Práctica 1: Lenguajes

2do cuatri 2024 - si encontrás algún error mi tg es @kztqz

Ejercicio 1

Sea $\Sigma = \{a,\ b\}$ un alfabeto. Hallar:

$$\Sigma^0, \quad \Sigma^1, \quad \Sigma^2, \quad \Sigma^*, \quad \Sigma^+, \quad |\Sigma|, \quad |\Sigma^0|$$

- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \Sigma = \{a, b\}$
- $\Sigma^2 = \{aa, ab, ba, bb\}$
- $\Sigma^* = \bigcup\limits_{i \geq 0} \Sigma^i = \{\lambda, a, b, aa, ab, ba, bb\}$
- $\Sigma^+ = \bigcup\limits_{i \geq 1} \Sigma^i = \{a, b, aa, ab, ba, bb\}$
- $|\Sigma| = 2$
- $|\Sigma^0| = 0$

Ejercicio 2

Decidir si, dado $\Sigma = \{a,\ b\}$ vale:

$$\lambda \in \Sigma, \quad \lambda \subseteq \Sigma, \quad \lambda \in \Sigma^+, \quad \lambda \in \Sigma^*, \quad \Sigma^0 = \lambda, \quad \Sigma^0 = \{\lambda\}$$

- $\lambda \in \Sigma \to Falso$
- $\lambda \subseteq \Sigma \to Falso$
- $\lambda \in \Sigma^+ \to Falso$
- $\lambda \in \Sigma^* \to Verdadero$
- $\Sigma^0 = \lambda \to Falso$
- $\Sigma^0 = \{\lambda\} \to Verdadero$

Ejercicio 3

Sea $\alpha = abb$ una cadena. Calcular:

$$\alpha^0, \quad \alpha^1, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3, \quad \alpha^r$$

- $\alpha^0 = \lambda$
- $\alpha^1 = abb$

- $\alpha^2 = abb.abb$
- $\alpha^3 = abb.abb.abb = abbabbabb$
- $\prod_{k=0,\ldots,3} \alpha^k = \alpha^0.\alpha^1.\alpha^2.\alpha^3 = \lambda.abb.abbabb.abbabbabb = abbabbabbabbabbabb$
- $\alpha^r = (abb)^r = bba$

Ejercicio 4

Sean las cadenas $\alpha = abb$ y $\beta = acb$. Calcular:

$$\alpha\beta, \quad (\alpha\beta)^r, \quad \beta^r, \quad \beta^r\alpha^r, \quad \lambda\alpha, \quad \lambda\beta, \quad \alpha\lambda\beta, \quad \alpha^2\lambda^3\beta^2$$

- $\alpha\beta = abbacb$
- $(\alpha\beta)^r = (abbacb)^r = bcabba$
- $\beta^r = (acb)^r = bca$
- $\beta^r\alpha^r = (acb)^r(abb)^r = bcabba$
- $\lambda\alpha = \alpha = abb$
- $\lambda\beta = \beta = acb$
- $\alpha\lambda\beta = \alpha\beta = abbacb$
- $\alpha^2\lambda^3\beta^2 = \alpha^2\beta^2 = abbabbacbacb$

Ejercicio 5

Dado un alfabeto Σ, sean $x,y \in \Sigma$ y $\alpha, \beta \in \Sigma^*$. Demostrar que:

a. $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$

b. $|\alpha^r| = |\alpha|$

c. $|\alpha x\beta| = |x\alpha\beta|$

d. $|\alpha.\alpha = 2|\alpha|$

e. $(\alpha.\beta)^r = \beta^r.\alpha^r$

f. $(\alpha^r)^r = \alpha$

g. $(\alpha^r)^n = (\alpha^n)^r$

($|\alpha|$ indica la longitud de la cadena α).

Para resolver estos ejercicios va a ser útil tener a mano estas def / demos:

(1) Definición recursiva de la longitud:

$$|\lambda| = 0$$

$$|x.\alpha| = 1 + |\alpha|$$

(2) Propiedad: $|\alpha + \beta| = |\alpha|.|\beta|$. Demo por inducción estructural sobre α:

1. Si $\alpha = \lambda$:

$$|\lambda.\beta| = |\beta| = 0 + |\beta| = |\lambda| + |\beta|$$

2. Si $\alpha = x.\alpha'$, suponemos que vale para α', y:

$$
\begin{aligned}
|(x.\alpha').\beta| &= |x.(\alpha'.\beta)| \ \ \textbf{(def. } \alpha'\textbf{)} \\
&= 1 + |\alpha'.\beta| \ \ \textbf{(def. longitud)} \\
&= 1 + |\alpha'| + |\beta| \ \ \textbf{(hip. ind)} \\
&= |x.\alpha'| + |\beta| \ \ \textbf{(def. longitud)} \\
&= |\alpha| + |\beta| \ \ \textbf{(def. } \alpha'\textbf{)}
\end{aligned}
$$

(3) Definición recursiva de la reversa:

$$\lambda^r = \lambda$$

$$(x.\alpha)^r = \alpha^r.x$$

a. Quiero demostrar que $|x.(y.\alpha)| = 2 + |\alpha|$.

Como $x \in \Sigma$, por la definición recursiva de longitud, puedo sacarlo de la operación longitud de la cadena y sumar un 1. Lo mismo hago para $y \in \Sigma$.

$|x.(y.\alpha)| \overset{(1)}{=} 1 + |y.a| \overset{(1)}{=} 1 + 1 + |\alpha| = 2 + |\alpha|$

b. Quiero demostrar que $|\alpha^r| = |\alpha|$. Pruebo por inducción:

1. Caso base (si $\alpha = \lambda$):

$$|\lambda|^r \overset{(3)}{=} |\lambda|$$