Universidade Federal do Rio de Janeiro

Mecânica de Sistemas Inteligentes
Lista 1

Aluna	Laura Bezerra Lima
Professor	Luã G. Costa

Rio de Janeiro, 25 de agosto de 2025

Questão 1

Foi implementado um código em Python para simular os métodos numéricos Runge-Kutta de 4ª ordem de passo fixo e Runge-Kutta-Dormand-Prince (DOPRI45) adaptativo de ordens 4 e 5, com controle de erro, de forma generalizada. Na modelagem computacional, a abordagem generalizada do código facilita a análise de diferentes sistemas, uma vez que permite a implementação em diferentes modelagens.

Para validar os métodos implementados, foi simulado um oscilador harmônico linear descrito pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \gamma sin(\Omega t) \tag{1}$$

Esse sistema possui a seguinte solução analítica:

$$x(t) = \frac{\gamma}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (+2\zeta\omega_n\Omega)^2}} sin(\Omega t - \phi) \tag{2}$$

A Figura 1 mostra as respostas do sistema para os métodos utilizados, assim como a solução analítica.

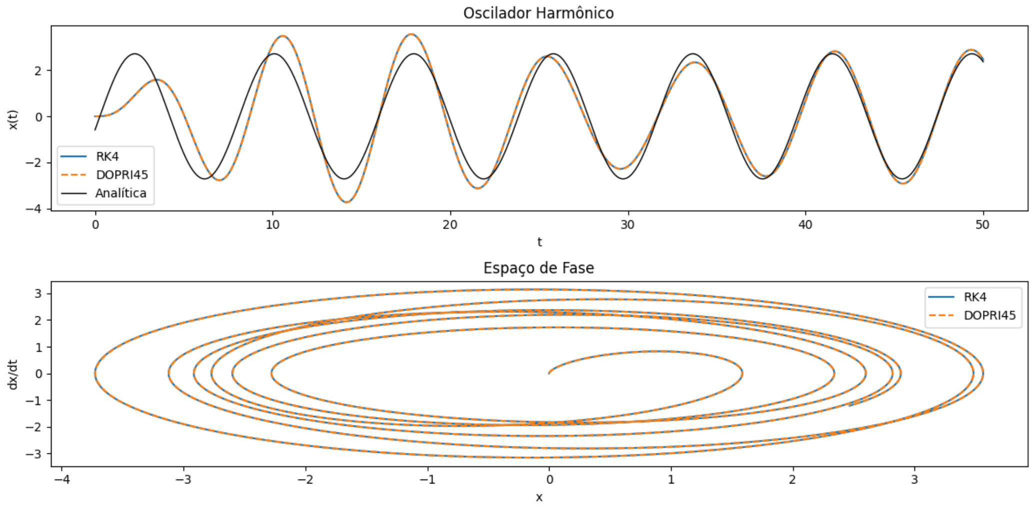


Figure 1: Resposta do oscilador harmônico.

O método Runge-Kutta de passo fixo apresentou resultados bastante próximos da solução analítica mas a precisão deste método depende do passo h, uma vez que valores altos levam a erro acumulado na fase. Já o método DOPRI45 possui ajuste automático do passo para controle do erro, o que o torna mais preciso em comparação com o RK4. Por outro lado, este método não teve resultados tão próximos aos analíticos.

A Figura 2 mostra a análise de convergência da solução.

