начале третьего года заменяем оборудование, купленное в начале первого года, и эксплуатируем его до конца планового периода.

Выше мы рассматривали *детерминированный* вариант задачи о замене оборудования, где с индексом k была связана продолжительность *нормально* эксплуатируемого устройства. В стохастическом варианте задачи восстановления допускается, что устройство может выйти из строя еще до запланированного момента замены (тогда оно заменяется в следующий за поломкой момент времени).

Пусть нам известны p_j – вероятности того, что поломка оборудования произойдет в j–й момент его использования ($j<k$);

r_j – стоимость эксплуатации исправного оборудования в течение j–го интервала его использования;

s_j – дополнительный ущерб, обусловленный преждевременной поломкой оборудования в интервале j.

Пусть r_1 включает первоначальную стоимость устройства и вышедшее из строя оборудование полностью обесценивается (например, лампы, сгоревшие электромоторы и т.п.).

Оптимальной будет являться стратегия, минимизирующая математическое ожидание затрат, в составе которых должны быть учтены:

– средние затраты во все моменты восстановления в случаях, когда оборудование выйдет из строя раньше запланированного момента k;

– средние затраты во все моменты восстановления в случаях, когда оборудование не выйдет из строя до запланированного момента k;

– ожидаемые эксплутационные затраты в период между текущим и очередным моментами восстановления.

Следовательно, в результате надлежащего обобщения соотношений (2.8.10) и (2.8.11) получаем

$$f_i = \min_{k=1,2,\ldots,K}\{\sum_{j=1}^{k-1} f_{i+j}\, p_j + f_{i+k}(1-\sum_{j=1}^{k-1} p_j) + R_k\},\ i=1,2,\ldots,n,\ f_{n+1}=0, \qquad (2.8.12)$$

где первое слагаемое соответствует математическому ожиданию затрат, связанных с преждевременной заменой, второе слагаемое есть произведение минимальных затрат с периода i+k и далее, умноженное на вероятность того, что оборудование нормально доработает до этого периода. Третье слагаемое, отражающее эксплутационные затраты, можно представить следующим образом:

$$R_k = r_1 + r_2(1- p_1) + r_3(1- p_1 - p_2) + \ldots + r_k(1-\sum_{j=1}^{k-1} p_j) + \sum_{j=1}^{k-1} s_j p_j. \qquad (2.8.13)$$

Эти затраты складываются из затрат первого года эксплуатации оборудования плюс затраты второго года, умноженные на вероятность того, что оно не вышло из строя в первом году, плюс затраты третьего года, умноженные на вероятность того, что оно не вышло из строя в первых двух годах, и так далее до k-го интервала, плюс к этому математическое ожидание ущерба от преждевременной поломки до k-го интервала.

В силу громоздкости формул (2.8.12),(2.8.13) мы не будем приводить числовой пример, хотя с использованием компьютера вычисления не представляют сложности.

Рассмотрим стохастическую задачу замены оборудования для **неограниченного планового периода**.

В этом случае априорно допускается, что оптимальной является *стационарная* стратегия (каждый раз замена производится через k-й промежуток времени). Формула для определения оптимальной стратегии тогда существенно упрощается:

$$f = \min_{k=1,2,\dots,K}\{R_k/E_k\}, \qquad (2.8.14)$$

где E_k есть среднее значение сроков замены оборудования,

$$E_k = \sum_{j=1}^{k-1} j p_j + k\left(1 - \sum_{j=1}^{k-1} p_j\right). \qquad (2.8.15)$$

Заметим, что выражение, стоящее в фигурных скобках в (2.8.14), определяет ожидаемые затраты за один отрезок планового периода, и мы приходим к методике определения оптимальной стратегии замены оборудования, рассмотренной нами в самом начале (пример 2.8.5).

Пример 2.8.8. Данные за первые пять лет неограниченного планового периода сосредоточены в табл.2.8.13 (колонки 2 – 4).

Таблица 2.8.13

k 1	p_k 2	r_k 3	s_k 4	R_k 5	E_k 6	R_k/E_k 7
1	¼	100	20	100	1	100
2	0	7	60	114	1.75	65.14
3	¼	20	180	129	2.5	**51.6**
4	0	20	200	184	3	61.33
5	1/2	56	200	212	3.5	60.57

Значения величин в колонке 5 вычисляем по формуле 2.8.13:

$R_1 = r_1 = 100$,

$R_2 = r_1 + r_2(1 - p_1) + s_1 p_1 = 100 + 12\times3/4 + 20\times1/4 = 114$,

$R_3 = r_1 + r_2(1 - p_1) + r_3(1 - p_1 - p_2) + s_1 p_1 + s_2 p_2 = 114 + 20\times3/4 = 129$,

$R_4 = 129 + 20\times1/2 + 180\times1/4 = 184$,

$R_5 = 184 + 56\times1/2 = 212$.

Значения величин в колонке 6 вычисляем по формуле 2.8.15:

$E_1 = 1$,

$E_2 = 1\times p_1 + 2(1 - p_1) = 1/4 + 2\times3/4 = 1.75$,

$E_3 = 1\times p_1 + 2\times p_2 + 3(1 - p_1 - p_2) = 1/4 + 2\times0 + 3\times3/4 = 2.5$,

$E_4 = 1\times p_1 + 2\times p_2 + 3\times p_3 + 4\times(1 - 1/4 - 1/4) = 1/4 + 3/4 + 4\times1/2 = 3$,

$E_5 = 1\times p_1 + 2\times p_2 + 3\times p_3 + 4\times p_4 + 5\times(1/2) = 1/4 + 3/4 + 5\times1/2 = 3.5$.

Вычисляем отношение в колонке 7 и находим минимум, ему соответствует k=3, это оптимальное значение планового срока замены оборудования.

Из полученного результата видно, насколько дорого обходятся ошибки при неправильном учете фактора неопределенности. Так, например, если использовать критерий R_k/k, то решение будет k=5, а если в качестве критерия взять $\sum_j(r_j/k)$, то решение будет k=4.

В этих случаях ожидаемые затраты за один интервал превышают оптимальное значение почти на 20%.

(*упражнение*: проверить вышесказанное самостоятельно).

При учете коэффициента дисконтирования (пусть, как и прежде r – учетный процент в течение каждого периода и d=1/(1+r/100)) формулы (2.8.12) – (2.8.13) для *конечного* планового периода принимают вид:

$$f_i=\min_{k=1,2,\ldots,K}\{\sum_{j=1}^{k-1} d^j f_{i+j}p_j+d^k f_{i+k}(1-\sum_{j=1}^{k-1} p_j)+R_k\},\ i=1,2,\ldots,n,\ f_{n+1}=0, \qquad (2.8.16)$$

$$R_k=r_1+d^1r_2(1-p_1)+d^2r_3(1-p_1-p_2)+\ldots+d^{k-1}r_k(1-\sum_{j=1}^{k-1} p_j)+\sum_{j=1}^{k-1} d^{j-1}s_jp_j\,. \qquad (2.8.17)$$

Для *неограниченного* планового периода с коэффициентом дисконтирования d формулы (2.8.14) – (2.8.15) принимают вид:

$$f=\min_{k=1,2,\ldots,K}\{R_k/(1-E_{kd})\}, \qquad (2.8.18)$$

где E_{kd} есть среднее значение коэффициента дисконтирования

$$E_{kd}=\sum_{j=1}^{k-1} d^j p_j+d^k(1-\sum_{j=1}^{k-1} p_j). \qquad (2.8.19)$$

Здесь f представляет собой математическое ожидание дисконтированных затрат при неограниченном плановом периоде в случае, когда реализуется оптимальная стратегия.

2.8.7. Практический блок

Пример

Для двух предприятий выделено *a* единиц средств. Как распределить все средства в течение 4 лет, чтобы доход был наибольшим, если известно, что доход от x единиц средств, вложенных в первое предприятие, равен $f_1(x)$, а доход от y единиц средств, вложенных во второе предприятие, равен $f_2(y)$. Остаток средств к концу года составляет $g_1(x)$ для первого предприятия и $g_2(y)$ для второго предприятия.

$a=1000$, $f_1=3x$, $g_1=0{,}1x$; $f_2=2y$; $g_2=0{,}5y$.

РЕШЕНИЕ. Процесс распределения средств разобьем на 4 этапа – по соответствующим годам.

Обозначим $a_k = x_k + y_k$ – средства, которые распределяются на k –ом шаге как сумма средств по предприятиям.

Суммарный доход от обоих предприятий на k –ом шаге:

$z_k = f_1(x_k) + f_2(a_k - x_k) = 3x_k + 2(a_k - x_k) = 2a_k + x_k$.

Остаток средств от обоих предприятий на k –ом шаге:

$a_{k+1} = g_1(x_k) + g_2(a_k - x_k) = 0{,}1x_k + 0{,}5(a_k - x_k) = 0{,}5a_k - 0{,}4x_k$.

Обозначим $z^*_k(a_k)$ – максимальный доход, полученный от распределения средств a_k между двумя предприятиями с k-го шага до конца рассматриваемого периода.

Рекуррентные соотношения Беллмана для этих функций

$z^*_4(a_4) = \max\limits_{0 \le x_4 \le a_4} \{2a_4 + x_4\}$,

$z^*_k(a_k) = \max\limits_{0 \le x_k \le a_k} \{2a_k + x_k + z^*_{k+1}(0{,}5a_k - 0{,}4x_k)\}$.

Проведем оптимизацию, начиная с четвертого шага:

4-й шаг.

Оптимальный доход равен:

$z^*_4(a_4) = \max\limits_{0 \le x_4 \le a_4} \{2a_4 + x_4\} = 3a_4$,

т.к. линейная возрастающая функция достигает максимума в конце рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_4 = a_4$.

3-й шаг.

$z^*_3(a_3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le a_3} \{2a_3 + x_3 + 3(0{,}5a_3 - 0{,}4x_3)\} = \max\limits_{0 \le x_3 \le a_3} \{3.5a_3 - 0{,}2x_3)\} = 3.5a_3$

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_3 = 0$.

2-й шаг.

$z^*_2(a_2) = \max\limits_{0 \le x_2 \le a_2} \{2a_2 + x_2 + 3.5(0{,}5a_2 - 0{,}4x_2)\} = \max\limits_{0 \le x_2 \le a_2} \{3.75a_2 - 0{,}4x_2)\} = 3.75a_2$,

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_2 = 0$.

1-й шаг.

$z^*_1(a_1) = \max\limits_{0 \le x_1 \le a_1} \{2a_1 + x_1 + 3.75(0{,}5a_1 - 0{,}4x_1)\} = \max\limits_{0 \le x_1 \le a_1} \{3.875a_1 - 0{,}5x_1)\} = 3.875a_1$,

т.к. линейная убывающая функция достигает максимума в начале рассматриваемого промежутка, т.е. при $x_1 = 0$.

Результаты оптимизации:

$z^*_1(a_1) = 3{,}875a_1$,	$x^*_1 = 0$,
$z^*_2(a_1) = 3{,}75a_2$,	$x^*_2 = 0$,
$z^*_3(a_3) = 3{,}5a_3$,	$x^*_3 = 0$,
$z^*_4(a_4) = 3a_4$,	$x^*_4 = a_4$.

Определим количественное распределение средств по годам:

Т.к. $a_1 = a = 1000$, $x^*_1 = 0$, получаем $a_2 = 0.5a_1 - 0.41x^*_1 = 500$. Далее аналогично:

$x^*_2=0$, $a_3 = 0.5a_2 - 0.4\, x^*_2 = 250$,
$x^*_3=0$, $a_4 = 0.5a_3 - 0.4\, x^*_3 = 125$,
$x^*_4 = a_4 = 125$.

Представим распределение средств в виде таблицы:

предприятие	год			
	1	2	3	4
1	0	0	0	125
2	1000	500	250	0

При таком распределении средств за 4 года будет получен доход, равный $z^*_1(a_1) = 3{,}875 \cdot 1000 = 3875$.

Тесты

1. Какую особенность имеет динамическое программирование как многошаговый метод оптимизации управления:
   а) отсутствие последействия;
   б) наличие обратной связи;
   в) управление зависит от бесконечного числа переменных.
2. Вычислительная схема метода динамического программирования:
   а) зависит от способов задания функций;
   б) зависит от способов задания ограничений;
   в) связана с принципом оптимальности Беллмана.
3. Какую задачу можно решить методом динамического программирования:
   а) транспортную задачу;
   б) задачу о замене оборудования;
   в) принятия решения в конфликтной ситуации.
4. Что из себя представляет динамическое программирование?
   а) особый метод оптимизации решений, специально приспособленный к так называемым “одношаговым” (или “одноэтапным”) операциям;
   б) особый метод оптимизации решений, специально приспособленный к так называемым “многошаговым” (или “многоэтапным”) операциям;
   в) особый метод оптимизации состава предприятия;
   г) особый метод оптимизации решений, специально приспособленный к задачам линейного программирования;
   д) все вышеперечисленное.
5. Что предполагает принцип динамического программирования?
   а) что каждый шаг оптимизируется отдельно, независимо от других;
   б) шаговое управление должно выбираться дальновидно, с учетом всех его последствий в будущем;

в) выбор на данном шаге управления, при котором эффективность этого шага максимальна;

г) выбор на данном шаге управления, при котором эффективность этого шага минимальна;

д) все вышеперечисленное.

6. К какой задаче относится задача распределение средств по предприятиям и по годам?

   а) задачи линейного программирования;

   б) задачи целочисленного программирования;

   в) задачи нелинейного программирования;

   г) задачи стохастического программирования;

   д) задачи динамического программирования.

7. К какой задаче относится задача прокладки наивыгоднейшего пути между двумя пунктами?

   а) задачи линейного программирования;

   б) задачи целочисленного программирования;

   в) задачи нелинейного программирования;

   г) задачи стохастического программирования;

   д) задачи динамического программирования.

8. Каким методом лучше всего решить экономическую задачу о распределении ресурсов?

   а) методом линейного программирования;

   б) методом динамического программирования;

   в) методом целочисленного программирования;

   г) методом нелинейного программирования;

   д) методом стохастического программирования.

9. В чем метод динамического программирования отличается от метода линейного программирования?

   а) не сводится к какой-либо стандартной вычислительной процедуре;

   б) оно может быть передано на машину только после того, как записаны соответствующие формулы, а это часто бывает не так-то легко;

   в) сводится к какой-либо стандартной вычислительной процедуре;

   г) содержание п. а и б;

   д) содержание п. а, б и в.

10. Что необходимо делать, когда планировать операцию приходится не на строго определенный, а на неопределенно долгий промежуток времени?

    а) необходимо рассмотреть в качестве модели явления бесконечношаговый управляемый процесс, где не существует "особенного" по сравнению с другими последнего шага (все шаги равноправны);

б) для этого, разумеется, нужно, чтобы функции выигрыша и функции изменения состояния не зависели от номера шага;

в) необходимо рассмотреть в качестве модели явления одношаговый управляемый процесс;

г) необходимо рассмотреть в качестве модели явления бесконечношаговый неуправляемый процесс;

д) содержание п.а и б.

Ответы к тестам

1) а	6) д
2) в	7) д
3) б	8) а
4) б	9) г
5) в	10) д

Контрольные вопросы

1. Как поставить общую задачу динамического программирования?
2. Как формулируется задача динамического программирования и в чем ее отличие от задач линейного программирования?
3. В чем заключается особенности математической модели ДП?
4. Что лежит в основе метода ДП?
5. Сформулируйте задачу определения кратчайших расстояний по заданной сети. На сколько этапов разбивается задача? Сколько шагов содержится в каждом этапе и в чем суть этапа и шага?
6. Что является переменной управления и переменной состояния в задаче выбора оптимальной стратегии обновления оборудования?
7. Запишите функциональные уравнения Беллмана, используемые на каждом шаге управления в задаче выбора оптимальной стратегии обновления оборудования.
8. Запишите математическую модель оптимального распределения инвестиций и рекуррентное соотношение Беллмана для ее реализации.
9. Что такое принцип оптимальности и как записываются уравнения Беллмана?

Задания и задачи

Задача 1. Фирма ежегодно оценивает положение со сбытом одного из видов своей основной продукции и дает ему удовлетворительную (состояние 1) или неудовлетворительную оценку (состояние 2). Необходимо принять решение о целесообразности рекламирования этой продукции в целях расширения ее сбыта. Приведенные ниже матрицы Р1 и Р2 определяют переходные вероятности при наличии рекламы и без нее в течение любого года. Соответствующие доходы заданы матрицами R1 и R2. Найдите оптимальные решения для последующих трех лет.

$$P1=\begin{bmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,6 & 0,4\end{bmatrix},\ R1=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{bmatrix},$$

$$P2=\begin{bmatrix}0,7 & 0,3\\ 0,2 & 0,8\end{bmatrix},\ R2=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Задача 2. Компания может провести рекламную акцию с помощью одного из трех средств массовой информации: радио, телевидения или газеты. Недельные затраты на рекламу с помощью этих средств оцениваются в 200, 900 и 300 долларов соответственно. Компания оценивает недельный объем сбыта своей продукции по трехбалльной шкале как удовлетворительный (1), хороший (2) и отличный (3). Ниже указаны переходные вероятности, соответствующие каждому из трех средств массовой информации.

$$\text{Радио}\quad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0,4 & 0,5 & 0,1\\ 0,1 & 0,7 & 0,2\\ 0,1 & 0,2 & 0,7\end{bmatrix}\end{array}\qquad \text{Телевидение}\quad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0,7 & 0,2 & 0,1\\ 0,3 & 0,6 & 0,1\\ 0,1 & 0,7 & 0,2\end{bmatrix}\end{array}\qquad \text{Газета}\quad \begin{array}{c|c} & \begin{matrix}1 & 2 & 3\end{matrix}\\ \hline \begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix} & \begin{bmatrix}0,2 & 0,5 & 0,3\\ 0 & 0,7 & 0,3\\ 0 & 0,2 & 0,8\end{bmatrix}\end{array}$$

Соответствующие недельные доходы (в тысячах долларов) равны:

$$\text{Радио}\ \begin{vmatrix}400 & 520 & 600\\ 300 & 400 & 700\\ 200 & 250 & 500\end{vmatrix}\qquad \text{Телевидение}\ \begin{vmatrix}1000 & 1300 & 1600\\ 800 & 1000 & 1700\\ 600 & 700 & 1100\end{vmatrix}\qquad \text{Газета}\ \begin{vmatrix}400 & 530 & 710\\ 350 & 450 & 800\\ 250 & 400 & 650\end{vmatrix}$$

Найдите оптимальную стратегию рекламы для последующих трех недель.

Задача 3. Фирма выпускает на рынок новый вид продукции. Если объем сбыта высокий, то с вероятностью 0.5 он останется таким же в следующем месяце. Если он невысокий, то вероятность того, что в следующем месяце он станет высоким, равна только 0.2. Фирма может провести рекламную кампанию. Если она примет это решение при высоком объеме сбыта, то вероятность того, что он останется высоким и в следующем месяце, возрастает до 0.8. При низком уровне реклама сбыта повышает эту вероятность только до 0.4. Если при высоком уровне сбыта реклама не используется, то ожидаемый доход составит 10 при условии, что объем сбыта останется высоким в следующем месяце, и 4 – в противном случае. Если первоначально наблюдается высокий уровень сбыта, то соответствующие доходы равны 7 и –2. При использовании рекламы доход равен 7, если первоначально уровень сбыта высокий, и становится равным 6, если уровень сбыта снижается. Если начальный уровень сбыта низкий, то доходы равны 3 и –5 в зависимости от того, повышается он или нет. Определите оптимальную стратегию фирмы для последующих трех месяцев.

Задача 4. Задача управления запасами. Магазин электротоваров в целях быстрого удовлетворения спроса покупателей на холодильники может размещать заказы в начале каждого месяца. Каждое размещение заказа приводит к постоянным затратам в 100 долларов. Затраты на хранение одного холодильника в течение месяца равны 5 долларов. Потери магазина при отсутствии холодильников оцениваются в 150 долларов за каждый холодильник в месяц. Месячный спрос на холодильники задается следующим распределением вероятностей.

Спрос x	0	1	2
P(x)	0,2	0,5	0,3

Магазин реализует следующую стратегию: максимальный уровень запаса не должен превышать двух холодильников в течение любого месяца.

A) Определите переходные вероятности при различных альтернативах решения этой задачи.

B) Определите ожидаемые месячные затраты на хранение запаса как функцию состояния системы и альтернативных решений.

C) Определите оптимальную стратегию размещения заказов на последующие 3 месяца.

Задача 5. Выполните задания предыдущего упражнения, предполагая, что плотности вероятностей спроса на следующий квартал определяются следующим образом:

	Месяц		
Спрос, x	1	2	3
0	0.1	0.3	0.2
1	0.4	0.5	0.4
2	0.5	0.2	0.4

Задача 6. Рыночная цена подержанного автомобиля составляет 2000 долларов. Владелец полагает, что он может получить больше этой суммы, но при этом он намерен согласиться с ценой, предложенной первыми тремя потенциальными покупателями, которые откликнулись на его объявление (это означает, что он должен принять решение не позже момента получения третьего предложения). Предположим, что с равными вероятностями будут предложены цены 2000, 2200, 2400 и 2600 долларов. Естественно, что после принятия какой-либо из предложенных цен все

последующие предложения теряют смысл. Задача продавца заключается в том, чтобы установить пороговое значение цены, которым он будет пользоваться после получения первых трех предложений. В качестве такого значения можно выбрать 2000, 2200, 2400 и 2600 долларов. Найдите оптимальную стратегию владельца автомашины.

Задача 7. Планируется распределение начальной суммы X_0 млн. р. между четырьмя предприятиями некоторого объединения. Средства выделяются только в размерах кратных a=80 млн.р. Функции прироста продукции от вложенных средств на каждом предприятии заданы таблично. Требуется так распределить вложения между предприятиями, чтобы общий прирост продукции (в млн. р.) был максимальным.

X_0	Вкладываемые средства X	Функции прироста продукции на предприятии			
		$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
400	0	10	15	13	14
	80	13	20	17	16
	160	16	22	21	23
	240	21	25	26	25
	320	25	30	28	27
	400	25	32	30	32

Задача 8. Инвестор выделяет средства в размере 5 тыс. ден. ед., которые должны быть распределены между тремя предприятиями.

Требуется, используя принцип оптимальности Беллмана, построить план распределения инвестиций между предприятиями, обеспечивающий наибольшую общую прибыль, если каждое предприятие при инвестировании в него средств x тыс. ден. ед. приносит прибыль $p_i(x)$ тыс. ден. ед. (i=1, 2 и 3) по следующим данным:

Инвестирование средств (тыс. ден. ед.)	Прибыль (тыс. ден. ед.)		
x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
1	3,22	3,33	4,27
2	3,57	4,87	7,64
3	4,12	5,26	10,25
4	4	7,34	15,93
5	4,85	9,49	16,12

2.8.8. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Постановка общей задачи динамического программирования.
2. Особенности математической модели динамического программирования.
3. Область применения задачи динамического программирования.

Литература для самостоятельной работы

1. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
2. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.
3. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.И. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб.пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444с.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
5. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

ТЕМА 2.9. ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

2.9.1. Область применения имитационного моделирования.

Как уже отмечалось, модели линейного программирования наиболее успешно применяются при планировании усилий, связанных с реализацией комплексных проектов. Если плановый период имеет большую протяженность (например. 10 лет или более), соответствующая многошаговая модель линейного программирования, как правило, содержит лишь среднегодовые показатели. При этом влияние результатов оптимизации на показатели, характеризующие текущие операции на отрезках продолжительностью от 1 недели до 1 месяца, в явной форме не учитывается. Если же рассматривается плановый период значительно меньшей продолжительности (скажем, от 3 месяцев до 1 года), то соответствующая модель полностью абстрагируется от вариаций плановых показателей на временных отрезках продолжительностью от 1 рабочего дня до 1 недели. Таким образом, анализ, осуществляемый в рамках линейного программирования, обычно не позволяет определить правила, с помощью которых можно было бы перейти от рекомендуемого плана к процедурам его реализации на отрезках времени, меньших по сравнению с интервалами, которые рассматриваются моделью.

Ограниченность анализа, основанного на использовании метода линейного программирования, обусловлена также отсутствием достоверной информации относительно будущего. Неопределенность прогнозов в той или иной степени свойственна всем задачам планирования.

Модели динамического программирования, напротив, вполне пригодны для анализа мультивременных задач планирования в условиях неопределенности и, таким образом, подходят для построения оптимальных стратегий. Однако по сравнению с моделями линейного программирования динамические оптимизационные модели способны в реальных условиях описывать лишь чрезвычайно упрощенные операционные системы. Как было показано в теме 2.8, если исключить случаи, когда исследуемая система характеризуется небольшим количеством переменных состояний, вычислительные процедуры при нахождении решений для моделей динамического программирования оказываются неимоверно трудоемкими.

Ориентированные на использование математического аппарата вероятностные динамические модели, в частности модели управления запасами и модели массового обслуживания, также обладают аналогичным недостатком (темы 2.5 и 2.6). Чтобы найти численное решение для такого рода моделей, приходится не только ограничиваться случаями, когда операционная система обладает небольшой размерностью, но и вводить упрощающие предположения относительно самой схемы функционирования исследуемой системы. Так, например, с помощью характерных для теории массового обслуживания математических методов, невозможно полностью адекватным образом проанализировать «поведение» очередей в ремонтных мастерских. Соответствующие стохастические модели могут служить лишь грубым приближением протекающих в действительности процессов формирования и обслуживания очередей.

Итак, несмотря на то, что математическое программирование и стохастическое моделирование имеют широкий диапазон применения, при рассмотрении многих важных задач организационного управления возникает необходимость обращаться к совершенно иным методам анализа.

Методы, изложенные в предыдущих темах, не смогут обеспечить исчерпывающего анализа таких задач организационного управления, как

1) Формирование инвестиционной политики при перспективном планировании. Инвестиционная политика крупных фирм должна, в частности, учитывать финансовое обеспечение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ при создании новых видов продукции, возможности расширения рынка сбыта, критериальные оценки основных проектов, оценку степени риска при планировании тех или иных комплексов работ, источники финансирования (кредит, привлечение капитала продажей акций и т. д.), увеличение фонда заработной платы, размещение и сокращение финансовых активов, сравнительную оценку вариантов слияния с другой фирмой и приобретения последней и т. п. Полноценная модель, с помощью которой можно было бы анализировать

различные варианты инвестиционной политики, должна учитывать стохастическую природу и динамический характер инвестирования, а также предусматривать способ просеивания огромного количества стоящих перед фирмой альтернатив.

2) Выбор средств обслуживания (или оборудования) при текущем планировании. Здесь рассматриваются задачи типа определения количества контрольных прилавков в большом торговом центре, количества бензоколонок на бензозаправочной станции и количества лифтов в строящемся здании. Можно привести много других примеров, в которых рассматриваются вопросы распределения кадров, планировка заводских помещений, выбор мощности оборудования и т. д.

Типичными вопросами, возникающими в связи с решением задачи выбора средств обслуживания или оборудования, являются вопросы, начинающиеся словами «сколько», «каких размеров», «как разместить».

3) Разработка планов с обратной информационной связью и операционных предписаний. К важным задачам данного класса относится, например, задача выработки правил составления календарных планов на предприятиях с мелкосерийным производством, комбинатах по ремонту различных изделий, вычислительных центрах и т.д. Эти предписания, или операционные алгоритмы, должны учитывать гарантийные сроки выполнения заказов, потребности в обслуживании, наличные ресурсы, производственные мощности, темпы повышения квалификации рабочих (или приток дополнительной квалифицированной рабочей силы), уровень снабжения сырьем, по мере поступления информации о новых уже выполненных заказах предприятие сталкивается с задачей уточнения или полного пересмотра своих планов-графиков.

Почему описанные выше классы задач с трудом поддаются анализу? Причина заключается в необходимости одновременного учета факторов неопределенности, динамической взаимной обусловленности текущих решений и последующих событий, в комплексной взаимозависимости между управляемыми переменными исследуемой операционной системы, а в ряде случаев также и в том, что требуется рассматривать строго дискретную и четко определенную последовательность интервалов времени. Такого рода «глобальные» системные задачи обладают слишком большой размерностью и наличием слишком большого количества внутренних взаимосвязей, в силу чего их не удается решить методами математического программирования. Решения, принимаемые по вопросам, порождаемым перечисленными выше проблемами, нередко приводят к очень большим затратам и существенным образом влияют на будущие стоимостные характеристики функционирования системы и на эффективность деятельности фирмы в целом. Поэтому руководители такого рода фирм крайне заинтересованы в применении системного подхода к решению возникающих перед ними задач с тем, чтобы анализ организационно-управленческих ситуаций отличался более высоким качеством по сравнению с анализом, основанным на чистой интуиции или на опыте. Наиболее эффективным из существующих в настоящее время методов является имитационный подход. В настоящей теме наша основная цель заключается в том, чтобы дать описание метода имитационного моделирования и определить, какого рода задачи могут этим методом решаться. Мы не собираемся рассматривать вопросы, связанные с построением и анализом имитационных моделей (или схем) во всех подробностях. Эти вопросы излагаются в специальных работах, посвященных проблемам имитационного моделирования, а также в учебных пособиях, которые выпускаются фирмами-изготовителями ЭВМ и содержат описание специализированных языков для составления имитационных машинных программ.

2.9.2. Сущность имитационного подхода.

При имитационном подходе, прежде всего, строится экспериментальная модель системы. Затем производится сравнительная оценка конкретных вариантов функционирования системы путем «проигрывания» различных ситуаций на рассматриваемой модели.

Обычно представляется слишком неудобным и дорогостоящим решать задачи организационного управления путем имитации реальных действий, как, например, это делается в армейских условиях во время различного рода учений. Более предпочтительным является представление сложной функциональной системы с помощью логико-математической модели, «заложенной» в ЭВМ.

При этом факторы неопределенности, динамические характеристики и весь комплекс взаимосвязей между элементами исследуемой системы представляют в виде формул, хранящихся в ЭВМ. Имитирование системы начинают с некоторого вполне конкретного исходного состояния. В результате принимаемых решений, а также вследствие ряда контролируемых и неконтролируемых событий, среди которых могут быть и события случайного характера, система переходит в последующие моменты времени в другие состояния. Эволюционный процесс, таким образом, продолжается до тех пор, пока не наступит конечный момент планового периода. Отрезки времени внутри планового периода нередко оказываются четко определенными и образуют упорядоченную последовательность на достаточно большом периоде имитирования. Поэтому имитационный эксперимент сопряжен с огромным количеством вычислений, выполняемых ЭВМ с большой скоростью. Такое отражение в ЭВМ реального процесса длительностью в несколько лет за несколько минут называют сжатием времени.

