Завдання.

1) **Знайти всі точки спокою і встановити їх тип.**
2) **Зобразити фазовий портрет системи**
3) **Знайти розв'язок системи (3) – (4), побудувати графіки залежності *x* та *y* від *t*.**

Побудова системи диференціальних рівнянь

1. Модель хижак-жертва. У 1931 р Віто Вольтерра запропонував модель хижак - жертва. Нехай на деякій замкнутій території мешкають два види: вегетаріанці-жертви, які харчуються підніжним кормом, що є в надлишку, і хижаки, що полюють на жертв. Як пари хижак-жертва можуть виступати вовки і вівці, щукі і карасі, рисі і зайці…

Якби не було хижаків, то жертви розмножувалися б безмежно, і їх чисельність описувалася б рівнянням Мальтуса:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha \cdot x, \tag{1}$$

Розв'язок цього рівняння має вигляд $x = x_0 e^{\alpha \cdot t}$, де $\alpha > 0$ – коефіцієнт приросту, x – їх чисельність в даний момент часу, x_0 – чисельність популяції в початковий момент часу. Якби не було жертв, то хижаки через брак їжі поступово вимирали б:

$$\frac{dy}{dt} = -\gamma \cdot y, \quad y = y_0 e^{-\gamma \cdot t}, \tag{2}$$

де $\gamma > 0$ – коефіцієнт втрати хижаків, y – їх чисельність в даний момент часу, y_0 – чисельність популяції в початковий момент часу.

Зростанню чисельності жертв, проте, перешкоджають їх зустрічі з хижаками, частота яких пропорційна як числу жертв, так і числа хижаків – xy. Тоді швидкість зміни чисельності жертв описується рівнянням

$$\frac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y), \tag{3}$$

де $\beta > 0$ – коефіцієнт втрати жертв при зустрічі з хижаками. Аналогічно, зустріч хижака з жертвою збільшує ймовірність виживання хижака, тобто сприяє приросту популяції хижаків

$$\frac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \tag{4}$$

де $\delta > 0$ – коефіцієнт, що залежить від того, як часто зустріч хижака з жертвою закінчується трапезою.

Таким чином, модель Вольтерра задається системою рівнянь (3)-(4).

До виконання пункту 1) завдання на прикладі системи (3.1), заданої нижче

Дослідити та визначити всі стани рівноваги системи

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(x+y-2), \\ \dfrac{dy}{dt} = y(1-x). \end{cases} \qquad (3.1)$$

Розв'язання: Спочатку знайдемо стаціонарні точки

$$\begin{cases} x(x+y-2)=0, \\ y(1-x)=0. \end{cases} \Rightarrow \text{отримали три точки} \begin{cases} 1)\ x_0=0,\ y_0=0 \quad (A), \\ 2)\ x_0=1,\ y_0=1 \quad (B), \\ 3)\ x_0=2,\ y_0=0 \quad (C). \end{cases}$$

Для дослідження ліанеризуємо систему (3.1) в околі точки $(x_0; y_0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (2x_0+y_0-2)(x-x_0)+x_0(y-y_0), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y_0(x-x_0)+(1-x_0)(y-y_0). \end{cases}$$

Характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 2x_0+y_0-2-\lambda & x_0 \\ -y_0 & 1-x_0-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, $\lambda^2-(x_0+y_0-1)\lambda+(4x_0-2x_0^2+y_0-2)=0$.

Для точки A отримаємо: $\lambda^2+\lambda-2=0$, звідки $\lambda_1=-2;\ \lambda_2=1$ – особлива точка типу сідло.

Для точки B отримаємо: $\lambda^2-\lambda+1=0$, звідки $\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ – особлива точка типу фокус, причому нестійкий, бо $\operatorname{Re}\lambda>0$.

Для точки C отримаємо: $\lambda^2-\lambda-2=0$, звідки $\lambda_1=2;\ \lambda_2=-1$ – особлива точка типу сідло.

До виконання пунктів 2), 3)   завдання на прикладі системи (1), заданої нижче

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x\left(0.2 - 0.005y\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y\left(0.5 - 0.01x\right). \end{cases} \qquad (1)$$

при початкових умовах

$$(x(0) = 40, \quad y(0) = 70.$$

Знайти точки рівноваги, побудувати фазовий портрет в додатних осях (x, y) та зобразити періодичні коливання чисельності популяції хижака та жертви в осях (t, x) та (t, y) на одному графіку. Для розв'язання задачі можна використовувати будь який математичний пакет.

Розв'язок цієї задачі (в середовищі MAPLE) наведено нижче

Модель Вольтерра

> restart :

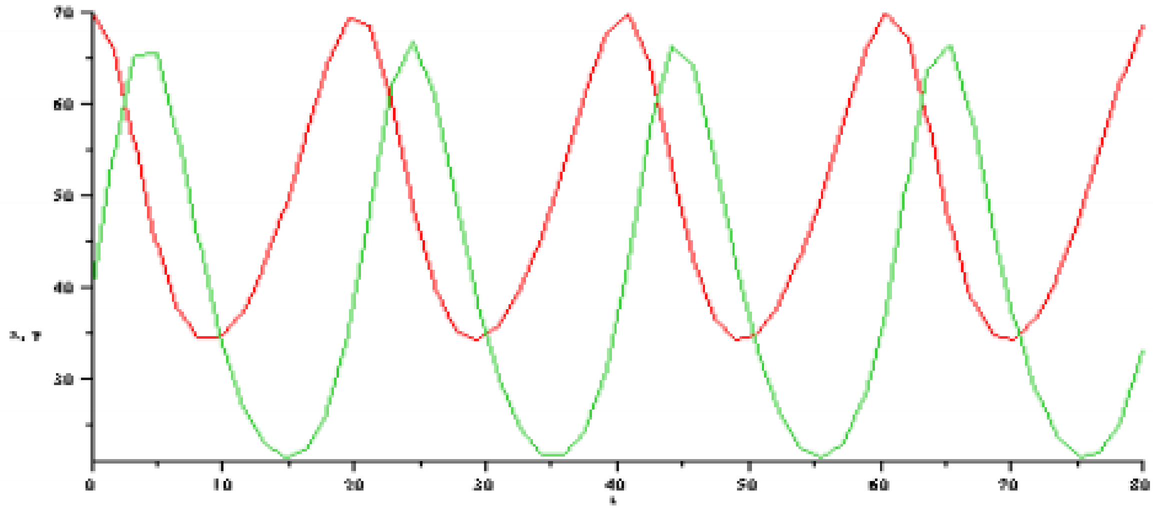
>

$F := dsolve(\{diff(x(t), t) = 0.2\,x(t) - 0.005\,x(t)\,y(t), diff(y(t), t) = -0.5\,y(t) + 0.01\,x(t)\,y(t), x(0) = 70, y(0) = 40\}, \{x(t), y(t)\}, numeric, method = rkf45);$

$with(plots):$

$odeplot(F, [[t, x(t)], [t, y(t)]], t = 0 ..80);$

$F :=$ **proc**(x_rkf45) ... **end proc**



>

>

$with(DEtools):$

$DEplot([diff(x(t), t) = 0.2\,x(t) - 0.005\,x(t)\,y(t), diff(y(t), t) = -0.5\,y(t) + 0.01\,x(t)\,y(t)], [x(t), y(t)], t = -20 ..20, [[x(0) = 70, y(0) = 40], [x(0) = 80, y(0) = 50], [x(0) = 50, y(0) = 20]], x = 0 ..100, y = 1 ..100);$