Universidad de Murcia

Grado en Matemáticas

Ecuaciones Algebraicas

Notas de Clase

Laura Fernández Sánchez

Curso 2025 – 2026

Índice general

1. Extensiones de Galois **5**

1.1. La correspondencia de Galois 5

1.2. Extensiones de Galois 14

1.2.1. Ejemplo tocho 18

Capítulo 1

Extensiones de Galois

1.1. La correspondencia de Galois

Definición 1.1.1: Homomorfismos de extensiones

Dadas $K \subseteq L_1, L_2$ extensiones.
Si L_1 y L_2 son dos extensiones de K, entonces un **homomorfismo** de L_1/K en L_2/K (también llamado K-homomorfismo) es un homomorfismo de cuerpos $f : L_1 \to L_2$ tal que $f(a) = a$ para todo $a \in K$.
Un **endomorfismo** de una extensión L/K es un homomorfismo de L/K en sí misma. Un **isomorfismo** de extensiones (o K-isomorfismo) es un homomorfismo de extensiones que es isomorfismo de cuerpos y un **automorfismo** de extensiones (o K-automorfismo) es un isomorfismo de una extensión de K en sí misma.

Definición 1.1.2: Grupo de Galois

El **grupo de Galois** de L/K es el conjunto de K-automorfismos de L/K con la composición de aplicaciones.
Lo denotamos por $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Definición 1.1.3: Subextensión

Una **subextensión** de L/K es un cuerpo M tal que $K \subseteq M \subseteq L$.
Recordemos que $\mathrm{Sub}(L/K)$ denota el conjunto de las subextensiones de L/K.

Definición 1.1.4: Extensiones admisibles

Dos extensiones L_1/K y L_2/K son **admisibles** si existe un cuerpo L tal que $L_1 \subseteq L$ y $L_2 \subseteq L$.

Observación 1.1.1: Convenios y propiedades básicas

En todo momento supondremos $1 \neq 0 \implies$ Todos los homomorfismos entre cuerpos son inyectivos. Además, los K-homomorfismos son homomorfismos de K-espacios vectoriales. De esta forma siempre que exista un homomorfismo de cuerpos $f : K \to L$, el cuerpo L contiene un subcuerpo isomorfo a K, la imagen $f(K)$ de f. Por otro lado K admite una

extensión isomorfa a L, a saber el conjunto $K \cup (L \setminus f(K))$, en el que se define el producto de la forma obvia.
Abusaremos a menudo de la notación y cada vez que tengamos un homomorfismo de cuerpos $f : K \to L$, simplemente consideraremos K como subcuerpo de L, identificando los elementos de K y $f(K)$, a través de f.
De aquí tenemos que, si $f : K \to L$ es un homomorfismo de cuerpos:

Observación 1.1.2:

1. $f(K) \simeq K$ (como cuerpos). A veces simplemente escribiremos K para referirnos a $f(K)$.
2. Por convenio, K es subcuerpo de L identificando K con $f(K)$.

Lema 1.1.1: Propiedades de los homomorfismos sobre raíces

1. Sean $\sigma : E \to L$ un homomorfismo de cuerpos y $p \in E[X]$. Si α es una raíz de p en E, entonces $\sigma(\alpha)$ es una raíz de $\sigma(p)$.
   - *Nota:* Esto asegura que la propiedad de ser algebraicamente cerrado es invariante bajo isomorfismos.
2. Si E/K y L/K son extensiones de un cuerpo K, $p \in K[X]$ y σ es un K-homomorfismo, entonces σ se restringe a una aplicación inyectiva del conjunto de las raíces de p en E al conjunto de las raíces de p en L.
3. En particular, si $E = L$ (es decir, si $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$), entonces esta restricción de σ es una permutación del conjunto de las raíces de p en L.

Ejemplo 1.1.1: Algunas extensiones con grupo trivial

Claramente $\mathrm{Gal}(K/K) = 1$, pero no son éstas las únicas extensiones con grupo de Galois trivial.
Por ejemplo, si a es un número racional positivo que no es el cubo de un número racional, entonces $p = X^3 - a$ es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$. Las raíces de p son $\alpha = \sqrt[3]{a}$, $\omega\alpha$ y $\omega^2\alpha$, donde ω es una raíz tercera primitiva de la unidad. Como ω no es un número real, la única raíz de p que pertenece a $\mathbb{Q}(\alpha)$ es α y por tanto $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}) = 1$ (¿por qué?).

Observación 1.1.3: Justificación del Ejemplo 1

Cualquier K-automorfismo $\sigma \in \mathrm{Gal}(K(\alpha)/K)$ está completamente determinado por la imagen del generador de la extensión, es decir, por $\sigma(\alpha)$.
Además, los homomorfismos de cuerpos preservan las raíces de los polinomios con coeficientes en el cuerpo base. Como α es raíz de $p \in K[X]$, su imagen $\sigma(\alpha)$ debe ser obligatoriamente otra raíz de p.
Por tanto, las únicas opciones teóricas son $\sigma(\alpha) \in \{\alpha, \omega\alpha, \omega^2\alpha\}$. Sin embargo, σ es un endomorfismo de $K(\alpha)$, lo que exige que $\sigma(\alpha) \in K(\alpha)$. Dado que $a > 0$ es racional, podemos considerar $K(\alpha) \subset \mathbb{R}$. Como $\omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$, se sigue que $\omega\alpha \notin \mathbb{R}$ y $\omega^2\alpha \notin \mathbb{R}$, por lo que ninguna de estas dos raíces pertenece a $K(\alpha)$. La única asignación bien definida y posible es $\sigma(\alpha) = \alpha$, lo que implica que σ es la aplicación identidad.

Ejemplo 1.1.2: Extensiones de grado 2

Si L/K es una extensión de grado 2 y $\text{car}(K) \neq 2$, entonces $|\text{Gal}(L/K)| = 2$.
¿Por qué ocurre esto? Si $\alpha \in L \setminus K$, entonces $L = K(\alpha)$ y por tanto $p = \text{Min}_K(\alpha)$ tiene grado 2. Pongamos $p = X^2 + aX + b = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$
Para simplificar el estudio de la extensión, realizamos un cambio de variable para eliminar el término en X:

$$p(X) = X^2 + aX + b = \left(X + \frac{a}{2}\right)^2 + \underbrace{b - \frac{a^2}{4}}_{-c}$$

Definimos un nuevo generador $\beta = \alpha + \frac{a}{2}$. Como $\frac{a}{2} \in K$, se tiene que $K(\alpha) = K(\beta)$. El polinomio mínimo de β es ahora mucho más sencillo: $q(X) = X^2 - c$. Sus raíces son simplemente $\pm\beta$.
¿Por qué el grupo de Galois tiene orden 2? Cualquier K-automorfismo σ debe enviar una raíz de $q(X)$ a otra raíz de $q(X)$.

- **Opción 1:** $\sigma(\beta) = \beta$. Esto define la aplicación identidad id_L.
- **Opción 2:** $\sigma(\beta) = -\beta$. Esto define un automorfismo no trivial (análogo a la conjugación compleja).

Observación 1.1.4: Justificación del Ejemplo 2

Para asegurar que efectivamente tiene *exactamente* dos elementos, debemos garantizar que las dos opciones teóricas ($\sigma(\beta) = \beta$ y $\sigma(\beta) = -\beta$) generan automorfismos distintos y bien definidos.
Primero, comprobamos que son distintos: como $\text{car}(K) \neq 2$, se cumple que $2\beta \neq 0$ (ya que $\beta \notin K \implies \beta \neq 0$), por lo que $\beta \neq -\beta$. Segundo, comprobamos que ambas opciones dan lugar a automorfismos válidos: L es el cuerpo de escisión del polinomio $X^2 - c$ sobre K. Al ser irreducible y tener raíces simples (es separable por ser de característica distinta de 2), la teoría elemental de extensiones asegura que por cada raíz en el cuerpo de escisión existe un K-automorfismo que envía el generador a dicha raíz. Por consiguiente, existe el automorfismo identidad ($\beta \mapsto \beta$) y un automorfismo no trivial ($\beta \mapsto -\beta$), formando un grupo de Galois de orden 2.