Многие специалисты по исследованию операций смотрят на машинное имитирование как на средство, к которому прибегают лишь в самых крайних случаях. Это отношение объясняется двумя причинами.

Первая из них связана с характером самих результатов имитирования. Когда модель содержит элементы неопределенности, каждый ответ, вытекающий из конкретного акта имитирования, необходимо рассматривать только как оценку, верную с точностью лишь до статистических погрешностей. Так, например, имитационная модель образования очереди дает лишь оценку ее средней длины и соответствующую вероятность задержки. Следовательно, делая выводы об относительных преимуществах различных пробных вариантов с учетом результатов имитационных тестов, необходимо проявлять осторожность при оценке флуктуаций, сопровождающих исследуемый процесс.

Вторая причина недоверия к имитационному методу определяется способом его практического использования. Если функциональная система настолько сложна, что для ее рассмотрения неприменимы такие методы операционных исследований, как линейное и динамическое программирование или обычный анализ в рамках теории вероятностей, то построение имитационной модели и последующий анализ результатов имитирования в этом случае, скорее всего, будут сопряжены со значительными трудностями. Многие из склонных к опрометчивым выводам операционистов не без досады убедились, что, как и реальная действительность, «имитационный мир» оказывается трудно постижимым – имитационная модель приводит к такому количеству разнообразных исходов, что в результате получаемую информацию не так-то легко интерпретировать. Цель имитационного моделирования состоит в воспроизведении поведения исследуемой системы на основе результатов анализа наиболее существенных взаимосвязей между ее элементами. Результаты исследования имитационной модели, как правило, представляют собой оценки значений операционных (функциональных) характеристик той системы, поведение которой имитируется. Так, например, при имитационном моделировании функционирования любой системы массового обслуживания практический интерес могут представлять такие показатели, как средняя продолжительность обслуживания «клиента», средняя длина очереди, доля времени вынужденного простоя системы обслуживания и т.д.

Имитационное моделирование следует рассматривать как статистический эксперимент. В отличие от описанных выше математических моделей, результаты которых отражали устойчивое во времени поведение системы, результаты, получаемые в имитационной модели, представляют собой наблюдения, подверженные экспериментальным ошибкам. Это означает, что любое утверждение, касающееся характеристик моделируемой системы, должно основываться на результатах соответствующих статистических проверок.

Метод, используемый для решения перечисленных выше задач, который в известном смысле является предшественником современного имитационного моделирования, известен давно. Это – *метод Монте-Карло*. Его основная идея состоит в использовании выборок для получения искомых оценок. Процесс получения выборок требует, чтобы решаемая задача была описана соответствующим вероятностным распределением, в соответствии с которым и осуществляются выборки.

Популярность метода Монте-Карло применительно к решению теоретических задач стала падать в конце 50-х годов. Больший интерес стал проявляться к способу анализа сложных практических задач, который стали называть имитационным моделированием. Имитационное моделирование, подобно методу Монте-Карло, основано на использовании выборок оценивания результатов работы системы. В этом отношении многие идеи, возникшие в связи с методом Монте-Карло, нашли непосредственное приложение в имитационном моделировании. К этим идеям относятся использование случайных чисел для получения выборок в соответствии с некоторым вероятностным распределением и разработку способов уменьшения объема выборок, необходимых для надежной оценки результата.

Изложенные выше соображения позволяют также понять, почему метод имитационного моделирования удается реализовать только с помощью ЭВМ. Для получения статистической надежности, достаточной для обоснования управляющих решений, как правило, требуется многократное повторение имитационных тестов.

В отличие от математического программирования имитационное моделирование пока не располагает хорошо структурированными принципами построения моделей. Каждый конкретный случай требует значительной специальной проработки. Используемые при этом языки моделирования являются той основой, на которой возможна выработка каких-либо общих принципов построения имитационных моделей. (Широко распространенными языками моделирования являются Симскрипт и GPSS.)

Виды имитационного моделирования:

Агентное моделирование – относительно новое (1990е-2000е гг.) направление в имитационном моделировании, которое используется для исследования децентрализованных систем, динамика функционирования которых определяется не глобальными правилами и законами (как в других парадигмах моделирования), а наоборот. Когда эти глобальные правила и законы являются результатом индивидуальной активности членов группы. Цель агентных моделей – получить представление об этих глобальных правилах, общем поведении системы, исходя из предположений об индивидуальном, частном поведении ее отдельных активных объектов и взаимодействии этих объектов в системе. Агент – некая сущность, обладающая активностью, автономным поведением, может принимать решения в соответствии с некоторым набором правил, взаимодействовать с окружением, а также самостоятельно изменяться.

Системная динамика – парадигма моделирования, где для исследуемой системы строятся графические диаграммы причинных связей и глобальных влияний одних параметров на другие во времени, а затем созданная на основе этих диаграмм модель имитируется на компьютере. По сути, такой вид моделирования более всех других парадигм помогает понять суть происходящего выявления причинно-следственных связей между объектами и явлениями. С помощью системной динамики строят модели бизнеспроцессов, развития города, модели производства, динамики популяции, экологии и развития эпидемии. Метод основан Форрестером в 1950 годах.

Рассматриваемые ниже методы относятся к виду *дискретно-событийного моделирования.* Этот подход к моделированию предлагает абстрагироваться от непрерывной природы событий и рассматривать только основные события моделируемой системы, такие как: «ожидание», «обработка заказа», «движение с грузом», «разгрузка» и другие. Дискретно-событийное моделирование наиболее развито и имеет огромную сферу приложений – от логистики и систем массового обслуживания до транспортных и производственных систем. Этот вид моделирования наиболее подходит для моделирования производственных процессов. Основан Джеффри Гордоном в 1960х годах.

Отсутствие единой теории имитационного моделирования на ЭВМ есть одновременно «и благо, и зло». Положительным здесь является то, что имеется возможность строить имитационные модели любой степени сложности при огромном количестве динамических взаимосвязей, а также при отсутствии стационарности и наличии взаимно коррелированных стохастических элементов. Отрицательным же моментом является то, что по мере усложнения модели оценка степени ее адекватности оказывается весьма затруднительной.

2.9.3. Целевая установка имитационного моделирования.

При построении имитационной модели, предназначенной для углубленного анализа проблем организационного управления, преследуют по крайней мере одну из следующих целей:

1) Изучение действующей функциональной системы. Рассмотрим промышленную фирму, которая недавно зарегистрировала увеличение числа заказов на свою продукцию и отметила затем заметное ухудшение качества обслуживания своих клиентов в части соблюдения сроков выполнения этих заказов. У этой фирмы может появиться желание построить имитационную модель, с помощью которой можно было бы изучить, каким образом существующие процедуры определения сроков выполнения принимаемых заказов, календарного планирования производства и оформления заявок на поставку сырья порождают наблюдаемые задержки.

2) Анализ гипотетической функциональной системы. Обратимся к больнице, руководство которой рассматривает вопрос внедрения новой системы управления запасами медицинских препаратов.

Руководство больницей может изъявить желание построить с использованием ретроспективных данных имитационную модель, чтобы проверить, каким будет средний уровень средств, связанных в запасах, и как часто будут возникать нехватки различных видов препаратов в случае, если будет реализован предлагаемый план.

3) Проектирование более совершенной функциональной системы. Рассмотрим предприятие с мелкосерийным производством, в котором станочные мощности распределены в соответствии с приоритетами, присвоенными выполняемым работам. У фирмы может появиться желание построить имитационную модель для нахождения эффективного способа определения системы приоритетов с тем, чтобы все работы могли выполняться без больших задержек и чтобы при этом коэффициент использования оборудования предприятия был достаточно высок.

2.9.4. Этапы построения и использования имитационной модели.

Ниже приводится краткая характеристика каждого из основных видов работ, которые необходимо выполнить с целью практической реализации метода имитационного моделирования:

Шаг 1. Построение модели. Содержание данного этапа почти не отличается от содержания этапа построения модели любого другого типа. Опасность при этом заключается в излишней детализации модели, которая может привести к слишком большим затратам машинного времени при выполнении соответствующего эксперимента. Лучший способ уберечься от такого рода опасности заключается в том, чтобы постоянно помнить о конкретной цели исследования. Например, если модель должна помочь в выборе одного из двух вариантов размещения нового складского помещения, то, по-видимому, нет необходимости при построении имитационной модели делить плановый период на часы или дни: вполне достаточно использовать отрезки времени, продолжительность которых равняется 1 недели. Однако если с помощью модели нужно решить, сколько в новом складе должно быть погрузочно-разгрузочных платформ (например, одна или две), то, возможно, возникнет необходимость имитировать процесс функционирования упомянутого складского помещения, ориентируясь на отрезки времени продолжительностью от 5 до 15 мин.

Шаг 2. Разработка проекта эксперимента. Операционист сможет уменьшить вероятность той или иной ошибки и, таким образом, потери времени, если он подробно разработает сопровождающие эксперимент процедуры до того, как модель будет «приведена в действие». Это означает, что операционисту необходимо тщательно продумать, какие функциональные характеристики имитируемой системы планируется измерять. Кроме того, следует определить, с помощью какого метода математической статистики будут учитываться флуктуации экспериментальных данных, полученных в результате этих измерений.

Шаг 3. Разработка программного обеспечения. Весь имитационный эксперимент проводится на ЭВМ. Другими словами, все стадии эволюционного развития модели, так же как и генерирование случайных событий, протекают в ЭВМ. Если имитируемая система обладает очень простой структурой, то может оказаться, что при разработке соответствующего «вычислительного варианта» модели удобнее всего использовать один из стандартных языков программирования. Однако представляется более вероятным, что предпочтение будет отдано одному из языков моделирования, такому, как Симскрипт или GPSS, трансляторы с которых имеются для многих ЭВМ.

Пример 2.9.1. Имитационное моделирование фондовой биржи.

Мистер N хочет оценить степень оптимальности некоторой конкретной стратегии приобретения и продажи акций. Для упрощения схемы рассуждений предположим, что он приобретает или продает только какие-нибудь одни акции. В рассматриваемый момент времени он обладает пакетом в 100 акций, каждая из которых оценивается на текущий момент в 10 у.е. Для простоты, допустим также, что цена акции может ежедневно меняться только на 1 у.е. Держатель акций совершает не более одной сделки в день и платит за каждую сделку комиссионные в размере 2% стоимости реализуемых акций (как в случае приобретения, так и в случае продажи); разумеется, в некоторые дни таких сделок может и не быть.

Мистер N хочет проверить степень прибыльности следующей стратегии:

1) обладая пакетом акций, необходимо продать его, как только цены на акции начинают падать;

2) в противном случае следует приобретать акции, как только цены на них начинают возрастать.

Если мистер N обладает пакетом акций, то, согласно стратегии, он сохраняет его в течение всего периода, когда цены на акции либо не меняются, либо возрастают; если же мистер N не располагает акциями, то он воздерживается от их приобретения в течение периода, когда уровень цен на них либо остается без изменений, либо падает.

Чтобы произвести оценку такой стратегии, мистер N должен, кроме того, сделать некоторое предположение относительно характера суточных изменений цен на акции. На основе анализа ретроспективных данных мистер N строит модель изменения цен, представленную на рис.2.9.1.

Цена одной акции в n-й день			
Цена одной акции в (n -1)-й день	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Возросла по сравнению с (n-2)-м днем	1/2	1/4	1/4
Осталась такой же, как и в (n -2)-й день	1/4	1/2	1/4
Упала по сравнению с (n - 2)-м днем	1/4	1/4	1/2

Р и с. 2.9.1. Вероятности изменения цен на акции

Проиллюстрируем эту таблицу, рассмотрев в ней вторую и третью строки. Если как в понедельник, так и во вторник цена одной акции равняется 10 у.е. то, по мнению N, в среду цена одной акции будет равняться 11 (возрастет) с вероятностью 1/4, 10 (остается без изменения) с вероятностью 1/2 и 9 (упадет) с вероятностью 1/4 (см. вторую строку). Если же во вторник цена одной акции равняется 9 у.е., то, как полагает N, в среду одна акция будет стоить 10 у.е. с вероятностью 1/4, 9 с вероятностью 1/4 и 8 с вероятностью 1/2 (см. третью строку). Заметим, что в случае, когда цена акции возрастает, N считает, что с вероятностью 1/2 она будет продолжать возрастать; аналогичные суждения он выносит и в тех случаях, когда цена акции не меняется или начинает падать.

Прежде чем начинать имитационный процесс, необходима генерация конкретных ситуаций, которые происходят в соответствии с распределением вероятностей, приведенным на рис. 2.9.1, и отражали бы стохастический дрейф цен.

Один из наиболее простых способов такого рода генерации заключается в бросании двух монет; при этом соответствие между случайными исходами при бросании монет и генерируемыми ситуациями можно представить с помощью таблицы, приведенной на рис. 2.9.2. Нетрудно убедиться, что при таких правилах соответствия генерируется распределение вероятностей, полностью совпадающее с распределением, которое предполагалось мистером N.

Цена одной акции в (n-1)-й день	Цена одной акции в n-й день		
	Возрастает	Остается без изменения	Падает
Возросла по сравнению с (n-2)-м днем	Герб и решетка	Два герба	Две решетки
Осталась такой же, как в (n-2)-й день	Два герба	Герб и решетка	Две решетки
Упала по сравнению с (n-2)-м днем	Два герба	Две решетки	Герб и решетка

Рис. 2.9.2. Стохастическое изменение цен, полученное путем бросания монет

Пусть имитируется период продолжительностью 20 дней, каждый из которых соответствующим образом занумерован (день 1, день 2, день 3 и т.д.). При этом пару монет нужно бросать 20 раз; результаты последовательного бросания монет представлены в таблице на рисунке 2.9.3.

день	Результат бросания монет	Направление изменения вчерашней цены	Изменение сегодняшней цены	Цена акции
0	-	-	-	10
1	г/р	Без изменения	Без изменения	10
2	2р	- “ -	Убывает	9
3	2г	Убывает	Возрастает	10
4	2г	Возрастает	Без изменения	10
5	2г	Без изменения	Возрастает	11
6	г/р	возрастает	возрастает	12
7	2г	- “ -	Без изменения	12
8	2р	Без изменения	Убывает	11
9	2г	убывает	Возрастает	12
10	г/р	возрастает	возрастает	13
11	2р	- “ -	Убывает	12
12	г/р	убывает	убывает	11
13	2р	- “ -	Без изменения	11

14	2г	Без изменения	Возрастает	12
15	г/р	возрастает	возрастает	13
16	г/р	- “ -	- “ -	14
17	2р	- “ -	Убывает	13
18	г/р	убывает	убывает	12
19	г/р	- “ -	- “ -	11
20	2р	- “ -	Без изменения	11

Рис. 2.9.3. Имитирование изменения цен

Для определения соответствующей последовательности цен на акции необходимо задать начальные условия, а именно цену одной акции в день 0, а также информацию относительно того, наблюдалось или не наблюдалось в этот день изменение цены по отношению к предшествующему дню. Пусть цена одной акции в день 0 равнялась 10 у.е. и совпадала с соответствующим показателем в предшествующий день. При таких начальных условиях и при выпадании после первого бросания герба и решетки цена одной акции в день 1 равняется 10 у.е. (см. вторую строку таблицы на рис. 2.9.2). Тогда, поскольку цены в день 0 и в день 1 совпадают, в день 2 выпадание двух решеток означает, что цена одной акции в соответствии со второй строкой таблицы на рисунке 4.10.2 падает до 9. Поскольку в день 2 наблюдалось понижение цены (по отношению к дню 1), выпадание (при третьем бросании монет) двух гербов указывает на то, что в день 3, согласно третьей строке таблицы, цена одной акции будет равняться 10. (Читателю предлагается самостоятельно проверить данные, содержащиеся в таблице на рис.2.9.3 для дней 5, 10, 15 и 20).

Теперь, используя конкретные данные об изменении цен в течение 20-дневного периода, мы можем проверить, насколько правильной является стратегия мистера N. Результаты имитирования подробно представлены в таблице на рис. 2.9.4. (В эту таблицу для удобства ее использования перенесены также данные об изменении цен, указанные в таблице на рис. 2.9.3.)

День	Цена акции	Решение	Кол-во акций, имеющихся на	Стоимость акций, у.е.	Наличные деньги, у.е.
0	10		100	1000	
1	10		100	1000	
2	9	Продать	0	0	882,00
3	10	Купить	86	860	4,80
4	10		86	860	4,80

5	11		86	946	4,80
6	12		86	1032	4,80
7	12		86	1032	4,80
8	11	Продать	0	0	931,88
9	12	Купить	76	912	1,64
10	13		76	988	1,64
11	12	Продать	0	0	895,40
12	11		0	0	895,40
13	11		0	0	895,40
14	12	Купить	73	876	1,88
15	13		73	949	1,88
16	14		73	1022	1,88
17	13	Продать	0	0	931,90
18	12		0	0	931,90
19	11		0	0	931,00
20	11		0	0	931,90

Р и с.2.9.4. Результаты имитации рассматриваемой стратегии за 20-дневный период.

Решения, приведенные в третьем столбце, определяются непосредственно ценами на акции в предшествующие два дня и принятой стратегией поведения. Данные, содержащиеся в трех последних столбцах, получены в результате дополнительных вычислений. Проиллюстрируем результаты, приведенные в таблице на рис. 2.9.4, рассмотрев ряд конкретных ситуаций. Так, например, в день 2 мистер N продает имеющиеся у него 100 акций по цене 9 у.е; однако он должен при этом уплатить 2% комиссионных, что составляет 18 у.е. (0.02×9×100). Следовательно, в результате продажи акций он получает наличными 882 у.е. (900 – 18). В день 3 он вновь приобретает пакет акций. При этом он снова должен уплатить 2% комиссионных, так что фактически каждая акция ему обходится в 10.20 у.е. Поскольку сумма наличных денег у N равняется 882, он может приобрести лишь 86 акций, оставив себе наличными 4,80(882 – 86×10.20). Заметим, что сумма наличных денег у N в конце рассматриваемого периода (т.е. по истечении 20 дней) оказывается равной 931.90 у.е. и меньше той суммы, которую он имел бы, если бы вместо того, чтобы придерживаться указанной стратегии, он продал свои 100 акций, имевшиеся у него в наличии, в день 0 и, таким образом, получил бы после уплаты комиссионных 980 у.е.

Является ли рассмотренная нами стратегия (при всех принятых предположениях) выгодной? Вероятно, нет. Однако с выводами торопиться не следует. Предположим, что вместо произвольным образом выбранного нами периода имитирования (20 дней) был бы назначен период в 40 или 10 дней. К какому заключению мы бы пришли в этих случаях? Или представим себе, что при том же 20-дневном периоде генерация ситуаций путем бросания монет производилась бы повторно. Можно ли утверждать, что окончательный результат, полученный с помощью упомянутой стратегии, по-прежнему казался бы неудовлетворительным? Пока можно лишь сказать, что выводы относительно степени «доброкачественности» рассматриваемой стратегии действительно частично зависят от статистического разброса имитационных данных, а также от продолжительности периода имитирования.

При дальнейшем анализе модели мы увидим, что заключительная оценка стратегии осложняется тем обстоятельством, что по мере увеличения длины имитируемого периода диапазон возможных исходов для N увеличивается. Более того, если даже при увеличении продолжительности рассматриваемого периода стратегия и приводит к росту ожидаемого выигрыша (т. е. ожидаемой суммы наличных денег, получаемых в результате игры на бирже), то вероятность разорения на промежуточных этапах все равно остается.

Таким образом, мы видим, что даже такой простой пример имитационного моделирования порождает ряд весьма сложных вопросов относительно меры эффективности выбираемой стратегии и метода проектирования научно обоснованного эксперимента по проверке этой эффективности.

2.9.5. Особенности процедуры построения модели.

Рассмотрим три аспекта процедуры построения модели: определение формирующих модель компонентов, проверка модели на адекватность и надежность, уточнение параметров модели и измерение ее основных характеристик.

Компоненты модели. Структуру имитационной модели в большинстве случаев удобно описывать, определяя содержание фигурирующих в ней динамических процессов и результатов функционирования имитируемой системы. Динамические процессы в рассмотренной выше имитационной модели фондовой биржи включают последовательные моменты заключения сделок мистером N, который придерживается определенного правила принятия решений, учитывая при этом факторы, определяющие изменения уровня цен на акции. Результаты рассматриваемой деятельности определяются количеством акций, которыми обладает N, суммой имеющихся у него наличных и его общим капиталом. Результаты функционирования реальной системы, как правило, атрибутированы (т. е. имеют вполне определенный физический смысл). Так, например, когда цена акции известна, пакет акций, которым располагает N, имеет денежное выражение. Кроме того, наблюдаются атрибутивные связи, устанавливающие способ суммирования результатов функционирования системы. Например, полный капитал мистера N состоит как из имеющихся у него наличных, так и из его пакета акций.

В любой момент времени имитационная модель находится в некотором вполне определенном состоянии. Состояние системы характеризуется не только результатами, полученными к текущему моменту времени, но нередко включает в себя и некоторые ретроспективные данные. Так, например, состояние системы в начале любого дня при имитировании фондовой биржи описывается вчерашним уровнем цен на акции, направлением изменения позавчерашней цены на одну акцию, числом имеющихся у N акций и суммой наличных, которыми он располагает.

Модель может учитывать также экзогенные события, т.е. изменения, не обусловленные предысторией имитируемого процесса. Например, в случае имитационного моделирования фондовой биржи мистер N независимо от результатов применения выбранной им стратегии может в день 21 «ввести в игру» дополнительно 1000 у.е. (за счет имеющихся у него сбережений).

Зная состояние системы и ее динамику, можно определить «действия» и состояния системы во все последующие моменты времени. Имитационные модели, обладающие эволюционной структурой, часто называют каузальными.

Отметим, что при построении каузальной модели необходимо знать, каким образом система функционирует в пределах каждого отрезка времени рассматриваемого периода. Например, в случае имитирования фондовой биржи каждый день, прежде всего, необходимо определить цену одной акции, после чего вырабатывается решение относительно целесообразности либо приобретения, либо продажи акций (либо принимается решение ничего не предпринимать). На практике цена акций на бирже может несколько раз меняться в течение дня, так что построенная нами модель представляет собой лишь грубое приближение к действительности. В модели предполагается также, что если мистер N продает свои акции, то он в конце дня получает за них наличными; аналогичным образом, если мистер N покупает акции, то он оплачивает их наличными в конце того же дня. В действительности подобного рода биржевые сделки не всегда завершаются так быстро.

Адекватность и надежность модели. Позволяет ли модель разобраться в существе имитируемого процесса и можно ли с ее помощью прийти к надежным умозаключениям? В конечном счете, поскольку имитационная модель может описывать реальные явления лишь приближенно, ее следует оценивать по возможности проведения на ее основе анализа управляющих решений, представляющих собой предмет конкретного операционного исследования.

Определив цель имитационного эксперимента, операционист строит каждый элемент модели с надлежащей степенью детализации и точности. Здесь необходимо сделать предостережение. Опытные специалисты по имитационному моделированию утверждают, что даже для начинающего операциониста не представит труда построить модель из отдельных компонентов, каждый из которых будет соответствовать действительности, однако после «сшивания» отдельных частей получаемая в результате модель может вести себя не так, как имитируемая реальная ситуация. Поэтому не следует слепо предполагать, что имитационная модель как единое целое является в достаточной степени точной только потому, что каждая из составляющих ее частей, рассматриваемая изолированно от других, представляется вполне адекватной описываемому процессу. Это предостережение особенно важно по той причине, что цель имитационного моделирования заключается в воспроизведении поведения всей функциональной системы в целом, а не отдельных ее частей.

Параметры и измеряемые характеристики модели. Абстрактное описание элементов имитационной модели – это только полдела. Необходимо еще собрать достаточно данных, которые описывали бы эти элементы полно и адекватно. Недостаток в такого рода данных может повлечь за собой необходимость пересмотра самого способа построения модели.

Особую осторожность следует проявлять в тех случаях, когда используются данные, полученные путем экстраполяции, а также в тех случаях, когда измеряемые характеристики не стационарны.

Необходимо также проявлять внимательность при имитировании явлений циклического (или периодического) характера. В тех случаях, когда такого рода явления действительно имеют место, при выборе переменных, подлежащих измерению в процессе эксперимента, следует быть весьма осмотрительным. Если, например, учитывать только «конечные значения», то может оказаться, что получаемое решение будет отличаться сильной чувствительностью к степени точности задания имитируемого планового периода.

Применение имитационных моделей в большинстве случаев сопряжено с учетом случайных событий. Так, например, в имитационных моделях очередей к числу случайных переменных относятся время поступления заявки на обслуживание и время обслуживания; в моделях управления запасами такого рода переменными являются уровни спроса и сроки поставок; в моделях же, описывающих научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы, случайными оказываются события, связанные с открытиями новых видов продукции. При имитировании такого типа процессов нередко приходится проигрывать процесс на модели тысячи и десятки тысяч раз с тем, чтобы адекватно отразить закономерности соответствующего распределения вероятностей.

2.9.6. Использование случайных чисел.

В имитационных моделях выборка, соответствующая любому вероятностному распределению, производится на основе использования случайных чисел из интервала [0,1]. Прежде чем объяснить, как осуществляются выборки, введем статистические условия, которым должны удовлетворять случайные числа в интервале [0,1].

1. Все числа из континуума [0,1] могут появляться с одинаковой вероятностью.

2. Последовательные положения точек в интервале [0,1] генерируются абсолютно случайным образом, т.е. они независимы и некоррелированные.

Для получения случайных чисел в интервале [0,1] применяются арифметические методы, причем главным образом те, которые достаточно легко реализуются с помощью ЭВМ. Наиболее часто используется мультипликативный конгруэнтный метод, когда случайные числа генерируются с помощью рекурсивной формулы. Соответствующие статистические проверки показывают, что этот метод позволяет получать случайные числа, распределенные равномерно в интервале [0,1]. Кроме того, параметры рекурсивного выражения можно подобрать так, чтобы количество случайных чисел, полученных до того, как они начнут повторяться, было достаточным для проведения одного полного прогона модели.

В табл. 2.9.1 приведено 180 случайных чисел, полученных таким методом. Для удобства стоящая слева десятичная запятая опущена.

Таблица 2.9.1

058962	352943	586999	345500	790012	630566	364609	128099
673284	497110	769774	234646	767638	286650	811154	287072
479909	422037	893129	821570	891254	953397	699089	391962
948578	826125	429090	139412	974665	593277	787674	386551
613960	230243	902490	342756	519930	712470	595449	160463
934123	603734	178239	655823	210783	542293	356707	259606
347270	747163	357549	420822	306993	054556	564395	895364
692630	697501	551336	030504	220998	051455	319740	455344
854407	028341	480379	627205	439814	994034	005875	088946
480798	084273	178448	312230	267349	794021	357985	001720
788457	715256	195421	735221	652531	298202	916428	814746
640618	510998	300419	203535	517436	272799	979865	424002
725225	535325	684924	291621	585405	887838	058382	359749
633051	560561	665907	950391	709176	701533	826616	645896
435829	801902	888953	116597	699005	144655	576880	159382
764371	151787	031383	822207	650795	504908	172286	489546
386699	914280	005383	803777	774217	411304	499874	297506
286166	039436	661127	611829	720835	818541	423735	175532
239580	857687	989902	220226	412235	491375	238133	006422
895334	314207	827234	135543	368147	988993	620635	822874
351526	703292	056012	006447	534569	149393	085234	166865
234088	902734	309612	733068	611896	073756	935472	949026
274906	108197	175026	076380				

Можно, разумеется, утверждать, что случайные числа, получаемые с помощью арифметических операций, не являются истинно случайными, даже если они удовлетворяют статистическим тестам. Действительно, все эти числа «определены» заранее, как только задано начальное значение для рекурсивного выражения. Поэтому полученные подобным образом числа иногда называются псевдослучайными в отличие от истинно случайных, для генерации которых используется совершенно иной подход.

Одно из главных преимуществ арифметического метода генерации случайных чисел состоит в возможности получать одинаковые последовательности чисел каждый раз, когда это требуется. Так, если сравниваются две различные программы, использование одинаковых последовательностей случайных чисел дает гарантию того, что различие в результатах обусловлено разницей в программах, а не ошибкой эксперимента.

Имея генератор случайных чисел R, распределенных равномерно, можно получать выборки, распределенные по другим законам, например, экспоненциальное распределение времени обслуживания может быть получено из формулы:

$$p = -(1/\lambda)\ln R, \qquad (2.9.1)$$

где λ – средняя скорость обслуживания.

Покажем на простом примере, каким образом используются выборки случайных чисел из интервала [0, 1].

Пример 2.9.2. Игра с бросанием монеты.

В игре с монетой игрок А выигрывает у игрока В 10 руб., если монета падает решеткой вверх (Р), и проигрывает 10 руб., если выпадает герб (Г). Предположим, что монета правильная, так что события «Р» (как и события «Г») имеют место в 50% случаев. Другими словами, вероятность исхода Р и вероятность исхода Г равняются

$$P\{Р\} = 0{,}5,\ P\{Г\} = 0{,}5.$$

Поскольку все случайные числа по определению равномерно распределены в интервале [0,1], можно предложить следующие правила для определения исхода игры. Обозначим генерируемое случайное число через R и будем считать, что если $0 < R < 0.5$, то имеет место исход Р, а если $0.5 < R < 1$, то будет исход Г. Такое распределение R в интервале [0,1] в точности эквивалентно условию равновероятности Р и Г.

Для того, чтобы показать, как моделируется игра с бросанием монеты, предположим, что игроки А и В повторяют бросание 10 раз. Это эквивалентно получению 10 случайных чисел в интервале [0,1]. Воспользуемся первыми 10 числами из первого столбца табл. 2.9.1, которые и будут представлять указанные бросания монеты. Последовательными исходами игры будут соответственно Р, Г, Р, Г, Г, Г, Р, Г, Г и Р. Окончательно в результате 10 бросаний игрок А проигрывает игроку В 60-40=20 руб. Естественно, что с ростом числа бросаний мы будем ожидать «ничейного» результата, т. е. когда ни один из игроков не сумеет выиграть.

