Práctica 1: Lenguajes

2do cuatri 2024 - si encontrás algún error mi tg es @kztqz

Ejercicio 1

Sea $\Sigma = \{a,\ b\}$ un alfabeto. Hallar:

$$\Sigma^0, \quad \Sigma^1, \quad \Sigma^2, \quad \Sigma^*, \quad \Sigma^+, \quad |\Sigma|, \quad |\Sigma^0|$$

- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
- $\Sigma^* = \bigcup\limits_{i \geq 0} \Sigma^i = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb...\}$
- $\Sigma^+ = \bigcup\limits_{i \geq 1} \Sigma^i = \{a, b, aa, ab, ba, bb...\}$
- $|\Sigma| = 2$
- $|\Sigma^0| = 1$

Ejercicio 2

Decidir si, dado $\Sigma = \{a,\ b\}$ vale:

$$\lambda \in \Sigma, \quad \lambda \subseteq \Sigma, \quad \lambda \in \Sigma^+, \quad \lambda \in \Sigma^*, \quad \Sigma^0 = \lambda, \quad \Sigma^0 = \{\lambda\}$$

- $\lambda \in \Sigma \rightarrow Falso$
- $\lambda \subseteq \Sigma \rightarrow Falso$
- $\lambda \in \Sigma^+ \rightarrow Falso$
- $\lambda \in \Sigma^* \rightarrow Verdadero$
- $\Sigma^0 = \lambda \rightarrow Falso$
- $\Sigma^0 = \{\lambda\} \rightarrow Verdadero$

Ejercicio 3

Sea $\alpha = abb$ una cadena. Calcular:

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3, \quad \alpha^r$$

- $\alpha^0 = \lambda$
- $\alpha^1 = abb$

- $\alpha^2 = abb.abb$
- $\alpha^3 = abb.abb.abb = abbabbabb$
- $\prod_{k=0,\dots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3 = \lambda.abb.abbabb.abbabbabb = abbabbabbabbabbabb$
- $\alpha^r = (abb)^r = bba$

Ejercicio 4

Sean las cadenas $\alpha = abb$ y $\beta = acb$. Calcular:

$$\alpha\beta, \quad (\alpha\beta)^r, \quad \beta^r, \quad \beta^r\alpha^r, \quad \lambda\alpha, \quad \lambda\beta, \quad \alpha\lambda\beta, \quad \alpha^2\lambda^3\beta^2$$

- $\alpha\beta = abbacb$
- $(\alpha\beta)^r = (abbacb)^r = bcabba$
- $\beta^r = (acb)^r = bca$
- $\beta^r\alpha^r = (acb)^r(abb)^r = bcabba$
- $\lambda\alpha = \alpha = abb$
- $\lambda\beta = \beta = acb$
- $\alpha\lambda\beta = \alpha\beta = abbacb$
- $\alpha^2\lambda^3\beta^2 = \alpha^2\beta^2 = abbabbacbacb$

Ejercicio 5

Dado un alfabeto Σ, sean x,$y \in \Sigma$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que:

a. $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$

b. $|\alpha^r| = |\alpha|$

c. $|\alpha x\beta| = |x\alpha\beta|$

d. $|\alpha.\alpha| = 2|\alpha|$

e. $(\alpha.\beta)^r = \beta^r.\alpha^r$

f. $(\alpha^r)^r = \alpha$

g. $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$

($|\alpha|$ indica la longitud de la cadena α).

Para resolver estos ejercicios va a ser útil tener a mano estas def / demos:

(1) Definición recursiva de la longitud:

$$|\lambda| = 0$$

$$|x.\alpha| = 1 + |\alpha|$$

(2) Propiedad: $|\alpha.\beta| = |\alpha| + |\beta|$. Demo por inducción estructural sobre α:

1. Si $\alpha = \lambda$:

$$|\lambda.\beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\lambda| + |\beta|$$

2. Si $\alpha = x.\alpha'$, suponemos que vale para α', y:

$$
\begin{aligned}
|(x.\alpha').\beta| &= |x.(\alpha'.\beta)| \quad \textbf{(def. } \alpha'\textbf{)} \\
&= 1 + |\alpha'.\beta| \quad \textbf{(def. longitud)} \\
&= 1 + |\alpha'| + |\beta| \quad \textbf{(hip. ind)} \\
&= |x.\alpha'| + |\beta| \quad \textbf{(def. longitud)} \\
&= |\alpha| + |\beta| \quad \textbf{(def. } \alpha'\textbf{)}
\end{aligned}
$$

(3) Definición recursiva de la reversa:

$$\lambda^r = \lambda$$

$$(x.\alpha)^r = \alpha^r.x$$

a. Quiero demostrar que $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$.

Como $x \in \Sigma$, por la definición recursiva de longitud, puedo sacarlo de la operación longitud de la cadena y sumar un 1. Lo mismo hago para $y \in \Sigma$.

