ТЕМА 2. МАКРОЕКОНОМІЧНІ ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

Виробнича функція **(ВФ) відображає залежність результату від витрат ресурсів.**

У формалізованому описі економіки (точніше, її виробничої підсистеми) за допомогою ВФ ця підсистема розглядається як «чорна скринька», на вхід якої постачають ресурси R_1, …, R_n, а на виході отримують результати у вигляді річних обсягів виробництва різних видів продукції X_1, …, X_m.

Як ресурси (чинники виробництва) на макрорівні здебільшого розглядаються накопичена (уречевлена) праця у формі виробничих фондів (капітал) K і поточна (жива) праця L. А як результат — валовий випуск X (чи валовий внутрішній продукт Y, чи національний дохід N). У всіх випадках результат узагальнено називатимемо випуском і позначатимемо через X.

Стосовно до обґрунтування чинника K можна твердити, що минула праця втілена в основних і обігових, виробничих і невиробничих фондах.

Вибір конкретної структури K визначається метою дослідження, а також структурою розвитку виробничої і невиробничої сфер упродовж досліджуваного періоду часу. Якщо в цей період у невиробничу сферу вкладається приблизно постійна частка новоствореної вартості, і невиробнича сфера має приблизно однаковий вплив на виробництво, то це є підставою для того, щоб у ВФ враховувати лише виробничі фонди. Виробничі фонди складаються з основних і обігових. Якщо структура їх (співвідношення між цими складовими) приблизно постійна впродовж періоду, за який вивчається об’єкт дослідження, то достатньо враховувати у ВФ лише основні виробничі фонди.

Отже, економіка заміщується своєю моделлю у формі, взагалі кажучи, нелінійної ВФ:

$$\boldsymbol{X = F(K, L)}, \tag{5.9}$$

тобто випуск продукції є функцією від затрат ресурсів (фондів і праці).

Далі аналізуватимемо основні характеристики ВФ на прикладі неокласичної мультиплікативної ВФ (зокрема функції Кобба—

Дугласа) та деяких інших, що використовуються в економічних моделях на макроекономічному рівні.

Виробничу функцію $X = F(K, L)$ називають *неокласичною*, якщо вона є гладкою і задовольняє умови, які мають чітку, несуперечливу, обґрунтовану економічну інтерпретацію:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ — за відсутності одного з ресурсів виробництво не є можливим;

2) $\frac{\partial F}{\partial K} > 0,\ \frac{\partial F}{\partial L} > 0$ — зі зростанням обсягів ресурсів зростає й випуск;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ — зі зростанням обсягів ресурсів швидкість зростання випуску знижується;

4) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) = \infty$ — за необмеженого зростання обсягів одного з ресурсів випуск також необмежено зростає.

Мультиплікативна ВФ задається виразом:

$$X = AK^{\alpha_1} \cdot L^{\alpha_2},\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \qquad (5.10)$$

де A — коефіцієнт нейтрального технічного прогресу; α_1, α_2 — коефіцієнти еластичності за фондами K і працею L відповідно. Отже, ВФ (5.10) має властивість 1, що є адекватним реальній економіці: за відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе.

Частковим випадком неокласичної мультиплікативної ВФ є функція Кобба—Дугласа:

$$X = AK^{\alpha} \cdot L^{1-\alpha},\quad \alpha_1 = \alpha,\quad \alpha_2 = 1 - \alpha.$$

Мультиплікативна ВФ визначається за даними часового ряду випуску і витрат ресурсів (X_t, K_t, L_t), $t = 1, \ldots, T$, де T — довжина часового ряду, і вважається, що має місце T співвідношень:

$$X_t = \delta_t A K_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2},$$

де δ_t — коригуючий випадковий коефіцієнт, який приводить у відповідність фактичний і теоретичний випуски і відображає флуктуацію результатів під впливом низки інших (випадкових) чинників, окрім цього, математичне сподівання $M\delta = m_\delta = 1$.