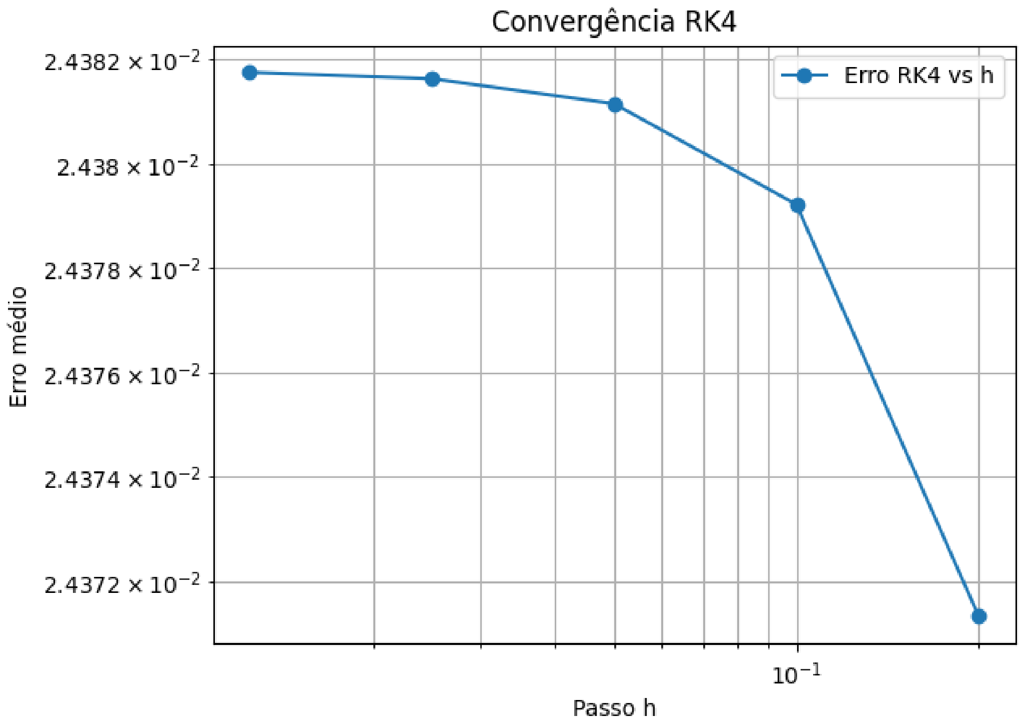


Figure 2: Análise de convergência do método Runge-Kutta.

O método RK4 apresentou convergência de ordem 4, como esperado.

O método Runge-Kutta de passo fixo é mais adequado para solução de sistemas quando há um passo h definido e quando deseja-se um código de implementação simples. Já o Runge-Kutta-Dormand-Prince pode ser utilizado quando busca-se maior precisão e há grande variações no sistema.

Ambos os métodos funcionam em sistemas com pouca rigidez e não muito oscilatórios. Em problemas que não apresentem estas caracterísiticas, é necessário recorrer a outras formas de solução, como, por exemplo, métodos espectrais.

Questão 2

Questão 2.(a)

Utilizando o método Runge-Kutta de 4ª ordem, foi implementado um código para obter as soluções de cada um dos três sistemas solicitados, e gerar seus espaços de fase e mapas de Poincaré.

Oscilador linear não dissipativo

A Figura 3 ilustra o espaço de fase e mapa de Poincaré do oscilador linear, que é descrito pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = \gamma sin(\Omega t) \tag{3}$$

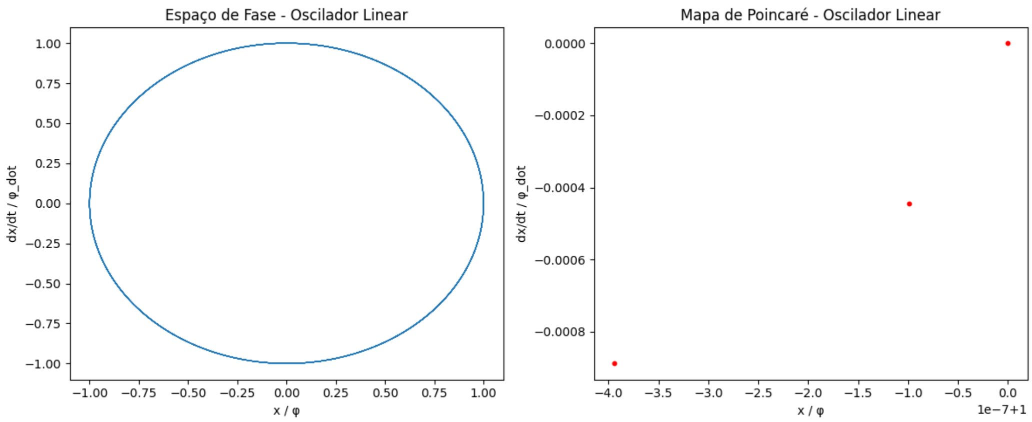


Figure 3: Espaço de fase e Mapa de Poincaré do oscilador linear não dissipativo.

Quando há ressonância ($\Omega = \omega_n$), a amplitude da resposta do sistema apresenta crescimento. Para o movimento periódico, o mapa de Poincaré apresenta n pontos, enquanto para quasi-periódico, apresenta uma curva fechada. Como o sistema é não dissipativo, o espaço de fase não possui atratores.

Oscilador biestável tipo Duffing

A Figura 4 ilustra o espaço de fase e mapa de Poincaré do oscilador tipo Duffing, que é descrito pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} - \alpha x + \beta x^3 = \gamma sin(\Omega t) \tag{4}$$

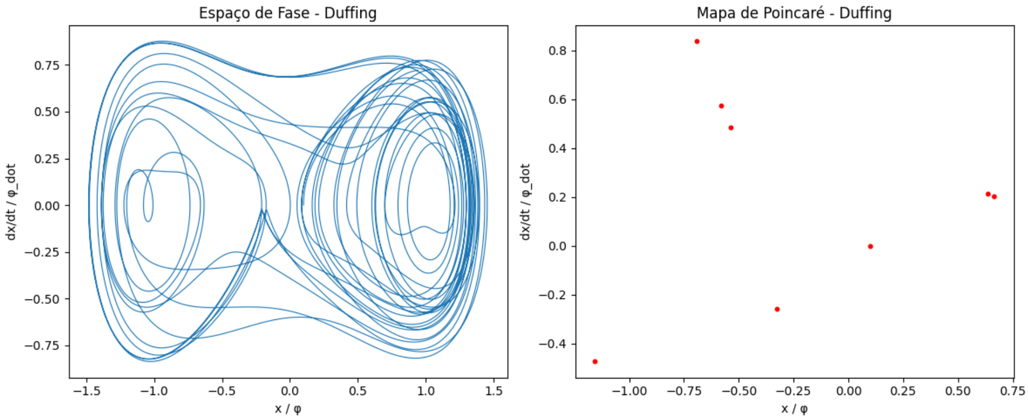


Figure 4: Espaço de fase e Mapa de Poincaré do oscilador biestável do tipo Duffing.