Ejemplo 1.1.3: Automorfismos en extensiones de $\mathbb{R}$

Como un automorfismo de $\mathbb{R}$ ha de ser una aplicación creciente (¿por qué?), necesariamente $\text{Gal}(\mathbb{R}/\mathbb{Q}) = 1$ y por tanto $\text{Gal}(\mathbb{R}/K) = 1$ para todo subcuerpo K de $\mathbb{R}$ (¿por qué?). De hecho, el único automorfismo de $\mathbb{R}$ es la identidad (¿por qué?).

Observación 1.1.5: Justificación del Ejemplo 3

Vamos a responder a las tres preguntas secuencialmente:

1. **¿Por qué ha de ser creciente?** Sea $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{R})$. Todo número real positivo $x > 0$ admite una raíz cuadrada real, es decir, $x = (\sqrt{x})^2$. Al aplicar σ, obtenemos $\sigma(x) = \sigma((\sqrt{x})^2) = (\sigma(\sqrt{x}))^2$. Un cuadrado en $\mathbb{R}$ es siempre positivo o cero. Como σ es un automorfismo (y por tanto inyectivo, enviando $0 \mapsto 0$), para $x > 0$ se tiene estrictamente que $\sigma(x) > 0$. Si tomamos $a < b$, entonces $b - a > 0$. Por la propiedad

anterior, $\sigma(b-a) > 0$, y por linealidad $\sigma(b) - \sigma(a) > 0$, lo que implica $\sigma(a) < \sigma(b)$. Por lo tanto, σ preserva el orden estrictamente.

2. **¿Por qué el único automorfismo es la identidad?** Sabemos que todo automorfismo fija el cuerpo primo; por tanto, $\sigma(q) = q$ para todo $q \in \mathbb{Q}$. Sea $x \in \mathbb{R}$ un número irracional. Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, podemos acotarlo entre dos sucesiones de racionales tales que $q_1 < x < q_2$. Dado que σ es creciente (como demostramos arriba), preserva estas desigualdades: $\sigma(q_1) < \sigma(x) < \sigma(q_2)$. Como σ fija los racionales, esto se traduce en $q_1 < \sigma(x) < q_2$. Al tomar el límite cuando q_1 y q_2 tienden a x, por el Teorema del Sandwich (o encaje de intervalos), obtenemos forzosamente que $\sigma(x) = x$. Por tanto, σ es la identidad en todo $\mathbb{R}$.

3. **¿Por qué $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/K) = 1$?** El grupo $\mathrm{Gal}(\mathbb{R}/K)$ está formado por los automorfismos de $\mathbb{R}$ que fijan K. Pero acabamos de demostrar que el único automorfismo general de $\mathbb{R}$ (es decir, el único elemento de $\mathrm{Aut}(\mathbb{R})$) es la identidad. Por tanto, exijamos que fije K o que fije $\mathbb{Q}$, el único candidato posible sigue siendo la aplicación identidad.

Ejemplo 1.1.4:

Sean $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ y $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Entonces $\sigma(\sqrt{2}) = \pm\sqrt{2}$ y $\sigma(\sqrt{3}) = \pm\sqrt{3}$ y por tanto $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tiene a lo sumo 4 elementos. De hecho $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tiene exactamente cuatro elementos. En efecto, en el Ejemplo (2) hemos visto que $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ tiene 2 elementos. Por otro lado $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Por tanto, $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es una extensión separable (¿por qué?) de grado 2, con lo que cada uno de los dos elementos de $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2})/\mathbb{Q})$ tiene dos extensiones a un homomorfismo de K en una clausura algebraica de K que, como además $K/\mathbb{Q}$ es normal (¿por qué?), estas dos extensiones son elementos de $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Por tanto $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ tiene cuatro elementos: $\sigma_{++}, \sigma_{+-}, \sigma_{-+}, \sigma_{--}$ dados por $\sigma_{ab}(\sqrt{2}) = a\sqrt{2}$ y $\sigma_{ab}(\sqrt{3}) = b\sqrt{3}$.

Observación 1.1.6: Justificación del Ejemplo 4

1. **¿Por qué $K/\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es separable?** Esta extensión se obtiene adjuntando $\sqrt{3}$, cuyo polinomio mínimo sobre $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ es divisor de $X^2 - 3$. Estamos trabajando sobre una extensión de $\mathbb{Q}$, lo que significa que el cuerpo base tiene característica cero. Todo polinomio irreducible sobre un cuerpo de característica cero es separable (sus derivadas formales nunca son nulas), por lo que toda extensión algebraica en característica cero es automáticamente separable.

2. **¿Por qué $K/\mathbb{Q}$ es normal?** Una extensión finita es normal si y solo si es el cuerpo de escisión de algún polinomio sobre el cuerpo base. En este caso, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ contiene todas las raíces del polinomio $f(X) = (X^2-2)(X^2-3) \in \mathbb{Q}[X]$, y de hecho es generado por ellas. Al ser cuerpo de escisión, la extensión es normal.

Ejemplo 1.1.5:

Sea ξ una raíz n-ésima primitiva de la unidad y sea $L = K(\xi)/K$ una extensión ciclotómica. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, entonces $\sigma(\xi) = \xi^i$ para algún entero i coprimo con n, y σ está completamente determinada por el resto de i módulo n. Por tanto, tenemos una aplicación $\psi : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathbb{Z}_n^*$ que asocia $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ con la única clase en $\mathbb{Z}_n^*$ que contiene a

i (con $\sigma(\xi) = \xi^i$). Entonces ψ es un homomorfismo inyectivo de grupos (comprobarlo) y por tanto $\mathrm{Gal}(L/K)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathbb{Z}_n^*$. En particular, el grupo de Galois de toda extensión ciclotómica es abeliano. Si además $K = \mathbb{Q}$, entonces $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q}}(\xi) = \Phi_n$, el n-ésimo polinomio ciclotómico (Teorema 3.9). Por tanto, para cada i coprimo con n existe un elemento $\sigma \in \mathrm{Gal}(L = \mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ con $\sigma(\xi) = \xi^i$. En otras palabras, $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}_n^*$ y un isomorfismo $\tau : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi)/\mathbb{Q})$ viene dado asociando $i \in \mathbb{Z}_n^*$ con el único automorfismo τ_i de $\mathbb{Q}(\xi)$ tal que $\tau_i(\xi) = \xi^i$.