Оскільки в логарифмах ця функція є лінійною:

$$\ln X_t = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + \alpha_2 \ln L_t + \varepsilon_t,$$

де $\varepsilon_t = \ln\delta_t$, $M\varepsilon = m_\varepsilon = 0$, то отримуємо модель лінійної множинної регресії. Параметри функції: A, α_1, α_2 можуть бути визначені з використанням методу найменших квадратів за допомогою низки стандартних пакетів прикладних програм, які реалізують метод множинної регресії.

Як приклад можна навести мультиплікативну функцію валового випуску продукції однієї з країн, яка обчислюється на підставі статистичних даних за декілька років і систематично оновлюється на основі використання нових даних за поточний період.:

$$X = 0{,}931 K^{0{,}539} L^{0{,}594}. \tag{5.11}$$

Мультиплікативна функція задовольняє також властивість 2, що є адекватним реальній економіці: зі зростанням витрат ресурсів випуск також зростає, тобто:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 A K^{\alpha_1 - 1} L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K} > 0, \text{ оскільки } \alpha_2 > 0. \tag{5.12}$$

Частинні похідні випуску за чинниками, що їх називають ***граничними продуктами***, або ***граничними (маржинальними) ефективностями чинників***, є приростом випуску на малу частку приросту чинника:

$\frac{\partial F}{\partial K}$ — граничний продукт фондів (гранична фондовіддача, гранична ефективність фондів);

$\frac{\partial F}{\partial L}$ — граничний продукт праці (гранична продуктивність праці, гранична ефективність праці).

Для мультиплікативної функції з (5.12) випливає, що гранична фондовіддача пропорційна середній фондовіддачі $\frac{X}{K}$ з коефіцієнтом α_1, а гранична продуктивність праці — середній продуктивності праці $\frac{X}{L}$ з коефіцієнтом пропорційності α_2:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \qquad \frac{\partial X}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}. \tag{5.13}$$

Із рівнянь (5.13) випливає, що за $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ граничні віддачі чинників є меншими від середніх; за цих умов мультиплікативна функція має властивість 3, що часто спостерігається у реальній економіці: зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача спадає, тобто:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)AK^{\alpha_1 - 2}L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{X}{K^2} < 0, \quad \alpha_1 < 1,$$

$$\frac{\partial^2 X}{\partial L^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{X}{L^2} < 0, \quad \alpha_2 < 1. \qquad (5.14)$$

Із (5.10) також зрозуміло, що мультиплікативна функція має властивість 4, тобто за необмеженого зростання обсягу одного з ресурсів випуск також необмежено зростає. Таким чином, мультиплікативна функція $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ є неокласичною.

Здійснимо економічну інтерпретацію параметрів A, α_1, α_2 мультиплікативної ВФ.

Параметр A здебільшого інтерпретують як параметр нейтрального технічного прогресу: за тих самих значень α_1 і α_2 випуск у точці (K, L) буде тим більшим, чим більше A.

Для інтерпретації параметрів α_1 і α_2 скористаємось поняттям коефіцієнтів еластичності. Існує поняття еластичностей як логарифмічних виробничих чинників:

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \lim_{\Delta K \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)}{\frac{\Delta K}{K}}, \qquad (5.15)$$

$$\alpha_L = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \lim_{\Delta L \to 0} \frac{\left(\frac{\Delta X}{X}\right)}{\frac{\Delta L}{L}}.$$

Оскільки у нашому випадку

$$\ln X = \ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L,$$

то

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \alpha_1, \qquad \alpha_L = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \alpha_2,$$

тобто α_1 — коефіцієнт еластичності випуску за основними фондами, а α_2 — коефіцієнт еластичності випуску за працею.

Із (5.15) видно, що коефіцієнт еластичності чинника показує, на скільки відсотків збільшиться випуск, якщо чинник зросте на 1 %.