Para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$, há possibilidade de duplo poço. Aumentando γ em relação Ω, podem haver duplicações de período, gerando bifurcações e janelas periódicas. O espaço de fase apresenta ciclos limite e caos.

Pêndulo simples

A Figura 5 ilustra o espaço de fase e mapa de Poincaré do pêndulo simples, que é descrito pela seguinte equação:

$$\ddot{\phi} + \zeta\dot{\phi} + \omega_n^2 sin(\phi) = \gamma sin(\Omega t) \tag{5}$$

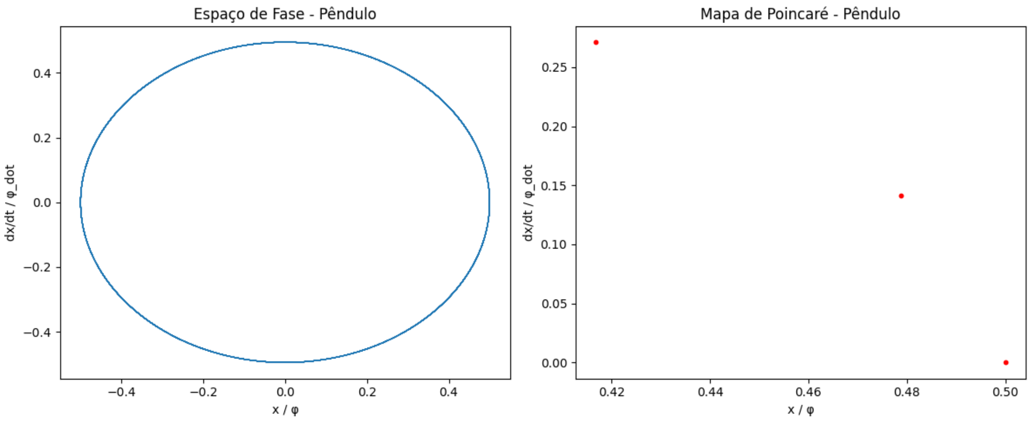


Figure 5: Espaço de fase e Mapa de Poincaré do pêndulo simples.

O sistema apresenta múltiplos pontos de equilíbrio e separatriz entre oscilações e rotações. Há presença de ilhas rodeadas pelo caos.

Questão 2.(b)

Os mesmos sistemas do item anterior foram novamente analisados, agora utilizando o método Runge-Kutta-Dormand-Prince.

Oscilador lineaer não dissipativo

A Figura 6 apresenta o Espaço de fase e Mapa de Poincaré do oscilador linear não dissipativo.

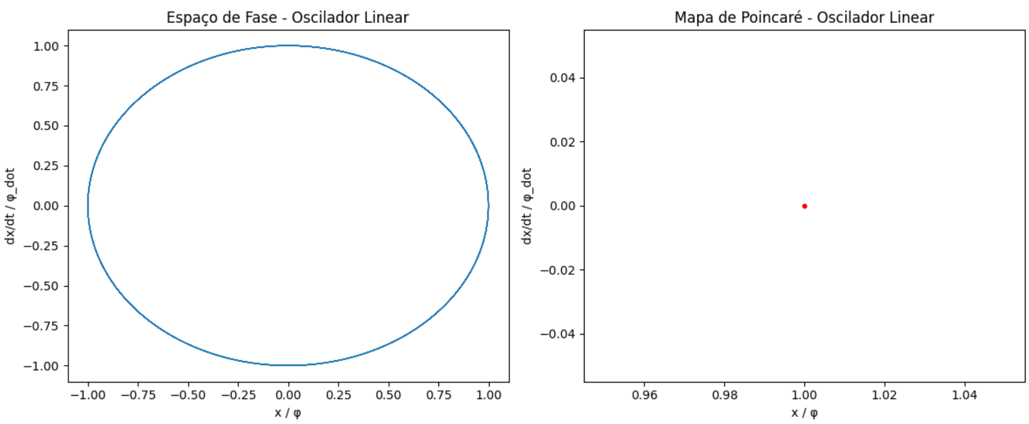


Figure 6: Espaço de fase e Mapa de Poincaré do oscilador linear não dissipativo.

Oscilador biestável tipo Duffing

A Figura 7 apresenta o Espaço de fase e Mapa de Poincaré do oscilador biestável do tipo Duffing.