Observación 1.1.7: Justificación del Ejemplo 5

Comprobación de que ψ es un homomorfismo inyectivo:
Primero, veamos que respeta la operación del grupo (la composición). Sean $\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Supongamos que $\psi(\sigma) = [i]$ y $\psi(\tau) = [j]$, lo que significa por definición que $\sigma(\xi) = \xi^i$ y $\tau(\xi) = \xi^j$. Calculemos la imagen de ξ bajo la composición $\sigma \circ \tau$:

$$(\sigma \circ \tau)(\xi) = \sigma(\tau(\xi)) = \sigma(\xi^j)$$

Como σ es un homomorfismo de cuerpos, preserva los exponentes:

$$\sigma(\xi^j) = (\sigma(\xi))^j = (\xi^i)^j = \xi^{ij}$$

Esto nos dice que el automorfismo composición $\sigma \circ \tau$ eleva ξ a la potencia ij. Por tanto, $\psi(\sigma \circ \tau) = [ij] = [i][j] = \psi(\sigma)\psi(\tau)$ en el grupo multiplicativo $\mathbb{Z}_n^*$. Esto demuestra que ψ es un homomorfismo.
Segundo, evaluemos la inyectividad estudiando el núcleo. Supongamos que $\sigma \in \ker(\psi)$. Esto significa que $\psi(\sigma)$ es el elemento neutro de $\mathbb{Z}_n^*$, es decir, la clase $[1]$. Entonces, $\sigma(\xi) = \xi^1 = \xi$. Dado que el cuerpo $L = K(\xi)$ está generado en su totalidad por ξ y los elementos de K (los cuales todo automorfismo de Galois deja fijos por definición), si un automorfismo deja fijo al generador ξ, obligatoriamente deja fijo a todo elemento de L. Luego $\sigma = \mathrm{id}_L$. Al ser su núcleo trivial, ψ es inyectiva.

Observación 1.1.8: Isomorfismos de grupos de Galois

Obsérvese que si $\phi : L \to L^*$ es un K-isomorfismo, entonces la aplicación $\mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(L^*/K)$ dada por $\sigma \mapsto \phi\sigma\phi^{-1}$ es un isomorfismo.

Si L/K es una extensión algebraica y $\overline{L}$ una clausura algebraica de L, entonces podemos ver cada elemento de $\mathrm{Gal}(L/K)$ como un elemento de $S_1^L = \{\sigma : L \to \overline{L} \mid \sigma|_K = 1_K\}$. Por tanto de la Proposición 4.9 deducimos:

Proposición 1.1.1:

Si L/K es una extensión finita entonces $|\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K]_s \leq [L : K]$.

Si G es un grupo, entonces vamos a denotar por $\mathrm{Sub}(G)$ al conjunto de todos los subgrupos de G y si H es un subgrupo de G, entonces $\mathrm{Sub}(G/H)$ es el conjunto de los subgrupos de G que contienen a H. En realidad esta última notación es ambigua pues si N es un subgrupo normal de G, entonces $\mathrm{Sub}(G/N)$ tiene dos significados: el conjunto de los subgrupos de G que contienen a N y el conjunto de los subgrupos del cociente G/N. El Teorema de la Correspondencia (Teorema 5.4 de GyA) nos muestra que esta ambigüedad no es muy grave.

Definición 1.1.5: Homomorfismo y anti-homomorfismo de conjuntos ordenados

Consideramos $\mathrm{Sub}(L/K)$ y $\mathrm{Sub}(G/H)$ como conjuntos ordenados por la inclusión. Una aplicación $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ entre conjuntos ordenados se dice que es un **homomorfismo de conjuntos ordenados** si conserva el orden, es decir, si para cada $x, y \in A$ tales que $x \leq y$ se verifica que $f(x) \leq f(y)$ y se dice que es un **anti-homomorfismo de conjuntos ordenados** si $f(x) \geq f(y)$ para todo $x, y \in A$ con $x \leq y$.

Definición 1.1.6: Correspondencia de Galois

El par formado por las siguientes aplicaciones se llama **correspondencia de Galois de la extensión** L/K. Si L/K es una extensión de cuerpos entonces tenemos dos aplicaciones:

$$(-)^\circ = \mathrm{Gal}(L/-) \colon \mathrm{Sub}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Sub}(\mathrm{Gal}(L/K))$$
$$(-)^\circ = L^{(-)} \colon \mathrm{Sub}(\mathrm{Gal}(L/K)) \longrightarrow \mathrm{Sub}(L/K)$$

La aplicación que va para la derecha asocia $F \in \mathrm{Sub}(L/K)$ con

$$F^\circ = \mathrm{Gal}(L/F) = \{\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K) \mid \sigma(x) = x \text{ para todo } x \in F\}$$

y la que va para la izquierda asocia $H \in \mathrm{Sub}(\mathrm{Gal}(L/K))$ con

$$H^\circ = L^H = \{a \in L \mid \sigma(a) = a \text{ para todo } \sigma \in H\}.$$

Veamos algunas propiedades de la correspondencia de Galois.

Recordemos que tanto la unidad de un anillo, como el neutro de un grupo o el subgrupo trivial del grupo lo denotamos siempre como 1. En la siguiente proposición 1 siempre denota el subgrupo trivial de $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Proposición 1.1.2: Propiedades de la correspondencia de Galois

Sea L/K una extensión de cuerpos y sea $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. La correspondencia de Galois $(-)^\circ : \mathrm{Sub}(L/K) \rightleftharpoons \mathrm{Sub}(G)$ satisface las siguientes propiedades, donde X e Y son ambos subextensiones de L/K o ambos subgrupos de G:

1. $L^\circ = 1$, $K^\circ = G$ y $1^\circ = L$.
2. $(-)^\circ = \mathrm{Gal}(L/-)$ y $(-)^\circ = L^{(-)}$ son antihomomorfismos de conjuntos ordenados, es decir, si $X \subseteq Y$ entonces $Y^\circ \subseteq X^\circ$.
3. $X \subseteq X^{\circ\circ}$ y $X^\circ = X^{\circ\circ\circ}$.
4. Las dos aplicaciones que forman la correspondencia de Galois se restringen a un anti-isomorfismo de conjuntos ordenados entre sus dos imágenes.

Demostración. Vamos a demostrar las propiedades paso a paso, recordando las definiciones explícitas de los operadores: si E es un subcuerpo, $E^\circ = \mathrm{Gal}(L/E) = \{\sigma \in G \mid \sigma(x) = x \text{ para todo } x \in E\}$; y si H es un subgrupo, $H^\circ = L^H = \{x \in L \mid \sigma(x) = x \text{ para todo } \sigma \in H\}$.

(1) Casos triviales:

- $L^\circ = \mathrm{Gal}(L/L)$. El único automorfismo de L que deja fijo todo elemento de L es la identi-

dad. Por tanto, $L^\circ = \{1\} = 1$.

- $K^\circ = \mathrm{Gal}(L/K)$. Por definición, este es el grupo de Galois total G.
- $1^\circ = L^{\{1\}}$. El conjunto de elementos de L fijados por el automorfismo identidad es todo L.

(2) Antihomomorfismos (Inversión del orden):

- *Para subcuerpos:* Supongamos que $E_1 \subseteq E_2$. Sea $\sigma \in E_2^\circ = \mathrm{Gal}(L/E_2)$. Por definición, σ deja fijos todos los elementos de E_2. Como $E_1 \subseteq E_2$, σ deja fijos todos los elementos de E_1. Esto implica que $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E_1) = E_1^\circ$. Por tanto, $E_2^\circ \subseteq E_1^\circ$.
- *Para subgrupos:* Supongamos que $H_1 \subseteq H_2$. Sea $x \in H_2^\circ = L^{H_2}$. Por definición, x es fijado por todo automorfismo de H_2. Como $H_1 \subseteq H_2$, x es fijado por todo automorfismo de H_1. Luego $x \in L^{H_1} = H_1^\circ$. Por tanto, $H_2^\circ \subseteq H_1^\circ$.

(3) Clausura y reflexividad: Vamos a probar primero que $X \subseteq X^{\circ\circ}$.

- *Si $X = E$ es un subcuerpo:* Sea $x \in E$. Para cualquier automorfismo $\sigma \in E^\circ = \mathrm{Gal}(L/E)$, se cumple por definición que $\sigma(x) = x$. Esto significa que x está en el cuerpo fijo de E°, es decir, $x \in (E^\circ)^\circ = E^{\circ\circ}$. Por tanto, $E \subseteq E^{\circ\circ}$.
- *Si $X = H$ es un subgrupo:* Sea $\sigma \in H$. Para cualquier elemento $x \in H^\circ = L^H$, se cumple por definición que $\sigma(x) = x$. Esto significa que σ deja fijo todo el cuerpo H°, luego $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/H^\circ) = (H^\circ)^\circ = H^{\circ\circ}$. Por tanto, $H \subseteq H^{\circ\circ}$.

