

Universidade Federal do Rio de Janeiro



Mecânica de Sistemas Inteligentes Lista 2

Aluna
Professor

Laura Bezerra Lima
Luã G. Costa

Rio de Janeiro, 17 de setembro de 2025

Questão 1

Materiais magnetostrictivos possuem acoplamento entre o campo magnético e a deformação mecânica. Dessa forma, definem-se os parâmetros: ε = deformação mecânica, σ = tensão, H = campo magnético, B = indução magnética, θ = temperatura absoluta, s = entropia específica, e = densidade de energia interna. Além disso, define-se a energia livre de Helmholtz:

$$\psi = e - \theta s, \psi = \psi(\varepsilon, B, \theta) \quad (1)$$

Estabelece-se também a desigualdade de Clausius-Duhem:

$$\rho\theta \frac{Ds}{Dt} + \nabla \cdot q - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta - \rho r_h \geq 0 \quad (2)$$

Onde: ρ = densidade, q = fluxo de calor, r_h = fonte de calor por unidade de massa.

A entropia pode ser escrita em função da energia livre:

$$s = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad (3)$$

Desse modo, a derivada material será:

$$\frac{Ds}{Dt} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \frac{D\theta}{Dt} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varepsilon} : \frac{D\varepsilon}{Dt} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial B} \cdot \frac{DB}{Dt} \quad (4)$$

Assim, substituindo na desigualdade de Clausius-Duhem:

$$-\rho\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \frac{D\theta}{Dt} - \rho\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial \varepsilon} : \frac{D\varepsilon}{Dt} - \rho\theta \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial B} \cdot \frac{DB}{Dt} + \nabla \cdot q - \frac{1}{\theta} q \cdot \nabla \theta - \rho r_h \geq 0 \quad (5)$$

Além disso, determina-se também a potência interna do material:

$$\dot{w} = \sigma : \frac{D\varepsilon}{Dt} + H \cdot \frac{DB}{Dt} \quad (6)$$

E a taxa de variação da energia livre no sistema:

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} : \frac{D\varepsilon}{Dt} + \frac{\partial \psi}{\partial B} \cdot \frac{DB}{Dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{D\theta}{Dt} \quad (7)$$

Com isso, substitui-se na desigualdade de Clausius-Duhem novamente, considerando não-dissipação e temperatura constante ($\theta = \text{constante}$, $q = 0$, $r_h = 0$):

$$\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} : \frac{D\varepsilon}{Dt} + H - \frac{\partial \psi}{\partial B} : \frac{DB}{Dt} - \rho \frac{\partial \psi}{\partial \theta} : \frac{D\theta}{Dt} + T \geq 0 \quad (8)$$

Onde $\sigma - \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}$ é a parte mecânica, $H - \frac{\partial \psi}{\partial B}$ é a parte magnética e T é a parte térmica.

Para garantir que não há dissipação, considera-se:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon}, H = \frac{\partial \psi}{\partial B} \quad (9)$$

Considerando também pequenas deformações e campo magnético linear:

$$\psi(\varepsilon, B) = \frac{1}{2} \varepsilon : C : \varepsilon - \varepsilon : d \cdot B + \frac{1}{2\mu_0} B \cdot \mu^{-1} \cdot B \quad (10)$$

Em que $-\varepsilon : d \cdot B$ é o termo referente ao acoplamento magneto-mecânico, d = tensor de acoplamento magneto-mecânico, C = tensor de elasticidade, μ = permeabilidade magnética, μ_0 = permeabilidade no meio.

Utilizando as equações constitutivas, obtém-se, finalmente:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = C : \varepsilon - d \cdot B \quad (11)$$

$$H = \frac{\partial \psi}{\partial B} = -d^T : \varepsilon + \frac{1}{\mu_0} \mu^{-1} \cdot B \quad (12)$$

Essas equações para a tensão e o campo magnético definem um modelo constitutivo linear para materiais magnetostrictivos condizente com as leis termodinâmicas.

Questão 2

Utilizando o modelo com cinética assumida descrito em Brinson (1993) e os parâmetros apresentados, foi simulada uma liga com memória de forma. O programa utiliza os módulos E_m e E_a para calcular o módulo efetivo do material, e depois aplica a equação constitutiva de Brinson. Após, o código implementa as transformações entre austenita e martensita, e integra o ciclo.

A Figura 1 mostra o efeito pseudoelástico (carregamento mecânico em temperatura austenítica).