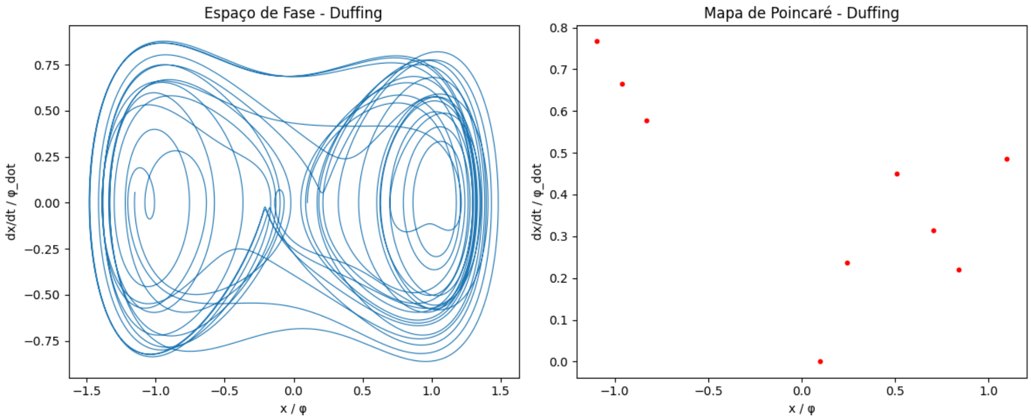


Figure 7: Espaço de fase e Mapa de Poincaré do oscilador biestável do tipo Duffing.

Pêndulo simples

A Figura 8 apresenta o Espaço de fase e Mapa de Poincaré do pêndulo simples.

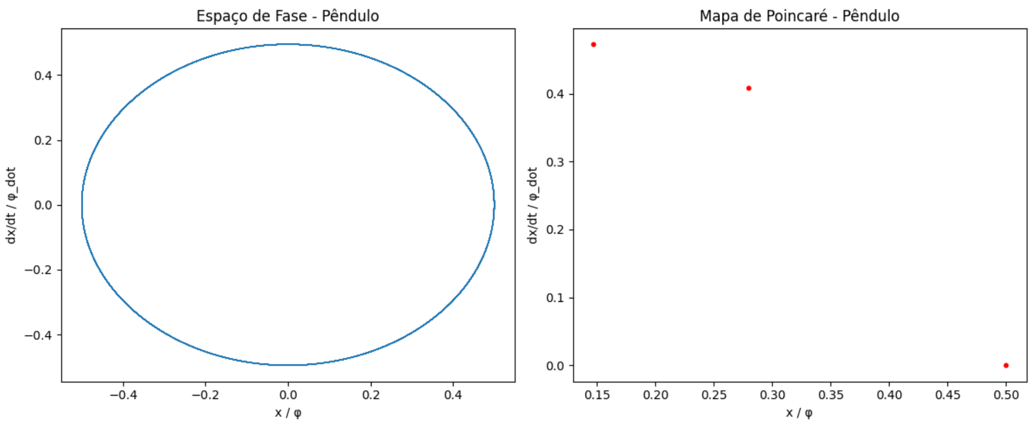


Figure 8: Espaço de fase e Mapa de Poincaré do pêndulo simples.

A principal dificuldade de implementação deste método é que os instantes $t_k = kT$ não coincidem com os passos do integrador. Para solucionar este problema, poderia-se utilizar interpolação para avaliar $y(t_k)$. Além disso, para uma implementação bem sucedida, poderia-se também descartar o regime transisiente e normalizar o ângulo no pêndulo.

Questão 3

Para cada sistema solicitado, foram determinados os pontos de equilíbrio e a natureza da estabilidade deles.

A análise foi feita de forma analítica quando possível, e nos casos e que não foi possível, utilizou-se a solução numérica generalizada.

Questão 3.(a)

O oscilador do tipo Duffing é descrito pela seguinte equação:

$$\ddot{x} + 2\zeta\dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma sin(\Omega t) \tag{6}$$

$\dot{x} = v$, $\dot{v} = -2\zeta v - \alpha x - \beta x^3$
Equilíbrios:
$\dot{x} = \dot{v} = 0$, $v^* = 0$, $\alpha x^* + \beta x^{*3} = 0$

$$x^* = 0 \tag{7}$$

$$x^* = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}, se : \alpha/\beta > 0 \tag{8}$$

Jacobiano: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -(\alpha + 3\beta x^{*2}) & -2\zeta \end{bmatrix}$

$$\lambda^2 + 2\zeta\lambda + (\alpha + 3\beta x^{*2}) = 0 \tag{9}$$

Com $\zeta > 0$:
- Estável, se $(\alpha + 3\beta x^{*2}) > 0$
- Sela, se $(\alpha + 3\beta x^{*2}) < 0$

Com $\zeta = 0$:
- Centro, se $(\alpha + 3\beta x^{*2}) > 0$
- Sela, se $(\alpha + 3\beta x^{*2}) < 0$

Quando $\zeta = 0$, há estabilidade em Lyapunov, mas a análise por autovalores e autovetores não é capaz de determinar.

Utilizando o procedimento numérico, obtém-se os resultados apresentados na Figura 9.

```
 Duffing (zeta=0.1, alpha=-1, beta=1)
Eq.1: [-1.  0.]
Autovalores: [-0.1+1.41067349j -0.1-1.41067349j]
Classificação: assintoticamente estável

Eq.2: [0. 0.]
Autovalores: [ 0.90498756 -1.10498756]
Classificação: instável

Eq.3: [1. 0.]
Autovalores: [-0.1+1.4106737j -0.1-1.4106737j]
Classificação: assintoticamente estável
```

Figure 9: Resultados numéricos de equilíbrio para o oscilador tipo Duffing.

