

Física Básica I – Prova 1 (rubrica)

Boa prova. Crie frases para mostrar e explicar seus procedimentos. Comente seus resultados. Preste atenção na grafia de vetores e mostre as principais passagens nos cálculos dos produtos escalar e vetorial. Use análise dimensional sempre. **Keep thinking!**

Considere uma trajetória descrita parametricamente pela curva espacial $\vec{r} = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$, com

$$x(t) = a \cos \theta(t), \quad y(t) = b \sin \theta(t), \quad z(t) = ct, \quad \theta(t) = \omega t, \quad (1)$$

onde a, b, c e ω são parâmetros constantes e $t \in [0, 2\pi/\omega]$.

1. (2.5) Calcule o vetor velocidade \vec{v} e seu módulo.

- (1.5) Derivada: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, onde

$$(0.5) \quad v_x(t) = \dot{x} = \dot{\theta} \frac{dx}{d\theta} = -\omega a \sin \theta(t), \quad (2)$$

$$(0.5) \quad v_y(t) = \dot{y} = \dot{\theta} \frac{dy}{d\theta} = +\omega b \cos \theta(t), \quad (3)$$

$$(0.5) \quad v_z(t) = \dot{z} = \dot{\theta} \frac{dz}{d\theta} = c. \quad (4)$$

- (1.0) Módulo: (0.5) $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$

$$(0.5) \quad \vec{v} \cdot \vec{v} = \omega^2 a^2 \sin^2 \theta + \omega^2 b^2 \cos^2 \theta + c^2. \quad (5)$$

2. (2.5) Calcule o vetor aceleração \vec{a} e seu módulo.

- (1.5) Derivada: $\vec{A} = \dot{\vec{v}}$, onde

$$(0.5) \quad A_x(t) = \dot{v}_x = \dot{\theta} \frac{dv_x}{d\theta} = -\omega^2 a \cos \theta(t), \quad (6)$$

$$(0.5) \quad A_y(t) = \dot{v}_y = \dot{\theta} \frac{dv_y}{d\theta} = -\omega^2 b \sin \theta(t), \quad (7)$$

$$(0.5) \quad A_z(t) = \dot{v}_z = \dot{\theta} \frac{dv_z}{d\theta} = 0. \quad (8)$$

- (1.0) Módulo: (0.5) $A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$

$$(0.5) \quad \vec{A} \cdot \vec{A} = \omega^4 a^2 \cos^2 \theta + \omega^4 b^2 \sin^2 \theta. \quad (9)$$

3. (2.5) Calcule a curvatura.

$$\kappa(t) = \frac{\|\vec{v} \times \vec{a}\|}{v^3}, \quad v := \|\vec{v}\|. \quad (10)$$

- (1.5) Produto vetorial com procedimento:

$$\vec{v} \times \vec{a} = (\omega^2 bc \sin \theta, -\omega^2 ac \cos \theta, \omega^3 ab). \quad (11)$$

- (1.0) Módulo do produto vetorial (simplificado):

$$\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2 = \omega^4 b^2 c^2 \sin^2 \theta + \omega^4 a^2 c^2 \cos^2 \theta + \omega^6 a^2 b^2. \quad (12)$$

4. (2.5) Calcule a torção.

$$\tau(t) = \frac{\vec{v} \times \vec{a} \cdot \dot{\vec{a}}}{\|\vec{v} \times \vec{a}\|^2}, \quad \dot{\vec{a}} = \frac{d\vec{a}}{dt}. \quad (13)$$

- (1.0) Derivada:

$$\dot{\vec{a}} = (\omega^3 a \sin \theta, -\omega^3 b \cos \theta, 0). \quad (14)$$

- (1.0) Produto misto (simplificado):

$$\vec{v} \times \vec{a} \cdot \dot{\vec{a}} = \omega^5 abc. \quad (15)$$

- (0.5) Torção (simplificada):

$$\tau = \frac{\omega abc}{a^2 c^2 \cos^2 \theta + b^2 c^2 \sin^2 \theta + \omega^2 a^2 b^2}. \quad (16)$$