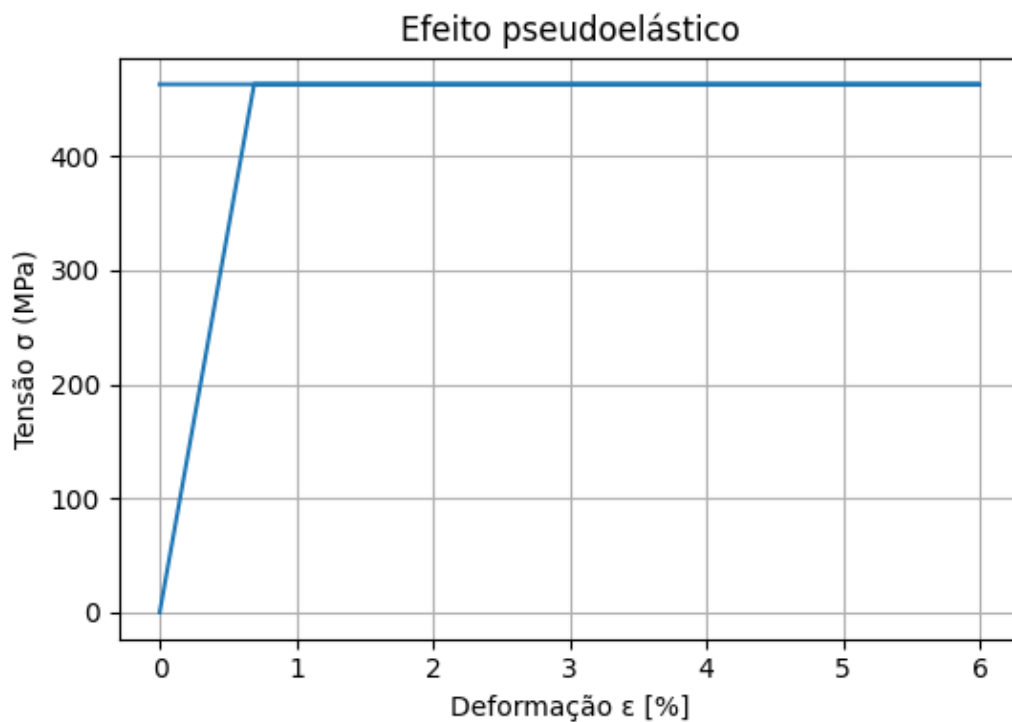


Figure 1: Efeito pseudoelástico.

O ciclo tensão-deformação apresenta uma curva com histerese quando há carregamento, o que pode ser aproveitado para amortecimento devido à dissipação

mecânica. Quando há descarregamento, há reversão. Este ciclo tem pouca ou nenhuma deformação residual.

A Figura 2 mostra o efeito memória de forma, com fase inicial martensítica não-maclada.

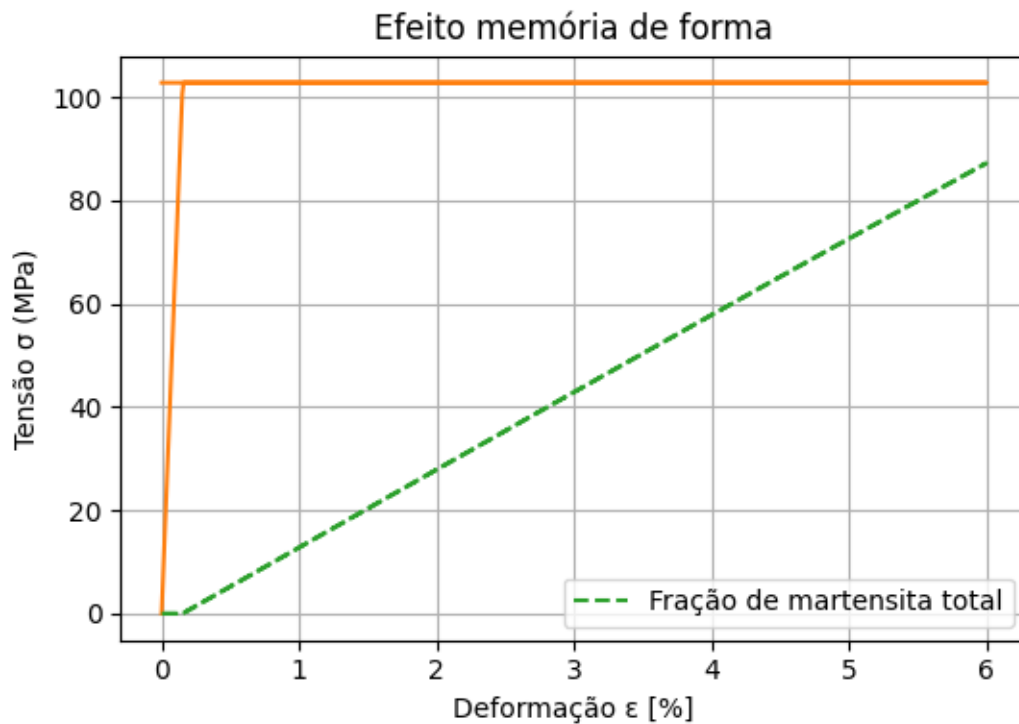


Figure 2: Efeito memória de forma.