Questão 3.(b)

O pêndulo simples é descrito pela equação:

$$\ddot{\phi} + \omega_n^2 sin(\phi) = 0 \tag{10}$$

$\dot{\phi} = \omega, \dot{\omega} = -\omega_n^2 sin(\phi)$

Equilíbrios:

$\omega^* = 0, sin(\phi*) = 0, \phi^* = k\pi$

Jacobiano: $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_n^2 cos(\phi^*) & 0 \end{bmatrix}$

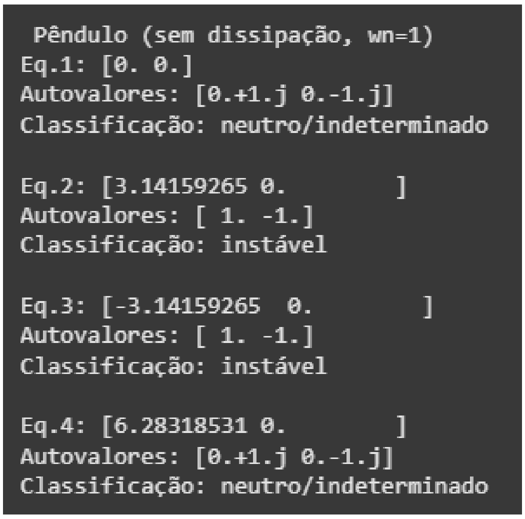
$$\lambda^2 + \omega_n^2 cos(\phi^*) = 0 \tag{11}$$

Para $\phi^* = 2m\pi$: $cos(\phi^*) = 1$: $\lambda = \pm i\omega_n \rightarrow$ neutro (centro).

Para $\phi^* = (2m+1)\pi$: $cos(\phi^*) = -1$: $\lambda = \pm\omega_n \rightarrow$ instável (sela).

Neste sistema, $Re(\lambda) = 0$ no equilíbrio estável, logo, não é possível provar estabilidade analiticamente.

O procedimento numérico obteve os resultados mostrados na Figura 10.



```
 Pêndulo (sem dissipação, wn=1)
Eq.1: [0. 0.]
Autovalores: [0.+1.j 0.-1.j]
Classificação: neutro/indeterminado

Eq.2: [3.14159265 0.        ]
Autovalores: [ 1. -1.]
Classificação: instável

Eq.3: [-3.14159265  0.        ]
Autovalores: [ 1. -1.]
Classificação: instável

Eq.4: [6.28318531 0.        ]
Autovalores: [0.+1.j 0.-1.j]
Classificação: neutro/indeterminado
```

Figure 10: Resultados numéricos de equilíbrio para o pêndulo simples.

Questão 3.(c)

O sistema de Lorenz é representado da seguinte forma:

$$\dot{x} = \sigma(y - x)$$

$$\dot{y} = x(\rho - z) - y \tag{12}$$

$$\dot{z} = xy - \beta z$$

Equilíbrios:
$E_0 = (0, 0, 0)$
$E_{\pm} = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$, se $\rho > 1$
- Estável, se $\rho < 1$
- Estável para $1 < \rho < \rho_h$, sendo $\rho_h = \frac{\sigma(\sigma+\beta+3)}{\sigma-\beta-1}$, $\sigma > \beta + 1$

Neste caso, a solução analítica é suficiente para determinar os pontos de equilíbrio do sistema.

Questão 3.(d)

O sistema multiestável com 2 graus de liberdade é descrito da seguinte maneira:

$$\ddot{x_1} + 2\zeta_1\dot{x_1} - 2\zeta_2(\dot{x_2} - \dot{x_1}) + (1 + \alpha_1)x_1 + \beta_1 x_1^3 - \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\rho\ddot{x_2} + 2\zeta_2(\dot{x_2} - \dot{x_1}) + \alpha_2 x_2 + \beta_2 x_2^3 + \rho\Omega_s^2(x_2 - x_1) = 0 \tag{13}$$

Equilíbrios:

$$\dot{x_1} = \dot{x_2} = \ddot{x_1} = \ddot{x_2} = 0$$

Duas equações não lineares:

$$(1 + \alpha_1)x_1 + \beta_1 x_1^3 + acoplamento(x_2 - x_1) = 0$$

$$\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_2^3 + acoplamento(x_2 - x_1) = 0$$

Jacobiano: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_{11} & -2\zeta_1 & -k_{12} & \eta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k_{21} & -\eta & -k_{22} & -2\zeta_2 \end{bmatrix}$

Sendo $\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}$ a matriz de rigidez.

Se $\zeta_i > 0$ e a matriz de rigidez é positiva, há estabilidade local.

Como há equilíbrios com autovalor que tem $Re(\lambda) = 0$, a solução analítica é inconclusiva.