Ahora probaremos que $X^\circ = X^{\circ\circ\circ}$.

- Sustituyendo X por X° en la inclusión que acabamos de demostrar ($X \subseteq X^{\circ\circ}$), obtenemos inmediatamente que $X^\circ \subseteq (X^\circ)^{\circ\circ} = X^{\circ\circ\circ}$.
- Por otro lado, tomemos la inclusión original $X \subseteq X^{\circ\circ}$. Si aplicamos a ambos lados el operador $(-)^\circ$, por la propiedad (2) de inversión del orden, la inclusión se da la vuelta: $(X^{\circ\circ})^\circ \subseteq X^\circ$, es decir, $X^{\circ\circ\circ} \subseteq X^\circ$.
- Al tener la doble inclusión, concluimos que $X^\circ = X^{\circ\circ\circ}$.

(4) Anti-isomorfismo de las imágenes: Llamemos .[el]ementos cerrados.[a] aquellos subcuerpos o subgrupos que pertenecen a las imágenes de la correspondencia de Galois (es decir, aquellos de la forma $Y = X^\circ$).

Si tomamos un elemento cerrado $Y = X^\circ$ y le aplicamos dos veces el operador de Galois, obtenemos $Y^{\circ\circ} = (X^\circ)^{\circ\circ} = X^{\circ\circ\circ}$. Por la propiedad (3), sabemos que $X^{\circ\circ\circ} = X^\circ$, con lo que deducimos que $Y^{\circ\circ} = Y$.

Esto demuestra que si restringimos las aplicaciones $(-)^\circ$ a sus respectivas imágenes, componerlas da la identidad (son biyecciones mutuamente inversas). Como además sabemos por (2) que invierten el orden, deducimos que establecen un anti-isomorfismo perfecto de conjuntos ordenados entre los subcuerpos cerrados y los subgrupos cerrados. □

Definición 1.1.7:

Los elementos de las imágenes de las dos aplicaciones de la correspondencia de Galois se dice que son respectivamente subextensiones cerradas en L/K y subgrupos cerrados en $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Observación 1.1.9:

Obsérvese que de la propiedad (3) de la Proposición 5.3 se tiene que X es cerrado si y solo si $X = X^{\circ\circ}$

Corolario 1.1.1:

Las aplicaciones de la correspondencia de Galois de una extensión de cuerpos L/K se restringen a un anti-isomorfismo de conjuntos ordenados entre las subextensiones cerradas en L/K y los subgrupos cerrados en $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Observación 1.1.10:

Por la Proposición 5.3, L, 1 y $\mathrm{Gal}(L/K)$ son cerrados en L/K, pero K no tiene por qué serlo. Por ejemplo, si $L \neq K$ y $\mathrm{Gal}(L/K) = 1$ (ver Ejemplos 5.1) entonces $K^{\circ\circ} = 1^{\circ} = L \neq K$.

Proposición 1.1.3: Respecto a los grados de las extensiones y los índices de los subgrupos

Sea L/K una extensión de cuerpos.

1. Si $E_1 \subseteq E_2$ son subextensiones de L/K con E_2/E_1 finita entonces $[E_1^{\circ} : E_2^{\circ}] \leq [E_2 : E_1]$.
2. Si $H_1 \leq H_2$ son subgrupos de $\mathrm{Gal}(L/K)$ con $[H_2 : H_1] < \infty$, entonces $[H_1^{\circ} : H_2^{\circ}] \leq [H_2 : H_1]$.

Demostración. (1) Razonamos por inducción sobre $n = [E_2 : E_1]$ con el caso $n = 1$ obvio. Supongamos pues que $n > 1$ y la hipótesis de inducción. Sean $\alpha \in E_2 \setminus E_1$, $p = \mathrm{Min}_{E_1}(\alpha)$ y $s = \mathrm{gr}(p)$. Entonces $s = [E_1(\alpha) : E_1]$ y $[E_2 : E_1(\alpha)] < n$. Si $s < n$, entonces por la hipótesis de inducción tenemos:

$$[E_1^{\circ} : E_2^{\circ}] = [E_1^{\circ} : E_1(\alpha)^{\circ}][E_1(\alpha)^{\circ} : E_2^{\circ}] \leq [E_1(\alpha) : E_1][E_2 : E_1(\alpha)] = [E_2 : E_1].$$

En caso contrario, $E_2 = E_1(\alpha)$. Sean R el conjunto de raíces de p y $\phi : E_1^{\circ}/E_2^{\circ} \to R$ la aplicación dada por $\phi(\sigma E_2^{\circ}) = \sigma(\alpha)$. Es fácil ver que esta aplicación está bien definida y es inyectiva. Por tanto $[E_1^{\circ} : E_2^{\circ}] \leq |R| \leq \mathrm{gr}(p) = [E_2 : E_1]$.

(2) Pongamos $[H_2 : H_1] = n$, $H_2/H_1 = \{\tau_1 H_1, \ldots, \tau_n H_1\}$ con $\tau_1 = 1$ y razonemos por reducción al absurdo, es decir, supondremos que $[H_1^{\circ} : H_2^{\circ}] > n$. Entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1} \in H_1^{\circ}$ linealmente independientes sobre H_2°. Consideremos la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \tau_1(\alpha_1) & \tau_1(\alpha_2) & \ldots & \tau_1(\alpha_{n+1}) \\ \tau_2(\alpha_1) & \tau_2(\alpha_2) & \ldots & \tau_2(\alpha_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_n(\alpha_1) & \tau_n(\alpha_2) & \ldots & \tau_n(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix}$$

y sea r el rango de A. Reordenamos los α_i para que las primeras r columnas sean linealmente independientes. Entonces la columna $r+1$ es combinación lineal de las r primeras (obsérvese que $r \leq n < n+1 =$ número de columnas de A) y por tanto existe $a = (a_1, \ldots, a_r, 1, 0, \ldots, 0)^T \in (L)^{n+1}$ tal que $Aa = 0$. Como $\tau_1 = 1$ tenemos:

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_r a_r + \alpha_{r+1} = 0$$

y, como los α_i son linealmente independientes sobre H_2°, existe $1 \leq i \leq r$ tal que $a_i \notin H_2^\circ$. Reordenando $a_1, \ldots, a_r$ podemos suponer que $a_1 \notin H_2^\circ$, es decir $\sigma(a_1) \neq a_1$ para algún $\sigma \in H_2$. La aplicación $H_2/H_1 \to H_2/H_1$ dada por $\tau H_1 \mapsto \sigma\tau H_1$ es inyectiva pues si $\sigma\sigma_1 H_1 = \sigma\sigma_2 H_1$ entonces $\sigma_2^{-1}\sigma_1 = (\sigma\sigma_2)^{-1}(\sigma\sigma_1) \in H_1$, luego $\sigma_1 H_1 = \sigma_2 H_1$. Por tanto existe una permutación $\rho \in S_n$ tal que $\sigma^{-1}\tau_i = \tau_{\rho(i)}$ para todo $i = 1, \ldots, n$, con lo que la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} \sigma^{-1}\tau_1(\alpha_1) & \sigma^{-1}\tau_1(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{-1}\tau_1(\alpha_{n+1}) \\ \sigma^{-1}\tau_2(\alpha_1) & \sigma^{-1}\tau_2(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{-1}\tau_2(\alpha_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma^{-1}\tau_n(\alpha_1) & \sigma^{-1}\tau_n(\alpha_2) & \ldots & \sigma^{-1}\tau_n(\alpha_{n+1}) \end{pmatrix}$$

se obtiene permutando las filas de la matriz A. Eso implica que $Ba = 0$ y por tanto $A\sigma(a) = 0$. Luego $A(a - \sigma(a)) = 0$ y:

$$a - \sigma(a) = \begin{pmatrix} a_1 - \sigma(a_1) \\ \vdots \\ a_r - \sigma(a_r) \\ 1 - 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - \sigma(a_1) \\ \vdots \\ a_r - \sigma(a_r) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $a_1 - \sigma(a_1) \neq 0$. Eso implica que las primeras r columnas de A son linealmente dependientes en contra de la elección, lo que proporciona la contradicción deseada. □

Corolario 1.1.2:

Sea L/K una extensión de cuerpos.