$|x.(y.\alpha)| \overset{(1)}{=} 1 + |y.a| \overset{(1)}{=} 1 + 1 + |\alpha| = 2 + |\alpha|$

b. Quiero demostrar que $|\alpha^r| = |\alpha|$. Pruebo por inducción:

1. Caso base (si $\alpha = \lambda$):

$$|\lambda|^r \overset{(3)}{=} |\lambda|$$

...

continuará

Ejercicio 6

Dar ejemplos de cadenas que pertenezcan a los siguientes lenguajes:

a. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

b. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

c. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

d. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$

e. $\mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \geq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1 \}$

f. $\mathcal{L} = \{a, b\}^3 \ \cap \ \Lambda$

g. $\mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$

h. $\mathcal{L} = \{\alpha \in \{a, b\}^+ \mid \alpha = \alpha^r\}$

a. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

En castellano: todas las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen la misma cantidad de a y b y $\lambda \in \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{\lambda, ab, aabb, aaabbb\}$

b. $\mathcal{L} = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

En castellano: las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos una a y una b (por lo tanto, $\lambda \notin \mathcal{L}$) y la cantidad de apariciones de a es igual a la cantidad de apariciones de b.

Ejemplos: $\{ab, aabb, aaabbb\}$

c. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 1\}$

En castellano: las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos una a y una b (por lo tanto, $\lambda \notin \mathcal{L}$) y la cantidad de apariciones de a no es necesariamente igual a la cantidad de apariciones de b.

Ejemplos: $\{a, b, ab, aa, bb, baa, aba\}$

d. $\mathcal{L} = \{a^n b^m \mid n \geq 1 \wedge m \geq 0\}$

En castellano: las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos una a (por lo tanto, $\lambda \notin \mathcal{L}$) y la cantidad de apariciones de a no es necesariamente igual a la cantidad de apariciones de b.

Ejemplos: $\{a, ab, aab, aaa, abab\}$

e. $\mathcal{L} = \{a^n (ac)^p (bab)^q \mid n \geq 0 \wedge q = p + 2 \wedge p \geq 1\}$

En castellano: como $p \geq 1$, las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos una aparición de ac. Además, como $q = p + 2$, tengo que $q \geq 3$, todas las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos tres apariciones de bab. La cantidad de apariciones de bab depende de la cantidad de apariciones de ac. Las cadenas de $\mathcal{L}$ pueden no tener apariciones de a y estas no dependen ni de p ni de q.

Ejemplos: $\{acbabbabbab, acacbabbabbabbab, aacbabbabbab\}$

f. $\mathcal{L} = \{\{a, b\}^3 \ \cap \ \Lambda\}$

En castellano: como Λ (lambda mayúscula) es el conjunto que contiene solamente a la palabra vacía y todas las cadenas pertenecientes a $\mathcal{L}$ tienen longitud igual a 3, la intersección de ambos es vacía.

Ejemplos: $\{\varnothing\}$

g. $\mathcal{L} = \{\alpha\alpha^r \mid \alpha \in \{a, b\}^+\}$

En castellano: todas las cadenas de $\mathcal{L}$ se forman concatenando una cadena $\alpha \in \{a, b\}^+$ con su reversa. Mirando el $+$ de $\{a, b\}^+$ vemos que $\lambda \notin \mathcal{L}$. Como todos las cadenas en $\mathcal{L}$ son de la forma una cadena de longitud igual o mayor a 1 concatenada con su reversa (que tiene la misma longitud, mirar ejercicio 5) todas tienen longitud igual o mayor a 2.

Ejemplos: $\{aa, bb, abba, baab, aabbaa, babaabab\}$

h. $\mathcal{L} = \{\alpha \in \{a, b\}^+ \mid \alpha = \alpha^r\}$

En castellano: todas las cadenas de $\mathcal{L}$ son también cadenas de la forma $\alpha \in \{a, b\}^+$ y cumplen que son iguales a su reversa. Por la definición (3) del ejercicio 5 vemos que $\lambda \in \mathcal{L}$.

Ejemplos: $\{\lambda, a, b, aa, aba, bbb\}$

Ejercicio 7

Definir por comprensión los siguientes lenguajes:

a. $\mathcal{L}_1 = \{ab, aabb, aaabbb, ...\}$

b. $\mathcal{L}_2 = \{aab, aaaabb, aaaaaabbb, ...\}$

c. $\mathcal{L}_3 = \{aaabccc, aaaabcccc, aaaaabccccc, ...\}$

Propongo la definición por comprensión **más restrictiva** posible.

a. $\mathcal{L}_1 = \{ab, aabb, aaabbb, ...\}$

$\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

En castellano: las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos una a y una b (por lo tanto, $\lambda \notin \mathcal{L}$) y la cantidad de apariciones de a es igual a la cantidad de apariciones de b. Es igual al 6.a

b. $\mathcal{L}_2 = \{aab, aaaabb, aaaaaabbb, ...\}$

$\{a^n b^m \mid m \geq 1 \ \wedge \ n = m * 2\}$

En castellano: las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos una b y dos a (por lo tanto, $\lambda \notin \mathcal{L}$) y la cantidad de apariciones de a es el doble de la cantidad de apariciones de b.

c. $\mathcal{L}_3 = \{aaabccc, aaaabcccc, aaaaabccccc, ...\}$

$\{a^n bc^n \mid n \geq 3\}$

En castellano: las cadenas de $\mathcal{L}$ tienen al menos tres apariciones de c y la cantidad de apariciones de a es igual a la de a (por lo tanto, la cantidad mínima de apariciones de a también es 3). Además todas las cadenas tienen exactamente una aparición de b.