A Figura 11 mostra os resultados obtidos para este sistema numericamente.

```
 2GDL multiestável
Eq.1: [0. 0. 0. 0.]
Autovalores: [-0.12009724+1.6338681j  -0.12009724-1.6338681j  -0.01990276+0.72504792j
 -0.01990276-0.72504792j]
Classificação: assintoticamente estável
```

Figure 11: Resultados numéricos de equilíbrio para o sistema multiestável com 2 graus de liberdade.

Questão 4

Foi implementada a bacia de atração de pontos de equilíbrio para cada um dos sistemas solicitados, utilizando os respectivos espaços ou subespaços:

(a) Oscilador tipo Duffing: Espaço de estados $x \times \dot{x}$

(b) Pêndulo simples sem dissipação: Espaço de estados $\phi \times \dot{\phi}$

(c) Sistema multiestável com 2 graus de liberdade: Subespaços de estados $x_1 \times x_2$, $x_1 \times \dot{x_1}$, $x_2 \times \dot{x_2}$

Questão 4.(a)

A Figura 12 apresenta a bacia de atração do oscilador tipo Duffing.

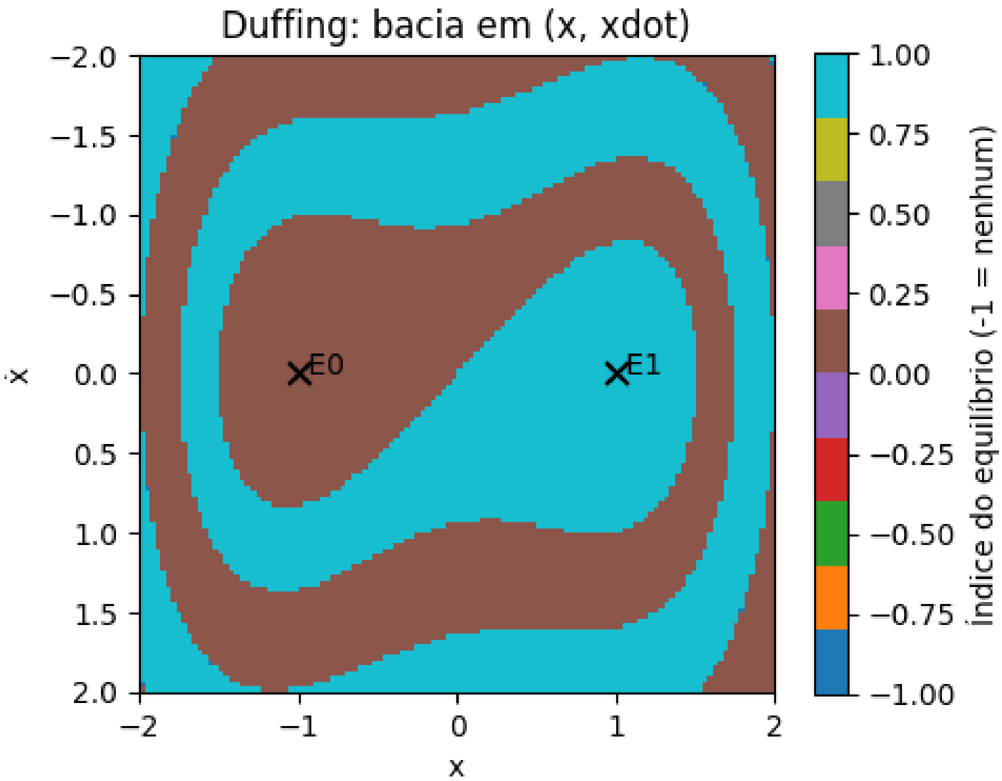


Figure 12: Bacia de atração do oscilador tipo Duffing.

Questão 4.(b)

A Figura 13 apresenta a bacia de atração do pêndulo simples sem dissipação.

