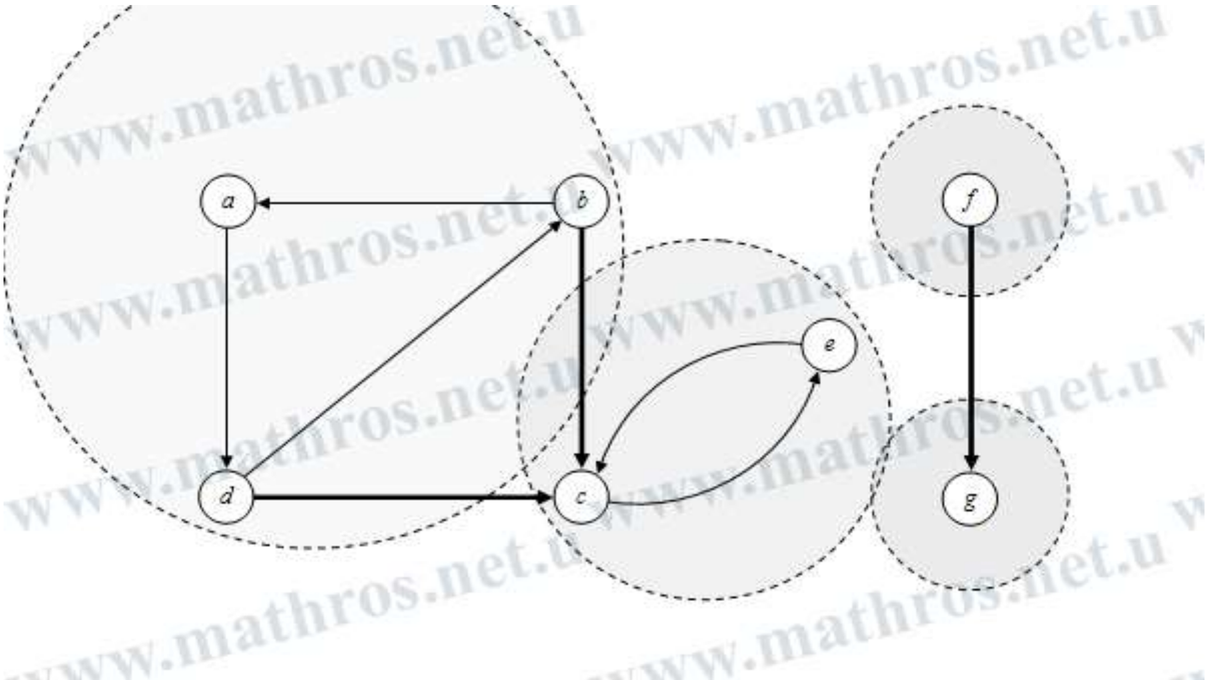
СИЛЬНО ЗВ'ЯЗАНІ КОМПОНЕНТИ ГРАФА

Означення 1.

Компонентою сильної зв'язності орієнтованого графа називається максимальна множина його вершин, в якій існують шляхи з будь-якої вершини в будь-яку іншу. Так наприклад, граф G , зображений на рисунку що міститься нижче, складається з чотирьох **компонент сильної зв'язності**: (a,b,d),(c,e) , (f) ,(g).



Як видно з рисунка, кожна вершина орієнтованого графа G належить певній **компоненті сильної зв'язності**, але деякі ребра можуть не належати жодній з них. Такі ребра з'єднують вершини з різних компонент.