Ao sofrer carregamento em baixa temperatura, o sistema apresenta deformação residual no descarregamento. Ao aquecer acima de A_s/A_f , a deformação é recuperada e a tensão associada se altera, mostrando o fenômeno da recuperação de forma. A deformação residual representa a capacidade do material de "memorizar" uma forma após a deformação mecânica.

Questão 3

Considerando o uso de materiais piezoelétricos para colheita de energia, foram simulados 3 possíveis sistemas: linear (osciladores eletromecânicos), biestável (força de restituição não linear) e não-suave (batente). O sistema eletromecânico foi definido no código, representado por um oscilador vibratório com acoplamento piezoelétrico, sujeito a excitação harmônica. Depois, cada sistema foi aplicado e foi feita a varredura em frequência.

A Figura 3 mostra os resultados para cada sistema.

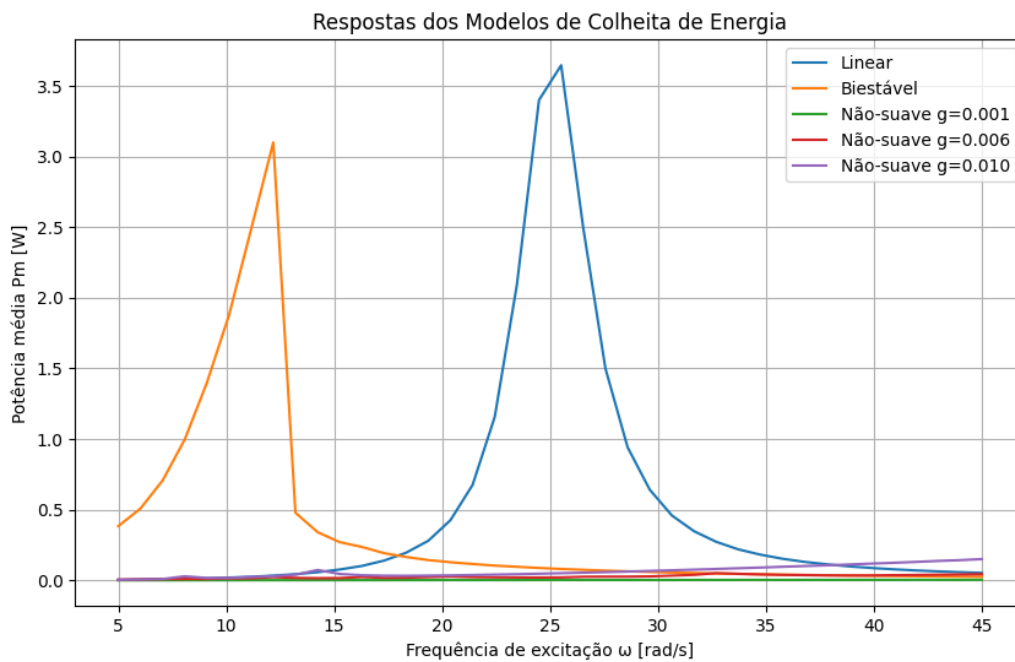


Figure 3: Modelos de colheita de energia com materiais piezoelétricos.

No modelo linear, há sensibilidade à impedância, de forma que seja possível maximizar a transferência de potência igualando a impedância. Há um pico de potência próximo à frequência natural e o comportamento da curva é típico de ressonância. Fora da região de pico, há queda rápida da potência, mostrando

que o sistema só é eficiente em uma banda específica. No sistema biestável, a resposta pode apresentar grande amplitude em uma faixa ampla de frequências, de forma a aumentar a largura de banda do coletor e aumentar a potência média em diversas frequências. Devido a não-linearidade, esse modelo cria poços de energia e pode apresentar grandes oscilações mesmo fora da ressonância e uma banda mais larga, o que é vantajoso para colheita de energia. No modelo não-suave, o batente gera não-linearidade e pode gerar respostas com energia redistribuída para outras bandas. Dependendo da distância g entre o oscilador e o batente, e da dissipação, a potência média produzida pode aumentar ou diminuir. Quando o deslocamento atinge os batentes, há grande aumento na rigidez, o que pode gerar mais dissipação ou novos picos de frequência. Os resultados dependem de g , para valores pequenos, a resposta é mais limitada, enquanto para valores maiores o sistema se aproxima do linear até o impacto.