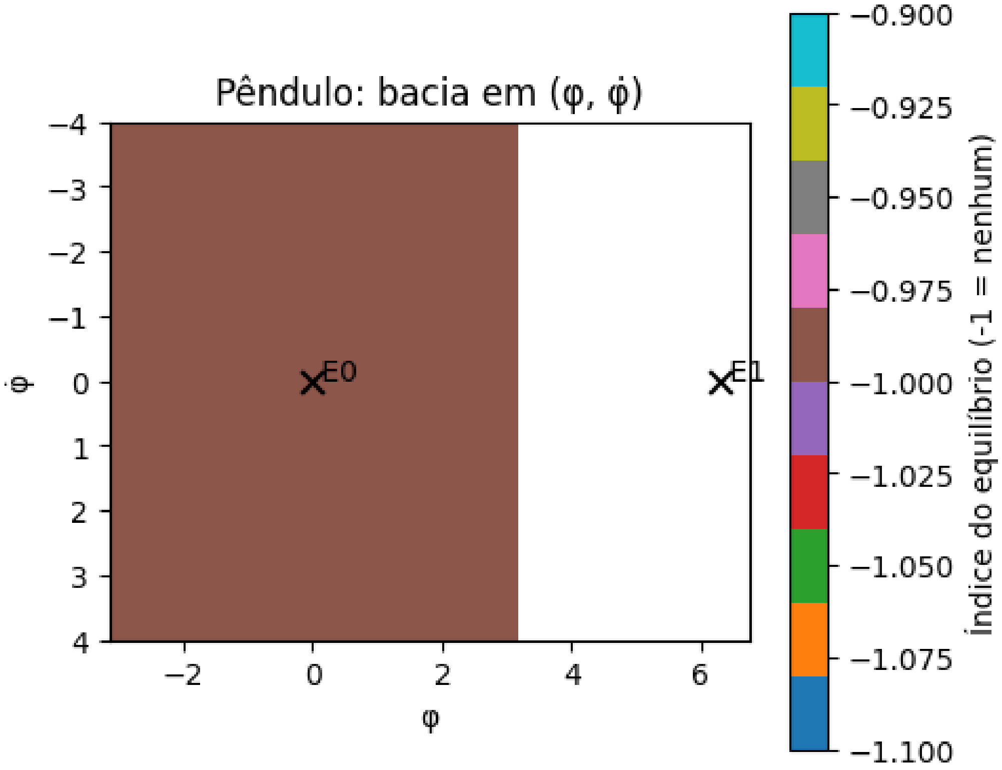


Figure 13: Bacia de atração do pêndulo simples.

Questão 4.(c)

A Figura 14 apresenta a bacia de atração do sistema multiestável com 2 graus de liberdade com subespaço de estados $x_1 \times x_2$.

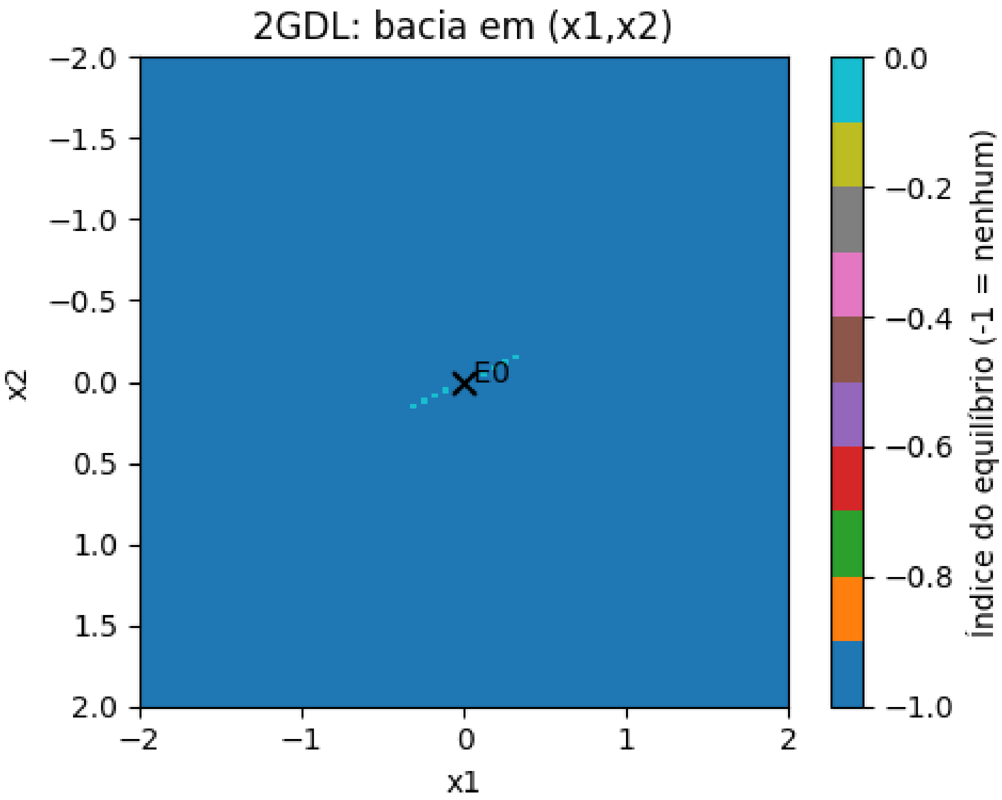


Figure 14: Bacia de atração do sistema multiestável com 2 graus de liberdade com subespaço de estados $x_1 \times x_2$.

A Figura 15 apresenta a bacia de atração do sistema multiestável com 2 graus de liberdade com subespaço de estados $x_1 \times \dot{x_1}$.