1. Si $K \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq L$ es una torre de cuerpos, con $[E_2 : E_1] < \infty$ y E_1 cerrado en L/K entonces E_2 es cerrado en L/K y $[E_1^\circ : E_2^\circ] = [E_2 : E_1]$.
2. Si $H_1 \leq H_2 \leq \mathrm{Gal}(L/K)$ son subgrupos de $\mathrm{Gal}(L/K)$ con $[H_2 : H_1] < \infty$ y H_1 cerrado en L/K entonces H_2 es cerrado en L/K y $[H_1^\circ : H_2^\circ] = [H_2 : H_1]$.

Demostración. (1) Aplicando el primer apartado de la Proposición 5.5 a $E_1 \leq E_2$ obtenemos que $[E_1^\circ : E_2^\circ] \leq [E_2 : E_1]$ y aplicando el segundo apartado a $E_2^\circ \subseteq E_1^\circ$ obtenemos $[E_2^{\circ\circ} : E_1^{\circ\circ}] \leq [E_1^\circ : E_2^\circ]$. Como E_1 es cerrado tenemos que $[E_2^{\circ\circ} : E_1] = [E_2^{\circ\circ} : E_1^{\circ\circ}] \leq [E_2 : E_1]$ y como $E_2 \subseteq E_2^{\circ\circ}$ concluimos que $E_2 = E_2^{\circ\circ}$, es decir $E_2^{\circ\circ}$ es cerrado.

(2) Es completamente análoga. □

Como consecuencia del segundo apartado del Corolario 5.6 y el primero de la Proposición 5.3 se tiene el siguiente corolario:

Corolario 1.1.3:

Todo subgrupo finito de $\mathrm{Gal}(L/K)$ es cerrado en L/K.

1.2. Extensiones de Galois

Definición 1.2.1: Extensión de Galois

Una extensión de Galois es una extensión de cuerpos que es normal y separable.

Observación 1.2.1:

Obsérvese que toda extensión de Galois es algebraica (por ser separable).

La siguiente proposición es consecuencia inmediata de que la clase de extensiones normales es cerrada para levantamientos y de que la clase de extensiones separables también lo es.

Proposición 1.2.1:

La clase de extensiones de Galois es cerrada para levantamientos.

El siguiente teorema caracteriza las extensiones de Galois.

Teorema 1.2.1: Condiciones equivalentes para una extensión de Galois

Las siguientes condiciones son equivalentes para una extensión de cuerpos L/K con $G = \mathrm{Gal}(L/K)$:

1. L/K es una extensión de Galois.
2. L/E es una extensión de Galois para todo $E \in \mathrm{Sub}(L/K)$.
3. L/K es algebraica y toda subextensión de L/K es cerrada.
4. L/K es algebraica y K es una subextensión cerrada de L/K.
5. L/K es algebraica y $G^\circ = K$, o sea, si $\alpha \in L$ satisface $\sigma(\alpha) = \alpha$ para todo $\sigma \in G$ entonces $\alpha \in K$.
6. L/K es algebraica y para todo $\alpha \in L \setminus K$ existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$.

Demostración. (1) $\implies$ (2) es consecuencia de la Proposición 5.9.

(2) $\implies$ (3). Supongamos que L/K satisface (2) y sea $E \in \mathrm{Sub}(L/K)$. De la Proposición 5.3 se tiene que $E \subseteq E^{\circ\circ}$ y tenemos que demostrar que se verifica la igualdad, o lo que es lo mismo, tenemos que demostrar que si $\alpha \in L \setminus E$ entonces existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E)$ tal que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$. Sea $\alpha \in L \setminus E$ y sea $p = \mathrm{Min}_E(\alpha)$. Este polinomio tiene una raíz en L y, como L/E es normal, p es completamente factorizable en L. Como además L/E es separable y $\alpha \notin E$, existe $\beta \in L$, con $\alpha \neq \beta$, tal que β también es raíz de p. De la Proposición 1.10 se deduce que existe un E-isomorfismo $\sigma : E(\alpha) \to E(\beta)$. Sea $\overline{L}$ una clausura algebraica de L. Como L/E es algebraica (y por tanto también lo es $L/E(\alpha)$), σ se extiende a un homomorfismo de L en $\overline{L}$ que también

denotaremos por σ, y como L/E es normal, $\sigma(L) \subseteq L$, con lo que $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E)$. Deducimos que $\alpha \neq \beta = \sigma(\alpha)$.

(3) $\implies$ (4), (4) $\implies$ (5), y que (5) y (6) son equivalentes, está claro.

(5) $\implies$ (1). Supongamos que L/K verifica (5). Sea $\alpha \in L$; sean $p = \mathrm{Min}_K(\alpha)$ y $n = \mathrm{gr}(p)$. Tenemos que demostrar que p factoriza completamente en L (para demostrar que L/K es normal) y que p no tiene raíces múltiples (para mostrar que L/K es separable). Esto equivale a demostrar que p tiene n raíces (distintas) en L. Sea $R = \{\alpha = \alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ el conjunto de las (distintas) raíces de p en L y sea $q = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_r)$. Si $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, entonces $\sigma(\alpha_i)$ es una raíz de p en L, lo que implica que σ induce una permutación de R y por tanto $\sigma(q) = q$, es decir $\sigma(a) = a$ para cada uno de los coeficientes a de q. Como estamos suponiendo que L/K satisface la propiedad (5), concluimos que cada uno de estos coeficientes pertenece a K, es decir $q \in K[X]$. Como $r = \mathrm{gr}(q) \leq n = \mathrm{gr}(p)$ y p tiene grado mínimo entre los polinomios de $K[X]$ que tienen a α como raíz deducimos que $p = q$ y por tanto $r = n$. □

La siguiente proposición muestra criterios para decidir si una extensión es de Galois para el caso de extensiones finitas.

Proposición 1.2.2: Criterios para una extensión de Galois finita

Las siguientes condiciones son equivalentes para una extensión finita L/K:

1. L/K es una extensión de Galois.
2. $[L : K] = |\mathrm{Gal}(L/K)|$.
3. $[L : E] = |\mathrm{Gal}(L/E)|$ para todo $E \in \mathrm{Sub}(L/K)$.

Demostración. Sea $\overline{L}$ una clausura algebraica. Podemos ver cada elemento de $\mathrm{Gal}(L/K)$ como un K-homomorfismo de L en $\overline{L}$. De esta manera, si σ denota la inclusión de K en L tenemos que $\mathrm{Gal}(L/K) \subseteq S_\sigma^L$. Combinando esto con la Proposición 5.2 tenemos que:

$$|\mathrm{Gal}(L/K)| \leq [L : K]_s \leq [L : K]$$

Por el Teorema 4.12, la segunda desigualdad es una igualdad si y solo si L/K es separable. La primera desigualdad es una igualdad si y solo si todo K-homomorfismo de L a $\overline{L}$ cumple $\tau(L) \subseteq L$ si y solo si L/K es normal. Esto demuestra que (1) y (2) son equivalentes.