Таким образом, чем продолжительнее прогон, тем меньше разброс результатов, а значит, тем более точные оценки мы получаем. Другими словами, для улучшения результатов моделирования предпочтительнее получать наблюдения после достижения стационарных условий.

2.9.7. Имитационное моделирование как статистический эксперимент.

Основная цель рассмотренного выше примера – привлечь внимание к тому факту, что имитационное моделирование не ограничивается разработкой модели и написанием машинной программы; моделирование представляет собой статистический эксперимент, и его результаты необходимо рассматривать именно с этой точки зрения. В частности, для любого эксперимента, связанного с моделированием, необходимо ответить на следующие вопросы:

1. Какова должна быть продолжительность прогона для достижения стационарных условий?
2. Каким образом получать статистически независимые наблюдения?
3. Каким образом можно получать результаты моделирования, оставляя затраты на разумном уровне и не слишком жертвуя точностью?
4. Сколько наблюдений требуется для достижения необходимого значения доверительных интервалов?

Эти вопросы никак нельзя считать простыми, и мы пока отложим их обсуждение. Рассмотрим приемы построения и эксплуатации отлаженной имитационной модели, имея в виду некоторые важные идеи, которые не удается описать с помощью простого метода Монте-Карло.

Первый шаг к созданию имитационной модели состоит в описании реально существующей системы с использованием характеристик основных событий. Событие определяется как точка во времени, в которой происходят изменения характеристик системы. Обычно изменения имеют место в тех случаях, когда кончается один процесс (или несколько процессов) и начинаются другие. Для получения требуемых результатов моделирования достаточно наблюдать систему в те моменты, когда происходят события.

Для иллюстрации идеи использования событий в имитационном моделировании рассмотрим пример системы массового обслуживания с одним узлом обслуживания.

Пример 2.9.3. Целью моделирования такой системы является оценивание операционных характеристик обслуживающей системы, в том числе среднего времени пребывания клиента в очереди, средней длины очереди и доли времени простоя системы. Операционные характеристики процесса массового обслуживания могут менять свои значения либо в момент поступления дополнительного требования на обслуживание, либо при завершении обслуживания. К обслуживанию очередного клиента могут приступить немедленно, но не исключена и необходимость ожидания, когда клиенту придется занять место в очереди. С другой стороны, после завершения обслуживания система может приступить к обслуживанию следующего клиента. Однако при отсутствии очереди система начинает простаивать. Можно получить необходимую информацию, наблюдая различные условия, которые возникают при наступлении того или иного события. Например, можно следить за длиной очереди следующим образом. При поступлении нового клиента длина очереди увеличивается на единицу, если система функционирует. Аналогично длина очереди уменьшается на единицу, если обслуживание завершено и очередь непустая.

Для эксплуатации любой имитационной модели необходимо выбрать единицу времени. В зависимости от природы моделируемой системы такой единицей может быть минута, месяц и т.п. Например, при моделировании работы аэропорта в качестве единицы времени можно использовать и одну минуту, если интенсивность работы аэропорта высокая (крупный город), и один час, если аэропорт не очень загружен (небольшой город).

Покажем теперь, как эксплуатируется типичная имитационная модель. Допустим, что надо моделировать работу системы в течение T единиц времени. Работа начинается с данными, относящимися к нулевому моменту времени, и отмечаются соответствующие события на шкале времени в хронологическом порядке. Таким образом, модель функционирует, «перепрыгивая» от одного события к другому, непосредственно за ним следующему. Каждое событие сопровождается корректировкой протокола, отражающего возможные изменения в показателях функционирования. Резкие переходы (скачки), совершаемые моделью при переходе от одного события к другому, указывают на то, что процесс протекает в дискретном времени, откуда появилось название «дискретное моделирование».

Пусть в среднем в систему поступает λ=3 клиента в час, а время обслуживания одного клиента равно 0.2 ч. или 0.6 ч. с равной вероятностью 0.5. Клиенты обслуживаются согласно дисциплине «первым пришел – первым обслуживаешься»; длина очереди, а также источник поступления клиентов не ограничены. Пусть система начинает работу при пустой очереди, тогда первая заявка на обслуживание поступает через

$$t = -(1/3)\ln 0.058962 = 0.94 \text{ ч.}$$

(используем формулу (2.9.1) для получения случайных чисел, распределенных по экспоненциальному закону, при этом берем псевдослучайные числа из табл.2.9.1).

Следующая заявка поступит в момент

$$t = 0.94 + (-1/3)\ln 0.673284 = 1.07.$$

Время обслуживания первого клиента, задаваемое очередным (третьим) случайным числом R= 0.479909 из табл. 2.9.1, равно 0.2 ч, тогда время окончания его обслуживания будет равно 0.94+0.2=1.14, значит, второй клиент будет стоять в очереди 1.14 –1.07=0.07 ч. Третья заявка поступает в момент $t=1.07+(-1/3)\ln 0.948578=1.09$ и становится в очередь. Следующая заявка поступает в момент

$$t = 1.09 + (-1/3)\ln 0.61396 = 1.25.$$

Второй клиент начинает обслуживание в 1.14 и оканчивает (R=0.934123) в 1.14+0.6=1.74, значит, третий клиент находится в очереди 1.74 –1.09=0.65 и т.д.

Процедура повторяется до тех пор, пока не будет промоделирован весь интервал T. После этого можно определить различные характеристики системы массового обслуживания, такие как доля времени простоя, среднее время ожидания, средняя длина очереди и т.п. Процедура имеет большое сходство с физическим экспериментом.

Пример 2.9.4. Построим имитационную модель системы управления запасами.

Пусть ежедневно вначале учитываются объемы заказов на пополнение, подлежащие реализации в данный день, осуществляются поставки клиентам и, наконец, производится оценка оставшегося объема запасов и оформляется (при необходимости) дополнительный заказ на пополнение запасов, который исполняется через L дней.

Допустим, что заказывается Q единиц продукции всякий раз, когда имеющийся уровень наличия запасов меньше либо равен s.

Процедура 1. Просматриваем последовательно дни с t=1 до t=T. Если подошел срок исполнения заказа на пополнение, то объем наличных запасов увеличиваем на Q.

Процедура 2. Генерируем для дня t коммерческий спрос в объеме q, предполагая для него некоторое распределение вероятностей (используем генератор случайных чисел или другие методы, обеспечивающие получение случайных величин заданного распределения).

Процедура 3. Сокращаем объем наличных запасов на величину q. Сравниваем остаток с уровнем s. Если остаток меньше либо равен s, устанавливаем срок исполнения заказа на пополнение на t + L. Переходим к процедуре 1.

В результате эксплуатации данной имитационной модели могут быть получены количественные показатели, характеризующие средний ежедневный объем наличных запасов, число случаев неудовлетворенного спроса, количество дней, когда оформлялся заказ на пополнение и т.п.

Пусть Q=2, s=1, L=2. Предположим, что спрос q может принимать значения 1 или 3 с вероятностями 0.5. Начальные условия для первого дня: наличные запасы равны 2, заказа на пополнение нет.

Проимитируем данную систему управления запасами на 20-дневном интервале, генерируя случайный спрос с помощью бросания монеты:

орел – q =1, решка – q =3. Результаты занесем в табл.2.9.2

Таблица 2.9.2.

День	Запасы на утро	спрос	На какой день пополняем?	Удовлетворение спроса в %
1	2	3	На 3	66.7
2	0	3		0
3	0+2	3	На 5	66.7
4	0	3		0
5	0+2	1	На 7	100
6	1	1		100
7	0+2	1	На 9	100
8	1	3		33.3
9	0+2	1	На 11	100
10	1	1		100
11	0+2	1	На 13	100
12	1	3		33.3

13	0+2	3	На 15	66.7
14	0	1		0
15	0+2	1	На 17	100
16	1	3		33.3
17	0+2	1	На 19	100
18	1	1		100
19	0+2	1	На 21	100
20	1	3		33.3

Можно вычислить теперь средний процент удовлетворения спроса:

$$(0\times3+33.3\times4+66.7\times3+100\times10)/20=66.66,$$

средний ежедневный объем наличных запасов:

$$(0\times3+7\times1+10\times2)/20=1.35.$$

Модель несколько усложнится, если избыток спроса (по отношению к уровню запасов) прибавляется к спросу в последующий интервал времени.

Имитационные модели можно также применять при исследовании поведения системы управления запасами в условиях альтернативных вариантов политики подачи заказов. Это позволит администрации выбрать тот вариант, который наилучшим образом отвечает поставленным целям.

До сих пор рассматривались лишь такие имитационные модели, которые в определенной степени аппроксимируют реальные ситуации. Их назначение – имитирование условий функционирования операционных систем с целью определения последствий принятия тех или иных управляющих решений. К данному классу моделей тесно примыкают имитационные модели, с помощью которых пытаются решать задачи поиска цели и целенаправленного поведения. В этих моделях обнаруживаются элементы так называемого искусственного интеллекта.

К числу широко известных примеров комьютерных программ, в которых заложены элементы искусственного интеллекта, относятся программы игры в шахматы и шашки. Имели место случаи, когда такого рода программы находили применение и в связи с решением задач организационного управления. Среди этих приложений можно выделить самостоятельную группу, в которой основным объектом исследования являются бихевиориальные (поведенческие) качества руководителя. Мерой эффективности модели бихевиориальной ориентации является ее способность генерировать решения, согласующиеся с управляющими решениями, которые вырабатывает личность, чье поведение модель имитирует.

Другая группа моделей нацелена на решение сложных комбинаторных задач, аналогичных задачам, рассмотренным в теме 2.4. Методы, в которых используются модели данного класса, иногда называют эвристическими. В частности, ряд моделей эвристического характера был разработан в связи с решением комплексных задач календарного планирования. Приведенный ниже пример поможет читателю уловить основную идею метода эвристического программирования.

Пусть с помощью имитационной модели пытаются построить такой график размещения заказов на предприятии с мелкосерийным производством, при котором имеющееся оборудование используется с максимальной эффективностью. Машинное имитирование начинается с пробного размещения нескольких заказов. Затем определяется следующий заказ, подлежащий включению в разрабатываемый график, и рассматриваются различные ограничения, определяются даты исполнения и подбирается оборудование требуемой производительности. В результате такого анализа ЭВМ может пересмотреть график размещения некоторых предыдущих заказов. Короче говоря, в машинной модели заложена стратегия «продвижения вперед с учетом ретроспективных данных». Такая модель является самообучающейся. Она опирается на метод «проб и ошибок» и после серии последовательных тестов приводит к одному из допустимых графиков размещения заказов. Если формирующие стратегию предписания разработаны достаточно тщательно, этот график, как правило, оказывается вполне удовлетворительным. Нередко получаемый график является почти оптимальным; при этом степень оптимальности оценивается с учетом конкретного критерия эффективности, который по построению содержит элементы эвристики, заложенные в самой стратегии.

В последнее время деловые игры нашли широкое применение в области подготовки кадров административных работников. Они используются также при анализе динамических характеристик больших систем, функционирующих в условиях конкуренции с другими системами, каждая из которых придерживается своей «стратегии поведения».

Мы рассмотрели метод Монте-Карло, в котором всем переменным модели ставится в соответствие определенное множество дискретных значений. Данный метод позволяет на основе собранной исходной информации сгенерировать для каждой переменной соответствующее распределение вероятностей. Из этих распределений с помощью случайных чисел получают значения переменных модели, которые используют затем в процессе моделирования.

Методы имитационного моделирования, хотя и не приводят к получению оптимальных решений, как, например, методы линейного программирования, однако, позволяют выработать направления политики, приводящей к лучшим результатам. Но прежде, чем внедрять какой-либо из результатов, изученных по имитационной модели, в практику, необходимо произвести оценку ее надежности и, осуществив расчеты на более длительный период, получить репрезентативные характеристики. Обычно расчеты по имитационным моделям проводятся с помощью пакетов прикладных программ.

2.9.8. Практический блок

Пример

Корпорация "ELA" занимается производством легковых автомобилей. Аккумуляторы для модели "Lunar" компания закупает на стороне, у внешнего поставщика. На основе прошлого опыта специалисты "ELA" оценили, что спрос на аккумуляторы за неделю можно аппроксимировать нормальным распределением со средним значением 500 и стандартным отклонением 10 для промежутка от 470 до 530.

Начальный запас аккумуляторов составляет 2000 шт., причем администрация компании приняла решение о подачах заказов на партии аккумуляторов размером в 2500 шт. каждый раз, когда их запас опускается ниже уровня в 1500 шт. Кроме того, прошлый опыт показывает, что интервалы времени между подачей заказа и осуществлением поставок изменяются следующим образом:

Таблица 2.9.3.

Время поставки заказа, недель	1	2	3	4
Вероятность	0,20	0,50	0,25	0,05

Единичная стоимость хранения запасов равна 0,50 ф. ст. в неделю и рассчитывается для общего размера запаса, оставшегося на конец недели. Стоимость заказа – 50 ф. ст., а отсутствие аккумуляторов на складе оценивается в 20 ф. ст. в неделю.

Используя имитационную модель для периода в 20 недель, оценим среднюю стоимость проведения изложенной выше политики в неделю. Принимается предпосылка о том, что все расчеты производятся в конце недели, а подачи заказов и поставки по ним – в начале недели.

Решение. Переменными являются спрос и время поставки заказа. Так как спрос аппроксимируется непрерывным нормальным распределением, будем моделировать переменную спроса с шагом в 5 аккумуляторов. Например, вероятность спроса, равного 510 аккумуляторам, будет оцениваться с помощью соотношения P(507,5< спрос < 512,5). Используя формулу Муавра-Лапласа, построим таблицы нормального распределения интервалов случайных чисел для времени поставки заказа (табл.2.9.4) и для спроса за неделю (табл.2.9.5).

Таблица 2.9.4. Распределение интервалов случайных чисел для времени поставки заказа

Время поставки, недель	Вероятность	*Кумулятивная вероятность*	*Случайные числа*
1	0,20	0,20	00-19
2	0,50	0,70	20-69
3	0,25	0,95	70-94
4	0,05	1,00	95-99

Таблица 2.9.5. Распределение интервалов случайных чисел для спроса за неделю

Спрос за неделю	Вероятность	*Кумулятивная вероятность*	*Случайные числа*
470	0,003	0,003	00-002
475	0,009	0,012	003-011
480	0,028	0,040	012-039
485	0,066	0,106	040-105
490	0,121	0,227	106-226
495	0,175	0,402	227-401
500	0,197	0,599	402-598
505	0,175	0,774	599-773
510	0,121	0,895	774-894
515	0,066	0,961	895-960
520	0,028	0,989	961-988
525	0,009	0,998	989-997
530	0,003	1,000	998-999

Теперь воспользуемся генератором случайных чисел и осуществим моделирование, результаты которого приведены в табл.2.9.6.

Таблица 2.9.6. Моделирование управления запасами

Неделя	*Запас на начало недели*	*Спрос*		*Запас на конец недели*	*Повторный заказ, Да/нет*	*Время поставки*		*Дефицит*
		Случайное число	*Объем*			*Случайное число*	*Недели*	
1	2000	034	480	1520				
2	1520	743	505	1015				
3	1015	738	505	510	Да	95	4	
4	510	636	505	5				
5	5	964	520	0				515
6	0	736	505	0				505
7	2500	614	505	1995				
8	1995	698	505	1490				
9	1490	637	505	985	Да	73	3	
10	985	162	490	495				
11	495	332	495	0				
12	2500	616	505	1995				
13	1995	804	510	1485				
14	1485	560	500	985	Да	10	1	
15	3485	111	490	2995				
16	2995	410	500	2495				
17	2595	959	515	1980				
18	1980	774	510	1470				
19	1470	246	495	975	Да	76	3	
20	975	762	505	470				
		Итого	10050	22865				1020

Подведем итоги:

Среднее значение спроса – 10050/20 = 502,5 аккумуляторов в неделю.

Средний размер запаса на конец недели – 22865/20 = 1143,25 аккумуляторов в неделю.

Средний размер дефицита – 1020/20 = 51,0 аккумуляторов в неделю.

Число заказов, поданных в течение 20 недель, равно 4, следовательно, среднее число заказов в неделю – 4/20 = 0,2.

Ожидаемая стоимость в неделю равна

1143,25×0,50+51×20+0,2×50=1602ф. ст.

Как и в предыдущих примерах, процесс моделирования следует продолжить, чтобы убедиться, что достигнутые условия действительно характеризуют стационарное состояние модели.

Тесты

1. Когда применяется при исследовании операций “имитационное” моделирование?

   а) оно применяется к процессам, в ход которых может время от времени вмешиваться человеческая воля;

   б) оно применяется к процессам, в ход которых не может время от времени вмешиваться человеческая воля;

   в) в любых случаях;

   г) когда необходимо найти оптимальное решение;

   д) вместе с аналитическим моделированием.

2. К какому методу следует прибегнуть в случаях, когда аналитические методы неприменимы?

   а) методу динамического программирования;

   б) к универсальному методу статистического моделирования;

   в) методу целочисленного программирования;

   г) методу нелинейного программирования;

   д) методу имитационного моделирования.

3. Когда применяются метод Монте-Карло в задачах исследования операций?

   а) при моделировании сложных, комплексных операций, где присутствует много взаимодействующих случайных факторов;

   б) при проверке применимости более простых, аналитических методов и выяснении условий их применимости;

   в) в целях выработки поправок к аналитическим формулам типа “эмпирических формул” в технике;

   г) содержимое п.п. а, б;

   д) содержимое п.п. а, б, в.

4. В чем главный недостаток статистических моделей?

   а) их громоздкость и трудоемкость;

   б) огромное число реализации, необходимое для нахождения искомых параметров с приемлемой точностью;

   в) требует большого расхода машинного времени;

   г) результаты статистического моделирования гораздо труднее осмыслить, чем расчеты по аналитическим моделям, и соответственно труднее оптимизировать решение;

   д) все вышеназванное.

5. Какие разновидности датчиков случайных чисел Вы знаете?

   а) вращающийся барабан, в котором перемешиваются перенумерованные шарики (или жетоны);

   б) при ручном применении метода Монте-Карло таблицы случайных чисел;

   в) специальные физические датчики, которыми оснащены многие вычислительные машины;

г) вычислительные алгоритмы, по которым сама машина вычисляет так называемые “псевдослучайные числа”;
д) все вышесказанное.

Ответы к тестам

1) в 2) д 3) а 4) а 5) д

Задания и задачи

Задача 1. Городская администрация контролирует услуги микроавтобусов, которые развозят туристов и покупателей с железнодорожного вокзала в различные районы города. О потоке пассажиров, прибывающих на автобусную остановку, находящуюся около железнодорожного вокзала, были собраны следующие данные:

Время между моментами прибытия пассажиров, мин.	0	1	2	3	4	5	6
вероятность	0,04	0,16	0,24	0,28	0,16	0,10	0,02

По расписанию микроавтобусы должны прибывать каждые 10 мин, однако изменчивость транспортных условий приводит к следующему распределению их прибытия:

Интервал между последовательными прибытиями автобусов, мин.	8	10	12	14	16
Вероятность	0,10	0,38	0.28	0,15	0,09

Число мест в автобусе определяется следующим распределением:

Число свободных мест	0	1	2	3	4	5	6
Вероятность	0,06	0,18	0,27	0,34	0,11	0,03	0,01

Требуется:

А). Построить имитационную модель потока из 30 пассажиров, прибывающих на автобусную остановку, в предположении, что моделируемый счетчик времени установлен на нулевой отметке.

Б). Оценить среднее время ожидания автобуса пассажиром и среднюю длину очереди.

Задача 2. По данным проведенных наблюдений было установлено, что интервалы между поступлениями жалоб от покупателей в крупном универмаге подчиняются следующему распределению:

Время между поступлениями жалоб, мин.	0-4	4-8	8-12	12-16
Вероятность	0,25	0,45	0,20	0,10

Жалобы покупателей рассматриваются одним служащим универмага, однако, все покупатели, которые сочли свои претензии "серьезными" или которым пришлось ждать 5 мин и более, прежде чем быть принятыми служащим, который рассматривает жалобы, требуют переговоров с главным администратором, который принимает их жалобы самостоятельно. Продолжительность рассмотрения жалоб клиентов соответствующим служащим аппроксимируется нормальным распределением со средним значением 7 мин и стандартным отклонением, равным 2 мин. Было оценено, что 20% покупателей, имеющих жалобы, считают свои претензии "серьезными".

Требуется:

а) Пользуясь приведенными выше данными, таблицей случайных чисел и нижеследующей таблицей, полученной из таблицы стандартного нормального распределения, описать этапы построения имитационной модели потоков прибытия и обслуживания клиентов в условиях данной системы.

Случайное число	Число отклонений от среднего значения	Случайное число	Число отклонений от среднего
00-01	-2,5	61-77	+0,5
02-04	-2,0	78-88	+1,0
05-10	-1,5	89-94	+1,5
11-21	-1,0	95-97	+2,0
22-38	-0,5	98-99	+2,5
39-60	0		

б) Используя приведенные ниже случайные числа, построить имитационную модель обслуживания 10 имеющих жалобы покупателей, если претензии некоторых из них являются серьезными.

Интервалы между прибытием покупателей, мин	09	06	51	62	83	61	59	20	82	68
Серьезные претензии, кол-во	5	0	7	3	8	2	9	8	1	6
Продолжительность обслуживания	39	60	50	31	02	02	83	90	71	16

в) Используя построенную имитационную модель, оценить долю покупателей, которые действительно встретятся с главным администратором универмага. Затем оценить общее время, которое главный администратор затратит на рассмотрение жалоб в предположении, что у него 8-часовой рабочий день, а время, которое он затрачивает на рассмотрение одной жалобы, подчиняется соответствующему распределению для служащего универмага, рассматривающего жалобы клиентов.

г) Кратко поясните, каким образом можно использовать имитационную модель для принятия решения о целесообразности или нецелесообразности принятия на работу еще одного служащего, рассматривающего жалобы покупателей.

Задача 3. Корпорация "Pomulus Products" производит операции со всеми клиентами в 30-дневный срок. Как показывает опыт, 80% всех счетов закрывается в течение одного месяца, а 70% оставшихся счетов – в течение следующего месяца после того, как клиенту посылается стандартное письмо-напоминание о просроченных счетах. Половина счетов остается неоплаченной в течение двух месяцев. После того, как было отправлено письмо, содержащее "последнее предупреждение", выплаты производятся в течение третьего месяца.

Со всеми счетами, которые оказались неоплаченными в течение трех месяцев, поступают одним из двух возможных способов. Если сумма на счету превышает 1000 ф. ст., то для того, чтобы вернуть деньги, компания прибегает к законодательным процедурам. Принимая во внимание связанные с судебными процедурами издержки, доля исходной суммы, которую, в конечном счете, удается вернуть, варьирует следующим образом:

Доля (%) исходной денежной суммы, которую удается вернуть.	0-40	40-60	60-80	80-100
Вероятность	0,1	0,3	0,4	0,2

Прежде, чем окончательные выплаты будут произведены, проходит, как правило, не менее трех месяцев.

Если денежная сумма на счету составляет менее 1000 ф. ст., то компания продает неоплаченные счета другой компании, специализирующейся на скупке долговых обязательств, получая за это 50% исходной суммы, выплаты которой производятся в течение одного месяца, т.е. к концу четвертого месяца.

Суммы счетов, выписанных компаний за последние месяцы, распределяются следующим образом:

Сумма на счету, ф.ст.	0-200	200-500	500-1000	1000-2000	2000-5000
Вероятность	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Примем предпосылки о том, что связь между суммой счета в момент его оплаты и долей общей суммы, которую удается возвратить, отсутствует, а также о том, что оплата всех счетов производится в последний день каждого месяца. Темпы роста основного капитала компании равны 1,5% в месяц.

Требуется:

А). Определить вероятность того, что выплаты по любому счету будут произведены в конце:

второго месяца;

третьего месяца;

четвертого месяца;

шестого месяца.

Б). Определить, какова ожидаемая стоимость в настоящий момент нового счета, размер неоплаченной суммы которого составляет 2000 ф. ст.?

Значения ежемесячных коэффициентов дисконтирования:

Месяц	1	2	3	4	5	6
Коэффициент	0,9852	0,9707	0,9563	0,9422	0,9283	0,9145

В). Показать, используя указанные ниже случайные числа, каким образом можно построить имитационную модель системы в целом и определить текущее значение стоимости двух моделируемых счетов.

Счет	8	8	7	5	7
Счет	9	9	8	2	9

Задача 4. Администрация корпорации "Hentor Products plc" рассматривает вопрос о покупке новой упаковочной машины с автоматическим управлением. Новая машина позволит ликвидировать две старые, которые в настоящее время используются для упаковки продукта X. Ввиду более высокой автоматизации технологического процесса новая машина также позволит сократить затраты на оплату труда, а ввиду ее более высокой производительности – увеличить объемы производства. В связи со значительным ростом спроса на продукт X, по оценкам специалистов, установка новой машины приведет к увеличению прибыли за каждый из ближайших трех лет. Однако ввиду неопределенности спроса ежегодный приток капитала (включая сумму экономии), вызванный покупкой новой машины, нельзя оценить точно, поэтому при его расчете за каждый год использовались следующие вероятностные оценки:

Ежегодный приток капитала, тыс. ф.ст.					
1-й год	вероятность	2-й год	вероятность	3-й год	вероятность
10	0,3	10	0,1	10	0,3
15	0,4	20	0,2	20	0,5
20	0,3	30	0,4	30	0,2
		40	0,3		

Поскольку в объемах продаж продукта X также существует неопределенность, то для решения вопроса о целесообразности или нецелесообразности покупки новой упаковочной машины необходимо учитывать величину притока капитала только за ближайшие три года. Чистая стоимость новой машины за вычетом ликвидационной стоимости старого оборудования составит 42000 ф. ст. Воздействие налоговой политики можно не учитывать.

Требуется:

А). Не принимая во внимание изменение стоимости во времени, определить, какая из комбинаций ежегодных притоков капитала приведет к отрицательному значению общего притока капитала, а также вероятность появления этого события.

Б). Рассчитать на основе средних значений притока капитала за каждый год текущее значение чистой стоимости новой машины, если стоимость капитала для компании равна 15%. Соответствующие коэффициенты дисконтирования имеют следующие значения:

Год	Значение коэффициента дисконтирования
1	0,8696
2	0,7561
3	0,6575

В). Построив имитационную модель расчета текущего значения чистой стоимости, оценить значение риска, соответствующее данной ситуации. При моделировании 5 множеств притоков капитала используйте приведенные значения случайных чисел. На основе полученных по имитационной модели результатов рассчитать ожидаемое значение чистой стоимости на настоящий момент и вероятность того, что внедрение новой машины приведет к получению отрицательного значения чистой стоимости на настоящий момент.

	Множество 1	Множество 2	Множество 3	Множество 4	Множество 5
1-й год	4	7	6	5	0
2-й год	2	4	8	0	1
3-й год	7	9	4	0	1

Задача 5. Мойщик машин, который в настоящее время работает на себя, установил свое оборудование на автомобильной стоянке около оживленной транспортной магистрали. На автомобильной стоянке могут находиться одновременно максимум два автомобиля, включая автомобиль, обслуживание которого производится в данный момент, причем в соответствии с местными правилами движения стоянка на дороге запрещена. Следовательно, любой потенциальный клиент, подъезжающий к стоянке в тот момент, когда все места парковки заняты, является потерянным для мойщика машин. В нижеследующей таблице приведены

распределение интервалов прибытия потенциальных клиентов и распределение времени их обслуживания

Время, мин.	Интервалы между прибытиями, %	Длительность обслуживания, %
0-2	15	10
2-4	50	25
4-6	20	30
6-8	5	25
8-10	5	10
10-12	5	0

Требуется:

а) Оценить среднее число потенциальных клиентов в час.

б) Используя приведенные ниже случайные числа, построить имитационную модель работы мойщика машин по обслуживанию 10 потенциальных клиентов и таким образом оценить число потерянных клиентов за 1 ч, пояснив при этом, каким образом генерируются интервалы между прибытиями клиентов и длительность обслуживания.

Номер клиента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Случайные числа: для интервалов прибытия	87	69	19	21	62	07	31	30	60	88
для длительности обслуживания	90	67	83	32	65	18	74	8	18	38

в) Почему оценки, найденные в б), недостаточно надежны, и каковы пути улучшения их обоснованности?

г) Мойщик машин рассматривает вопрос о принятии на работу ассистента. В предположении, что ассистент будет обслуживать клиентов в соответствии с распределением времени обслуживания, приведенным выше для мойщика машин, постройте имитационную модель работы обслуживающего персонала из двух человек по оказанию услуг 10 потенциальным клиентам, используя приведенные выше случайные числа. Оцените число потерянных клиентов в час для новой системы обслуживания. Объясните, почему при сравнении двух имитационных моделей в расчетах по ним лучше использовать одно и то же множество случайных чисел.

д) Если математическое ожидание прибыли на одного клиента равно 50 пенсам, рассчитать размер заработной платы ассистента на основе результатов имитационного моделирования, проведенного ранее.

2.9.9. САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА СТУДЕНТОВ

Рекомендуемые темы рефератов

1. Область применения имитационных моделей.
2. Оптимизация в имитационных моделях.
3. Связь имитационных моделей с задачами управления запасами, системами массового обслуживания.

Литература для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
2. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
3. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. –2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
5. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.

2.10. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ.

2.10.1. Понятие многокритериальности.

Математические методы, описанные выше, преимущественно ориентированны на решение задач организационно-экономического содержания, в которых может быть обоснован и выбран один единственный критерий оптимизации. Спектр подобных задач достаточно широк. Наиболее адекватной областью их применения являются текущие задачи внутрифирменного управления. Однако при анализе крупномасштабных проблем, таких как задачи стратегического планирования, задачи отраслевого, регионального уровня и т.п., затрагивающих разнообразные интересы участников планируемой операции, возникает необходимость оценки вариантов решений по нескольким критериям. Такого рода задачи называются *многокритериальными.* Примеров подобных задач можно приводить множество, но относительно обстоятельное описание примера займет много места именно в силу сложности существа многокритериальной задачи.

