

## Метричні характеристики графа

Якщо доповнити  $m$  дуг орграфа ще  $m$  дугами протилежного напрямку з такими самими вагами, як і у початковому графі, то за допомогою, наприклад, алгоритму Флойда-Воршола можна отримати матрицю найкоротших відстаней між будь-якою парою вершин у простому графі. У мультиграфі автоматично будуть обиратися ребра найменшої ваги, а петлі взагалі не впливають на довжину шляху, тому мова іде саме про простий граф.

**Означення 1.** Відстанню (the distance) між вершинами  $v_i$  та  $v_j$  у простому графі називається довжина найкоротшого шляху від  $v_i$  до  $v_j$  в орграфі з  $2m$  дугами, що утворюється з простого графа заміною кожного ребра на дві дуги протилежного напрямку з такими самими вагами.

Наприклад, якщо в орграфі з рис. 1

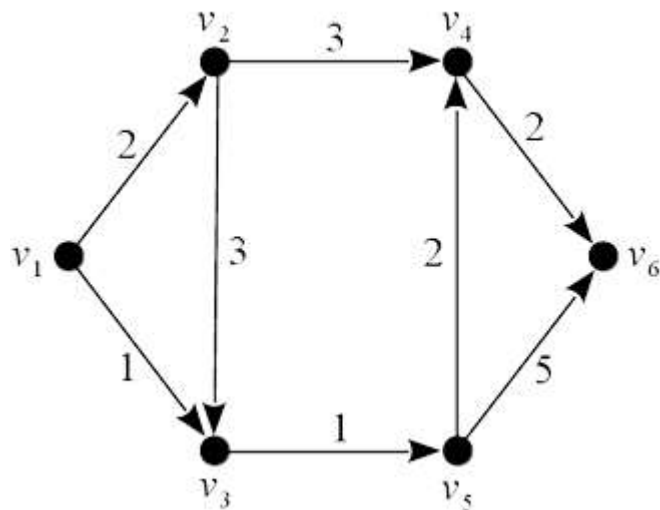


Рис.1 Орієнтований граф.

замінити дуги ребрами, то матриця найкоротших відстаней  $B$  матиме такий вигляд (на головній діагоналі ставимо нулі) :

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ця матриця є симетричною. Її елемент  $b_{ij}$  – це найкоротша відстань між вершинами  $v_i$  та  $v_j$ . Так, наприклад, серед усіх вершин найвіддаленішою від  $v_1$  буде  $v_6$ , тому що  $d_{16} = 6$ , а це найбільший елемент 1-го рядка. Усі інші вершини розташовані ближче до  $v_1$ , ніж  $v_6$ . Так само, максимальний елемент 4-го рядка – це  $b_{41} = 4$ , тому найвіддаленішою від  $v_4$  буде  $v_1$ .

**Означення 2.** Ексцентриситетом вершини  $v_i$  (eccentricity of the vertex) зв'язного графа називається найдовша відстань від  $v_i$  до інших вершин.

Ексцентриситет кожної вершини легко відновлюється за матрицею відстаней  $B$ : це найбільший елемент кожного рядка (або стовпця). Для нашого графа вектор ексцентриситетів вершин є таким:  $\epsilon = (6 \ 5 \ 5 \ 4 \ 4 \ 6)$ .

**Означення 3.** Радіусом графа (radius of a graph) називається найменший з ексцентриситетів вершин. Вершини з мінімальним ексцентриситетом, який дорівнює радіусу, називаються центральними (central vertex).

**Означення 4.** Діаметром графа (diameter of a graph) називається найбільший з ексцентриситетів вершин. Вершини з максимальним ексцентриситетом, який дорівнює діаметру, називаються периферійними (peripheral vertex).

У нашому прикладі центральними є вершини  $v_4$  та  $v_5$ , а периферійними –  $v_1$  та  $v_6$ . Вони показані відповідно червоним та синім кольором.