Combinando la equivalencia entre (1) y (2) y el Teorema 5.10 se deduce de forma inmediata que (1) y (3) son equivalentes. □

Teorema 1.2.2: Teorema Fundamental de la Teoría de Galois

Sea L/K una extensión de Galois finita y sea $G = \mathrm{Gal}(L/K)$. Entonces se verifican las siguientes propiedades:

1. La correspondencia de Galois es un anti-isomorfismo de conjuntos ordenados entre $\mathrm{Sub}(L/K)$ y $\mathrm{Sub}(G)$.
2. Si X e Y están ambos en $\mathrm{Sub}(L/K)$ o en $\mathrm{Sub}(G)$ y $X \subseteq Y$ entonces $[X^\circ : Y^\circ] = [Y : X]$. En particular:
   (a) Si $E \in \mathrm{Sub}(L/K)$ entonces $[L : E] = |E^\circ|$ y $[E : K] = [G : E^\circ]$.
   (a) Si $H \in \mathrm{Sub}(G)$ entonces $|H| = [L : H^\circ]$ y $[G : H] = [H^\circ : K]$.

Demostración. (1) A la vista de la Proposición 5.3 y el Teorema 5.10, para demostrar (1) sólo falta demostrar que todo subgrupo H de G es cerrado, pero eso es consecuencia inmediata del Corolario 5.7.

(2) Es consecuencia de la Proposición 5.6. □

Si $K \subseteq E \subseteq L$ es una torre de cuerpos y $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, entonces $\mathrm{Res}_E^L(\sigma)$ denota la restricción de σ a E. En principio $\mathrm{Res}_E^L(\sigma)$ es un K-homomorfismo de E en L, pero si E/K es normal entonces $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/K)$. Eso es lo que pasa en las condiciones de la siguiente proposición y está claro que en tal caso $\mathrm{Res}_E^L : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(E/K)$ es un homomorfismo de grupos.

Proposición 1.2.3: Condiciones equivalentes para una extensión de Galois

Sea L/K una extensión finita de Galois. Si $E \in \mathrm{Sub}(L/K)$ entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) E/K es de Galois.

(1) E/K es normal.

(1) $\sigma(E) \subseteq E$ para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$.

(1) $\mathrm{Gal}(L/E)$ es normal en $\mathrm{Gal}(L/K)$.

Además, si estas condiciones se satisfacen, entonces la aplicación de restricción

$$\mathrm{Res}_E^L : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(E/K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_E$$

es suprayectiva y como su núcleo es $\mathrm{Gal}(L/E)$, se tiene que

$$\mathrm{Gal}(E/K) \simeq \frac{\mathrm{Gal}(L/K)}{\mathrm{Gal}(L/E)}$$

Demostración. La equivalencia entre (1) y (2) es consecuencia inmediata de que la clase de extensiones separables es multiplicativa (Proposición 4.13).

(2) $\implies$ (3). Supongamos que E/K es normal y sean $\alpha \in E$ y $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$. Entonces $p = \mathrm{Min}_K(\alpha)$ es completamente factorizable en E, o sea $p = (X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_n)$ con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E$. Entonces $\sigma(\alpha)$ es raíz de p y por tanto $\sigma(\alpha) = \alpha_i \in E$, para algún i. Esto prueba que $\sigma(E) \subseteq E$.

(3) $\implies$ (4). Supongamos que se verifica (3) y sean $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ y $\tau \in \mathrm{Gal}(L/E)$. Entonces $\sigma(E) \subseteq E$ y por tanto $\tau(\sigma(\alpha)) = \sigma(\alpha)$, es decir $\sigma^{-1}\tau\sigma(\alpha) = \alpha$, para todo $\alpha \in E$. Esto prueba que $\sigma^{-1}\tau\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E)$ para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ y todo $\tau \in \mathrm{Gal}(L/E)$, es decir $\mathrm{Gal}(L/E)$ es normal en $\mathrm{Gal}(L/K)$.

(4) $\implies$ (2). Supongamos que $\mathrm{Gal}(L/E)$ es normal en $\mathrm{Gal}(L/K)$. Sea $\rho : E \to \overline{L}$ un K-homomorfismo. Como L/E es algebraica, ρ se extiende a un K-homomorfismo $\sigma : L \to \overline{L}$. Como L/K es normal, $\sigma(L) = L$ (Teorema 2.11), y por tanto podemos considerar σ como un elemento de $\mathrm{Gal}(L/K)$. Por hipótesis, $\sigma^{-1}\tau\sigma \in \mathrm{Gal}(L/E)$ para todo $\tau \in \mathrm{Gal}(L/E)$, con lo que $\tau\sigma(\alpha) = \sigma(\alpha)$, para todo $\tau \in \mathrm{Gal}(L/E)$ y todo $\alpha \in E$. Esto muestra que $\rho(\alpha) = \sigma(\alpha) \in \mathrm{Gal}(L/E)^\circ = E^{\circ\circ} = E$65]. Como L/E es algebraica, $\overline{L}$ es una clausura algebraica de E con lo que hemos comprobado que E/K satisface las condiciones del Teorema 2.11, es decir E/K es normal65].

Supongamos ahora que las condiciones (1)-(4) se verifican. Entonces la aplicación de restricción

$$f = \mathrm{Res}_E^L : \mathrm{Gal}(L/K) \to \mathrm{Gal}(E/K), \quad \sigma \mapsto \sigma|_E$$

es un homomorfismo de grupos cuyo núcleo es $\mathrm{Gal}(L/E)$. Aplicando el Primer Teorema de Isomorfía y que todas las extensiones L/K, E/K y L/E son de Galois deducimos que

$$|\operatorname{Im} f| = \frac{|\mathrm{Gal}(L/K)|}{|\mathrm{Gal}(L/E)|} = \frac{[L:K]}{[L:E]} = [E:K] = |\mathrm{Gal}(E/K)|,$$

lo que implica que f es suprayectiva y $\mathrm{Gal}(E/K) \simeq \frac{\mathrm{Gal}(L/K)}{\mathrm{Gal}(L/E)}$. □

En el siguiente Teorema volvemos a encontrar una versión diferente de homomorfismo de restricción.

Teorema 1.2.3: Teorema de las Irracionalidades Accesorias de Lagrange

Sean L/K y E/K dos extensiones admisibles y supongamos que la primera es finita y de Galois. Entonces LE/E y $L/L \cap E$ son extensiones de Galois finitas y el homomorfismo de restricción

$$\mathrm{Res}_L^{LE} : \mathrm{Gal}(LE/E) \to \mathrm{Gal}(L/L \cap E)$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Como L/K es de Galois, del Teorema 5.10 se deduce que $L/L \cap E$ también es de Galois y de la Proposición 5.9 que lo es LE/E. Que la primera es finita es obvio y que lo sea la segunda es consecuencia de la Proposición 1.18.

Sea $f = \mathrm{Res}_L^{LE}$7. Que f es inyectiva es obvio ya que un elemento del núcleo es un automorfismo σ de LE que verifica $\sigma(x) = x$ para todo $x \in L$ y todo $x \in E$7.