Поэтому ограничимся лишь схематической иллюстрацией. Например, необходимо разработать программу реорганизации некоторого предприятия в целях *повышения эффективности его деятельности*. На словах формулировка цели реорганизации звучит весьма привлекательно, но это всего лишь лозунг – призыв к «светлому будущему». А что конкретно имеется в виду под эффективностью в данном случае? Под углом зрения какого критерия надо выбирать решение? С одной стороны, нам хотелось бы обратить в максимум объем производимых работ (услуг) V. Желательно также было бы получить максимальный эффект D. Что касается себестоимости S, то ее хотелось бы обратить в минимум, а производительность труда П – в максимум. При обдумывании задачи может возникнуть еще ряд дополнительных критериев.

Такая множественность показателей эффективности (ряда количественных показателей F_1, F_2,…, из которых одни желательно обратить в максимум, а другие в минимум), называемая *многокритериальностью*, характерна для многих крупномасштабных задач исследования операций.

Спрашивается, можно ли найти решение, одновременно удовлетворяющее всем этим требованиям? Со всей откровенностью ответим: в общем случае нет. Решение, обращающее в максимум один какой-то показатель, как правило, не обращает ни в максимум, ни в минимум другие. Поэтому, как уже отмечалось ранее, часто применяемая формулировка: «достигнуть максимального эффекта при минимальных затратах» представляет собой не более чем фразу и при научном анализе должна быть отброшена.

Как же быть в случае, если все же приходится оценивать эффективность операции по нескольким показателям?

Люди, малоискушенные в исследовании операций, обычно торопятся свести многокритериальную задачу к однокритериальной: составляют некоторую комбинированную функцию от всех показателей и рассматривают ее как один, «обобщенный» показатель эффективности, по которому и оптимизируется решение. Часто такой обобщенный показатель имеет вид дроби, в числителе которой стоят все величины, увеличение которых желательно, а в знаменателе – те, увеличение которых нежелательно. Например, продуктивность и доход – в числителе, время выполнения и расходы – в знаменателе и т.п.

Такой способ объединения нескольких показателей в один не может быть рекомендован, и вот почему: он основан на неявном допущении, что недостаток в одном показателе всегда может быть скомпенсирован за счет другого; например, малая продуктивность – за счет низкой стоимости и т.д. Это, как правило, несправедливо.

Вспомним «критерий для оценки человека», полушутя полусерьезно предложенный когда-то Львом Толстым. Он имеет вид дроби, в числителе которой стоят действительные достоинства человека, а в знаменателе – его мнение о себе. С первого взгляда такой подход может показаться логичным. Но представим себе человека, имеющего незначительные достоинства, но совсем не обладающего самомнением. По критерию Л.И. Толстого такой человек должен иметь бесконечно большую ценность, с чем уж никак согласиться нельзя…

К подобным парадоксальным выводам может привести (и нередко приводит) использование обобщенного показателя в виде дроби, где, как говорят, все, что «за здравие», – в числителе, все, что «за упокой», – в знаменателе.

Нередко применяется и другой, чуть более замысловатый, способ составления обобщенного показателя эффективности – он представляет собой «взвешенную сумму» частных показателей, в которую каждый из них F_i входит с некоторым «весом» a_i, отражающим его важность:

$$F = a_1F_1 + a_2F_2 + \ldots \qquad (2.10.1)$$

(для тех показателей, которые желательно увеличить, веса берутся положительными, уменьшить – отрицательными).

При произвольном назначении весов a_1, a_2,… этот способ ничем не лучше предыдущего (разве тем, что обобщенный критерий не обращается в бесконечность). Его сторонники ссылаются на то, что и человек, принимая компромиссное решение, тоже мысленно взвешивает все «за» и «против», приписывая больший вес более важным для него факторам. Это, быть может, и так, но, по-видимому, «весовые коэффициенты», с которыми входят в расчет разные показатели, не постоянны, а меняются в зависимости от ситуации.

Поясним сказанное элементарным примером. Человек выходит из дому, чтобы ехать на работу, боится опоздать, и размышляет: каким транспортом воспользоваться? Трамвай ходит часто, но идет долго; автобус – быстрее, но с большими интервалами. Можно взять такси, но это дорого.

Перед нами типичная (намеренно упрощенная) задача исследования операций с двумя критериями (показателями). Первый – среднее ожидаемое время опоздания T, которое хотелось бы сделать минимальным. Второй – ожидаемая стоимость проезда S; ее тоже желательно сделать минимальной. Но эти два требования, как мы знаем, несовместимы, поэтому человек должен принять компромиссное, приемлемое по обоим критериям, решение. Возможно, он при этом подсознательно взвешивает все «за» и «против», пользуясь чем-то вроде обобщенного показателя:

$$F = a_1T + a_2S \Rightarrow \min. \qquad (2.10.2)$$

Но беда в том, что весовые коэффициенты a_1, a_2 никак нельзя считать постоянными. Они зависят как от самих величин T и S, так и от обстановки. Например, если человек недавно уже получил выговор за опоздание, коэффициент при T у него, вероятно, увеличится, а на другой день после получки, вероятно, уменьшится коэффициент при S. Если же назначать (как это обычно и делается) веса a_1, a_2 произвольно, то, по существу, столь же произвольным будет и вытекающее из них «оптимальное» решение.

Здесь мы встречаемся с очень типичным для подобных ситуаций приемом – «переносом произвола из одной инстанции в другую». Простой выбор компромиссного решения на основе мысленного сопоставления всех «за» и «против» каждого решения кажется слишком произвольным, недостаточно «научным». А вот маневрирование с формулой, включающей (пусть столь же произвольно назначенные) коэффициенты $a_1, a_2,\ldots$, – совсем другое дело. Это уже «наука»! По существу же никакой науки тут нет, и нечего обманывать самих себя.

Нечего надеяться полностью избавиться от субъективности в задачах, связанных с выбором решений. Даже в простейших, однокритериальных задачах она неизбежно присутствует, проявляясь хотя бы в выборе показателя эффективности и математической модели явления. Тем более неизбежна субъективность (грубо говоря, произвол) при выборе решения в многокритериальной задаче. Правда, бывают редкие случаи, когда достаточно ознакомиться со значениями всех показателей для каждого варианта, чтобы сразу стало ясно, какой из них выбрать. Представим себе, например, что некий вариант решения имеет преимущество над другими *по всем показателям*; ясно, что именно его следует предпочесть. Но гораздо чаще встречаются случаи, когда ситуация неочевидна: один из показателей тянет в одну сторону, другой – в другую. При этом всегда полезно провести дополнительные расчеты, пользуясь, быть может, даже формулами типа (2.10.1), но, не доверяя им слепо, а сохраняя к ним критическое отношение.

Выходит, что математический аппарат не может нам ничем помочь при решении многокритериальных задач? Отнюдь нет, он может помочь, и очень существенно. Прежде всего, он позволяет решать *прямые* задачи исследования операций, т.е. для любого решения x находить значения показателей эффективности $F_1, F_2,\ldots$, сколько бы их не было (кстати, для прямых задач многокритериальность – не помеха. Под прямыми задачами Е.С.Вентцель[9] понимает задачи, которые отвечают на вопрос: что будет, если в заданных условиях принять некоторое решение $x \in X$? Например, чему будет при этом равен показатель эффективности или их набор. Обратные задачи отвечают на вопрос: как выбрать решение x, для которого показатель эффективности F достигнет экстремального значения.). И, во-вторых, что особенно важно, он помогает «выбраковать» из множества возможных решений X заведомо неудачные, уступающие другим по всем критериям.

2.10.2. Оптимальность по Парето.

Покажем, как это делается. Пусть имеется многокритериальная задача исследования операций с k критериями F_1, F_2,…, F_k. Для простоты предположим, что все эти величины желательно максимизировать. Пусть в составе множества возможных решений есть два решения x_1, x_2 такие, что значения всех критериев F_1, F_2,…, F_k для первого решения больше или равны соответствующим критериям для второго решения, причем хотя бы один из них действительно *больше*. Тогда из состава множества X решение x_2 вытесняется (говорят «доминируется») решением x_1.

В результате такой процедуры отбрасывания заведомо невыгодных решений во множестве X сохраняются только *эффективные* («по Парето» или «паретовские») решения, характерные тем, что ни для одного из них не существует доминирующего решения.

(Вильфредо Парето (1848-1923) – итальянский социолог и экономист).

Проиллюстрируем прием выделения паретовских решений на примере задачи с двумя критериями: F_1 и F_2 (оба требуется максимизировать). Множество X состоит из конечного числа n возможных решений x_1, x_2,…, x_n. Каждому решению соответствуют определенные значения показателей F_1, F_2; будем изображать решение точкой на плоскости с координатами F_1, F_2 и занумеруем точки соответственно номеру решения (рис. 2.10.1).

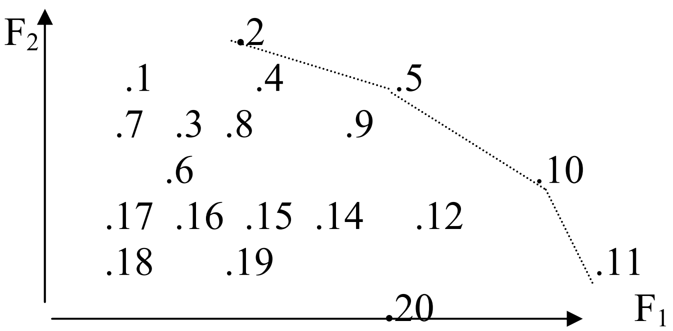


Рис. 2.10.1. Оптимальность по Парето.

Очевидно, из всего множества X эффективными (доминирующими) будут только решения x_2, x_5, x_{10}, x_{11}, лежащие на правой верхней границе области возможных решений (см. точки, соединенные пунктиром), причем x_{11} – наилучшее по критерию F_1, x_2 – по критерию F_2. Дело лица, принимающего решение, выбрать тот вариант, который для него предпочтителен и «приемлем» по обоим критериям.

Аналогично строится множество эффективных решений и в случае, когда показателей не два, а больше (при этом геометрическая интерпретация теряет наглядность, но суть дела сохраняется).

Рассмотрим макроэкономическую модель Финляндии, построенную в 70-х годах. Качество решений оценивалось по четырем критериям:

C_1 – увеличение валового национального продукта (в %);

C_2 – уменьшение инфляции (в %);

C_3 – уменьшение безработицы (в %);

C_4 – уменьшение дефицита внешней торговли (млрд. фин. марок).

В табл.2.10.1 приведены три различных варианта экономической политики.

Таблица 2.10.1. Значения критериев вариантов экономической политики

Вариант решения	C_1	C_2	C_3	C_4
1	– 2,74	8,16	3,28	2,24
2	0,57	9,00	2,81	5,27
3	1,81	8,88	2,64	6,54
Наилучшие решения	7,18	8,16	1,88	1,21

В нижней строке табл.2.10.1 приведены наилучшие значения каждого из критериев, которые можно получить, если оптимизировать по одному критерию, не обращая внимания на другие. Наилучшие значения по всем критериям одновременно не достижимы. Легко видеть, что приведенные альтернативы являются точками множества Парето в четырехмерном пространстве критериев. Действительно, первый вариант дает наименьшее значение инфляции и дефицита внешней торговли, но отрицательный прирост ВНП и большую безработицу. Третий вариант лучший по росту ВНД и уровню безработицы, но худший по дефициту внешней торговли. Эти противоречия отражают типичный характер вариантов многокритериальных решений.

Таким образом, область допустимых решений X может быть разбита на две непересекающиеся части:

– *область согласия*, в которой качество решения может быть улучшено одновременно по всем локальным критериям или без снижения уровня любого из критериев;

– *область компромиссов* (множество эффективных решений), в которой улучшение качества решения по одним локальным критериям приводит к ухудшению качества решения по другим.

Очевидно, что оптимальное решение может принадлежать только области компромиссов, так как в области согласия решение может и должно быть улучшено по соответствующим критериям. Множество эффективных решений легче обозримо, чем множество X. Что касается окончательного *выбора решения*, то он по-прежнему остается прерогативой человека. Только человек, с его непревзойденным умением решать неформальные задачи, принимать компромиссные решения (не строго-оптимальные, но *приемлемые* по ряду критериев) может взять на себя ответственность за окончательный выбор.

Однако сама процедура выбора решения, будучи повторена неоднократно, может послужить основой для выработки некоторых формальных правил, применяемых уже без участия человека. Речь идет о так называемых «эвристических» методах выбора решений. Предположим, что опытный менеджер (или, еще лучше, их группа) многократно выбирает компромиссное решение в многокритериальной задаче исследования операций, решаемой при разных условиях α. Набирая статистику по результатам выбора, можно, например, разумным образом подобрать значения «весов» a_1, a_2,… в формуле (2.10.1), в общем случае зависящие от условий α и самих показателей F_1, F_2,…, и воспользоваться таким обобщенным критерием для выбора решения, на этот раз уже автоматического, без участия человека. На это иногда приходится идти в случаях, когда времени на обдумывание компромиссного решения нет (например, в условиях боевых действий), или же в случае, когда выбор решения передается автоматизированной системе управления.

В некоторых случаях очень полезной оказывается процедура выбора решения в *диалоговом* (или *интерактивном*) режиме, когда компьютер, произведя расчеты, выдает лицу, управляющему операцией, значения показателей F_1, F_2,…, а это лицо, критически оценив ситуацию, вносит изменения в весовые коэффициенты (или иные параметры управляющего алгоритма) и расчеты повторяются.

Часто применяется на практике способ свести многокритериальную задачу к однокритериальной – это выделить один (главный) показатель F_1 и стремиться его обратить в максимум, а на все остальные F_2, F_3,… наложить только некоторые ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше каких-то заданных f_2, f_3,… Например, при оптимизации плана работы следственного управления можно потребовать, чтобы качество работы было максимальным (минимум возврата на доследование), план по раскрываемости – выполнен или перевыполнен, а затраты – не выше заданного уровня. При таком подходе все показатели, кроме одного – главного (качества работы), переводятся в разряд заданных условий α. Некоторый произвол в назначении границ f_2, f_3,…, разумеется, при этом остается; поправки в эти границы тоже могут быть введены в диалоговом режиме.

Существует еще один путь построения компромиссного решения, который можно назвать *методом последовательных уступок*. Предположим, что показатели F_1, F_2,… расположены в порядке убывающей важности. Сначала ищется решение, обращающее в максимум первый (важнейший) показатель $F_1 = F_1^*$. Затем назначается, исходя из практических соображений, с учетом той точности, с которой нам известны входные данные, некоторая «уступка» ΔF_1, которую мы согласны сделать для того, чтобы максимизировать второй показатель F_2. Наложим на показатель F_1 ограничение: он должен быть не меньше, чем $F_1^* - \Delta F_1$, и при этом ограничении ищем решение, обращающее в максимум F_2. Далее снова назначаем «уступку» ΔF_2, ценой которой можно максимизировать F_3, и т.д. Такой способ построения компромиссного решения хорош тем, что здесь сразу видно, ценой какой «уступки» в одном показателе приобретается выигрыш в другом и какова цена этого выигрыша.

Так или иначе, при любом способе ее постановки, задача обоснования решения по нескольким показателям остается не до конца формализованной, и окончательный выбор решения всегда определяется волевым актом *лица, принимающего решения* (ЛПР). Дело исследователя – предоставить в распоряжение ЛПР данные, помогающие ему сделать выбор не «вслепую», а с учетом преимуществ и недостатков каждого варианта решения.

2.10.3. Метод идеальной точки.

Можно рекомендовать еще *метод идеальной точки*, который состоит в отыскании среди паретовских решений ближайшего к *точке утопии*, задаваемой ЛПР. Формулируется цель в виде желаемых значений показателей, и часто выбирается сочетание наилучших значений всех критериев F_1^*, F_2^*,… (обычно эта точка не реализуется при заданных ограничениях, поэтому ее и называют точкой утопии). Ближайшим считается решение x, обращающее в минимум сумму квадратов отклонений значений всех критериев $F_i(x)$ от их наилучших значений F_1^*, F_2^*,…

Пример 2.10.1. Пусть множество допустимых планов описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ 0 \le y \le 2, \\ x + 2y \le 6. \end{cases}$$

Заданы две целевые функции

$$F_1 = x + y + 2,$$
$$F_2 = x - y + 6,$$

которые необходимо максимизировать. На рис. 2.10.2 представлено множество возможных решений в пространстве критериев.

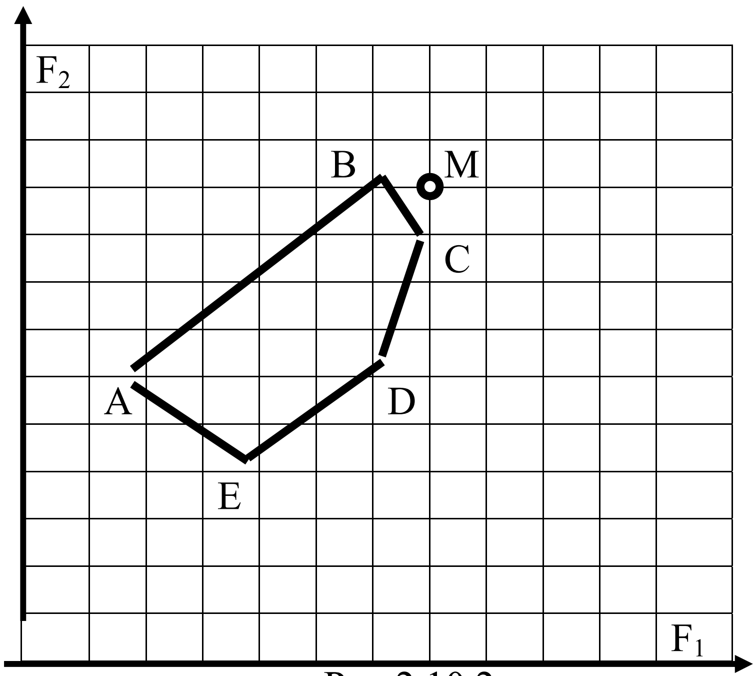


Рис.2.10.2.

Отрезок BC является множеством точек, оптимальных по Парето.

Действительно, в точке B F_2 принимает максимальное значение $F_2=10$ ($F_1=6$), а в точке C F_1 принимает максимальное значение $F_1=7$ ($F_2=9$).

Точка утопии M имеет координаты (7,10).

Идеальная точка – точка на отрезке BC, ближайшая к точке утопии M. Эта точка имеет координаты $F_1=6.5$, $F_2=9.5$, следовательно

$$x + y + 2 = 6.5,$$
$$x - y + 6 = 9.5,$$

откуда $x=4$, $y=0.5$.

2.10.4. Общая классификация эвристических методов решения многокритериальных задач

Основными методами решения многокритериальных задач являются:

- принцип равномерности;
- принцип справедливой уступки;
- принцип выделения одного оптимизируемого критерия;
- принцип последовательной уступки;
- метод идеальной точки.

Принцип равномерности провозглашает целесообразность выбора такого варианта решения, при котором достигалась бы некоторая “равномерность” показателей по всем локальным критериям. Используют следующие реализации принципа равномерности:

- принцип равенства;
- принцип максимина;
- принцип квазиравенства.

Принцип равенства выражается следующим образом:

- оптимальным считается вариант, принадлежащий области компромиссов, при котором все значения локальных критериев равны между собой. Однако случай $f_1=f_2=\ldots=f_k$ может не попасть в область компромиссов или вообще не принадлежать к области допустимых вариантов.

Принцип максимина выражается следующим образом:

- из области компромиссов выбирается вариант с минимальными значениями локальных критериев и среди них ищется вариант, имеющий максимальное значение. Равномерность в этом случае обеспечивается за счёт “подтягивания” критерия с наименьшим уровнем.

Принцип квазиравенства заключается в том, что стремятся достичь приближённого равенства всех локальных критериев. Приближение характеризуется некоторой величиной ε. Это принцип может быть использован в дискретном случае.

Следует отметить, что принципы равенства, несмотря на их привлекательность, не могут быть рекомендованы во всех случаях. Иногда даже небольшое отклонение от равномерности может дать значительный прирост одному из критериев.

Принцип справедливой уступки основан на сопоставлении и оценке прироста и убыли величины локальных критериев. Переход от одного варианта к другому, если они оба принадлежат области компромиссов, неизбежно связан с улучшением по одним критериям и ухудшением по другим. Сопоставление и оценка изменения значения локальных критериев может производиться по абсолютному значению прироста и убыли критериев (принцип абсолютной уступки), либо по относительному (принцип относительной уступки).

Принцип абсолютной уступки – целесообразным считается выбрать такой вариант, для которого абсолютное значение суммы снижения одного или нескольких критериев не превосходит абсолютное значение суммы повышения оставшихся критериев.

Можно показать, что принципу абсолютной уступки соответствует модель максимизации суммы критериев.

Недостатком принципа абсолютной уступки является то, что он допускает резкую дифференциацию уровней отдельных критериев, так как высокое значение интегрального критерия может быть получено за счёт высокого уровня одних локальных критериев при сравнительно малых значениях других критериев.

Принцип относительной уступки – целесообразно выбрать тот вариант, при котором суммарный относительный уровень снижения одних критериев меньше суммарного относительного уровня повышения других критериев.

Можно сказать, что принципу относительной уступки соответствует модель максимизации произведения критериев

Принцип относительной уступки весьма чувствителен к величине критериев, причём за счёт относительности уступки происходит автоматическое снижение "цены" уступки для локальных критериев с большой величиной и наоборот. В результате проводится значительное сглаживание уровней локальных критериев. Важным преимуществом принципа относительной уступки является также то, что он инвариантен к масштабу изменения критериев, то есть его использование не требует предварительной нормализации локальных критериев.

Принцип выделения одного оптимизируемого критерия заключается в том, что один из критериев является оптимизируемым и выбирают тот вариант, при котором достигается экстремум этого критерия. На другие критерии накладываются ограничения.

Принцип последовательной уступки и метод идеальной точки подробно описаны выше.

2.10.5. Практический блок

Пример

Предприниматель покупает в одном месте мужские свитера (в количестве не более 60 штук), в другом – женские (не более 40 штук). С помощью мягкой щетки он делает начес и продает по 2 условные единицы за мужские и по 4 единицы за женские. За некоторый единичный интервал времени он может начесать не более 80 свитеров. Поскольку предприниматель хочет удержаться и на рынке мужских свитеров (пусть их индекс М), и на рынке женских свитеров (пусть их индекс Ж), постольку он интересуется не максимумом суммарного дохода или прибыли, а оценками сразу по нескольким критериям. Пусть закупочные цены в условных единицах таковы: мужские свитера по 1 ед/шт., женские по 2 ед/шт. Оптимизационная задача предпринимателя выглядит так ($x_м$, $x_ж$– объемы закупок):

$F_1=2x_м \to \max,$

$F_2=4x_ж \to \max,$

$F_3= x_м +2x_ж \to \min,$

$0 \le x_м \le 60,$

$0 \le x_ж \le 40,$

$x_ж + x_м \le 80.$

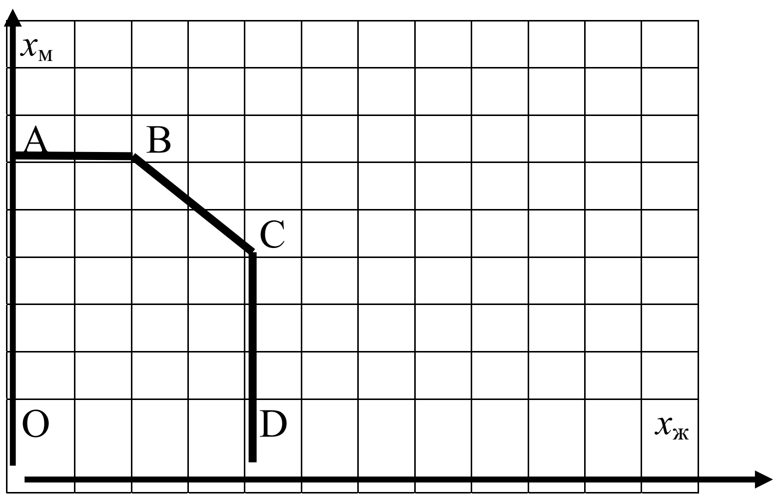


Рис. 2.10.3. Иллюстрация к примеру задачи с тремя критериями

На рис. 2.10.3. показана допустимая область OABCD. Отдельно по каждому из критериев решения находятся сразу (по F_1: $x_м$ = 60, F_1 = 120; по F_2: $x_ж$ = 40, F_2 = 160; по F_3: $x_м$ = $x_ж$ = 0, F_3 = 0;), отрезок BC является множеством точек, оптимальных по Парето по совокупности критериев F_1 и F_2. Среди этих точек оптимум по F_3 достигается в точке C (F_3=120, $x_м$=$x_ж$=40, F_1=80, F_2=160). Допустим, зная ситуацию на рынках и свои финансовые возможности, этот предприниматель выбирает такие пороги: f_1 = 100 (то есть он хочет иметь $F_1 \ge f_1$ = 100), f_2 = 112 (хочет иметь

$F_2 \geq f_2 = 112$), что дает задачу $x_м \geq 50$, $x_ж \geq 28$ с целевой функцией F_3. Ясно, что в этом случае решением будет $x_м = 50$, $x_ж = 28$ с $F_3 = 106$.

Контрольные вопросы

1. Многокритериальная задача и её экономическая интерпретация.
2. Понятие оптимума по Парето и его экономическая интерпретация.
3. Методы исследования многокритериальных математических моделей.
4. Методы отыскания частных оптимумов по Парето и условия их применимости.
5. Экономические приложения и процедура решения многокритериальной задачи при заданных рангах целей.
6. Процедура решения многокритериальной задачи весовым методом и её управленческие приложения.
7. Экономические приложения и процедура решения многокритериальной задачи при заданных пропорциях степени достижения целей.
8. Многокритериальная задача при заданных уровнях насыщения целей и её приложение к проблемам менеджмента.

Тесты

1. Как поступить лучше в случае, если приходится оценивать эффективность операции по нескольким показателям?
   а) сузить множество возможных решений за счет отсечения заведомо неудачных, уступающих другим по всем критериям;
   б) свести многокритериальную задачу к дроби;
   в) свести многокритериальную задачу к взвешенной сумме частных показателей;
   г) содержание п. а, б;
   д) содержание п. а, в;
2. Что позволяет решать математический аппарат при рассмотрении многокритериальных задач исследования операций?
   а) он помогает “выбраковать” из множества возможных решений X заведомо неудачные, уступающие другим по всем критериям;
   б) он позволяет решать прямые задачи исследования операций;
   в) он помогает “выбраковать” из множества возможных решений X заведомо удачные;
   г) содержание п. а, б;
   д) содержание п. а, в;
3. Какие существуют пути построения компромиссного решения?
   а) выделить один (главный) показатель F1 и стремиться его обратить в максимум, а на все остальные F2, F3, ... наложить только некоторые ограничения, потребовав, чтобы они были не меньше каких-то заданных чисел;
   б) “методом последовательных уступок”;

в) волевым актом “начальника”;
г) выделить один (главный) показатель F1 и стремиться его обратить в максимум;
д) содержание п. а, б;

4. Как называется область локальных параметров в многокритериальных задачах, где качество решения может быть улучшено одновременно по всем локальным критериям или без снижения уровня любого из критериев?
   а) область согласия;
   б) область компромиссов;
   в) область сглаживания.
5. Какая из схем компромисса многокритериальных задач допускает увеличение одного критерия при сравнительно малых значениях других критериев?
   а) относительной уступки;
   б) абсолютной уступки;
   в) справедливой уступки.
6. Какая схема компромисса не требует нормализации критериев?
   а) относительной уступки;
   б) абсолютной уступки;
   в) справедливой уступки.

Ответы к тестам

1) а	2) а	3) д
4) а	5) а	6) б

Задания и задачи

1. Множество допустимых планов описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Заданы две целевые функции
$F_1=2x \longrightarrow \max$,
$F_2=x-y-1 \longrightarrow \min$.
Найти идеальную точку.

2. Множество допустимых планов описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 1, \\ 0 \le y \le 1. \end{cases}$$

Заданы две целевые функции
$F_1=2x+1 \longrightarrow \max$,
$F_2=2y+3 \longrightarrow \max$.
Найти идеальную точку.

3. Множество допустимых планов описывается системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \le x \le 2, \\ 0 \le y \le 4, \\ 2x + y \le 6. \end{cases}$$

Заданы две целевые функции

$F_1 = x + y + 2 \longrightarrow \max$,

$F_2 = x - y + 6 \longrightarrow \max$.

Найти идеальную точку.

4. Фирма имеет возможность реализовывать свои товары на 4-х различных рынках. Затраты на рекламу на этих рынках составляют соответственно 7, 5, 9, и 6 тыс. денежных единиц, доля рынка - 45, 40, 50 и 45 процентов, а объем продаж - 90, 85, 80 и 83 тыс. штук. При этом ставятся одновременно следующие цели: минимизация затрат на рекламу, завоевание максимальной доли рынка и максимизация объема продаж в течение планируемого периода. Построить математическую модель и предложить метод решения.

5. (В задачах 5-8 конкретные значения координат точек p1, p2, p3 задать самотоятельно). Два города p1 и p2 (рис.2.10.4) решили на трассе p11-p12 построить завод (p) по переработке отходов. Возможны разные варианты: первый и второй города стремятся построить завод p как можно ближе, чтобы общее расстояние (s3=s1+s2) до завода было минимальным, второй город имеет приоритет, на одинаковом расстоянии (s1=s2), или первый город стремиться построить завод как можно дальше, второй город - как можно ближе и т.д. Решить для первого случая - определить частную цель для первого города, или тоже самое: найти наикратчайшее расстояние от точки p1 до прямой p11-p12.