Зв'язки між **компонентами сильної зв'язності**, зазвичай, зображаються шляхом створення **конденсації графа** G. Відмітимо, що конденсацією орієнтованого графа називається граф, побудований наступним чином: набори вершин, що утворюють одну **компоненту сильної зв'язності** C вихідного графа, зливаються в одну вершину конденсації C^*. З вершини C^* у вершину конденсації D^* є ребро тоді і тільки тоді, коли в графі G є ребро, що веде з деякої вершини компоненти зв'язності C у деяку вершину компоненти зв'язності D. Конденсація орієнтованого графа G представлена на вказаному вище рисунку у вигляді кіл зображених пунктирною лінією. Тобто, вершини a,b,d вихідного графа, що утворюють одну **компоненту сильної зв'язності**, зливаються в одну вершину. Вершини c,e – в другу.І вершини f і g – в третю та четверту відповідно. Ребра (b,c),(d,c), і (f,g) також відображені в конденсації, оскільки з'єднують вершини різних **компонент сильної зв'язності**.

Зауваження: *в конденсації не може бути циклів, оскільки якби існував цикл, то всі компоненти сильної зв'язності, що входять в цей цикл, утворювали б одну компоненту сильної зв'язності*.

Розглянемо алгоритм, що базується на **<u>обході орієнтованого графа в глибину</u>**, який і будемо використовувати, для розв'язку задачі на знаходження сильно зв'язних компонент орієнтованого графа.

1. Спочатку, виконуємо глибинний обхід всіх вершин вихідного графа . Завершуючи обробку чергової вершини (вершина переглянута), зберігаємо її в деяку послідовність вершин графа.
2. Будуємо транспонований граф G^T, отриманий з вихідного графа шляхом заміни орієнтації всіх його ребер на протилежні.
3. Виконуємо пошук в глибину на графі G^T, починаючи з вершини, що міститься в кінці отриманої в пункті 1 послідовності. Якщо проведений таким чином пошук не охоплює всіх вершин, то починаємо новий пошук, і робимо це з вершини, що має найбільший порядковий номер в списку серед вершин, що залишились не пройденими.

Відмітимо, що в результаті виконання кроку 3, кожне піддерево в отриманому дереві обходу в глибину для графа G^T , є сильно зв'язною компонентою для орієнтованого графа G.

Приклад знаходження компонент сильної зв'язності графа .

Використовуючи розглянутий вище алгоритм, знайти компоненти сильної зв'язності для орієнтованого графа заданого списком дуг :(1,2), (2,3), (2,6),(4,1),(4,5),(5,2).

Для цього, вибравши в якості початкової вершину під номером «1», виконуємо глибинний обхід заданого графа. В результаті виконання даного кроку, отримаємо наступне дерево обходу в глибину: (1,2) , (2,3),(2,6).Відмічені будуть: 3,6,2,1.

Потім для вершини 4 пошук в глибину : (4,5). Відмічені 5, 4.

Відмітки в послідовності 3,6,2,1,5,4 .

Далі, шляхом заміни орієнтації всіх ребер заданого графа на протилежні, будуємо для нього транспонований граф. Після цього, запускаємо другий пошук в глибину, здійснюючи,при цьому, обхід вершини відповідно до послідовності , починаючи з кінця. При цьому, вершина номер «4» складає перше піддерево пошуку, вершина «5» – друге, вершина «1» – третє, вершина «2» – четверте і вершини «6» та «3» – п’яте та шосте відповідно.

Тобто, заданий орієнтований граф складається з шести компонент сильної зв’язності, кожна з яких включає в себе по одній з його вершин.

На основі розбиття множини вершин на сильно зв’язані компоненти та їхнього часткового упорядкування можна розв’язувати різні задачі.Цей алгоритм можна використовувати,наприклад,у соціологічних дослідженнях.За його допомогою легко виявляються лідери та групи впливу в різних об’єднаннях громадян: робочих колективах,шкільних класах,студентських групах,керівництві політичних партій,клубах за інтересами. Інша цікава проблема,що може бути розв’язана на основі цієї задачі–це стягування орграфа та зменшення кількості його вершин.Взаємнодосяжні вершини об’єднуються в одну,а дуги між ними видаляються.Далі можна ставити задачу мінімізації кількості дуг з тим,щоб залишити отримане часткове упорядкування.