Para ver que f es suprayectiva ponemos $H = \operatorname{Im} f \subseteq \mathrm{Gal}(L/L \cap E)$. Entonces $L \cap E = (L \cap E)^{\circ\circ} = \mathrm{Gal}(L/L \cap E)^\circ \subseteq H^\circ$. Sea $\alpha \in H^\circ$. Entonces para todo $\sigma \in \mathrm{Gal}(LE/E)$ se verifica $\sigma(\alpha) = f(\sigma)(\alpha) = \alpha$, pues $f(\sigma) \in H$. Esto demuestra que $\alpha \in \mathrm{Gal}(LE/E)^\circ = E^{\circ\circ} = E$, pues LE/E es de Galois. Como esto se verifica para cada $\alpha \in H^\circ$ y $H^\circ \subseteq L$ deducimos que $H^\circ \subseteq L \cap E = (L \cap E)^{\circ\circ}$. Por tanto, $H^\circ = (L \cap E)^{\circ\circ}$. Como $L/L \cap E$ es de Galois, concluimos que $\operatorname{Im} f = H = (L \cap E)^{\circ\circ\circ} = \mathrm{Gal}(L/L \cap E)$, o sea f es suprayectiva. □

1.2.1. Ejemplo tocho

Vamos a calcular los subcuerpos del cuerpo de escisión F del polinomio $X^5 - p$, donde p es un número primo, y cuáles son normales sobre $\mathbb{Q}$.

Los subcuerpos de F son precisamente las subextensiones de $F/\mathbb{Q}$. Por el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois (Teorema 5.12) dichos cuerpos están en correspondencia biunívoca con los subgrupos de $G = \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ y los normales son los que corresponden con subgrupos normales de G. Sea $\alpha = \sqrt[5]{p}$.

Entonces $F = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta_5)$. Además, $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 5$ y $[\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = \varphi(5) = 4$. Por tanto $[F : \mathbb{Q}]$ es al menos 20. Por otro lado $[F : \mathbb{Q}(\alpha)] \leq [\mathbb{Q}(\zeta_5) : \mathbb{Q}] = 4$ y por tanto $[F : \mathbb{Q}] = [F : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] \leq 20$. Luego $|G| = [F : \mathbb{Q}] = 20$. Además G contiene a $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\alpha))$ y a $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\zeta_5))$ que serán dos subgrupos de órdenes 4 y 5 respectivamente.

Por el Teorema de las Irracionalidades Accesorias (Teorema 5.14), $\mathrm{Res}^F_{\mathbb{Q}(\zeta_5)} : \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\alpha)) \to \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$ es un isomorfismo8. Usando el isomorfismo entre $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q})$ y $\mathbb{Z}_5^*$ (Problema (3.15)) deducimos que $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\alpha)) = \langle\tau\rangle$ con $\tau(\zeta_5) = \zeta_5^2$. Por otro lado tenemos otro elemento $\sigma \in \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\zeta_5))$ con $\sigma(\alpha) = \zeta_5\alpha$ y claramente $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}(\zeta_5)) = \langle\sigma\rangle$.

Por otro lado, como $\mathbb{Q}(\zeta_5)/\mathbb{Q}$ es de Galois pero $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ no lo es, deducimos que $\langle\sigma\rangle$ es normal en G pero $\langle\tau\rangle$ no es normal en G. Por tanto $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^i$ para algún $i \in \{2, 3, 4\}$. De hecho $i = 2$ pues $\tau\sigma\tau^{-1}(\alpha) = \tau\sigma(\alpha) = \tau(\zeta_5\alpha) = \zeta_5^2\alpha = \sigma^2(\alpha)$. Por tanto, todos los elementos de G tienen una única forma $\sigma^i\tau^j$ con $0 \leq i \leq 4$ y $0 \leq j \leq 3$.

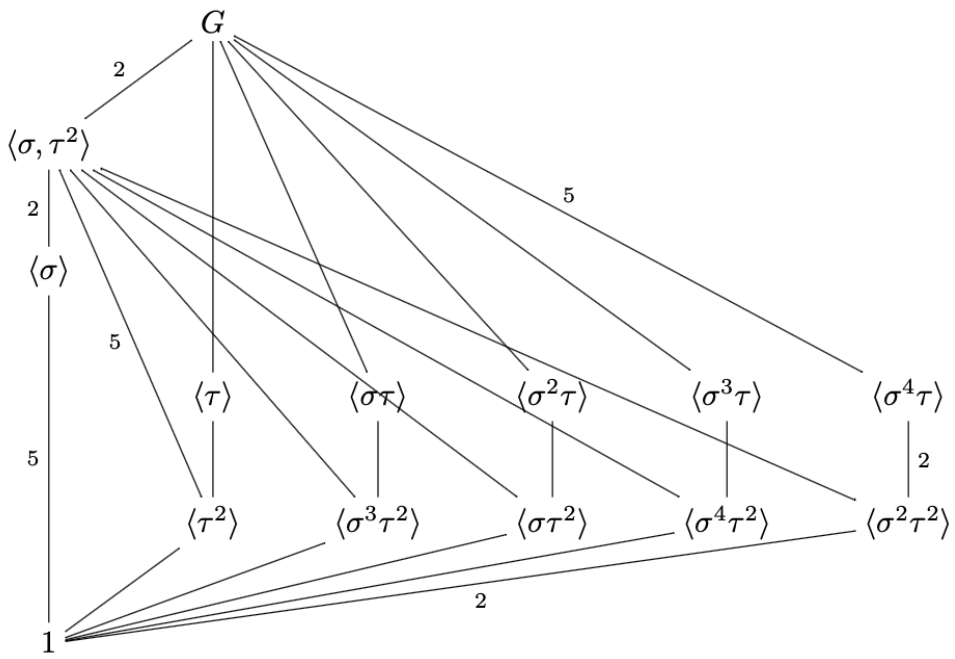
Vamos a calcular los subgrupos cíclicos. Ya tenemos tres: 1, $\langle\sigma\rangle$ y $\langle\tau\rangle$, que tienen orden 1, 5 y 4, respectivamente. Todos los elementos de la forma σ^i generan $\langle\sigma\rangle$ y τ y τ^{-1} generan $\langle\tau\rangle$. Otro subgrupo cíclico más será $\langle\tau^2\rangle$. Este último tiene orden 2. Solo nos falta calcular los subgrupos cíclicos generados por los elementos de la forma $\sigma^i\tau^j$ con $1 \leq i \leq 4$ y $1 \leq j \leq 3$.

Comenzamos con los de la forma $\sigma^i\tau^2$. De la igualdad $\tau\sigma = \sigma^2\tau$ observamos que $\tau^2\sigma = \sigma^4\tau^2 = \sigma^{-1}\tau^2$. Por tanto, para cada i tenemos que $(\sigma^i\tau^2)^2 = 1$. O sea, cada $\sigma^i\tau^2$ tiene orden 2 . Esto nos proporciona cinco subgrupos de orden 2, uno de los cuales es $\langle\tau^2\rangle$.

Por otro lado $(\sigma^i\tau)^2 = \sigma^{3i}\tau^2$, que tiene orden 296. Por tanto, $\langle\sigma^i\tau\rangle$ tiene orden 4 y su único subgrupo de orden 2 es $\langle\sigma^{3i}\tau^2\rangle$96. Como estos últimos son distintos para los cinco valores distintos de i, obtenemos de esta forma cinco subgrupos cíclicos de orden 4, uno de los cuales es $\langle\tau\rangle$. Cada uno de estos subgrupos tiene dos elementos de orden 49. Más concretamente $\langle\sigma^i\tau\rangle$ también está generado por $(\sigma^i\tau)^3 = \sigma^i\tau\sigma^{3i}\tau^2 = \sigma^{2i}\tau^3$9. Por tanto, ya tenemos todos los subgrupos cíclicos:

- De orden 1: 1.
- De orden 2: $\langle\sigma^i\tau^2\rangle$ con $0 \leq i \leq 4$.
- De orden 4: $\langle\sigma^i\tau\rangle$ con $0 \leq i \leq 4$.
- De orden 5: $\langle\sigma\rangle$.