O modelo linear é eficaz apenas em uma pequena faixa de frequências, o biestável tem maior largura de banda e o modelo com batentes redistribui a energia colhida através da limitação física. Dessa forma, os modelos não-lineares podem ser utilizados para aumentar a faixa de frequências que gera potência significativa, porém o desempenho do sistema depende muito dos parâmetros usados.

Questão 4

Utilizando o modelo constitutivo polinomial proposto por Falk (1980), pode-se comprovar a aplicabilidade do oscilador com memória de forma para atenuação de vibrações.

O programa numérico define o sistema dinâmico com amortecimento e força externa. Define-se o termo derivado da energia livre definida por Falk, que gera força restauradora não-linear. É feita então a integração e calcula-se a amplitude da resposta, fazendo a varredura em frequência. Assim, simula-se a resposta deste sistema, como observado na Figura 4.

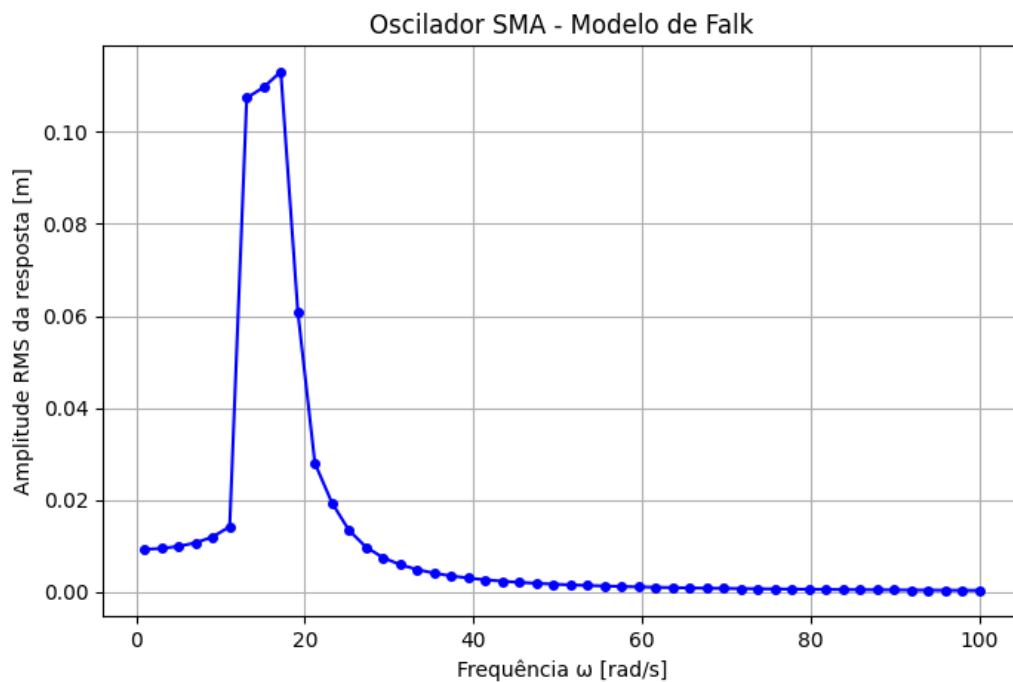


Figure 4: Oscilador com memória de forma.

Conforme os parâmetros considerados, a resposta do sistema pode apresentar amplificação ou ressonância deslocada devido à não-linearidade. Além disso,

podem ocorrer também bifurcações, onde há múltiplas amplitudes estáveis para a mesma frequência. Ademais, para alguns valores de temperatura, a rigidez efetiva pode aumentar devido ao termo linear, deslocando a ressonância ou reduzindo a amplitude.

O oscilador linear apresenta um pico estreito, ao contrário do observado no SMA, que tem resposta mais espalhada. Isso faz com que a faixa de frequências em que ocorre vibração significativa seja maior, o que é útil para atenuação de vibrações. Em outros materiais, geralmente a atenuação ocorre somente próximo da ressonância. Dessa forma, o oscilador com memória de forma age como um absorvedor não-linear, pois diminui as vibrações em uma ampla faixa de frequências, utilizando a dissipação que ocorre na transformação de fase entre martensita e austenita.

Ajustando a temperatura, pode-se alterar a resposta dinâmica, uma vez que, em certas faixas, a não-linearidade pode atuar absorvendo energia da excitação. Dessa maneira, o modelo de Falk pode ser usado como elemento passivo adaptável, controlando as características dinâmicas e reduzindo a amplitude através do controle de temperatura. Por outro lado, em altas amplitudes e grandes faixas de frequência, o sistema pode apresentar comportamento caótico.