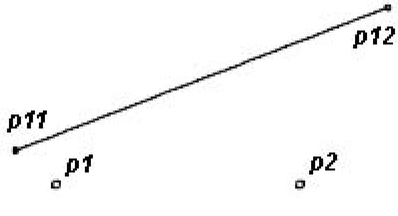
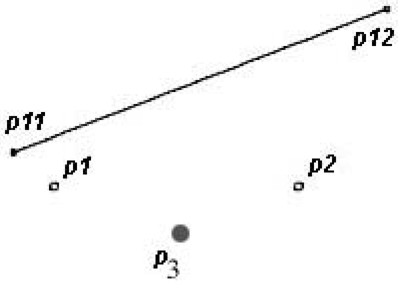


рис. 2.10.4

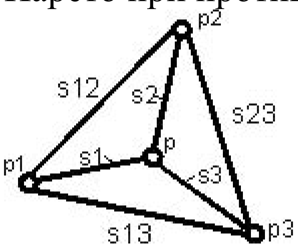
6. Смоделировать и решить следующие задачи (данные в зад.5):

1) 1-й город стремится построить завод p как можно ближе (s1→ min).
2) 2-й город стремится построить завод ближе (s2→ min).
3) Решили, чтоб (s3=s1+s2) было минимальным (s3→ min).
4) Второй город имеет приоритет 2 (s4=s1+2.*s2) (s4→ min).
5) Города хотят построить завод на одинаковом расстоянии (s1=s2).
6) 1-й город стремиться построить завод как можно дальше (s1→ max), 2-й город - ближе (s2→ min).

7. Три города p1, p2, p3 решили также на трассе p11-p12 построить завод p по переработке отходов. Определить ЧЦФ и общее минимальное расстояние (поиск ГЦФ). Укажите зону решений в случае компромисса (все заводы решили построить завод на одинаковом расстоянии).



8. Три города p1, p2, p3 решили в плоскости треугольника, образованного их расположением построить завод p по переработке отходов. Определить местоположение завода таким, чтобы сумма расстояний от городов до него была минимальной. Определите зоны Парето при противоречивых условиях.



2.10.6. Самостоятельная работа студентов

Рекомендуемые темы рефератов

1. Понятие оптимума по Парето и его экономическая интерпретация.
2. Методы исследования многокритериальных математических моделей.
3. Методы отыскания частных оптимумов по Парето и условия их применимости.
4. Экономические приложения и процедуры решения многокритериальной задачи.

Литература для самостоятельной работы

1. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
2. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
3. Моделирование систем: Учеб. для вузов/ Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. –4 изд. стер. – М.: Высш. школа, 2005.-343 с.:ил.
4. Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: Учеб. пособие для вузов/ Под. Ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. – М.: Высш. шк..,2004 – 616 с.: ил.
5. Антонов А.В. Системный анализ. Учеб. для вузов/ А.В. Антонов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш.шк., 2006. – 454 с.: ил.
6. С.В. Микони. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. СПб.: Лань, 2009.
7. Лотов А.В., Поспелова И.И. Конспект лекций по теории и методам многокритериальной оптимизации. –М.: Изд. ВМиК МГУ, 2006. –130с.

Веб-источники:
http://www.terry.uga.edu/mcdm/
http://www.ccas.ru/mmes/mmeda
http://nimbus.mit.jyu.fi/

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Методические рекомендации по изучению теоретического материала.

Теоретический материал представляет собой конспект лекций, содержащий необходимый набор утверждений и формул (без детальных подробностей их вывода и доказательств соответствующих теорем), но с подробным обоснованием их использования при решении конкретных экономических задач. Необходимо тщательно разобрать все примеры, приведенные в каждом разделе теоретических материалов, а также примеры в рекомендованных учебниках и разделе Практический блок, и выполнить предлагаемые в них упражнения. Обратите внимание на стиль решения примеров – основные идеи решения обосновываются ссылкой на использованные утверждения, приводятся номера соответствующих формул. Подобный стиль должен быть Вами использован при выполнении практических заданий и контрольных работ. Для контроля полученных знаний постарайтесь ответить на контрольные вопросы и прилагаемые тесты. Для более глубокого понимания изучаемого математического аппарата следует воспользоваться общедоступными учебниками, перечень которых приведен в разделе «Основная рекомендуемая литература». Книги раздела «Дополнительная литература» рекомендуются для расширения кругозора в области математических методов, используемых в экономике.

Методические рекомендации по решению практических задач.

Основная цель семинарских занятий – получение практических навыков решения конкретных задач и примеров по основным разделам математической экономики. Решение предлагаемых практических заданий является средством текущего контроля приобретенных при самостоятельной работе знаний и навыков студентов, а также необходимо для самооценки студентами их подготовленности по каждой теме.

В практичеком блоке к каждой теме находятся контрольные вопросы, тесты и задания для практических занятий

Методические рекомендации по выполнению контрольных работ.

Контрольная работа является важной частью итогового контроля знаний и навыков студентов по всем темам. При выполнении работы студент учится работать со специальной литературой, обрабатывать полученную информацию, творчески ее использовать.

Также как и при выполнении практических заданий, изложение решений контрольной работы должно быть кратким, не загромождено текстовыми формулировками используемых утверждений и определений; простые преобразования и арифметические выкладки пояснять не следует. Степень подробности изложения решений контрольной работы должна соответствовать степени подробности решения примеров в соответствующих разделах теоретических материалов. Ключевые идеи решения следует обосновывать ссылкой на использованные утверждения и приводить номера соответствующих формул.

Задания для итоговой контрольной работы.

Задания для итоговой контрольной работы содержатся в соответствующем разделе. Номер варианта выбирается по номеру студента в списке группы.

Требования к критериям оценки выполнения практических заданий, контрольных работ.

Для текущего контроля достаточно представить пять выполненных практических заданий по каждой теме первого раздела и два выполненных практических задания по каждой теме второго раздела. Оценка выполнения практического задания проводится по 50-бальной системе (10 баллов на каждую из пяти задач по темам первого раздела и 25 баллов на каждую из двух задач по темам второго раздела). 40-50 баллов, набранных студентом, соответствуют оценке "отлично", 30-39 баллов – оценке "хорошо", 20-29 баллов – оценке "удовлетворительно", 0-19 баллов – оценке "неудовлетворительно".

В случае если задача решена в целом правильно, но допущены 1-2 арифметические ошибки, либо не объяснен какой-либо ключевой момент решения, решение оценивается в 8-10 баллов по задачам первого раздела и в 21-25 баллов по задачам второго раздела. Если решение задачи не доведено до конца, либо окончание решения ошибочно, но имеется правильный план решения и получены существенные, важные для решения результаты, задача оценивается в

4-8 баллов по задачам первого раздела и в 11-20 баллов по задачам второго раздела. Если задача не решена, отсутствует общий план решения либо допущены грубые ошибки, но есть продвижения в нужном направлении или правильно сделаны отдельные шаги решения, задача оценивается в 1-4 балла по задачам первого раздела и в 1-10 баллов по задачам второго раздела.

Контрольная работа предназначена для итогового контроля знаний и навыков студентов по всем темам. В отличие от практических заданий, оценка за каждую задачу контрольной работы – зачтено или не зачтено.

Оценка зачтено ставится за правильное и полное решение задачи, допускаются небольшие погрешности в изложении и вычислениях. Оценка за контрольную работу – зачтено, если зачтены все контрольные задания по всем темам.

Если практические задания по всем темам выполнены на оценку не ниже «удовлетворительно», и получена оценка «зачтено» за контрольную работу, то студент допускается к итоговой аттестации – зачету.

В случае неудовлетворительной оценки за практическое задание по отдельной теме студент должен выполнить работу над ошибками и дополнительно решить другие примеры из тех же тем, за которые получены неудовлетворительные оценки (за каждый неправильно решенный пример – один дополнительно).

Если контрольная работа не зачтена, то студент должен выполнить работу над ошибками и затем заново написать другой вариант контрольной работы, который укажет преподаватель.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

Успешное освоение дисциплины требует напряжённой самостоятельной работы студентов. При подготовке к занятиям и контрольным работам студенты кроме теоретических материалов изучают рекомендованную литературу. Для самостоятельного изучения студентам рекомендуется список литературы, приведенный в конце каждой темы в соответствующем разделе.

Наряду с этим предлагается подготовить один из рефератов, примерная тематика которых также прилагается.

ИТОГОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Контрольное задание по теме 1.1. Математические методы в маркетинге

Задана функция полезности индивида: $u=f(Q_A,Q_B)$, где Q_A, Q_B – количества двух различных благ, его бюджет: M, а цены благ p_A, p_B. Запишите уравнение кривой безразличия в момент равновесия.

Таблица вариантов

вариант	p_A	p_B	M	$u= f(Q_A ,Q_B)$
1	0,006	1,09	23	$Q_A^2Q_B$
2	0,35	0,93	18	$Q_AQ_B^2$
3	0,8	0,14	113	$Q_AQ_B^2$
4	0,94	1,1	68	$Q_AQ_B^2$
5	0,47	4,27	45	$Q_AQ_B^2$
6	1,25	0,09	68	$Q_AQ_B^2$
7	0,62	2,64	21	$Q_AQ_B^2$
8	0,58	2,67	327	$Q_AQ_B^2$
9	0,64	1,38	22	$Q_AQ_B^2$
10	0,72	0,71	125	$Q_AQ_B^2$
11	0,06	1,09	23	$Q_AQ_B^2$
12	0,25	0,43	18	$Q_AQ_B^2$
13	0,85	0,44	163	$Q_AQ_B^2$
14	0,04	1,18	62	$Q_AQ_B^2$
15	0,47	4,27	45	$Q_AQ_B^2$
16	1,05	0,29	48	$Q_A^2Q_B$
17	0,22	1,64	28	$Q_AQ_B^2$
18	0,28	2,67	324	$Q_AQ_B^2$
19	0,24	1,38	28	$Q_AQ_B^2$
20	0,42	0,71	125	$Q_AQ_B^2$
21	0,02	2,09	23	$Q_AQ_B^2$
22	0,45	0,93	13	$Q_AQ_B^2$
23	0,84	0,44	123	$Q_AQ_B^2$
24	0,34	1,1	68	$Q_AQ_B^2$
25	0,66	2,27	45	$Q_AQ_B^2$
26	1,05	0,09	68	$Q_AQ_B^2$
27	0,62	2,64	21	$Q_AQ_B^2$
28	0,58	2,67	327	$Q_AQ_B^2$
29	0,34	1,38	22	$Q_AQ_B^2$
30	0,55	0,33	125	$Q_AQ_B^2$

Контрольное задание по теме 1.2.
Исследование производственных функций

Задана мультипликативная производственная функция производственной подсистемы экономики некоторой страны

$X = AK^{a_K} L^{a_L}$

а также показатели экономики:

X~ – валовой выпуск продукции,

K~ – объем основных фондов,

L~ – объем трудовых ресурсов,

выраженные в относительных (безразмерных) единицах и соответствующих некоторому периоду времени.

Требуется найти:

1. Отношение предельной производительности труда к средней производительности труда.
2. Отношение предельной фондоотдачи к средней фондоотдаче.
3. На сколько процентов изменится выпуск, если основные фонды увеличить на 1%.
4. На сколько процентов изменится выпуск, если число занятых увеличить на 1%.
5. Построить семейство изоквант и изоклиналей.
6. Показатель эффективности экономики страны Е и показатель масштаба производства М, а также выполнить анализ состояния и поведения экономики страны за рассматриваемый период времени.

Исходные данные приведены ниже в таблице.

Таблица вариантов

вариант	α_K	α_L	X~	K~	L~
1	0,006	1,09	2,3	2,87	1,52
2	0,35	0,93	1,8	2,5	1,29
3	0,8	0,14	1,13	1,04	1,16
4	0,94	1,1	6,8	4,9	1,45
5	0,47	4,27	4,5	3,7	1,24
6	1,25	0,09	6,8	4,9	1,45
7	0,62	2,64	2,1	2,0	1,12
8	0,58	2,67	3,27	3,72	1,15
9	0,64	1,38	2,2	1,74	1,03
10	0,72	0,71	1,25	1,38	1,04
11	0,06	1,09	2,3	2,3	1,22
12	0,25	0,43	1,8	1,5	1,66
13	0,85	0,44	1,63	1,34	1,46
14	0,04	1,18	6,2	2,9	1,45
15	0,47	4,27	4,5	3,7	1,54

16	1,05	0,29	4,8	6,9	1,25
17	0,22	1,64	2,8	1,07	1,42
18	0,28	2,67	3,24	3,72	1,85
19	0,24	1,38	2,8	1,74	1,53
20	0,42	0,71	1,25	1,38	1,74
21	0,02	2,09	2,3	2,87	1,02
22	0,45	0,93	1,3	2,5	1,76
23	0,84	0,44	1,23	1,74	1,22
24	0,34	1,1	6,8	4,9	1,15
25	0,66	2,27	4,5	3,7	1,94
26	1,05	0,09	6,8	4,9	1,35
27	0,62	2,64	2,1	2,0	1,12
28	0,58	2,67	3,27	3,72	1,15
29	0,34	1,38	2,2	1,44	1,53
30	0,55	0,33	1,25	1,38	1,54

Контрольное задание по теме 1.3. Макроэкономические модели

Используя модель Солоу с производственной функцией Кобба-Дугласа $X = AK^{a}L^{1-a}$, у которой A и α заданы ниже в таблице, найти значения фондовооруженности, производительности труда и удельного потребления на стационарной траектории, для которой норма накопления ρ = 0,2, выбытие фондов μ = 0,2 за год, а годовой прирост трудовых ресурсов ν = 0,05.

Таблица

вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	10^3	10^2	10^4	10^3	10^4	10^4	10^5	10^6	10^2	10^3
α	1/2	1/2	1/2	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/4	1/3
вариант	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	10^4	10^3	10^4	10^3	10^3	10^2	10^5	10^3	10^4	10^3
α	1/2	1/2	1/3	1/4	1/3	1/3	1/3	1/4	1/4	1/5
вариант	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	10^2	10^2	10^5	10^2	10^2	10^4	10^3	10^2	10^4	10^5
α	1/2	1/3	1/2	1/3	1/3	1/5	1/4	1/4	1/4	1/3

Контрольное задание по теме 1.4. Балансовые модели

Пусть все народное хозяйство (район и т.д.) состоит из трех отраслей, каждая из которых выпускает один вид продукции. В таблице 1.N, где N – номер варианта, указаны расходные коэффициенты (прямые затраты) *aik* единиц продукции *i*-й отрасли, используемые как сырье (промежуточный продукт) для выпуска единицы продукции *k*-й отрасли, а также количество единиц *yi* продукции *i*-й отрасли, предназначенные для реализации (конечный продукт). Пусть дополнительно заданы расходные нормы двух видов сырья и топлива на единицу продукции соответствующей отрасли, трудоемкость продукции в человеко-часах на единицу продукции, стоимость единицы оответствующего материала и оплата за 1 чел.-ч. (таблица 2.N).

Определить:

1. Коэффициенты полных затрат.
2. Валовой выпуск для каждой отрасли.
3. Производственную программу отраслей.
4. Коэффициенты косвенных затрат.
5. Суммарный расход сырья, топлива и трудовых ресурсов на выполнение производственной программы.
6. Коэффициенты прямых затрат сырья, топлива и труда на единицу конечной продукции каждой отрасли.
7. Расход сырья, топлива и трудовых ресурсов по отраслям.
8. Производственные затраты в денежных единицах по отраслям и на всю производственную программу.
9. Производственные затраты на единицу конечной продукции.
10. Параметры агрегирования при объединении первой и третьей отраслей.

Вариант 1

Таблица 1.1 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.4	0	300
II	0.2	0.7	0.1	200
III	0	0.3	0.2	300

Таблица 2.1 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.4	0,8	5
Сырье В	0.5	0.7	1.1	12
Топливо	2,0	1,8	2,0	7
Трудоемкость	11	13	32	1,4

Вариант **2**

Таблица 1.2 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.8	0.2	0	100
II	0.2	0.3	0.1	400
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 2.2 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	0.4	0,8	15
Сырье В	0	0.6	1.6	10
Топливо	2,0	1,8	2,0	8
Трудоемкость	10	30	40	2,4

Вариант **3**

Таблица 1.3 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	300
II	0.3	0.6	0.1	100
III	0	0.1	0.2	400

Таблица 2.3 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	3.4	2.4	1,8	15
Сырье В	0.2	0.6	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	2,2	3
Трудоемкость	20	20	30	1,2

Вариант **4**

Таблица 1.4 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.5	0.2	0.1	200
II	0.4	0.5	0.1	200
III	0	0.1	0.2	400

Таблица 2.4 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	1.4	0,8	5
Сырье В	1.5	1.7	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	3,0	10
Трудоемкость	40	20	32	1,3

Вариант **5**

Таблица 1.5 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.9	0.1	0	400
II	0.2	0	0.1	100
III	0.3	0.1	0.2	400

Таблица 2.5 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.2	1.4	0,8	9
Сырье В	1.5	1.7	1.0	13
Топливо	2,1	2,8	2,4	3
Трудоемкость	16	21	32	1,3

Вариант 6

Таблица 1.6 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.2	0	400
II	0.3	0	0.1	200
III	0.3	0.4	0.2	300

Таблица 2.6 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.2	1,8	4
Сырье В	1.5	0	2.1	10
Топливо	3,0	2,8	2,5	5
Трудоемкость	30	10	3226	2,4

Вариант **7**

Таблица 1.7 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.2	0	500
II	0.2	0.7	0.1	100
III	0	0.3	0.2	100

Таблица 2.7 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	2.4	1.4	0,6	8
Сырье B	1.5	0.5	2.1	14
Топливо	1,0	1,3	2,0	5
Трудоемкость	14	23	22	1,5

Вариант 8

Таблица 1.8 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.3	0.2	0	400
II	0.5	0	0.1	200
III	0	0.4	0.2	200

Таблица 2.8 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье A	2.4	2.4	0,8	5
Сырье B	0.5	0.7	1.1	12
Топливо	2,0	1,8	2,0	7
Трудоемкость	11	13	32	1,4

Вариант **9**

Таблица 1.9 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	200
II	0.2	0.7	0.1	500
III	0	0.2	0.2	300

Таблица 2.9 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	2.6	1,8	8
Сырье В	0.5	0.1	1.8	14
Топливо	2,0	2,8	2,0	4
Трудоемкость	12	22	31	1,4

Вариант 10

Таблица 1.10 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0.4	0.2	200
II	0.2	0	0.1	300
III	0.7	0.3	0.2	400

Таблица 2.10 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	2.5	0,8	6
Сырье В	0.5	0.2	1.1	10
Топливо	2,0	1,2	2,5	5
Трудоемкость	12	25	20	1,4

Вариант 11.

Таблица 1.11 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0.4	0	200
II	0.2	0	0.1	100
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 2.11 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.4	0,8	5
Сырье В	0	0.7	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	2,4	3
Трудоемкость	10	30	38	1,2

Вариант 12

Таблица 1.12 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.4	0.2	300
II	0.2	0.4	0.3	200
III	0	0.3	0.2	300

Таблица 2.12 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.4	0,8	5
Сырье В	0.5	0.9	1.1	15
Топливо	2,0	1,8	2,0	7
Трудоемкость	11	13	22	1,4

Вариант 13

Таблица 1.13 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	100
II	0.2	0.3	0.1	200
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 2.13 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	0.4	0,8	13
Сырье В	0	0.8	1.6	10
Топливо	2,0	1,8	0	8
Трудоемкость	10	30	20	2,4

Вариант 14

Таблица 1.14 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	300
II	0.3	0.6	0.1	100
III	0	0.1	0.2	400

Таблица 2.14 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.3	1,8	15
Сырье В	0.2	0.6	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	2,2	3
Трудоемкость	20	40	20	1,2

Вариант 15

Таблица 1.15 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.5	0.2	0	200
II	0.4	0.7	0.1	200
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 2.15 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	2.4	0,8	5
Сырье В	1.5	1.7	1.6	17
Топливо	2,0	1,4	3,0	10
Трудоемкость	40	20	12	1,3

Вариант 16

Таблица 1.16 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.1	0	400
II	0.2	0	0.1	200
III	0	0.1	0.2	400

Таблица 2.16 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.2	1.4	0,8	9
Сырье В	1.5	1.5	1.0	13
Топливо	2,1	2,8	2,0	3
Трудоемкость	16	21	22	1,3

Вариант 17

Таблица 1.17 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.4	0.2	0	400
II	0.3	0	0.1	100
III	0.3	0.4	0	300

Таблица 2.17 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.0	1,8	4
Сырье В	1.5	0	2.1	10
Топливо	3,0	2,8	2,5	15
Трудоемкость	30	10	3226	3,4

Вариант 18

Таблица 1.18 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.2	0	500
II	0.2	0	0.1	100
III	0	0.3	0.2	200

Таблица 2.18 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	1.4	1,6	8
Сырье В	1.5	0.5	2.1	11
Топливо	1,0	1,8	2,0	5
Трудоемкость	14	23	12	1,5

Вариант 19

Таблица 1.19 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.3	0.2	0	300
II	0.5	0	0.1	200
III	0	0.4	0.2	100

Таблица 2.19 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.8	0,8	5
Сырье В	0.5	0.7	0	12
Топливо	2,0	1,8	2,0	17
Трудоемкость	11	13	32	1,8

Вариант 20

Таблица 1.20 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	200
II	0.2	0.6	0.1	400
III	0	0.6	0.2	300

Таблица 2.20 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	1.6	1,8	8
Сырье В	0.5	0.1	1.8	12
Топливо	2,0	2,8	0	14
Трудоемкость	12	22	21	1,4

Вариант 21

Таблица 1.21 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0.7	0.2	200
II	0.2	0	0.1	200
III	0.7	0.6	0.2	300

Таблица 2.21 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	2.9	0,8	16
Сырье В	0.5	0.2	1.6	10
Топливо	2,0	1,2	2,5	15
Трудоемкость	12	25	20	1,8

Вариант 22.

Таблица 1.11 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0	0.8	0.4	200
II	0.2	0	0.1	100
III	0.6	0.8	0.2	200

Таблица 2.22 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.4	0,8	5
Сырье В	0	0.7	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	2,4	3
Трудоемкость	10	30	38	1,2

Вариант 1.23

Таблица 1.23   Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.4	0	300
II	0.2	0.7	0.1	200
III	0	0.3	0.2	300

Таблица 2.23 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	0	2.4	0,8	15
Сырье В	0.5	0.7	1.1	12
Топливо	2,0	1,3	2,0	17
Трудоемкость	11	13	22	1,9

Вариант 24

Таблица 1.24   Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.8	0.2	0	100
II	0.2	0.8	0.1	400
III	0	0.1	0.7	300

Таблица 2.24 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	2.4	0,8	15
Сырье В	0	0.6	2.6	10
Топливо	2,6	1,8	2,0	18
Трудоемкость	10	30	40	2,9

Вариант 25

Таблица 1.25 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.9	0.2	0	300
II	0.3	0.8	0.1	100
III	0	0.1	0.2	300

Таблица 2.25 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.4	1,8	15
Сырье В	0.2	1.6	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	3,2	13
Трудоемкость	20	20	30	1,8

Вариант 26

Таблица 1.26 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.5	0.25	0.1	200
II	0.4	0.5	0.3	300
III	0	0.5	0.2	300

Таблица 2.27 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	1.4	1.4	0,8	15
Сырье В	1.2	1.7	1.6	12
Топливо	2,0	1,8	2,0	10
Трудоемкость	40	25	32	1,7

Вариант **28**

Таблица 1.28 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.9	0.5	0	400
II	0.2	0	0.7	100
III	0.5	0.1	0.2	300

Таблица 2.28 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	1.4	0,8	19
Сырье В	1.5	1.4	1.0	12
Топливо	2,5	2,8	1,4	13
Трудоемкость	16	25	32	1,3

Вариант 29

Таблица 1.29 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.1	0.6	0	400
II	0.3	0	0.4	200
III	0.6	0.4	0.2	400

Таблица 2.29 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	2.2	2,8	14
Сырье В	1.5	0	2.5	10
Топливо	2,0	2,8	2,5	16
Трудоемкость	30	10	22	2,4

Вариант 30

Таблица 1.30 Прямые затраты *aik*

Отрасли	Отрасли			Конечный продукт
	I	II	III	
I	0.6	0.2	0	500
II	0.2	0.7	0.2	200
III	0	0.3	0.7	100

Таблица 2.30 Расходные нормы

	Отрасли			Стоимость
	I	II	III	
Сырье А	2.4	1.4	1,6	18
Сырье В	1.1	0.5	2.1	14
Топливо	1,0	1,3	2,5	9
Трудоемкость	14	23	10	1,8

Контрольное задание по теме 2.2. «Линейное программирование».

Составить математическую модель задачи линейного программирования и найти решение геометрическим способом.

По данным, приведенным в табл. N, где N – номер варианта, составить систему математических зависимостей (неравенств) и целевую функцию.

Изобразить геометрическую интерпретацию задачи.

Найти оптимальное решение.

Провести аналитическую проверку.

Определить существенные и несущественные ресурсы и их избытки.

Определить значение целевой функции.

Вычислить объективно обусловленные оценки.

Составить соотношение устойчивости.

Таблица 1

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	10.0	14.0	3.8	40
Изделие 2	22.0	7.5	14.5	75
Наличие ресурсов	450	310	360	-

Таблица 2

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.4	8.0	6.2	50
Изделие 2	12.2	5.4	2.2	40
Наличие ресурсов	500	470	340	-

Таблица 3

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	3	5	2	10
Изделие 2	2	4	3	60
Наличие ресурсов	40	65	24	-

Таблица 4

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	10	5	1	50
Изделие 2	3	8	4	30
Наличие ресурсов	150	120	30	-

Таблица 5

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.2	8.4	4.2	35
Изделие 2	8.2	4.6	2.0	50
Наличие ресурсов	500	720	300	-

Таблица 6

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.6	7.6	4.0	40
Изделие 2	8.2	3.8	2.1	60
Наличие ресурсов	500	720	310	-

Таблица 7

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	10.0	14.0	3.6	50
Изделие 2	20.0	7.4	12.4	70
Наличие ресурсов	440	280	320	-

Таблица 8

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	9.2	10.0.	3.0	20
Изделие 2	15.0	5.0	12.0	70
Наличие ресурсов	400	300	340	-

Таблица 9

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.0	8.0	4.0	25
Изделие 2	8.0	4.0	2.0	35
Наличие ресурсов	500	720	300	-

Таблица 10

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес.1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	4.0	6.0	2.0	25
Изделие 2	2.6	3.4	5.2	15
Наличие ресурсов	300	360	500	-

Таблица 11

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес.1	Рес.2	Рес.3	
Изделие 1	2.2	8.2	4.4	35
Изделие 2	8.4	4.0	2.2	55
Наличие ресурсов	500	720	260	-

Таблица 12

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	9.0	12.0	3.0	25
Изделие 2	21.0	7.0	14.0	90
Наличие ресурсов	410	305	340	-

Таблица 13

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	6.5	10.0	12.0	30
Изделие 2	9.0	2.6	10.0	20
Наличие ресурсов	200	160	300	-

Таблица 14

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	9.2	11.0	4.0	80
Изделие 2	20.0	7.5	12.0	30
Наличие ресурсов	400	300	350	-

Таблица 15

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.5	6.8	4.6	40
Изделие 2	8.2	4.4	3.2	50
Наличие ресурсов	610	720	240	-

Таблица 16

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.2	8.4	4.2	25
Изделие 2	8.6	4.2	2.0	35
Наличие ресурсов	500	700	280	-

Таблица 17

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.0	8.2	10.0	30
Изделие 2	8.4	4.4	3.0	55
Наличие ресурсов	420	460	510	-

Таблица 18

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	1.6	6.4	3.2	35
Изделие 2	6.0	1.4	2.2	50
Наличие ресурсов	420	310	240	-

Таблица 19

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.0	7.4	3.2	40
Изделие 2	6.4	1.6	2.4	60
Наличие ресурсов	440	280	240	-

Таблица 20

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	8.0	2.0	6.4	35
Изделие 2	1.6	4.2	3.2	55
Наличие ресурсов	220	170	240	-

Таблица 21

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	9.2	12.0	4.0	20
Изделие 2	18.0	7.2	12.0	40
Наличие ресурсов	420	280	340	-

Таблица 22

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес.1	Рес.2	Рес.3	
Изделие 1	2.8	6.4	4.8	50
Изделие 2	8.4	4.4	3.2	75
Наличие ресурсов	580	700	280	-

Таблица 23

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.8	8.2	4.4	60
Изделие 2	8.8	3.6	2.0	50
Наличие ресурсов	480	520	300	-

Таблица 24

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	9.0	11.2	4.4	40
Изделие 2	20.0	7.5	8.2	55
Наличие ресурсов	300	560	280	-

Таблица 25

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.2	8.2	4.0	35
Изделие 2	8.6	4.0	2.0	25
Наличие ресурсов	400	420	260	-

Таблица 26

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	1.6	6.4	3.2	20
Изделие 2	6.2	1.2	2.1	45
Наличие ресурсов	420	380	240	-

Таблица 27

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	8.2	2.2	5.8	50
Изделие 2	1.6	4.0	3.2	28
Наличие ресурсов	220	180	260	-

Таблица 28

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	8.6	4.2	2.0	45
Изделие 2	2.2	8.4	4.0	30
Наличие ресурсов	500	700	260	-

Таблица 29

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	2.4	6.4	4.4	25
Изделие 2	8.2	4.0	3.2	40
Наличие ресурсов	580	720	220	-

Таблица 30

Наимен. показат.	Нормы на одно изделие			Прибыль на одно изделие
	Рес. 1	Рес. 2	Рес. 3	
Изделие 1	12.2	5.6	2.4	45
Изделие 2	2.6	8.2	6.4	35
Наличие ресурсов	520	480	360	-

Контрольное задание по теме 2.3. «Задачи транспортного типа».

Найти оптимальное решение транспортной задачи.
Свести задачу к закрытому типу (при необходимости).
Найти базисный план методом северо-западного угла.
Проверить этот базисный план на оптимальность.
Выполнить итерации по улучшению плана до получения оптимального решения (после каждой итерации вычислять значение целевой функции).
Исходные данные заданы в табл. N, где N – номер варианта.