Calculamos ahora los grupos generados por dos elementos g y h. Por supuesto, si uno de ellos está en el subgrupo generado por el otro lo que obtendremos es uno de los grupos cíclicos, con lo que suponemos que $g \notin \langle h\rangle$ y $h \notin \langle g\rangle$.



Supongamos primero que uno de los dos tiene orden 5. Por ejemplo, supongamos que $|g| = 5$ y por tanto h tiene orden 2 ó 4. Si h tiene orden 4 entonces $\langle g, h\rangle = G$. Sin embargo si h tiene orden 2 entonces $\langle g, h\rangle = \langle\sigma, \tau^2\rangle$ y como $\tau^2\sigma = \sigma^{-1}\tau^2$ tenemos que $\langle\sigma, \tau^2\rangle$ tiene orden 10.

En los demás casos g y h tienen orden 2 ó 4 y vamos a ver que siempre $\langle g, h\rangle = G$. Si $|g| = |h| = 4$ entonces podemos suponer que $g = \sigma^i\tau$ y $h = \sigma^j\tau$ con $i \neq j$. Por tanto, $\langle g, h\rangle$ contiene a $gh^{-1} = \sigma^{i-j}$. Como este elemento genera a $\langle\sigma\rangle$, tenemos que $\langle g, h\rangle = \langle\sigma, \tau\rangle = G$. El mismo argumento muestra que si g y h tienen orden 2 y son distintos, entonces generan G. Finalmente si uno tiene orden 2 y el otro 4, por ejemplo h, entonces $\langle g, h\rangle$ contiene a $\langle g, h^2\rangle$ con g y h^2 distintos de orden 2 y de nuevo obtenemos que $\langle g, h\rangle = G$.

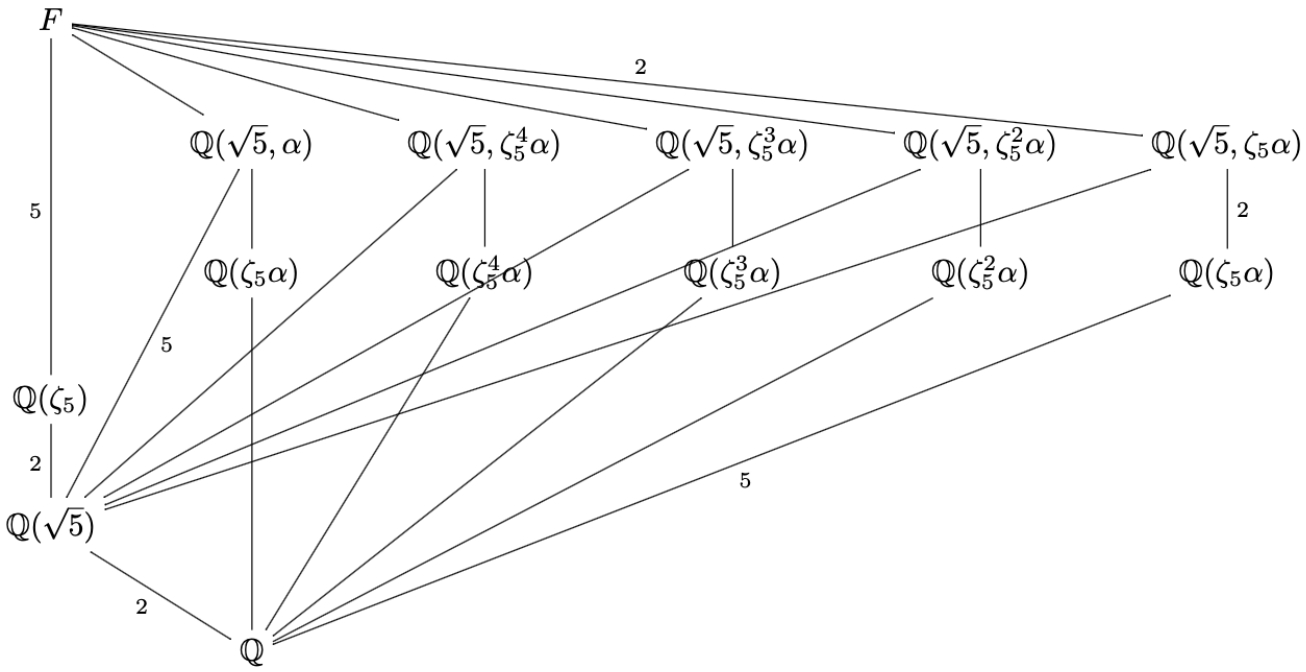
El retículo de subgrupos que obtenemos es el siguiente:

Dando la vuelta al diagrama obtenemos las inclusiones entre los subcuerpos de F. Pero antes de hacerlo vamos a calcular los cuerpos.

Claramente $G^\circ = \mathbb{Q}$, $1^\circ = F$, $\langle\sigma\rangle^\circ = \mathbb{Q}(\zeta_5)$, $\langle\tau\rangle^\circ = \mathbb{Q}(\alpha)$. Cada uno de los $\langle\sigma^i\tau\rangle^\circ$ tiene que tener grado 5 sobre $\mathbb{Q}$ y serán los únicos subcuerpos de grado 5 sobre $\mathbb{Q}$, que necesariamente son $\mathbb{Q}(\alpha)$, $\mathbb{Q}(\zeta_5\alpha)$, $\mathbb{Q}(\zeta_5^2\alpha)$, $\mathbb{Q}(\zeta_5^3\alpha)$ y $\mathbb{Q}(\zeta_5^4\alpha)$. Observamos que $\sigma^i\tau(\zeta_5^{-i}\alpha) = \sigma^i(\zeta_5^{-2i}\alpha) = \zeta_5^{-i}\alpha$. Por tanto $\langle\sigma^i\tau\rangle^\circ = \mathbb{Q}(\zeta_5^{-i}\alpha)$.

Por otro lado $\langle\sigma, \tau^2\rangle$ es el único subgrupo que tiene grado 2 sobre $\mathbb{Q}$, cuyo cuerpo fijo además está contenido en $\langle\sigma\rangle^\circ = \mathbb{Q}(\zeta_5)$. Observando que $\beta = \zeta_5 + \zeta_5^{-1} = 2\cos(2\pi/5) \in \mathbb{R}$, tenemos que $\mathbb{Q}(\beta)$ está contenido en $\mathbb{Q}(\zeta_5)$. Además, como $1 + \zeta_5 + \zeta_5^2 + \zeta_5^3 + \zeta_5^4 = 0$ tenemos que $\beta^2 = \zeta_5^2 + \zeta_5^{-2} + 2 = -\beta + 1$, con lo que β es raíz de $X^2 + X - 1$, de donde $\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y por tanto $\mathbb{Q}(\beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

Por tanto $\langle\sigma, \tau^2\rangle^\circ = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$. Ahora observamos que $\langle\sigma^{3i}\tau^2\rangle = \langle\sigma, \tau^2\rangle \cap \langle\sigma^i\tau\rangle$. Como la correspondencia de Galois es un anti-isomorfismo de retículos deducimos que $\langle\sigma^{3i}\tau^2\rangle^\circ = \langle\sigma, \tau^2\rangle^\circ\langle\sigma^i\tau\rangle^\circ =$



$\mathbb{Q}(\sqrt{5},\zeta_5^{-i}\alpha)$.

Por tanto el retículo de subcuerpos es el siguiente:

Obsérvese que los únicos subgrupos normales de G son 1, $\langle\sigma\rangle$, $\langle\sigma,\tau^2\rangle$ y G. Por tanto, los únicos subcuerpos de F que son normales sobre $\mathbb{Q}$ son $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ y F.