Funções de uma variável complexa - 2023.2
Data: 18/05/2023
1a Avaliação

Questão 1 (2,5 pts) - Simplifique a expressão:

$$z = \frac{(1+j)^{25} - (1-j)^{26}}{(1+j)^{26} + (1-j)^{25}}$$

Dica: calcule primeiramente o valor de $(1 \pm j)^2$
Solução:

$$\begin{aligned}
&(1 \pm j)^2 = \pm 2j \\
&(1 \pm j)^{25} = (1 \pm j)^{24}(1 \pm j) = ((1 \pm j)^2)^{12}(1 \pm j) = (\pm 2j)^{12}(1 \pm j) \\
&(1 \pm j)^{26} = (\pm 2j)^{13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow z &= \frac{(2j)^{12}(1+j) - (-2j)^{13}}{(2j)^{13} + (-2j)^{12}(1-j)} \\
&= \frac{(2j)^{12}(1+j) + (2j)^{13}}{(2j)^{13} + (2j)^{12}(1-j)} \\
&= \frac{\cancel{(2j)^{12}}(1+j) + (2j)^{\cancel{13}}}{(2j)^{\cancel{13}} + \cancel{(2j)^{12}}(1-j)} \\
&= \frac{1+j+2j}{2j+1-j} = \frac{1+3j}{1+j} \\
&= \frac{(1+3j)(1-j)}{2} = 2+j
\end{aligned}$$

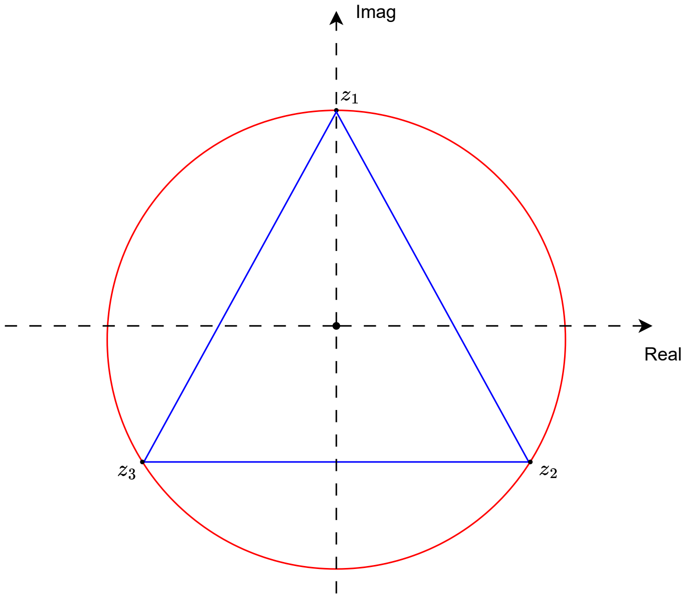
Questão 2 (2,5 pts) - O triângulo equilátero da figura está inscrito na circunferência centrada na origem. O ponto superior é $z_1 = 2j$. Utilizando operações complexas, determine os números complexos que representam os outros vértices z_2 e z_3.

Solução: Os vértices do triângulo equivalem a solução da raiz cúbica de um número. Uma dessas raízes é o ponto z_1, , ou seja $\sqrt[3]{s} = z_1$ ou $s = (2j)^3 = -8j$. Para achar z_2 e z_3 basta encontrarmos as outras duas raízes de $-8j$.

$$\begin{aligned}
-8j &= 8\exp(j3\pi/2) \\
\Rightarrow \sqrt[3]{-8j} &= 2\,\exp\left(j\frac{3\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) \\
k = 0, \quad z_1 &= 2\,\exp\left(j\frac{3\pi/2}{3}\right) = 2j \\
k = 1, \quad z_2 &= 2\,\exp\left(j\frac{3\pi/2 + 2\pi}{3}\right) = 2\,\exp\left(j\frac{7\pi}{6}\right) \\
k = 2, \quad z_2 &= 2\,\exp\left(j\frac{3\pi/2 + 4\pi}{3}\right) = 2\,\exp\left(j\frac{11\pi}{6}\right)
\end{aligned}$$

Questão 3 (2,5 pts) - Seja a identidade de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$



a) Mostre que

$$2\cos\theta = e^{j\theta} + e^{-j\theta}$$

Solução: $e^{-j\theta} = \cos\theta - j\sin\theta$, isto é, $e^{-j\theta}$ é o conjugado de $e^{j\theta}$. Assim, $e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\mathrm{Re}[e^{j\theta}] = 2\cos\theta$

b) Utilizando a identidade, mostre que

$$\cos(a+b) = \cos a\ \cos b - \sin a \sin b$$

Dica: lembre-se que $e^{x+y} = e^x\, e^y$ *e que* $z + \bar{z} = 2Re(z)$

Solução: basta fazer $\theta = a + b$ no resultado acima. Assim

$$2\cos(a+b) = 2\mathrm{Re}[e^{j(a+b)}]$$

Porém:

$$\begin{aligned} e^{j(a+b)} &= e^{ja}e^{jb} \\ &= (\cos a + j\sin a)(\cos b + j\sin b) \\ &= \cos a\cos b - \sin a\sin b + j(\cos a\sin b + \sin a\cos b) \end{aligned}$$

Assim: $\mathrm{Re}[e^{j(a+b)}] = \cos a\cos b - \sin a\sin b$. Substituindo e dividindo por 2 em ambos os lados completa a demonstração.

Questão 4 (2,5 pts) - Suponha que $z \in \mathbb{C}$ é um número complexo arbitrário. Faça um esboço gráfico da região descrita por:

$$\begin{cases} |z - \frac{1}{2}| & \leq \frac{1}{4} \\ \mathrm{Re}\{z\} & \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

O ponto $3e^{j45^\circ}$ pertence à região indicada? Mostre no desenho.

Solução:

A região $|z - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{4}$ é o interior de um círculo de raio 1/2, centrado no ponto (1/2, 0).

A região $\mathrm{Re}\{z\} \leq \frac{3}{4}$ é o semiplano à esquerda iniciando em uma reta vertical em $x = 3/4$.

A interseção nos fornece a a região solicitada.

O ponto $3e^{j45^\circ}$ claramente não pertence à região, pois ele não satisfaz nenhum das desigualdades.