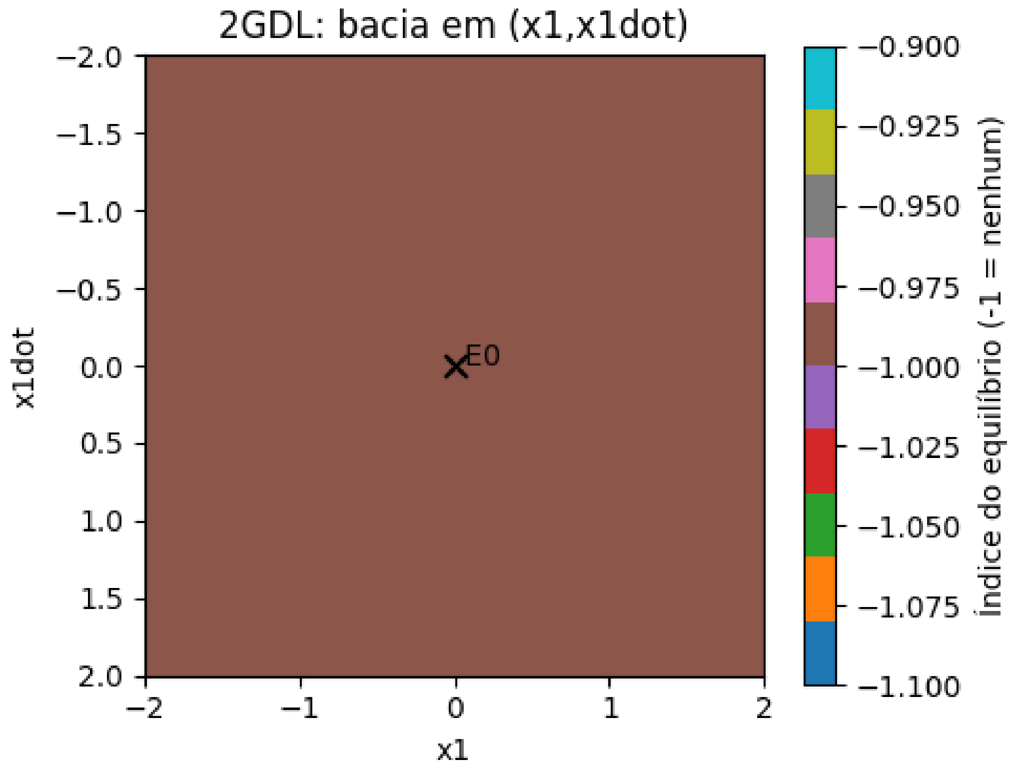


Figure 15: Bacia de atração do sistema multiestável com 2 graus de liberdade com subespaço de estados $x_1 \times \dot{x_1}$.

A Figura 16 apresenta a bacia de atração do sistema multiestável com 2 graus de liberdade com subespaço de estados $x_2 \times \dot{x_2}$.

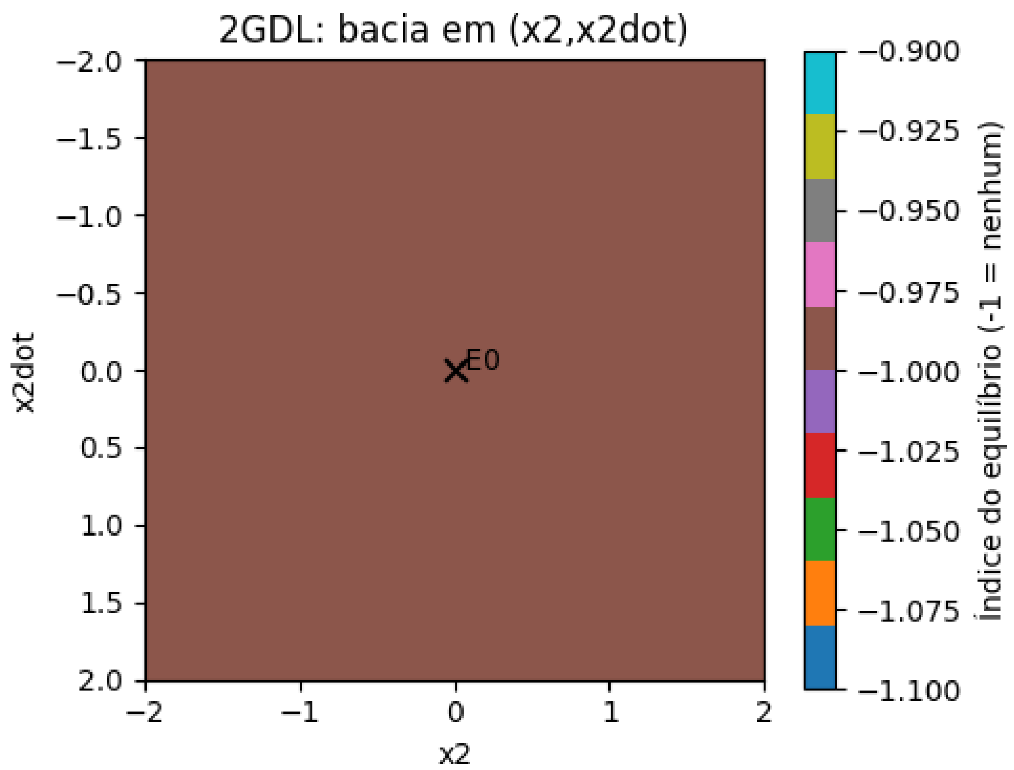


Figure 16: Bacia de atração do sistema multiestável com 2 graus de liberdade com subespaço de estados $x_2 \times \dot{x_2}$.