Таблица 1

Мощн/потр	B1=80	B2 = 75	B3 = 35	B4 = 15
A1 = 48	5	3	2	1
A2 = 100	3	4	2	1
A3 = 33	1	3	6	8

Таблица 2

Мощн/потр	B1= 99	B2 = 40	B3 = 80	B4 = 50
A1 = 54	8	2	3	6
A2 = 38	6	6	4	4
A3 = 71	4	3	5	5
A4 = 11	2	3	4	6
A5 = 96	1	3	5	5

Таблица 3

Мощн/потр	B1= 10	B2 = 32	B3 = 81	B4 = 83	B5 = 24
A1 = 80	4	2	1	3	3
A2 = 50	3	3	5	1	5
A3 = 25	7	4	8	5	1
A4 = 75	3	1	4	1	5

Таблица 4

Мощн/потр	B1= 83	B2 = 24	B3 = 81	B4 = 32	B5 = 10
A1 = 80	5	4	2	5	6
A2 = 50	4	4	5	2	1
A3 = 25	1	3	2	4	5
A4 = 75	5	3	4	6	2

Таблица 5

Мощн/потр	B1= 80	B2 = 75	B3 = 35	B4 = 15
A1 = 48	5	2	4	2
A2 = 100	3	6	2	1
A3 = 33	1	4	3	5

Таблица 6

Мощн/потр	B1= 55	B2 = 63	B3 = 45	B4 = 58	B5 = 48
A1 = 80	6	2	1	2	4
A2 = 70	4	4	2	1	1
A3 = 85	1	2	3	1	5

Таблица 7

Мощн/потр	B1= 55	B2 = 63	B3 = 45	B4 = 58	B5 = 29
A1 = 60	5	2	1	2	1
A2 = 70	1	4	2	1	2
A3 = 50	2	3	4	6	1
A4 = 80	2	2	4	3	5

Таблица 8

Мощн/потр	B1= 55	B2 = 63	B3 = 45	B4 = 58	B5 = 39
A1 = 60	5	3	4	2	1
A2 = 70	1	5	2	3	1
A3 = 50	2	3	4	4	2
A4 = 80	3	4	3	4	6

Таблица 9

Мощн/потр	B1= 39	B2 = 63	B3 = 54	B4 = 94
A1 = 80	5	4	3	2
A2 = 75	2	3	2	1
A3 = 35	4	6	5	4
A4 = 15	2	1	2	8

Таблица 10

Мощн/потр	B1= 53	B2 = 65	B3 = 46	B4 = 57	B5 = 39
A1 = 60	5	3	4	3	1
A2 = 70	1	6	3	2	4
A3 = 50	4	5	2	3	4
A4 = 80	5	1	2	3	6

Таблица 11

Мощн/потр	B1= 39	B2 = 63	B3 = 54	B4 = 94
A1 = 100	6	2	1	2
A2 = 50	3	4	2	1
A3 = 40	1	2	5	2
A4 = 60	2	3	2	6

Таблица 12

Мощн/потр	B1= 55	B2 = 63	B3 = 45	B4 = 258	B5 = 48
A1 = 180	6	2	1	2	4
A2 = 170	4	4	2	1	1
A3 = 185	1	2	3	1	5

Таблица 13

Мощн/потр	B1= 48	B2 = 99	B3 = 33
A1 = 80	5	2	3
A2 = 75	4	4	1
A3 = 35	3	5	6
A4 = 15	2	1	4

Таблица 14

Мощн/потр	B1= 12	B2 = 23	B3 = 90	B4 = 52	B5 = 14
A1 = 90	1	2	3	1	2
A2 = 40	4	5	6	2	3
A3 = 35	2	4	2	1	2
A4 = 45	3	3	4	4	5

Таблица 15

Мощн/потр	B1= 48	B2 = 99	B3 = 32
A1 = 80	6	2	1
A2 = 70	1	3	4
A3 = 40	4	5	4
A4 = 15	3	2	6

Таблица 16

Мощн/потр	B1= 53	B2 = 65	B3 = 45	B4 = 58	B5 = 48
A1 = 60	5	1	4	3	3
A2 = 70	4	4	2	1	2
A3 = 50	1	2	3	4	4
A4 = 80	2	3	4	1	2

Таблица 17

Мощн/потр	B1= 80	B2 = 75	B3 = 35	B4 = 15
A1 = 48	6	2	1	2
A2 = 100	1	4	2	1
A3 = 33	2	3	5	5
A4 = 10	1	4	1	4

Таблица 18

Мощн/потр	B1= 32	B2 = 48	B3 = 94	B4 = 68
A1 = 45	4	5	2	2
A2 = 75	2	6	1	2
A3 = 85	4	5	3	5
A4 = 55	1	2	4	3

Таблица 19

Мощн/потр	B1= 55	B2 = 63	B3 = 45	B4 = 58	B5 = 48
A1 = 80	6	2	1	2	4
A2 = 70	4	4	2	1	1
A3 = 85	1	2	3	1	5

Таблица 20

Мощн/потр	B1= 35	B2 = 48	B3 = 94	B4 = 70
A1 = 40	4	2	1	3
A2 = 80	3	5	2	4
A3 = 65	4	2	3	3
A4 = 75	3	8	2	5

Таблица 21

Мощн/потр	B1= 48	B2 = 35	B3 = 70	B4 = 94
A1 = 80	6	5	2	2
A2 = 40	2	2	4	5
A3 = 65	3	3	4	5
A4 = 75	4	5	2	6

Таблица 22

Мощн/потр	B1= 35	B2 = 43	B3 = 99	B4 = 72
A1 = 70	5	2	2	1
A2 = 80	1	3	4	5
A3 = 40	5	3	3	4
A4 = 60	3	2	1	6

Таблица 23

Мощн/потр	B1= 48	B2 = 95	B3 = 32
A1 = 70	4	5	2
A2 = 40	3	4	6
A3 = 80	6	2	4
A4 = 15	1	1	6

Таблица 24

Мощн/потр	B1= 65	B2 = 53	B3 = 58	B4 = 45	B5 = 48
A1 = 60	4	1	5	1	3
A2 = 50	3	3	4	4	1
A3 = 70	2	3	4	6	6
A4 = 80	6	2	1	3	4

Таблица 25

Мощн/потр	B1= 75	B2 = 80	B3 = 15	B4 = 35
A1 = 10	4	2	3	2
A2 = 33	2	5	3	3
A3 = 100	4	4	6	7
A4 = 48	2	3	4	4

Таблица 26

Мощн/потр	B1= 96	B2 = 32	B3 = 48
A1 = 80	4	2	2
A2 = 40	5	6	3
A3 = 70	3	3	4
A4 = 15	1	4	6

Таблица 27

Мощн/потр	B1= 48	B2 = 98	B3 = 10	B4 = 33
A1 = 80	5	6	2	2
A2 = 75	2	4	1	1
A3 = 35	5	3	4	6
A4 = 15	6	2	2	5

Таблица 28

Мощн/потр	B1= 40	B2 = 80	B3 = 75	B4 = 65
A1 = 35	5	3	3	2
A2 = 48	2	4	6	7
A3 = 104	3	4	5	5
A4 = 70	5	2	1	5

Таблица 29

Мощн/потр	B1= 72	B2 = 94	B3 = 43	B4 = 35
A1 = 40	6	2	2	1
A2 = 60	1	3	4	2
A3 = 80	2	4	5	2
A4 = 70	3	3	2	6

Таблица 30

Мощн/потр	B1= 15	B2 = 75	B3 = 35	B4 = 80
A1 = 100	10	5	4	2
A2 = 48	2	6	6	5
A3 = 33	5	2	6	3
A4 = 10	3	5	6	4

Контрольное задание по теме 2.4.
«Математические основы управления проектами».

1. Построить фрагмент сетевого графика согласно заданного порядка предшествования.
Исходные данные представлены ниже в пп. 1.N, где N – номер варианта.

1.1. A, B, C << D
A, B << E
A << F
D, E << F
F, G << H

1.2. A, B, C, D << E
A, B << G
A << F
C, D << H

1.3. A, B << C, D
C, D << E
D, F << G
F << H

1.4. A, B << C
C, D, E << F
D, E << G
E, A << H

1.5. A << B, C
E, B << D
C, D << G, H
H << F

1.6. A << B, C
B, D << E
C, E, F << G
E << H

1.7. A, B << C
D, E << F
C, G << H
B, F << N

1.8. A << B, C
E, B << D
C, D << G, H
H << F

1.9. A, B, C << E
B, C, D << F
E, F, G << H

1.10. A, C, E << B, D
C, E << F, G
B, D, F, G << H

1.11. A, B, C << E
B, C, D << F
E, G, F << H

1.12. A, B, C << E
B, C, D << F
C, F, G << H

1.13. A, B, C, D << E
A, B << F
C, D << G
A, G << H

1.14. A, B, C << D
B, C << E
A, B << G
D, E << G

1.15. A, B, C << D
B, C << E
A, B << G
D, E << G
F, G << H

1.16. A << B, C
E, B << D
C, D << G, H
H << F

1.17. A << B, C
E, B << D
C, D << G, H
H << F

1.18. A << B, C
E, B << D
C, D << G, H
H << F

1.19. A << B, C
B, D << E
C, E, F << G
E << H

1.20. A, B, C << D
A, B << E
A << F
F, G << H

1.21. A, B << C
C, D, E << F
D, E << G
E, A << H

1.22. A, B, C, D << E
A, B << F
C << G
D << H

1.23. A, B << E
C, D, E << F
C, D << G
G, F << H

1.24. A, B << E
C, D << F
A, D << G
C, G << H

1.25. A, B << C
C, D << E
A, D << G
C, G << H

1.26. A, B, C, D << E
A, B, C << G
B, D << H
H, C <<N

1.27. A, B, C << D
A, C << E
A, B << G
B, E << H

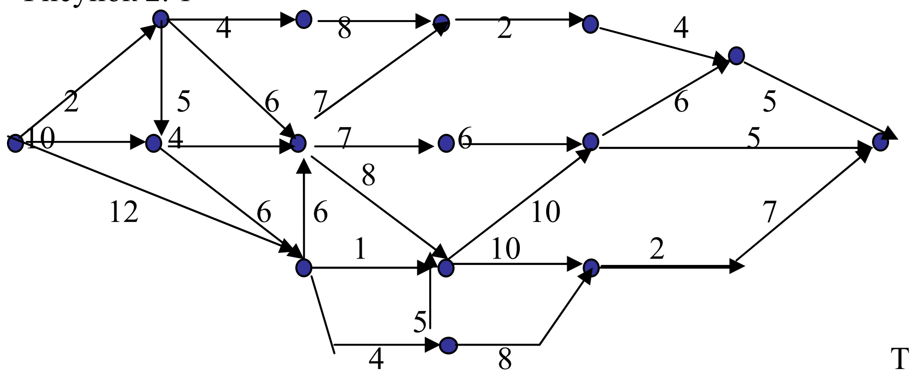
1.28. A, B << C, D
E, B << G
C, G << H

1.29. A << B, C
B, D << E
C, E, F << G
E << H

1.30. A, B, C << D
B, C << E
A, C << F
A, E << G, H

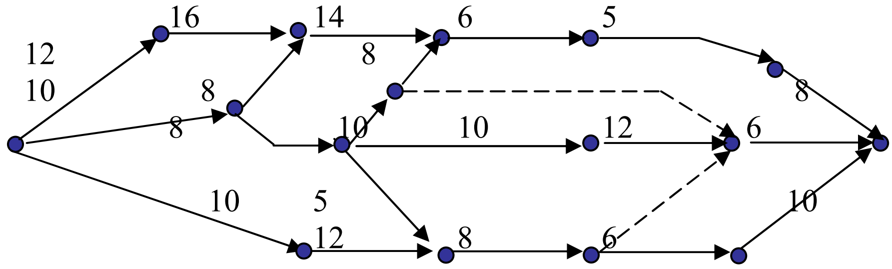
2. Расчет временных параметров сетевой модели и приведение критического времени к заданному сроку.
2.1. Рассчитать временные параметры:
T_i^0 – ранние сроки свершения событий;
T_i^1 – поздние сроки свершения событий;
Ткр – критическое время и определить критический путь (КП);
R_{ij}^n – полные резервы работ;
R_{ij}^c – свободные резервы работ;
2.2. Привести Ткр к Тдир.
Выполнить перерасчет временных параметров.
Вычертить календарный график работ в ранние сроки (линейную диаграмму).
Исходные данные заданы сетевыми графиками (рис. 2.N, где N – номер варианта).

Рисунок 2. 1



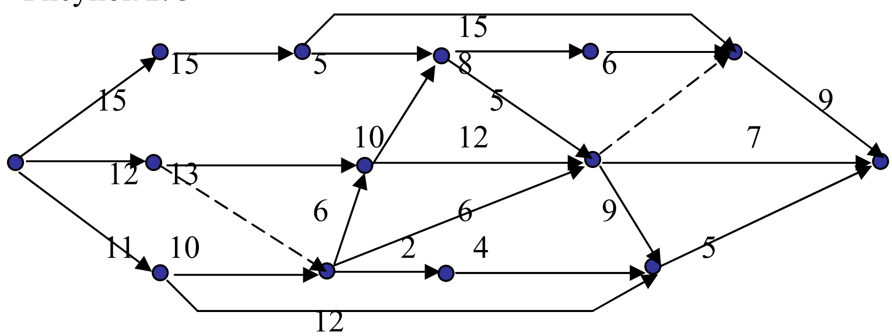
Т дир = 44

Рисунок 2. 2



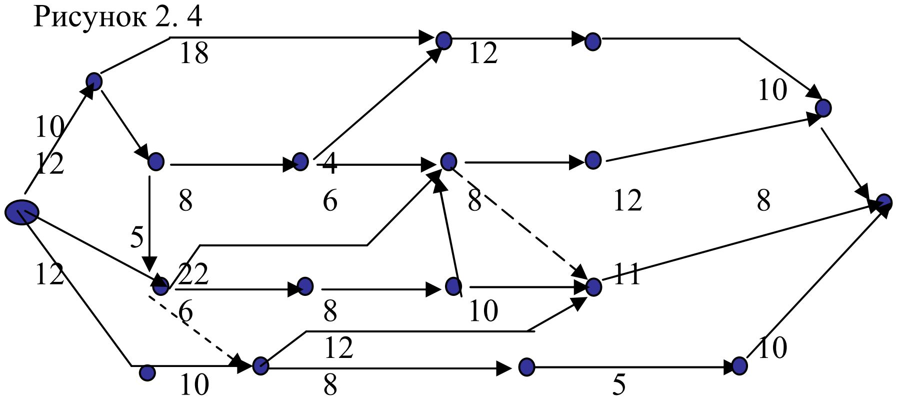
Т дир = 58

Рисунок 2. 3



Т дир = 54

Рисунок 2. 4



Т дир = 56

Рисунок 2. 5

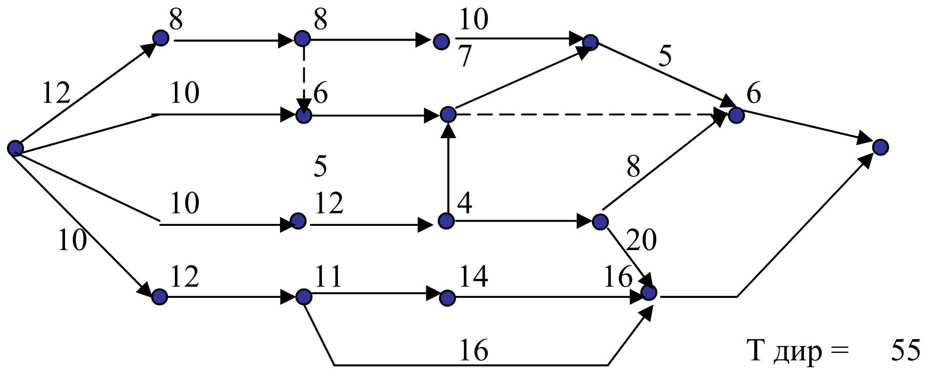


Рисунок 2. 6

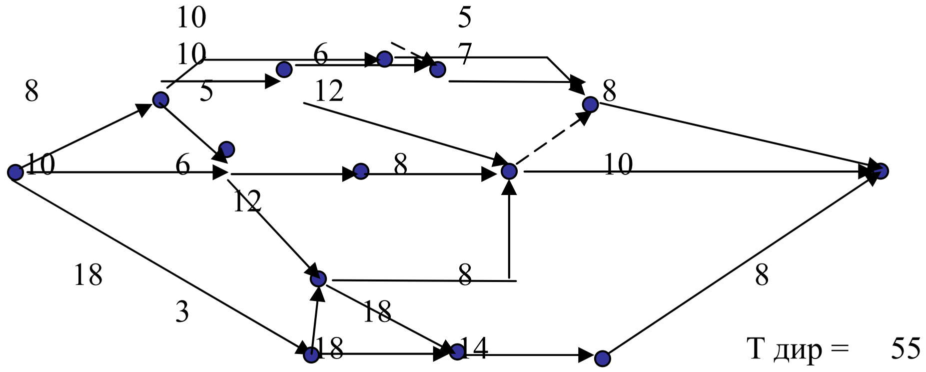


Рисунок 2. 7

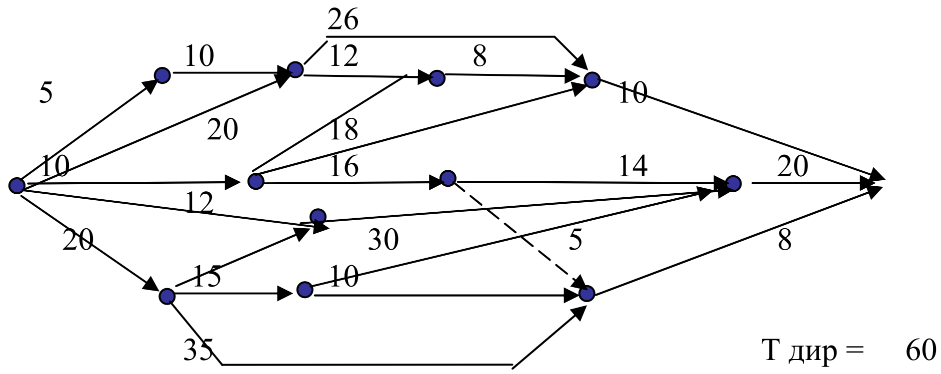


Рисунок 2. 8

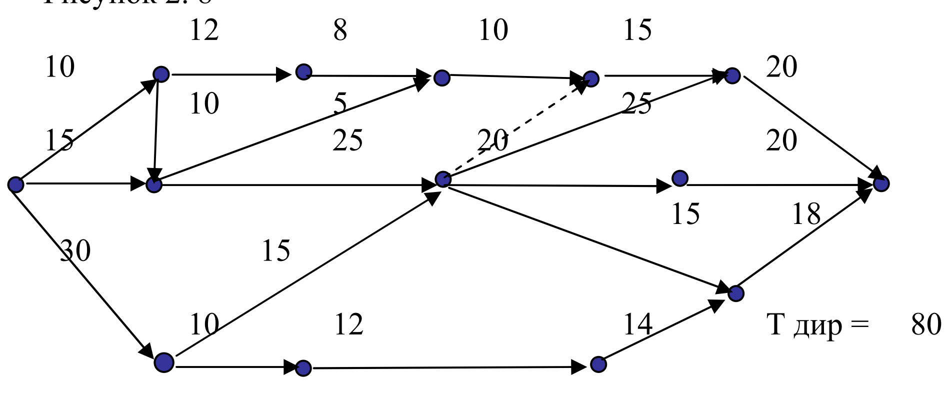
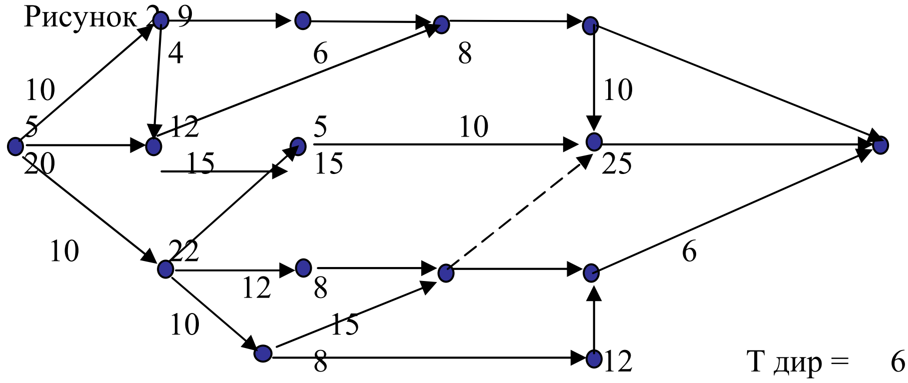
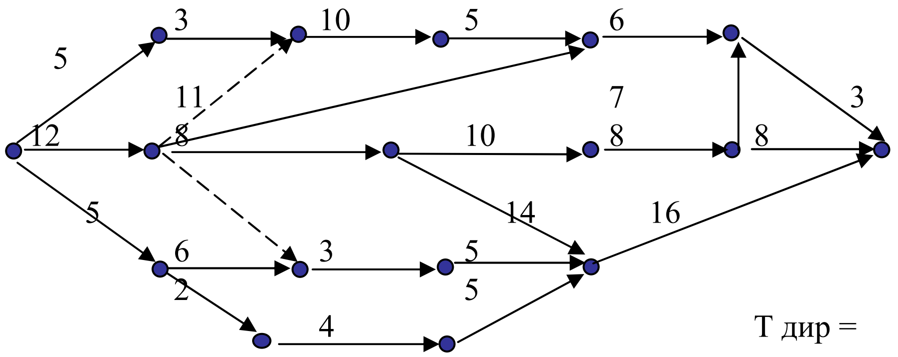


Рисунок 2. 9



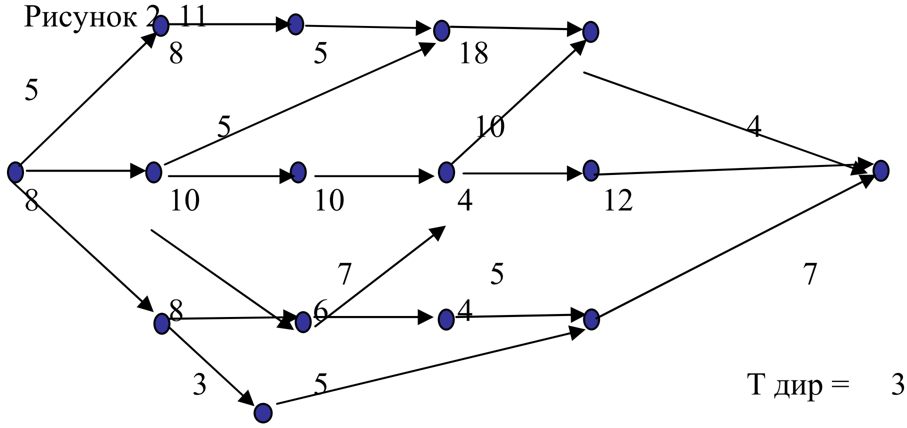
Т дир = 68

Рисунок 2. 10



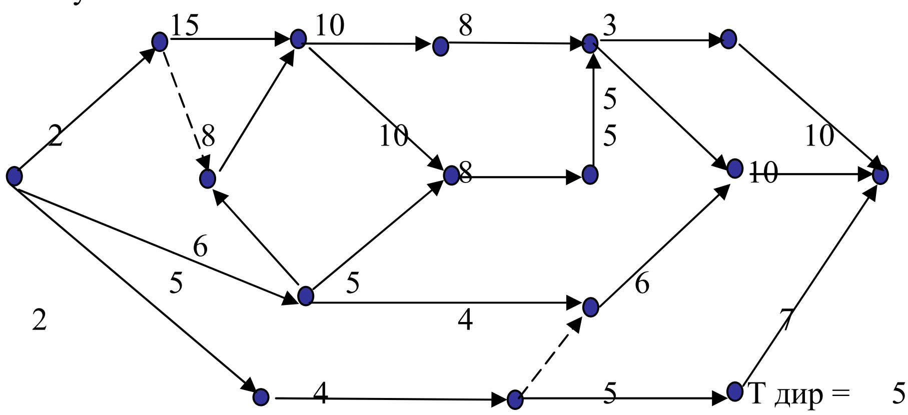
Т дир = 44

Рисунок 2. 11



Т дир = 38

Рисунок 2. 12



Т дир = 50

Рисунок 2. 13

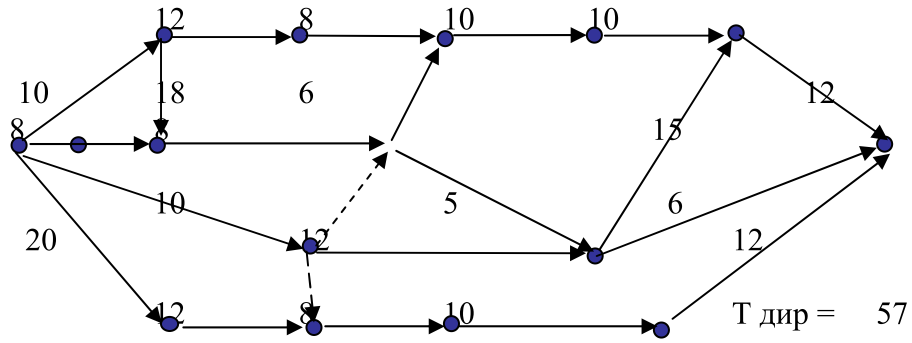


Рисунок 2. 14

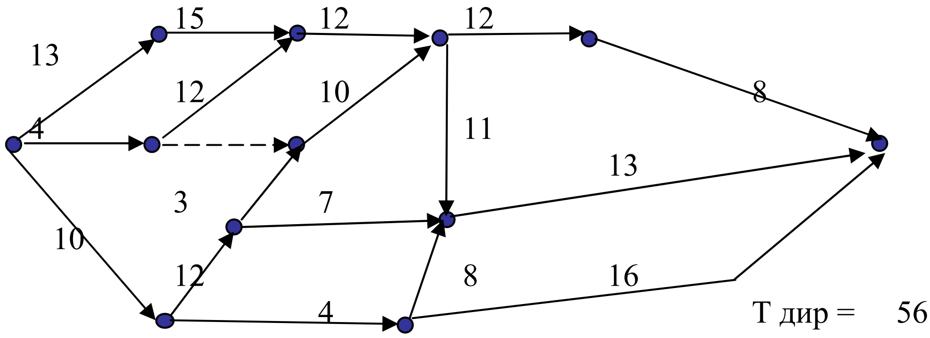


Рисунок 2. 15

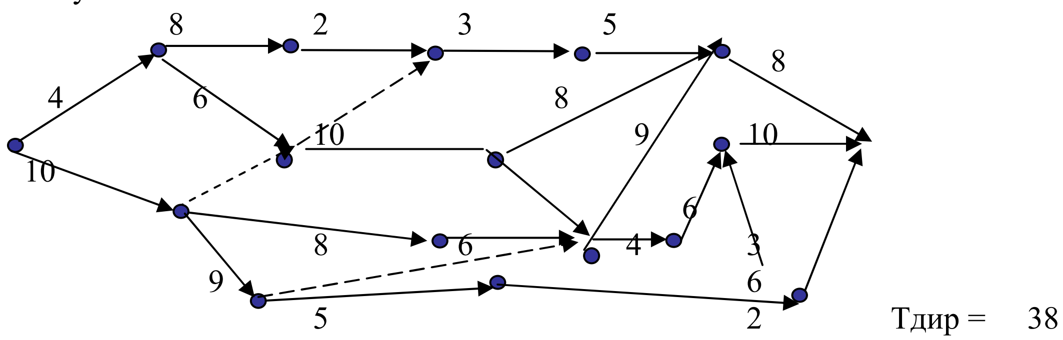


Рисунок 2. 16

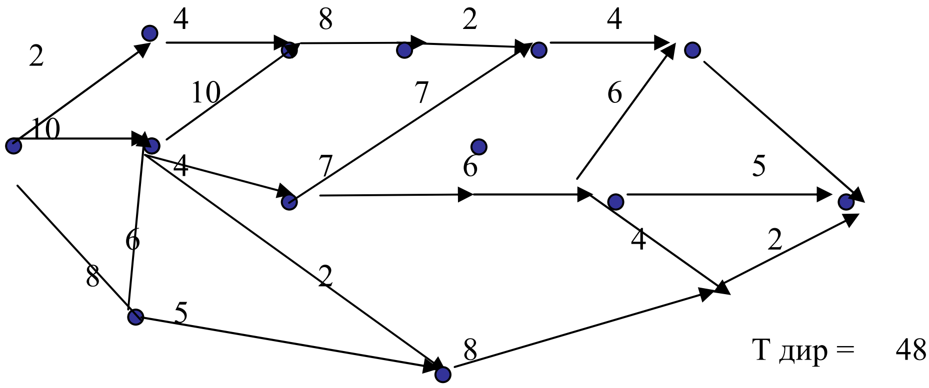
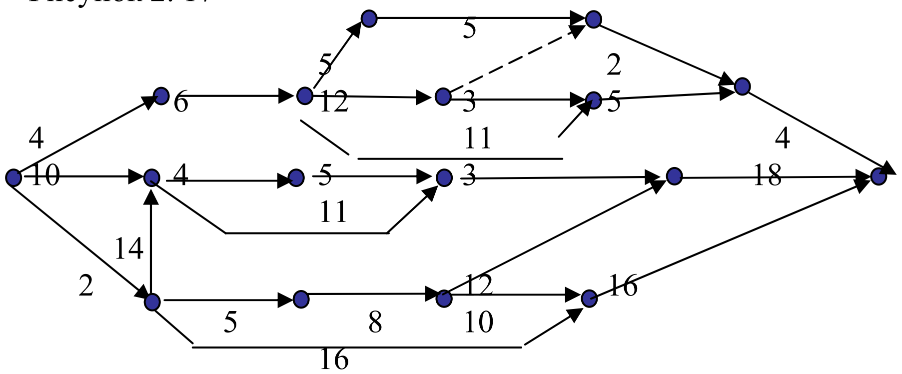
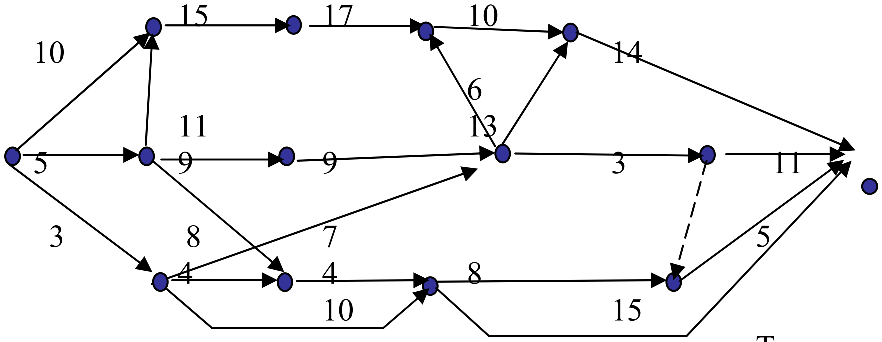