Наприклад, згідно з ВФ (5.11) збільшення основних фондів (ОФ) на 1 % приведе до зростання валового випуску на 0,539 %, а збільшення зайнятих на 1 % — на 0,594 %. Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то має місце працеощадне (інтенсивне) зростання.

Розгляньмо темпи зростання випуску:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}. \tag{5.16}$$

Якщо піднести обидві частини (5.16) до степеня $\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, то отримаємо співвідношення

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}, \tag{5.17}$$

у якому праворуч — зважене середньогеометричне темпів зростання витрат ресурсів, де ваговими коефіцієнтами слугують відносні коефіцієнти еластичності чинників:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Якщо $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, то випуск зростає швидше, ніж у середньому зростають чинники, а якщо $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ — повільніше. Справді, якщо чинники (їх обсяги) зростають, тобто $K_{t+1} > K_t$, $L_{t+1} > L_t$, то згідно з (5.16) зростає і випуск (тобто $X_{t+1} > X_t$), отже, за $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}.$$

Темпи зростання випуску є більшими ніж середні темпи зростання чинників. Отже, якщо $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, то ВФ описує зростаючу економіку.

Лінією рівня на площині K, L, чи ***ізоквантою***, називають множину тих точок площини, для котрих $F(K, L) = X_0 = \text{const}$.

Для мультиплікативної ВФ ізокванта має вигляд:

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const}, \quad \text{або} \quad K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A} L^{-\alpha_2},$$

тобто це є степенева гіпербола, асимптотами якої є осі координат.

Для різних обсягів K, L, що лежать на конкретній ізокванті, випуск дорівнює значенню X_0, що є еквівалентним твердженню про взаємозаміщення ресурсів. Оскільки на ізокванті $F(K, L) =$ $= X_0 = \text{const}$, то

$$dF = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0. \tag{5.18}$$

У цьому співвідношенні $\frac{\partial F}{\partial K} > 0, \frac{\partial F}{\partial L} > 0$, тому dK і dL мусять мати різні знаки: якщо $dL < 0$, що означає скорочення обсягів праці, то $dK > 0$, тобто зменшення в обсязі $|dL|$, праця заміщується фондами в обсязі dK.

Слушним є таке означення, що випливає з (5.18). *Граничною нормою заміщення* (*заміни*) *праці фондами* S_K *називають відношення модулів диференціалів ОФ і праці:*

$$S_K = \frac{|\, dK \,|}{|\, dL \,|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F / \partial L}{\partial F / \partial K}.$$

І, відповідно, гранична норма заміщення фондів працею (S_L):

$$S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F / \partial K}{\partial F / \partial L} .$$

Легко помітити, що $S_K \cdot S_L = 1$.

Для мультиплікативної виробничої функції норма заміщення праці фондами пропорційна фондоозброєності:

$$S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}k, \qquad k = \frac{K}{L},$$

що є природним, адже брак обсягів праці можна компенсувати її кращою фондоозброєністю.

Ізокліналями називають лінії найшвидшого зростання ВФ. Ізокліналі ортогональні лініям нульового зростання, тобто ортогональні ізоквантам. Оскільки напрямок найшвидшого зростання у кожній точці (K, L) задається градієнтом

$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L}\right),$$

то рівняння ізокліналі можна записати таким чином:

$$\frac{dK}{\partial F / \partial K} = \frac{dL}{\partial F / \partial L}.$$

Зокрема, для мультиплікативної ВФ маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L},$$

тому ізокліналь можна задати диференціальним рівнянням:

$$\frac{1}{\alpha_1} KdK = \frac{1}{\alpha_2} L\ dL,$$

котре має розв'язок

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2} L^2 + a}, \quad a = \text{const},$$

$$a = K_0^2 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} L_0^2,$$

де K_0, L_0 — координати точки, через яку проходить ізокліналь.