Ejercicio 8

Dados $\mathcal{L}_1 = \{a, bc\}$, $\mathcal{L}_2 = \{aaa, bc\}$, y siendo $\Lambda = \{\lambda\}$, calcular:

a. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$

b. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$

c. $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2$

d. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^0$

e. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^2$

f. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^+$

g. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^+$

h. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^*$

i. $\mathcal{L}_1.\Lambda.\mathcal{L}_2$

j. $\mathcal{L}_1 \varnothing \mathcal{L}_2$

k. $(\mathcal{L}_1)^r$

l. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^r$

a. $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \{a, bc, aaa\}$

b. $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \{bc\}$

c. $\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc\}$

d. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^0 = \mathcal{L}_1.\{\lambda\} = \mathcal{L}_1 = \{a, b\}$

e. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^2 = \mathcal{L}_1.\{aaaaaa, aaabc, bcaaa, bcbc\} = \{aaaaaaa, aaaabc, abcaaa, abcbc, bcaaaaaa, bcaaabc, bcbcaaa, bcbcbc\}$

f. $\mathcal{L}_1.(\mathcal{L}_2)^+ = \mathcal{L}_1.\{bc, aaa, aaaaaa, aaabc, bcaaa, bcbc, aaaaaaaaa...\} = \{abc, aaaa, bcbc, bcaaa, abcbc, aaaaaaaa, ...\}$

g. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^+ = \{aaaa, abc, bca, bcbc, aaaaaaaa, abcabc, bcabca, bcbc, aaaaaaaaaaaa...\}$

h. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^* = \{\lambda, aaaa, abc, bca, bcbc, aaaaaaaa, abcabc, bcabca, bcbc, aaaaaaaaaaaa...\}$

i. $\mathcal{L}_1.\Lambda.\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1.\{\lambda\}.\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2 = \{aaaa, abc, bca, bcbc\}$

j. $\mathcal{L}_1 \varnothing \mathcal{L}_2 =$ no me acuerdo qué era esto

k. $(\mathcal{L}_1)^r = \{a, bc\}^r = \{(bc)^r, a^r\} = \{cb, a\}$

l. $(\mathcal{L}_1.\mathcal{L}_2)^r = \{aaaa, abc, bcaaa, bcbc\}^r = \{(bcbc)^r, (bcaaa)^r, (abc)^r, (aaaa)^r\} = \{cbcb, aaacb, cba, aaaa\}$

Ejercicio 9

Determinar el complemento de los siguientes lenguajes, considerando los alfabetos indicados en cada caso.

a. $\mathcal{L} = \Lambda$ para $\Sigma = \{a, b\}$

b. $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

c. $\mathcal{L} = \{b\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

d. $\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a\}$ y $\Sigma = \{a, b\}$

e. $\mathcal{L} = \{\alpha_1 b a_2 \mid \alpha_1, \alpha_2 \in \{a, b\}^* \wedge |\alpha_1| \geq |\alpha_2|\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

a. $\mathcal{L} = \Lambda$ para $\Sigma = \{a, b\}$

$\mathcal{L} = \Lambda = \{\lambda\}$

$\mathcal{L}^c = \Sigma^+$

En castellano: todas las cadenas que se pueden formar con a y b menos la palabra vacía.

b. $\mathcal{L} = \{\lambda, a\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

$\mathcal{L}^c = \Sigma^* - \{\lambda, a\} = \{a, b\}^* - \{\lambda, a\} = \{a, b\}^+ - \{a\}$

En castellano: todas las cadenas que se pueden formar con a y b menos la palabra vacía y la cadena $\{a\}$.

c. $\mathcal{L} = \{b\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^*\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

$\mathcal{L}^c = \{a\alpha \mid \alpha \in \{a, b\}^* \cup \{\lambda\}\}$

En castellano: todas las cadenas que se pueden formar con a y b que empiezan con a y la palabra vacía.

d. $\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a\}$

$\mathcal{L}^c = \{a^{2n+1} \mid n \geq 0\}$

En castellano: todas las cadenas que se pueden formar con una cantidad impar de a. La palabra vacía no está incluida (sí lo está en $\mathcal{L}$).

$\mathcal{L} = \{a^{2n} \mid n \geq 0\}$ para $\Sigma = \{a, b\}$

$\mathcal{L}^c = \{\{a, b\}^+ \mid \{a^n\} \in \mathcal{L} \iff n \equiv 1 \pmod 2\}$

En castellano: todas las cadenas que se pueden formar con a y b sin incluir la palabra vacía y con la restricción de que si la cadena solo está formada por a la cantidad de a es impar.