

Метричні характеристики графа

Якщо доповнити т дуг орграфа ще m дугами протилежного напрямку з такими самими вагами, як і у початковому графі, то за допомогою, наприклад, алгоритму Флойда-Воршола можна отримати матрицю найкоротших відстаней між будь-якою парою вершин у простому графі. У мультиграфі автоматично будуть обиратися ребра найменшої ваги, а петлі взагалі не впливають на довжину шляху, тому мова іде саме про простий граф.

Означення 1. Відстанню (the distance) між вершинами v_i та v_j у простому графі називається довжина найкоротшого шляху від v_i до v_j в орграфі з $2m$ дугами, що утворюється з простого графа заміною кожного ребра на дві дуги протилежного напрямку з такими самими вагами.

Наприклад, якщо в орграфі з рис.1

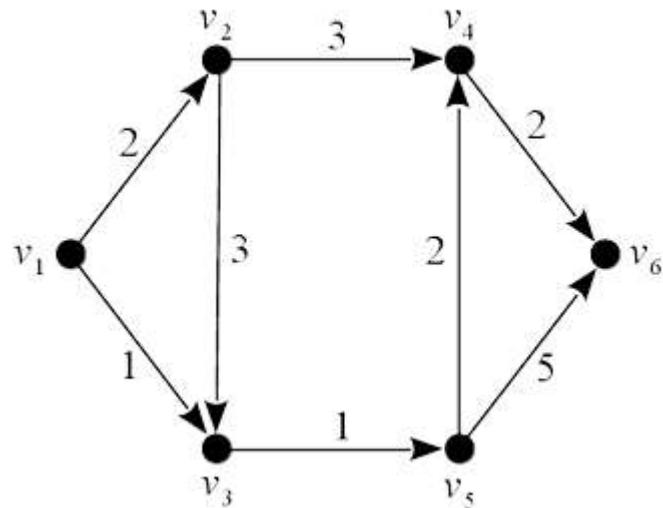


Рис.1 Орієнтований граф.

замінити дуги ребрами, то матриця найкоротших відстаней B матиме такий вигляд (на головній діагоналі ставимо нулі) :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є симетричною. Її елемент b_{ij} – це найкоротша відстань між вершинами v_i та v_j . Так, наприклад, серед усіх вершин найвіддаленішою від v_1 буде v_6 , тому що $d_{16} = 6$, а це найбільший елемент 1-го рядка. Усі інші вершини розташовані більше до v_1 , ніж v_6 . Так само, максимальний елемент 4-го рядка – це $b_{41} = 4$, тому найвіддаленішою від v_4 буде v_1 .

Означення 2. Ексцентриситетом вершини v_i (eccentricity of the vertex) зв'язного графа називається найдовша відстань від v_i до інших вершин.

Ексцентриситет кожної вершини легко відновлюється за матрицею відстаней B : це найбільший елемент кожного рядка (або стовпця). Для нашого графа вектор ексцентриситетів вершин є таким: $\varepsilon = (6 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 6)$.

Означення 3. Радіусом графа (radius of a graph) називається найменший з ексцентриситетів вершин. Вершини з мінімальним ексцентриситетом, який дорівнює радіусу, називаються центральними (central vertex).

Означення 4. Діаметром графа (diameter of a graph) називається найбільший з ексцентриситетів вершин. Вершини з максимальним ексцентриситетом, який дорівнює діаметру, називаються периферійними (peripheral vertex).

У нашому прикладі центральними є вершини v_4 та v_5 , а периферійними – v_1 та v_6 . Вони показані відповідно червоним та синім кольором.