Якщо припустити, що $a = 0$, то отримаємо рівняння ізокліналі, що проходить через відповідні точки площини (вона є прямою лінією):

$$K = L\sqrt{\alpha_1 / \alpha_2}.$$

На рис. 5.1 зображені ізокванти та ізокліналі мультиплікативної ВФ.

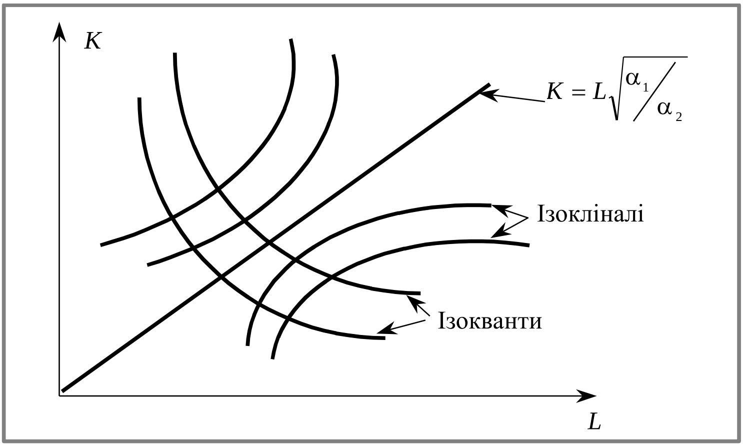

Рис. 5.1. Ізокванти та ізокліналі мультиплікативної ВФ

Аналізуючи чинники зростання економіки, виокремлюють *екстенсивний* чинник зростання (за рахунок збільшення обсягів витрат ресурсів, тобто збільшення масштабу виробництва) та *інтенсивний* чинник зростання (завдяки підвищенню ефективності використання ресурсів).

Як за допомогою ВФ вирізнити та описати *масштаб* та *ефективність* виробництва?

Це можна здійснити, якщо випуск і витрати будуть виражені у співвимірних одиницях, наприклад у вартісній формі. Найпростіше перейти до відносних (безрозмірних) показників вимірювання. У даному випадку ВФ можна подати так:

$$\frac{X}{X_0}=\left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}, \tag{5.20}$$

де X_0, K_0, L_0 — значення обсягів випуску і витрат фондів і праці в базовому році.

Безрозмірну форму (5.20) треба просто привести до початкового вигляду:

$$X=\frac{X_0}{K_0^{\alpha_1}L_0^{\alpha_2}}K^{\alpha_1}L^{\alpha_2}=AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}.$$

Отже, коефіцієнт A отримує економічно прозорий зміст:

$$A=\frac{X_0}{K_0^{\alpha_1}L_0^{\alpha_2}},$$

який зіставляє ресурси з випуском. Якщо позначити випуск і ресурси у відносних (безрозмірних) одиницях вимірювання через $\tilde{X}, \tilde{K}, \tilde{L}$, то ВФ у формі (5.20) можна подати таким виразом (через $\tilde{X}, \tilde{K}, \tilde{L}$):

$$\tilde{X}=\tilde{K}^{\alpha_1}\tilde{L}^{\alpha_2}, \tag{5.21}$$

де $\tilde{X}=\frac{X}{X_0}$; $\tilde{K}=\frac{K}{K_0}$; $\tilde{L}=\frac{L}{L_0}$.

Відшукаємо тепер аналітичний вираз стосовно до ефективності економіки, скориставшись виразом (5.21).

Нагадаймо, що ефективність — це відношення результату до витрат. У нашому випадку — два види витрат: витрати минулої праці у вигляді фондів $\tilde{K}$ і живої праці $\tilde{L}$. Отже, маємо два часткових показники ефективності: $\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ — фондовіддача, $\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ — продуктивність праці.