Рисунок 2. 17



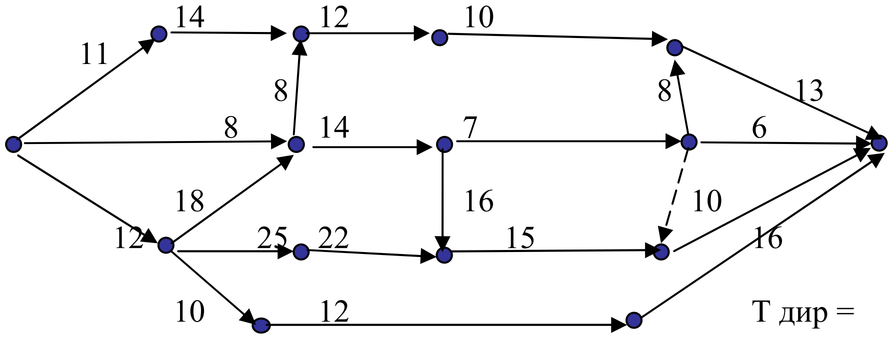
Т дир = 54

Рисунок 2. 18



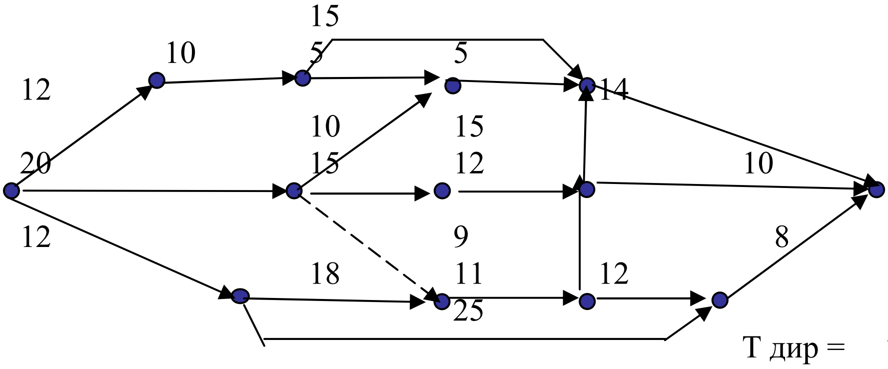
Т дир = 61

Рисунок 2. 19



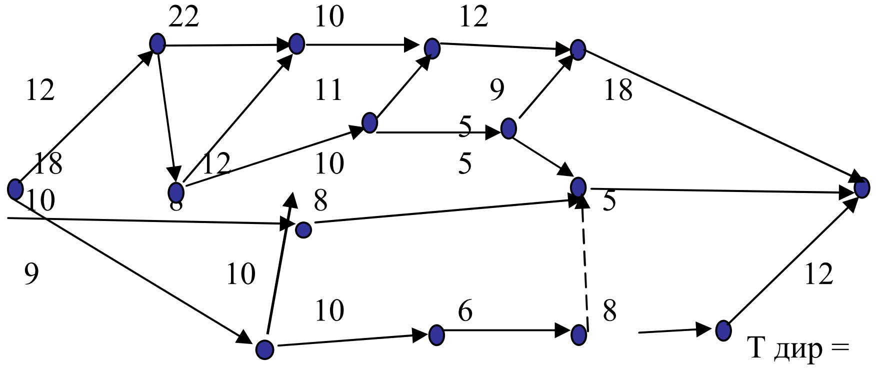
Т дир = 75

Рисунок 2. 20



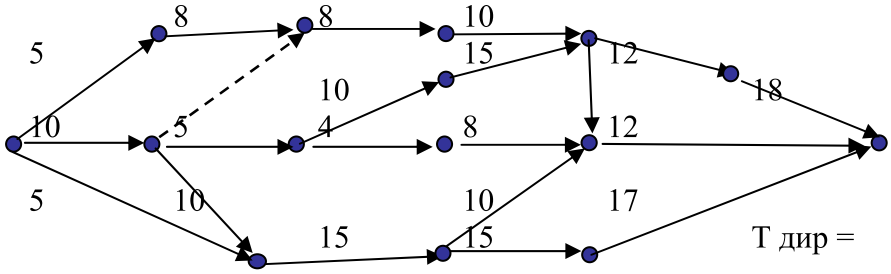
Т дир = 70

Рисунок 2. 21



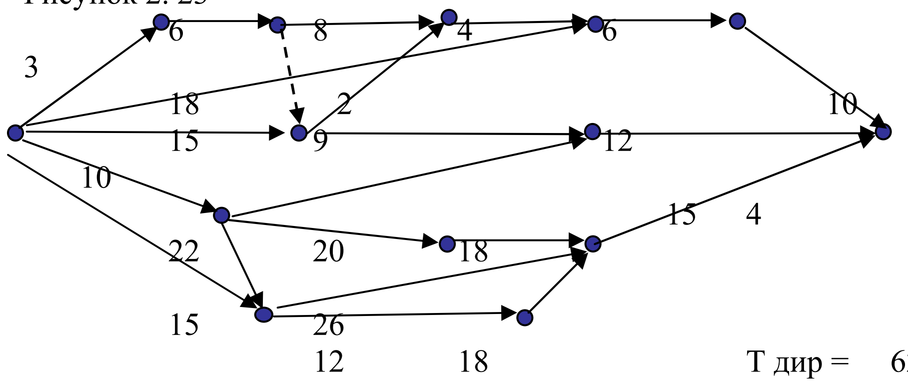
Т дир = 72

Рисунок 2.22



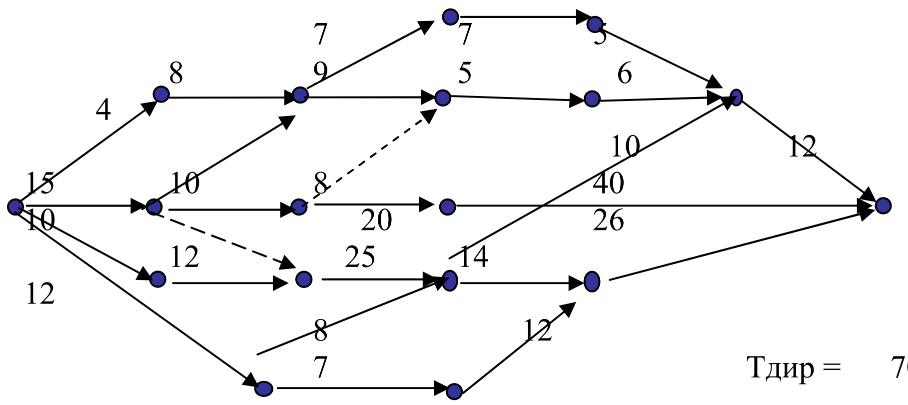
Т дир = 55

Рисунок 2. 23



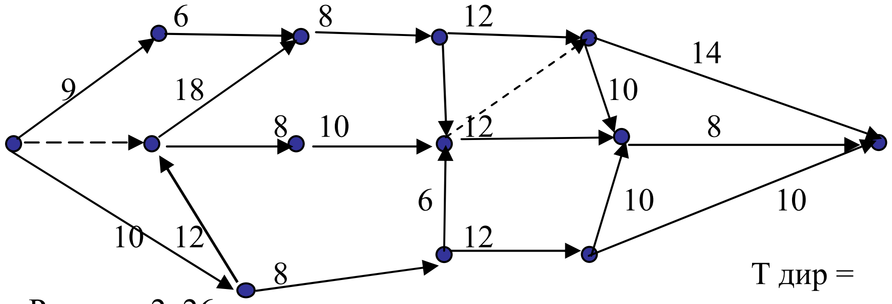
Т дир = 62

Рисунок 2. 24



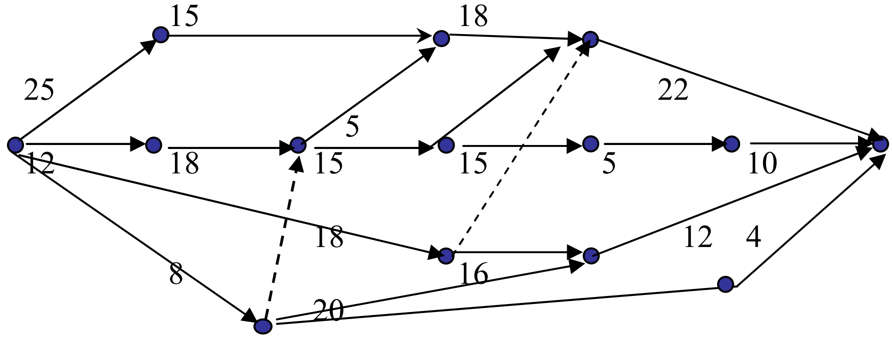
Тдир = 70

Рисунок 2. 25



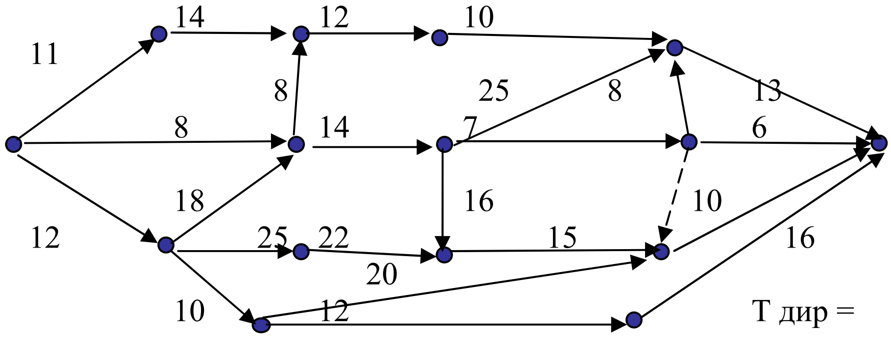
Т дир = 69

Рисунок 2. 26



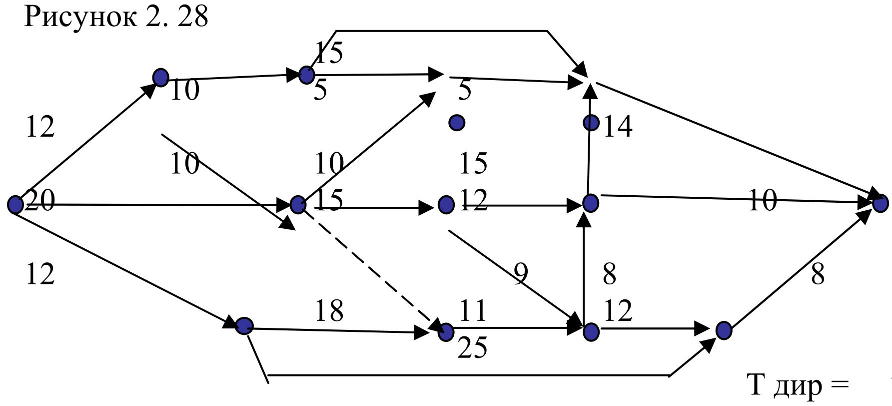
Т дир = 62

Рисунок 2. 27



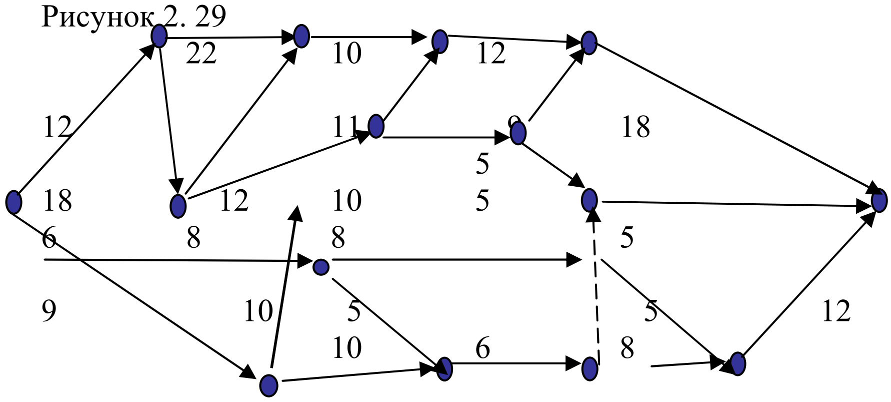
Т дир = 78

Рисунок 2. 28



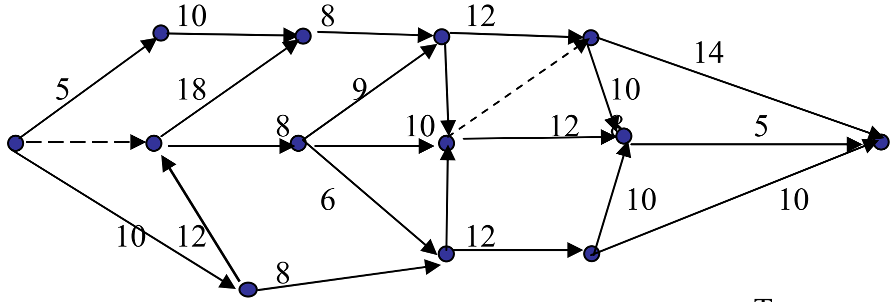
Т дир = 70

Рисунок 2. 29



Т дир = 72

Рисунок 2. 30



Т дир = 69

Контрольное задание по теме 2.5. Математические методы логистики (исходные данные представлены ниже в таблице, где N – номер варианта).

Построить детерминированную статическую модель с дефицитом. Вычислить q* – оптимальный объем заказа,

ts* – оптимальный интервал времени между заказами,

C* – минимальные ожидаемые суммарные расходы за весь период.

Построить простую вероятностную модель(II).

Вычислить s* – оптимальный уровень запаса.

Таблица вариантов

вар	Статическая модель				Частота потребления (для вероятностной модели)						
N	C1	C2	C3	β	1	2	3	4	5	6	7
1	200	50	300	30	20	30	40	45	25	20	10
2	300	100	500	40	15	18	30	40	25	15	5
3	250	70	400	20	18	20	25	22	20	18	10
4	220	40	300	30	10	20	30	30	25	10	5
5	350	100	550	50	12	15	23	28	22	18	10
6	150	20	100	50	10	15	20	25	22	10	8
7	500	50	600	30	15	25	30	30	25	14	5
8	400	50	300	30	10	20	30	40	20	15	6
9	410	55	500	40	11	21	31	41	20	10	7
10	420	60	400	20	12	22	32	42	21	11	8
11	430	65	300	30	13	23	33	43	22	12	9
12	440	70	550	50	14	24	34	45	23	13	6
13	450	75	100	50	15	25	35	44	24	14	5
14	460	80	600	30	16	26	36	46	25	15	4
15	470	85	300	30	17	27	37	47	26	16	5
16	480	90	500	40	18	28	38	48	27	17	6
17	490	95	400	20	19	29	39	49	28	18	9
18	500	50	300	30	20	30	40	50	29	19	8
19	300	55	550	50	15	25	20	28	30	20	7
20	210	60	100	50	10	20	30	25	25	15	7

21	320	65	600	30	11	21	30	30	20	10	8
22	330	70	300	30	12	22	31	40	21	11	9
23	340	75	500	40	13	23	32	41	22	12	6
24	350	80	400	20	14	24	33	42	23	13	5
25	360	85	300	30	15	25	34	43	24	14	4
26	370	90	550	50	16	26	35	45	25	15	5
27	380	95	500	50	17	27	36	44	26	16	6
28	390	90	600	30	18	28	37	46	27	17	9
29	400	80	550	25	19	29	38	47	28	18	8
30	420	70	400	20	20	30	39	48	29	19	7

Контрольное задание по теме 2.6. «Теория массового обслуживания».

(исходные данные представлены ниже в таблице, где N – номер варианта).

Построить две модели многоканальной системы массового обслуживания – с бесконечной и ограниченной очередью. Вычислить P_0 – вероятность простаивания всех каналов обслуживания, $\overline{n}_w$ – среднее число клиентов, ожидающих обслуживания, $\overline{t}_w$ – среднее время ожидания обслуживания, W – вероятность обязательного пребывания в очереди.

Таблица вариантов

N	λ	μ	s	k
1	8	10	2	4
2	9	11	2	5
3	10	12	2	4
4	11	13	2	5
5	12	14	2	4
6	13	15	2	5
7	14	16	2	4
8	15	17	2	5
9	16	18	2	4
10	17	19	2	5
11	8	11	2	4
12	9	12	2	5
13	10	13	2	4
14	11	14	2	5
15	12	15	2	4
16	13	16	3	5
17	14	17	3	4
18	15	18	3	5
19	16	19	3	4
20	17	20	3	5
21	8	12	3	4
22	9	15	3	5
23	10	11	3	4
24	11	12	3	5
25	12	13	3	4
26	13	14	3	5
27	14	15	3	4
28	15	16	3	5
29	16	17	3	4
30	17	18	3	5

Контрольное задание по теме 2.7. «Состязательные задачи».

Предлагается три проекта инвестиций и прогноз получения доходов за год (дивиденды и повышение стоимости капитала) при различных возможных исходах.

Вар	Проект инвестиций 1 возможные исходы:			Проект инвестиций 2 возможные исходы:			Проект инвестиций 3 возможные исходы:		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	40	40	20	30	20	30	20	30	20
2	100	150	250	100	250	100	250	100	250
3	150	150	–50	50	–50	50	–50	150	–50
4	140	100	20	30	20	80	20	50	20
5	80	120	250	100	250	100	250	100	50
6	150	250	–50	250	–50	50	–50	150	50
7	40	140	120	130	20	100	120	30	100
8	200	150	250	150	250	100	250	100	50
9	150	150	50	50	50	150	50	150	250
10	80	40	120	30	120	30	120	30	20
11	130	200	250	100	150	200	200	100	250
12	150	250	–50	150	–50	250	150	50	150
13	40	90	120	30	120	70	120	30	50
14	110	150	250	100	250	100	250	100	250
15	150	150	–50	150	–50	250	250	150	–50
16	40	70	120	30	20	30	20	30	20
17	80	90	150	100	150	130	250	100	200
18	150	100	–50	50	–50	150	150	50	80
19	90	140	20	30	200	130	120	30	100
20	110	120	250	100	250	100	250	100	250
21	150	250	–50	50	150	50	250	50	–50
22	40	80	20	30	20	60	90	30	20
23	200	150	250	200	250	150	250	100	100
24	150	50	–50	50	150	50	250	50	50
25	140	80	20	30	20	90	20	130	20
26	80	70	150	100	150	100	250	100	150
27	150	80	–50	50	20	150	–50	50	150
28	60	140	20	130	20	30	20	30	120
29	140	110	150	100	150	100	50	100	50
30	50	150	60	150	–50	50	150	50	–50

Контрольное задание по теме 2.8. «Динамическое программирование». Пусть расходы, связанные с приобретением и заменой оборудования по периодам, представлены в таблице, r – учетный процент в течение каждого периода. Определить срок замены оборудования без учета и с учетом коэффициента дисконтирования.

Таблица вариантов

Вариант	r	Период									
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5	100	10	20	30	40	50	55	55	60	65
2	10	110	20	20	30	40	55	55	55	60	65
3	8	120	20	22	30	40	55	60	60	60	65
4	9	130	20	25	35	40	60	60	60	60	70
5	8	140	20	25	35	40	60	60	60	60	70
6	5	150	30	25	35	45	60	60	60	70	75
7	5	160	30	25	35	45	60	60	60	70	75
8	10	170	20	30	40	45	60	60	60	75	75
9	6	180	20	30	40	50	60	60	60	75	75
10	7	190	25	30	40	50	60	60	60	75	75
11	8	200	25	30	40	50	60	65	70	75	75
12	5	190	25	30	40	55	50	65	70	75	75
13	5	170	20	30	40	50	60	60	65	75	80
14	9	180	20	30	35	50	60	60	65	75	80
15	10	160	20	25	35	50	60	60	65	70	80
16	9	150	15	25	35	45	60	60	65	70	80
17	8	140	15	25	35	45	55	60	65	65	75
18	5	130	15	20	30	45	55	60	65	65	70
19	5	120	15	20	30	40	55	60	65	60	70
20	10	110	10	20	30	40	50	60	60	60	65
21	9	100	10	20	30	40	50	55	60	60	65
22	8	110	10	20	30	40	50	55	60	60	65
23	7	120	10	20	30	40	55	60	60	60	70
24	5	130	10	25	30	45	55	60	60	65	70
25	5	140	15	25	30	45	60	60	60	65	75
26	10	150	15	25	35	45	60	60	60	70	75
27	8	160	15	25	35	45	60	60	60	70	75
28	9	170	20	30	40	45	60	60	65	70	75
29	8	180	20	30	40	45	65	60	65	70	75
30	5	190	20	30	40	50	65	60	65	70	75

Контрольное задание по теме 2.9. «Имитационное моделирование».

Постройте имитационную модель задачи управления запасами на 30-дневном интервале, генерируя случайный спрос с помощью бросания монеты, и получите количественные показатели, характеризующие средний ежедневный объем наличных запасов, число случаев неудовлетворенного спроса, количество дней, когда оформлялся заказ на пополнение.

Допустим, что заказывается Q единиц продукции всякий раз, когда имеющийся уровень наличия запасов меньше либо равен s. Заказ на пополнение запасов исполняется через L дней.

Спрос q может принимать значения q1, q2 или q3 с вероятностями 0.25, 0.5, 0.25 соответственно. Начальные условия для первого дня: наличные запасы равны s0, заказа на пополнение нет.

Таблица вариантов

N	Q	s0	s	L	q1	q2	q3
1	8	10	4	4	2	4	2
2	9	11	4	5	2	5	3
3	10	12	5	4	2	4	3
4	11	13	4	5	2	5	3
5	12	14	5	4	2	4	3
6	13	15	4	5	2	5	3
7	14	16	5	4	3	4	3
8	15	17	4	5	3	5	3
9	16	18	5	4	3	4	3
10	17	19	4	5	3	5	3
11	8	11	4	4	3	4	2
12	9	12	5	5	3	5	2
13	10	13	4	4	3	4	2
14	11	14	5	5	3	5	2
15	12	15	4	4	3	4	2
16	13	16	5	5	2	5	2
17	14	17	4	4	2	4	3
18	15	18	5	5	2	5	3
19	16	19	4	4	2	5	3
20	17	20	3	5	2	4	3
21	8	12	3	4	2	5	3
22	9	15	3	5	3	4	3
23	10	11	3	4	3	5	3
24	11	12	3	5	3	4	3
25	12	13	3	4	3	5	3
26	13	14	3	5	3	5	2
27	14	15	3	4	3	4	2
28	15	16	3	5	3	5	3
29	16	17	3	4	3	4	3
30	17	18	3	5	3	5	3

ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЗАЧЕТУ

1. Эконометрическое моделирование функции спроса.
2. Эконометрическое моделирование функции предпочтения.
3. Эластичность спроса по цене: определение и использование в практике маркетинга.
4. Методы оценивания эластичности спроса по цене.
5. Свойства эластичности спроса по цене.
6. Предельные издержки и объем производства.
7. Перекрестные коэффициенты эластичности.
8. Уравнение Слуцкого.
9. Производственные функции затрат ресурсов.
10. Модели общего экономического равновесия.
11. Общие модели развития экономики.
12. Уравнение Самуэльсона.
13. Модель Солоу.
14. Формальные требования к функции полезности лица, принимающего решения в условиях риска, и их экономические основания.
15. Представление рисков в экономико-математических моделях оптимального планирования.
16. Функция полезности Неймана-Моргенштерна: теоретические основы и практическое применение.
17. Понятие и математическая формализация потребительского выбора.
18. Использование моделей потребительского выбора для принятия управленческих решений.
19. Статистическая и динамическая модели межотраслевого баланса.
20. Модель равновесных цен.
21. Модель международной торговли.
22. Анализ и классификация основных математических моделей, применяемых при исследовании систем управления в экономике.
23. Этапы экономико-математического моделирования.
24. Задача линейного программирования и ее экономическая интерпретация.
25. Понятие устойчивости решения в задаче линейного программирования
26. Двойственная задача линейного программирования и объективно-обусловленные оценки.
27. Целочисленное линейное программирование.
28. Постановка транспортной задачи и математическая модель в общем виде.
29. Методы решения транспортной задачи.

30. Вырожденные случаи при решении транспортной задачи.
31. Область применения сетевых моделей.
32. Сетевая модель: основные элементы и правила построения топологии сети.
33. Временные параметры сетевой модели.
34. Алгоритм расчета временных параметров сетевой модели.
35. Методы оптимизации потребления ресурсов при управлении проектами.
36. Теоретические основы применения математических методов в логистике.
37. Формулировка и экономическая интерпретация классической задачи управления запасами.
38. Методика исследования классической задачи управления запасами.
39. Математические методы оптимизации стратегии пополнения запасов.
40. Математические методы регулирования товарных запасов в системах с фиксированным размером заказа.
41. Применение математических методов для регулирования товарных запасов в системах с фиксированной периодичностью заказа.
42. Оптимизация размеров заказа для создания товарных запасов.
43. Понятие и экономическая интерпретация системы массового обслуживания.
44. Использование теории очередей в управлении потоками товаров и услуг.
45. Расчёт средней длины очереди к системе массового обслуживания.
46. Расчёт вероятности превышения пороговой длины очереди к системе массового обслуживания.
47. Расчёт среднего времени ожидания в очереди к системе массового обслуживания.
48. Необходимое условие работоспособности системы массового обслуживания, его обоснование и экономическое значение.
49. Анализ проектов расширения обслуживающих мощностей с использованием теории очередей.
50. Оптимизация обслуживающих мощностей с использованием теории очередей.
51. Формулировка и экономическая интерпретация модели системы массового обслуживания.
52. Понятие и примеры матричных антагонистических игр с нулевой суммой.
53. Задача определения оптимальной смешанной стратегии в антагонистической матричной игре с нулевой суммой и её экономическая интерпретация.

54. Математические методы принятия управленческих решений в условиях конфликта.
55. Применение теории игр к проблемам антикризисного управления.
56. Компенсация рисков реализации инвестиционных проектов с использованием методов теории игр.
57. Понятие и экономическая интерпретация цены игры. Определение цены матричной антагонистической игры с нулевой суммой.
58. Оптимальные смешанные стратегии: понятие, причины использования, приёмы практической реализации.
59. Подготовка исходных данных для анализа матричной антагонистической игры с нулевой суммой в целях подготовки управленческого решения.
60. Принцип оптимальности Беллмана.
61. Классические примеры использования динамического программирования.
62. Область применения имитационных моделей.
63. Оптимизация в имитационных моделях.
64. Связь имитационных моделей с задачами управления запасами, системами массового обслуживания.
65. Понятие оптимума по Парето и его экономическая интерпретация.
66. Методы исследования многокритериальных математических моделей.
67. Методы отыскания частных оптимумов по Парето и условия их применимости.

ИТОГОВЫЕ ТЕСТЫ

1. Что выбирается в качестве показателя эффективности при возникновении форс-мажорных обстоятельств?

а) берется сама величина, которую хотелось бы минимизировать;

б) берется сама величина, которую хотелось бы максимизировать;

в) берется не сама величина, а ее среднее значение – математическое ожидание;

г) берется дисперсия самой величины;

д) все вышеназванное.

2. Какой показатель и критерий эффективности можно выбрать при снабжении предприятий сырьем?

а) суммарные расходы на перевозки сырья;

б) суммарные расходы на перевозки сырья за единицу времени;

в) минимальные расходы на перевозки;

г) максимальные расходы на сырье;

д) все вышеназванное.

3. Какой показатель и критерий эффективности можно выбрать при постройке участка магистрали?

а) время завершения стройки;

б) среднее ожидаемое время окончания стройки;

в) максимальное время окончания стройки;

г) минимальное время окончания стройки;

д) стоимость стройки.

4. Какой показатель и критерий эффективности можно выбрать при продаже сезонных товаров?

а) максимально ожидаемую прибыль;

б) среднюю ожидаемую прибыль от реализации товаров за сезон;

в) расходы при продаже;

г) максимальное время продажи;

д) все вышеназванное.

5. Какой показатель можно выбрать для характеристики эффективности работы городского транспорта?

а) среднюю скорость передвижения пассажиров по городу;

б) среднее число перевезенных пассажиров;

в) среднее количество километров, которое придется пройти пешком человеку, которого транспорт не может доставить в нужное место;

г) ни один из вышеназванных не подходит для этого;

д) все вышеназванные.

6. Из чего исходят в каждом конкретном случае при выборе модели экономических операций?

а) из вида операции;

б) из целевой направленности операций;

в) содержимое а и б;

г) из экономической ситуации;

д) все вышеперечисленное.

7. Какие разделы математики положены в основу исследования операций?

а) линейное, нелинейное, динамическое программирование;

б) теория игр;

в) теория статистических решений;

г) теория массового обслуживания;

д) все вышеперечисленное.

8. Почему при исследовании операций необходимы сведения по теории вероятности?

а) чтобы лучше соразмерять точность и подробность модели;

б) потому что большинство операций проводится в условиях неполной определенности, и их ход и исход зависят от случайных факторов;

в) потому что большинство операций проводится в условиях полной определенности, и их ход и исход не зависят от случайных факторов;

г) потому что большинство операций проводится в условиях неполной определенности, и их ход и исход не зависят от случайных факторов;

д) все вышеперечисленное.

9. Какие модели широко применяются в исследовании операций?

а) аналитические;

б) статистические;

в) имитационные;

г) пункты а и б;

д) пункты а, б и в.

10. В чем преимущества аналитических моделей при применении в исследованиях операций?

а) результаты расчета по ним легче обозримы;

б) отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности;

в) больше приспособлены для поиска оптимальных решений;

г) содержимое п.а, б, в;

д) учитывают большее число факторов.

11. В чем преимущества статистических моделей при применении в исследованиях операций?

а) более точны и подробны, не требуют столь грубых допущений, позволяют учесть большое (в теории – неограниченно большое) число факторов;

б) отчетливее отражают присущие явлению основные закономерности;

в) больше приспособлены для поиска оптимальных решений;

г) содержимое п.а, б, в;

д) учитывают большее число факторов.

12. В чем недостатки статистических моделей при применении в исследованиях операций?

а) громоздкость;

б) плохая обозримость;

в) большой расход машинного времени;

г) крайняя трудность поиска оптимальных решений, которые приходится искать “на ощупь”, путем догадок и проб;

д) все вышеперечисленное.