Оскільки часткові показники мають однакову розмірність (вони безрозмірні), то можна знаходити будь-які середні з них. Оскільки ВФ виражена в мультиплікативній формі, то і середнє природно взяти у такій самій формі, тобто як зважене середньогеометричне часткових показників ефективності:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \tag{5.22}$$

роль вагових коефіцієнтів тут відіграють відносні еластичності:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \qquad 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2},$$

тобто часткові ефективності входять до загальної (узагальненої) ефективності з такими самими пріоритетами, з якими входять у ВФ відповідні ресурси.

Із (5.22) випливає, що за допомогою коефіцієнта економічної ефективності ВФ можна подати у формі, яка зовнішньо збігається з функцією Кобба—Дугласа:

$$\tilde{X} = E\,\tilde{K}^{\alpha}\,\tilde{L}^{1-\alpha}, \tag{5.23}$$

але у співвідношенні (5.23) E — не постійний коефіцієнт, а функція від (K, L).

Оскільки масштаб виробництва M подається в обсягах витрачених ресурсів, то, враховуючи ті самі міркування, що й у випадку побудови узагальненого показника економічної ефективності, визначимо і зважене середньогеометричне використаних ресурсів (як масштаб виробництва):

$$M = \tilde{K}^{\alpha}\,\tilde{L}^{1-\alpha}. \tag{5.24}$$

Із (5.23) і (5.24) отримаємо, що випуск $\tilde{X}$ є добутком економічної ефективності та масштабу виробництва:

$$\tilde{X} = EM. \tag{5.25}$$

Приклад Розгляньмо знайдену за даними попередніх років виробничу функцію валового внутрішнього продукту США:

$$X = 2{,}248 K^{0{,}404} L^{0{,}803}.$$

Обчислимо масштаб та ефективність виробництва.

Валовий внутрішній продукт США, що вимірюється в млрд дол. у цінах 1987 р., зріс за досліджуваний період у 2,82 раза, тобто $\tilde{X} = 2{,}82$; основні виробничі фонди за цей самий період збільшились у 2,88 раза ($\tilde{K} = 2{,}88$), а чисельність зайнятих — у 1,93 раза ($\tilde{L} = 1{,}93$).

Розв'язання. Обчислимо відносні еластичності за фондами і працею:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0{,}404}{0{,}404 + 0{,}803} = 0{,}3347\,, \quad 1 - \alpha = 0{,}6653.$$

Визначимо тепер часткові ефективності ресурсів:

$$E_K = \frac{\tilde{X}}{\tilde{K}} = \frac{2{,}82}{2{,}88} = 0{,}98,$$

$$E_L = \frac{\tilde{X}}{\tilde{L}} = \frac{2{,}82}{1{,}93} = 1{,}46,$$

а також знайдемо узагальнений показник ефективності як зважене середньогеометричне часткових показників:

$$E = E_K^{\alpha} E_L^{1-\alpha} = 0{,}98^{0{,}3347} \cdot 1{,}46^{0{,}6653} \approx 1{,}278\,.$$

Масштаб обчислюємо як зважене середньогеометричне темпів зростання ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} = 2{,}88^{0{,}3347} \cdot 1{,}93^{0{,}6653} \approx 2{,}207.$$

Отже, загальне зростання ВВП за досліджуваний період у 2,82 раза стало можливим завдяки зростанню масштабу виробництва у 2,307 раза і підвищенню ефективності виробництва у 1,278 раза (2,82 = 1,273 · 2,207).

Матеріал для самостійного вивчення.

Виробничу функцію називають однорідною степеня γ, *якщо*:

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K, L). \tag{5.26}$$

Мультиплікативна функція є однорідною степеня $\alpha_1 + \alpha_2$.

Що ж до однорідних ВФ, то можна отримати спрощений вираз для норми заміщення. Дійсно,

$$F(K, L) = L^{\gamma} F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = L^{\gamma} f(k),$$

де $f(k)=F(k,1)$, $k=\dfrac{K}{L}$ — фондоозброєність. Тому

$$\frac{\partial F}{\partial L}=\gamma L^{\gamma-1}f(k)-L^{\gamma}f'(k)\frac{K}{L^2}=L^{\gamma-1}[\gamma f(k)-kf'(k)],$$
$$\frac{\partial F}{\partial K}=L^{\gamma}f'(k)\frac{1}{L}=L^{\gamma-1}f'(k),$$

звідси маємо:

$$S_k=\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}=\gamma\frac{f(k)}{f'(k)}-k, \tag{5.27}$$

тобто норма заміщення є функцією лише фондоозброєності.

Для однорідних ВФ уводять поняття **еластичність заміни праці фондами** β_K:

$$\beta_K=\frac{dk/k}{dS_K/S_K}. \tag{5.28}$$

Ця величина показує, на скільки відсотків необхідно змінити фондоозброєність, щоб досягти зміни норми заміщення на один відсоток. Аналогічно вводиться і показник еластичності заміни фондів працею β_L.

Легко перевірити, що $\beta_K=\beta_L=\beta$.

Для мультиплікативних ВФ $\beta=1$. Справді, у цьому випадку

$$\frac{\partial F}{\partial K}=\alpha_1\frac{X}{K},\quad \frac{\partial F}{\partial L}=\alpha_2\frac{X}{L},$$

тому

$$S_k=\frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}k,\qquad \frac{dS_K}{dk}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1},$$
$$\beta=\frac{dk/k}{dS_k/S_k}=\frac{S_k}{k}\left(\frac{dS_k}{dk}\right)^{-1}=\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=1.$$

Клас ВФ з **постійною еластичністю заміни** (CES-функцій) будується, зокрема, таким чином:

$$\frac{dk/k}{dS_k/S_k}=\beta=\text{const},$$

звідси маємо: $S_k=Ck^{\frac{1}{\beta}}$ (знаходиться інтегруванням). Тут C — довільна константа. Підставляючи останній вираз у (5.27), дістанемо:

$$Ck^{\frac{1}{\beta}} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k, \quad \text{або} \quad \frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\beta}} + k},$$

звідси

$$\ln f = \gamma \int \frac{dk}{k + Ck^{\frac{1}{\beta}}} = \frac{\gamma\beta}{\beta - 1} \ln C_1 \left(k^{\frac{\beta-1}{\beta}} + C \right),$$

де C_1 — довільна константа.

У результаті дістаємо:

$$f = C_1 \left(k^{\frac{\beta-1}{\beta}} + C \right)^{\gamma\frac{\beta}{\beta-1}},$$

або у змінних K, L

$$X = C_1 \left[K^{\frac{\beta-1}{\beta}} + CL^{\frac{\beta-1}{\beta}} \right]^{\frac{\gamma\beta}{\beta-1}}.$$

Якщо ввести позначення:

$$\rho = \frac{1-\beta}{\beta}; \quad \frac{1}{C+1} = \alpha < 1; \quad C_1 (C+1)^{\frac{-\gamma}{\rho}} = A,$$

то дістанемо загальний вигляд функції з постійною еластичністю заміщення (CES-функцію).

$$X = F(K, L) = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{\frac{-\gamma}{\rho}}. \qquad (5.29)$$

У цій функції $A > 0$, оскільки X — це випуск, а якщо $0 < \gamma \le 1$, $\rho > -1$, то вона задовольняє умови 2 і 3 для неокласичних ВФ. Якщо $\gamma = 1$, $\beta \to 1$ $(\rho \to 0)$, то CES-функція прямує до функції Кобба—Дугласа, а коли $\beta \to 0$ — до функції з фіксованими пропорціями $X = \min(K^{\gamma}, L^{\gamma})$, котра описує випадок заміни (заміщення) чинників $(\beta = 0)$. Якщо $(\rho \to -1$, $\gamma = 1$, то CES-функція переходить у лінійну функцію вигляду $X = E_K K + E_L L$, де $E_K = A_{\alpha} =$ $= A(1 - \alpha)$.