13. В чем недостатки аналитических моделей при применении в исследованиях операций?

а) более грубы;

б) учитывают меньшее число факторов, всегда требуют каких-то допущений и упрощений;

в) трудность поиска оптимальных решений;

г) содержимое п.а, б;

д) все вышеперечисленное.

14. В чем заключается особенность задач целочисленного программирования?

а) в том, что постановка задачи совпадает с постановкой задачи линейного программирования;

б) в том, что искомые значения переменных непременно должны быть целыми;

в) в том, что постановка задачи не совпадает с постановкой задачи линейного программирования;

г) в том, что постановка задачи совпадает с постановкой задачи динамического программирования;

д) в том, что искомые значения переменных непременно должны быть дробными.

15. В чем заключается задача распределения ресурсов по операциям?

а) в выборе такого распределения ресурсов по операциям, при котором достигается максимальная общая эффективность системы;

б) в выборе такого распределения ресурсов по операциям, при котором достигается минимальная общая эффективность системы;

в) в минимизации суммарных затрат или максимизации суммарной прибыли;

г) содержимое п.а, б;

д) содержимое п.б, в.

16. К чему сводится решение задач о назначении?

а) к выбору (назначению) по одному ресурсу для выполнения каждой операции;

б) к выбору (назначению) по множеству ресурсов для выполнения каждой операции;

в) к несовпадению числа операций и числа различных ресурсов;

г) к такому распределению (назначению) ресурсов, чтобы общая стоимость выполнения операций была минимальна или прибыль максимальна;

д) содержимое п.а, г.

17. Когда возникает задача массового обслуживания?

а) когда есть клиенты, пристраивающиеся к концу очереди;

б) когда есть клиенты, ожидающие в очереди момента;

в) когда есть клиенты, могущие пройти через средство обслуживания;

г) когда есть обслуженные клиенты, вышедшие из канала обслуживания (также указана скорость обслуживания);

д) содержание п. а-г.

18. В чем заключается “задача коммивояжера”?

а) выбрать некоторый маршрут, начинающийся в “родном” городе коммивояжера, проходящий через каждый из остальных городов только один раз и оканчивающийся в пункте отправления, который характеризуется минимальной длиной;

б) в выборе маршрута;

в) выбрать некоторые маршруты, начинающиеся в “родном” городе коммивояжера, проходящие через каждый из остальных городов несколько раз и оканчивающиеся в пункте отправления, которые характеризуются минимальной длиной;

г) выбрать некоторые маршруты;

д) выбор задач для такой широко распространенной фигуры, как коммивояжер, или агент по сбыту.

19. Для чего применяются методы исследования операций при многократных закупках оборудования?

а) для изучения вопроса о том, какое число запчастей следует хранить на складе и должны ли это быть отдельные части или собранные узлы;

б) для выбора типа и определения габаритов оборудования;

в) для определения сроков его замены и для принятия решений относительно того, чем именно его заменять;

г) для решения вопроса о целесообразности аренды или закупки оборудования и выяснения того, в каком случае использованное или модернизированное оборудование предпочтительнее нового;

д) для всего вышеперечисленного.

20. Какие вопросы охватывают исследование операций для распределения производственных заказов между предприятиями?

а) определение размера партий производимых изделий;

б) как определение технологий;

в) как определение последовательности операций и календарных графиков, состава и размещения запасов, выбора ассортимента продукции, которую можно производить из имеющегося сырья;

г) как определение целесообразности увеличения числа рабочих смен или применения сверхурочных работ;

д) все вышеназванные.

21. Для чего применяется исследование операций при сбыте продукции?

а) для определения пунктов размещения оптовых складов продукции, их емкости, количества и ассортимента запасов, хранимых на этих складах;

б) для определения круга потребителей, которым должна поставляться продукция с этих складов;

в) содержание п. а, б;

г) для стабилизации объема производства и уровня занятости, при определении затрат, обусловливаемых неустойчивостью, и влияния неустойчивости на общество;

д) для изучения вопроса о том, какое число запчастей следует хранить на складе и должны были это быть отдельные части или собранные узлы.

22. Для чего применяется исследование операций в научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах?

а) для создания отчетов о работе;

б) для определения размеров ассигнований на научно-исследовательские разработки, распределения этих ассигнований между теоретическими и прикладными научными разработками и выбора отдельных программ, на которые целесообразно отпускать средства;

в) для определения того, какие силы (оборудование и персонал) должны выделяться научно-исследовательскими и опытно-конструкторскими организациями для решения тех или иных задач и каковы оптимальные методы исследования этих сил;

г) для выбора областей, где целесообразно сосредоточить проведение научных и опытно-конструкторских работ, формирование критериев для оценки различных конструкций новых изделий, а также определение их надежности и сроков службы;

д) содержание п. б, в, г.

23. Чем отличаются методы исследования операций от методов других дисциплин?

а) объектом изучения;

б) методами самих исследований;

в) рассматриваемыми задачами;

г) набором симптомов;

д) инструментальными средствами.

24. Как найти оптимальное решение, если их число вариантов велико?

а) способом “простого перебора”;

б) методом “направленного перебора”;

в) содержание п. а, б;

г) логическими рассуждениями;

д) все вышеперечисленное.

25. Какие факторы, от которых зависит успех операции, Вы знаете?

а) заданные, заранее известные факторы (условия выполнения операции);

б) не зависящие от нас элементы решения, образующие в своей совокупности решение;

в) зависящие от нас элементы решения, образующие в своей совокупности решение;

г) содержание п. а, б;

д) содержание п. а, в;

26. Какой является задача о выборе решения при наличии неопределенных факторов?

а) детерминированной задачей;

б) задачей о выборе решения в условиях неопределенности;

в) нестохастической задачей;

г) задачей с нечетким множеством;

д) все вышеназванное.

27. Определите, к какому типу задач исследования операций относится следующий пример. Пусть организуется или реорганизуется работа столовой с целью повысить ее пропускную способность. Нам в точности неизвестно, какое количество посетителей придет в нее за рабочий день, когда именно они будут появляться, какие блюда заказывать и сколько времени будет продолжаться обслуживание каждого из них. Однако характеристики этих случайных величин, если сейчас еще не находятся в нашем распоряжении, могут быть получены статистическим путем.

а) детерминированной задачей;

б) задачей о выборе решения в условиях неопределенности;

в) стохастической задачей;

г) задачей с нечетким множеством;

д) все вышеназванное.

28. Определите, к какому типу задач исследования операций относится следующий пример:

Организуется система профилактического и аварийного ремонта технических устройств с целью уменьшить простои техники за счет неисправностей и ремонтов. Отказы техники, длительности ремонтов и профилактик носят случайный характер. Характеристики всех случайных факторов, входящих в задачу, могут быть получены, если собрать соответствующую статистику.

а) детерминированной задачей;

б) задачей о выборе решения в условиях неопределенности;

в) стохастической задачей;

г) задачей с нечетким множеством;

д) все вышеназванное.

29. В каких случаях неизвестные факторы не могут быть изучены и описаны статистическими методами?

а) распределение вероятностей для параметров в принципе существует, но к моменту принятия решения не может быть получено;

б) распределение вероятностей для параметров вообще не существует;

в) распределение вероятностей для параметров в принципе существует;

г) содержание п. а, б;

д) содержание п. а, в.

30. Какие задачи исследования операций принадлежат к сложным и трудным вычислительным задачам, при решении которых часто приходится прибегать к приближенным, так называемым "эвристическим" методам оптимизации?

а) задачи линейного программирования;

б) задачи целочисленного программирования;

в) задачи нелинейного программирования;

г) задачи стохастического программирования;

д) задачи п.п. б, в, г.

31. Если решение появляется в результате скрытой работы интеллекта человека, то оно называется:

а) формальным; б) стохастическим; в) творческим.

32. Неконтролируемые факторы, влияющие на критерий принятия решения, для каждого из которых известна только область, внутри которой находится закон распределения, называются:

а) стохастические; б) детерминированные; в) неопределённые.

33. Задачи принятия решения, где критерий оптимальности и ограничения не зависят от времени, называют:

а) динамические б) статические; в) функциональные.

34. Для ситуаций, в которых происходит выбор решений, характерны:

а) наличие цели (целей);

б) отсутствие ограничений;

в) однокритериальность.

ГЛОССАРИЙ

Автономная модель – часть системы моделей, которую можно анализировать независимо от других частей. Этот подход применим всюду, где отдельные хозяйственные звенья обладают самостоятельностью в своих действиях. Однако в экономике все связано, поэтому автономность частичных моделей всегда относительна.

Авторегрессивная модель – статистическое описание связи значений одного и того же показателя в разные моменты времени.

Агрегирование – объединение, укрупнение показателей по какому-либо признаку. С математической точки зрения агрегирование рассматривается как преобразование модели в модель с меньшим числом переменных и ограничений (агрегированную модель), дающую приближенное (по сравнению с исходным) описание изучаемого процесса или объекта.

Адаптация – приспособление системы к реальным условиям. Различают адаптацию пассивную – реагирование системы на изменение среды и активную – воздействие системы на среду.

Адекватность модели – соответствие модели моделируемому объекту или процессу.

Агрегирование – преобразование модели в модель с меньшим числом переменных или ограничений – агрегированную модель, дающую приближенное по сравнению с исходной описание изучаемого объекта.

Алгоритм – формализованная последовательность действий по решению задачи.

Алгоритм кратчайшего пути позволяет найти кратчайший путь в сети.

Алгоритм максимального потока – позволяет определить путь с максимальной пропускной способностью.

Аналитическая модель – формула, представляющая математические зависимости в экономике.

Антагонистические игры – игры, в которых интересы игроков строго противоположны, т. е. выигрыш одного игрока – проигрыш другого.

Аппроксимация – приближенное выражение математических объектов через более простые объекты, например, сведение задачи выпуклого программирования к кусочно-линейной задаче путем аппроксимации целевой функции и ограничений кусочно-линейными функциями.

Базисное решение – допустимое решение задачи линейного программирования, находящееся в вершине области допустимых решений.

Балансовая модель – 1. Система уравнений (балансовых уравнений), которые удовлетворяют требованию соответствия двух элементов: наличие ресурса и его использования. 2. При описании экономической системы в целом – система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым отдельными экономическими объектами количеством продукции и совокупной потребность в этой продукции.

Бюджетное множество – множество наборов товаров ($x_1, x_2, . . ., x_n$), доступных индивиду при его доходе Q ценах ($p_1, p_2, . . ., p_n$).

Валовой выпуск – стоимость продуктов и услуг, являющихся результатом деятельности хозяйственных объектов страны в течение данного периода (года). Включает выпуск продуктов, рыночных и нерыночных услуг. При вычитании из валового выпуска промежуточного потребления получается валовой внутренний продукт – как конечный результат производственной деятельности.

Вальраса система уравнений – одна из первых экономико-математических моделей. В ней сформулирован процесс автоматического стремления рыночной экономики к стабильному равновесию в форме линейных уравнений, переменными в которых выступают количества товаров и ресурсов, а также цены на каждый из них, балансирующие спрос и предложение. Основное равенство (закон Вальраса) утверждает, что общая величина спроса должна быть при соответствующей системе цен равна общей величине предложения.

Вектор “затрат – выпуска” – вектор, содержащий компоненты двух видов: выпускаемые продукты (обычно положительные) и продукты, затрачиваемые в производстве (отрицательные).

Венгерский метод – метод решения комбинаторных задач.

Вероятность – численная мера возможности события.

Взаимозаменяемость ресурсов – возможность альтернативного использования разных ресурсов: а) для сохранения или достижения заданного уровня производства, б) для достижения оптимума.

Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования – интерпретация зависимостей, имеющих место в задаче линейного программирования в виде геометрических фигур (точек, прямых, полуплоскостей, многоугольников) в декартовой системе координат.

Гессе матрица – матрица вторых частных производных функций нескольких переменных. Характеристика матрицы Гессе (ее положительная или отрицательная определенность и полуопределенность) служит условием для определения вида стационарной точки: является ли она, соответственно, минимумом, максимумом или седловой точкой в задаче оптимизации функции.

Госсена законы – 1. Предельная полезность любого товара уменьшается по мере увеличения его потребления. 2. Индивиду невыгодно потреблять одно благо вместо другого и вообще как-то изменять структуру потребления, поскольку всякое такое изменение только ухудшает его благосостояние.

Градиент – вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции и равный по величине ее производной в этом направлении.

Граничные условия – предельно допустимые значения переменных.

Двойственные оценки определяют дефицитность используемых ресурсов и показывают, насколько возрастает максимальное значение целевой функции прямой задачи при увеличении количества соответствующего ресурса на единицу.

Дерево – многоуровневая иерархическая система, в которой все вершины распределены по нескольким уровням.

Детерминированные величины – исходные данные, заданные определенными величинами.

Динамические модели экономики – модели, описывающие экономику в развитии (в отличие от статических, характеризующих ее состояние в определенный момент).

Динамическое программирование – методы решения задач, в которых процесс нахождения решения является многоэтапным.

Дисперсия характеризует разброс значений случайной величины.

Дисциплина очереди описывает порядок обслуживания требований в системе.

Допустимый план – решение, удовлетворяющее системе ограничений, но не обязательно оптимальное.

Достоверное событие – событие, которое непременно должно произойти.

Задача о диете заключается в определении рациона, удовлетворяющего потребностям в питательных веществах при минимальной стоимости.

Задача коммивояжера состоит в отыскании наилучшего маршрута для коммивояжера, который должен объехать заданные города и вернуться назад за кратчайший срок или с наименьшими затратами.

Задача математического программирования. В общей постановке задачи этого раздела выглядят следующим образом. Имеются какие-то переменные и функция этих переменных $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$, которая носит название целевой функции. Ставится задача: найти экстремум (максимум или минимум) целевой функции при условии, что переменные $\boldsymbol{x}$ принадлежат некоторой области G.

Задача о назначениях показывает, как распределить кандидатов по вакансиям наилучшим образом.

Задача о раскрое – как раскроить листы с минимальными затратами.

Задача о рюкзаке – задача о наилучшем использования ограниченного объема.

Задача оптимизации – задача, решение которой сводится к нахождению максимума или минимума целевой функции.

Золотое правило накопления – в условиях модели экономического роста фонд потребления на душу населения растет с максимальным темпом, если норма сбережения равна эластичности объема выпуска по капиталу.

Игра – формализованная модель конфликтной ситуации.

Игра n лиц с постоянной суммой – игры, в которых принимает участие n игроков, существует n множеств стратегий и n действительных платежных функций от n переменных, каждая из которых является элементом соответствующего множества стратегий. Каждый игрок знает всю структуру игры и в своем поведении неизменно руководствуется желанием получить максимальный средний выигрыш.

Игра двух лиц с ненулевой суммой – игры, в которых сумма выирышей двух игроков после каждой партии не равна нулю.

Игра двух лиц с нулевой суммой – игры, в которых интересы двух игроков строго противоположны, т.е. выигрыш одного есть проигрыш другого.

Игра против природы – игры, где одним из определяющих факторов является внешняя среда или природа, которая может находиться в одном из состояний, которые неизвестны лицу, принимающему решение.

Игра с нулевой суммой – игры, в которых сумма выигрыша игроков после каждой партии составляет ноль.

Игрок – участник игровой модели.

Изокванта – геометрическое место точек, в которых различные сочетания факторов производства дают одно и то же количество выпускаемой продукции.

Изоклиналь – линия наибольшего роста производственной функции. Изоклинали ортогональны изоквантам.

Имитационное моделирование – моделирование случайных величин.

Исследование операций – наука, занимающаяся разработкой и практическим применением методов оптимального управления организационными системами.

Итерация – этап реализации алгоритма, отличающийся от его других этапов (кроме начального и конечного) лишь значениями переменных величин, но не составом процедур обработки информации.

Канал обслуживания – устройство для обслуживания требований в очереди.

Кейнсианская теория экономики – модели, описывающие экономику в развитии с использованием математических методов.

Коалиции игроков – объединение m игроков в игре n лиц (m меньше n) с целью получения максимального выигрыша и выработке соответствующих стратегий.

Кобба – Дугласа функция – производственная функция, примененная американскими исследователями Ч. Коббом и П. Дугласом при анализе развития экономики США в 20-30 гг. нашего века. Имеет следующую форму $X = AK^{\alpha_k} L^{\alpha_L}$, где X – национальный доход, A – коэффициент размерности, K , L – соответственно бъемы приложения капитала и труда, α_K, α_L – константы, коэффициенты эластичности по капиталу и по труду.

Конечный узел, сток – конечная вершина сети или состояние, которым завершается комплекс работ.

Коэффициенты линейных ограничений – нормы расхода ресурсов.

Коэффициенты прямых затрат – (технологические коэффициенты) в межотраслевом балансе – средние величины непосредственных затрат продукции одной отрасли (в качестве средств производства) на выпуск единицы продукции другой отрасли. Они могут быть выражены в натуральной форме и в ценностной.

Коэффициенты эластичности производства – показатели производственной функции, характеризующие относительное изменение результатов на единицу относительного изменения затрат i-го ресурса.

Кривая безразличия – геометрическое место точек пространства товаров, характеризующихся состоянием безразличия с точки зрения потребителя или производителя.

Критический путь – путь в сети наибольшей продолжительности.

Линейное программирование – методы решения задач математического программирования, в которых ограничения и целевая функция линейны.

Линейно-независимые уравнения – уравнения, которые не могут быть получены умножением, делением, сложением, вычитанием исходных уравнений.

Линейные зависимости – зависимости, в которые переменные входят в первой степени, и в которых нет их произведения.

Линия уровня – линией уровня на поверхности Y= F(K,L) называется множество тех точек поверхности, для которых F(K,L)=const.

Магистраль – основное понятие математической теории равномерного пропорционального роста экономики, основы которой были заложены американским математиком Дж. Фон Нейманом. Это траектория (путь) развития, при которой теоретически, за длительное время, достигается максимальная скорость роста экономики.

Макроэкономическая модель – экономико-математическая модель, отражающая функционирование народного хозяйства как единого целого. Макромодели оперируют, как правило, стоимостными показателями –

национальный доход, валовые капиталовложения и другие. Важным приложением является прогнозирование народнохозяйственных процессов. Для этого используются макроэкономические производственные функции.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины.

Межотраслевой баланс отражает производство и распределение валового национального продукта в отраслевом разрезе, межотраслевые производственные связи, использование материальных и трудовых ресурсов, создание и распределение национального дохода.

Межпродуктовый баланс используется для обеспечения полной взаимоувязки планов производства группы взаимосвязанных предприятий либо группы цехов одного предприятия.

Метод ветвей и границ – метод решения задачи о назначениях.

Метод критического пути – метод решения сетевых задач, в которых продолжительности работ – детерминированные величины.

Метод Монте-Карло – метод решения задач моделированием случайных величин (метод статистических испытаний).

Метод потенциалов — метод решения транспортной задачи.

Метод рекуррентных соотношений Беллмана – основной метод динамического программирования, в основе которого лежит следующий принцип оптимальности: если управление процесса оптимально, то оно будет оптимальным и для процесса, остающегося после осуществления очередного шага.

Метод северо-западного угла – метод решения транспортной задачи.

Микроэкономическая модель – экономико-математическая модель, отражающая функционирование и структуру отдельного элемента экономической системы, взаимодействие его с другими элементами системы в процессе ее функционирования. Сюда относятся, например, модель фирмы, модель спроса и потребления, модель ценообразования, модель рынка товаров и т. д.

Многосекторная модель – модель народного хозяйства, представляющая его как совокупность крупных секторов. Ими могут быть, например, производство средств производства и производство предметов потребления, и тогда перед нами двух секторная модель. Могут быть выделены такие секторы, как государственный, кооперативный, частный. Если в качестве секторов принимаются отрасли производство, то такая модель называется многоотраслевой.

Многофазная система – система массового обслуживания, в которой требования проходят последовательную обработку на нескольких приборах.

Модель – математическое или логическое описание компонентов и функций, отображающих существенные свойства моделируемого объекта или процесса (обычно рассматриваемых как системы или элементы системы).

Начальный узел, источник – начальная вершина сети или состояние, с которого начинается комплекс работ.

Невозможное событие – событие, которое не может произойти (появление, двух тузов при вытаскивании одной карты).

Неймана модель – (модель расширяющейся экономики) – В этой модели производство всех продуктов растет в одном темпе, цены не зависят от времени, прирост производства финансируется путем инвестирования прибыли.

Нелинейное программирование – методы решения задач, в которых зависимости между переменными в целевой функции и (или) в ограничениях нелинейны.

Нелинейные зависимости – зависимости, в которые входят переменные не первой степени или есть произведение переменных.

Непрерывные величины могут принимать в заданном интервале любые значения.

Несовместные события – события, исключающие друг друга.

Ограничение – неравенства, устанавливающие зависимости для ресурсов.

Однопродуктовая модель народного хозяйства
– экономико-математическая модель, в которой экономика рассматривается как производство одного продукта, часть которого идет на потребление, часть – на увеличение основных и оборотных фондов.

Оптимальное решение – вариант, для которого принятый критерий принимает наилучшее решение.

Оптимальность по Парето – итальянский экономист В. Парето в начале XX в. сформулировал один из самых распространенных критериев оптимальности: “Следует считать, что любое изменение, которое никому не причиняет убытков и которое приносит некоторым людям пользу (по их собственной оценке), является улучшением.

Параметрическое программирование – задачи, в которых целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных (ограничения и граничные условия), либо то и другое зависят от некоторых параметров.

Парная игра – игровая модель с двумя участниками.

Паутинообразная модель – одна из простейших динамических моделей для демонстрации процесса формирования цен в условиях конкурентного рынка.

Первичные ресурсы – элементы производства, поступающие в экономическую систему извне, в отличие от ресурсов, порожденных самой системой, и продуктов – результатов производства, выходящих за ее пределы.

Переменная – величина, принимающая различные значения.

Платежная матрица – прямоугольная таблица размерности m на n, i=1,...,n j=1,...,m (i,j)-ый элемент которой есть значение выигрыша (пригрыша) игроков в случае i-го хода первого игрока и j-го хода второго игрока.

Показатель – выраженная числом характеристика какого-либо свойства экономического объекта, процесса или решения.

Предельная норма замены

– *SK* труда фондами называется отношение модулей дифференциалов основных фондов и труд

$$SK = \frac{dK}{|dL|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K},$$

SL фондов трудом

$$SL = -\frac{dL}{dK} = -\frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L}.$$

Для мультипликативной функции *k*

$SK = \frac{a_2}{a_1} k$: недостаток труда можно компенсировать его лучшей фондовооруженностью.

Предельная полезность – дополнительная полезность, получаемая от потребления дополнительной единицы какого-либо блага (частная производная функции полезности по этому благу).

Приведенные затраты – 1. Расчетная категория, отражающая величину текущих и единовременных (капитальных) затрат на производство продукции. 2. Затраты в базовый момент времени, равноценные по своему народнохозяйственному значению оцениваемым затратам, произведенным (или возможным) в другие моменты времени. Такое приведение по времени производится с помощью коэффициента дисконтирования.

Принцип оптимальности Беллмана – на каждом этапе необходимо выбирать управление так, чтобы оно в совокупности с оптимальным управлением на всех последующих этапах приводило к оптимальному выигрышу.

Продолжительность работы – время выполнения работы.

Производственная функция – функция, характеризующая зависимость между количеством применяемых ресурсов и объемом выпускаемой продукции.

Равновесие (экономической системы) – 1) состояние, которое характеризуется равенством спроса и предложения всех ресурсов; 2) состояние, когда ни один из многих взаимосвязанных участников системы не заинтересован в изменении этого состояния, так как при этом он не может ничего выиграть, но может проиграть.

Расстояние между двумя узлами – длина дуги на сети.

Регрессионный анализ обеспечивает подбор уравнения зависимости анализируемого признака от определяющих факторов по серии исходных данных.

Резерв времени работы – величина, на которую можно увеличить продолжительность выполнения работы без увеличения времени наступления конечного события.

Рынок – общественный механизм распределения благ посредством добровольного обмена. Обмен может осуществляться непосредственно, в форме бартера, и посредством промежуточного обмена благ на особый товар – деньги. Во втором случае обмен принимает форму купли-продажи, а его участники приобретают статус продавцов и покупателей. Продавцы обменивают товары на деньги, покупатели – деньги на товар.

Сетевой график – граф с дугами, изображающими связь между узлами, в котором дуге соответствует выполняемая работа, вершине – событие.

Симплекс-метод – метод решения задач линейного программирования, заключающийся в последовательном улучшении плана и позволяющий осуществлять переход от одного допустимого базисного решения к другому таким образом, что значение целевой функции непрерывно возрастают и за конечное число шагов находится оптимальное решение.

Системы с групповым обслуживанием – системы массового обслуживания, в которых требования поступают группами.

Системы с ограниченной длиной очереди – системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным числом требований.

Системы с ограниченным временем ожидания – системы массового обслуживания, допускающие очередь, но с ограниченным сроком пребывания каждого требования в ней.

Системы с отказами – системы массового обслуживания, в которых требования, поступающие в момент, когда все каналы обслуживания запиты, получают отказ и утрачиваются.

Случайная величина – данные, которые зависят от ряда случайных факторов.

Случайный ход – результат, получаемый не решением игрока, а каким-либо механизмом случайного выбора (покупательский спрос, задержка с поставкой материалов и т.п.).

Слуцкого уравнения – уравнения, характеризующие количественные зависимости между изменением цен на отдельные товары и доходов потребителей, с одной стороны, и структурой покупательного спроса – с другой.

Событие – всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Сознательный ход – выбор игроком одного из возможных вариантов действия (стратегия) и принятие решения о его осуществлении.

Солоу модель роста – одна из односекторных моделей экономического роста. Экономическая система рассматривается как единое целое без структурных подразделений, производит единый продукт, который может, как потребляться, так и инвестироваться. Эта модель достаточно адекватно отражает важнейшие макроэкономические аспекты процесса воспроизводства.

Среднеквадратическое отклонение характеризует разброс значений случайной величины от ее среднего значения.

Стационарность – постоянство во времени характеристик некоторого процесса.

Стратегия – правило действий в каждой ситуации процесса принятия решения.

Теория игр занимается методами обоснования решений в условиях неопределенности и риска, вырабатывает рекомендации для различного поведения игроков в конфликтной ситуации.

Теория очередей исследует вероятностные модели реальных систем обслуживания.

Теория управления запасами разрабатывает методы вычисления уровня производства или запаса, обеспечивающего удовлетворение будущего спроса с наименьшими издержками.

Теория фирмы – теория поведения фирмы в различных условиях (принципы и мотивы принятия решений о ценах, о выпуске продукции, инвестициях и т.д.).

Теория экономического роста – экономико-математическая дисциплина, в центре которой исследование макроэкономических моделей, характеризующих основные взаимосвязи общих показателей развития народного хозяйства, таких, как национальный доход, конечный продукт, норма накопления, объем капиталовложений и др.

Транспортная задача – задача о наиболее экономном плане перевозок однородного груза из пункта отправления заданной мощностью в пункт назначении с заданным спросом.

Фондоемкость – показатель, определяемый объемом производственных фондов, приходящихся на единицу продукции. На макроэкономическом уровне измеряется фондоемкость совокупного общественного продукта (или конечного общественного продукта, или национального дохода). На микроэкономическом уровне – фондоемкость производства в целом и фондоемкость производства отдельных видов продукции.

Фондоотдача – величина, обратная фондоемкости производства, объем продукции в расчете на единицу используемых производственных фондов.

Функция полезности – функция на множестве потребительских наборов товаров $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которой на потребительском наборе $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ равно потребительской оценке индивидуума для этого набора.

Функция потребления – функция, отражающая зависимость объема потребления от дохода или иного показателя.

Функция спроса – зависимость объема спроса от определяющих его факторов.

Целевая функция – критерий оптимизации, признак, характеризующий качество принимаемого решения (максимум прибыли, минимум затрат).

Целочисленной программирование – задачи оптимизации, в которых решение должно быть в целых числах.

Целочисленный многогранник – область допустимых решений задачи целочисленного программирования.

Экзогенные величины – переменные внешние по отношению к моделируемой системе. При использовании моделей в экономических расчетах все величины, характеризующие моделируемые объекты, подразделяются на экзогенные, или входные и эндогенные, или выходные.

Экзогенные (эндогенные) величины

При использовании моделей в экономических расчетах все величины, характеризующие моделируемые объекты, подразделяются на экзогенные, или входные и эндогенные, или выходные.

Экономико-математические методы – название комплекса экономических и математических научных дисциплин, введенное академиком В. С. Немчиновым в начале 1960-х годов.

Эластичность E_y – коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Для вычисления эластичности используют несколько эквивалентных формул (если существует конечная производная функции $y = f(x)$ в точке x):

$$E_y = \frac{x}{y} y' = x(\ln y)' = \frac{(\ln y)'}{(\ln x)'}.$$

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная

1. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Математические методы и модели для магистрантов экономики: Учеб. пособие. СПб.: Питер, 2006. – 496с.
2. Кремер Н.Ш. Исследование операций в экономике. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 407с.

Дополнительная литература

3. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.И. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: Учеб.пособие. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444с.
4. Бережная Е.В., Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем: Учебное пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 368с.
5. Вентцель Е.С. Исследование операций: Задачи, принципы, методология. –М.: Высшая школа, 2005. – 208 с.
6. Волкова В.Н., Денисов А.А. Теория систем: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 2006. — 511 с.
7. Гельруд Я.Д. Модели и методы управления проектами в условиях риска и неопределенности. –Челябинск.: ЮУрГУ. 2006. – 220 с.
8. Колемаев В.А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 2-е изд. –М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002. –399с.
9. Моделирование рисковых ситуаций в экономике и бизнесе: Учебное пособие для студентов вузов / А. М. Дубров, Б. А. Лагоша, Е. Ю. Хрусталев, Т. П. Барановская; Под ред. Б. А. Лагоши. – 2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2003. –222 с.
10. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М.В. Грачёвой, Л.Н. Фадеевой, Ю.И. Черемных. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –351 с.
11. Уотшем Т., Паррамоу К. Количественные методы в финансах: Учеб. пособие для вузов / М.: Финансы, ЮНИТИ, 1999.
12. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. –2-е изд. М.: Финансы и статистика, 2005. – 616 с.
13. Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –287 с.
14. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов / Под ред. В.В. Федосеева. –2-е изд. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. –304 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