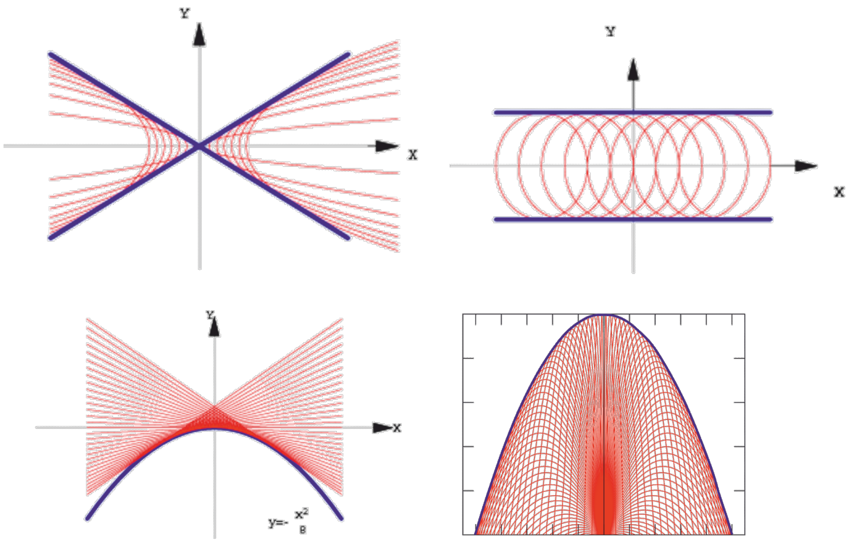
Universidad de Murcia

Grado en Matemáticas

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Notas de Clase

Basado en las clases de Antonio Linero Bas



Laura Fernández Sánchez

Curso 2025 – 2026

Índice general

1. Introducción a las EDPS **7**

1.1. Tema 1: Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales 7

1.1.1. Contexto General: Ecuaciones Funcionales 7

1.1.2. Definiciones Básicas de EDPs 8

1.1.3. Clasificación según la Linealidad 9

1.1.4. Métodos de Integración Directa 10

1.1.5. Construcción de EDPs y Familias de Soluciones 12

1.1.6. Reducción de EDPs a Sistemas de Primer Orden 13

1.1.7. El Problema de Cauchy (Introducción) 13

1.2. Problemas Propuestos: Hoja 1 - Introducción 15

2. EDP´s de primer orden **19**

2.1. Introducción. Modelo de advección. Familias biparamétricas 19

2.1.1. Recordatorio Preliminar: Regla de Leibniz 19

2.1.2. Aplicación: El Modelo de Advección 19

2.2. Familias Biparamétricas de Curvas 20

2.2.1. Relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden 22

2.3. Ecuaciones Cuasi-Lineales de Primer Orden (EQL) 24

2.3.1. Definición y Estructura 24

2.3.2. Interpretación Geométrica 24

2.3.3. Construcción de las Curvas Características 25

2.3.4. Relación entre Características y Superficies Integrales 28

2.4. El Problema de Cauchy para Ecuaciones Cuasi-Lineales 29

2.4.1. Planteamiento del Problema . . . 30
2.4.2. Teorema de Existencia y Unicidad . . . 30
2.4.3. Ejemplos Prácticos Resueltos . . . 32
2.5. Envolventes y Soluciones Singulares . . . 38
2.5.1. ¿Qué es una Envolvente? (Intuición Geométrica) . . . 38
2.5.2. Cálculo de Envolventes . . . 38
2.5.3. Ejemplos de Envolventes en EDOs y EDPs . . . 40
2.6. Ecuación General de Primer Orden . . . 42
2.6.1. Planteamiento del Problema . . . 42
2.6.2. Conos de Monge . . . 42
2.6.3. Curvas Características (Franjas de Monge) . . . 43
2.6.4. Construcción de Superficies Integrales a través de Curvas Características . . . 44
2.6.5. Teorema de Existencia y Unicidad (Problema de Cauchy) . . . 45
2.7. Cálculo de Integrales Completas . . . 48
2.7.1. Conceptos Preliminares . . . 48
2.7.2. Casos Particulares de Resolución . . . 49
2.7.3. Ejercicio Resuelto: Superficies y Envolventes . . . 62
2.8. Ecuaciones de Pfaff y Método de Lagrange-Charpit . . . 63
2.8.1. Ecuaciones de Pfaff . . . 63
2.8.2. Métodos de Resolución de una Ecuación Integrable . . . 67
2.8.3. Interpretación de la Ecuación de Pfaff . . . 73
2.8.4. Método de Lagrange-Charpit . . . 75
2.9. Problemas Propuestos: Ecuaciones Cuasi-Lineales . . . 76

3. Clasificación EDP´s 2ºorden lineales **79**
3.1. Clasificación de las EDPs lineales de segundo orden . . . 79
3.1.1. Ecuaciones Características . . . 80
3.1.2. Clasificación . . . 80
3.2. El Problema de Cauchy para EDPs Lineales de Segundo Orden . . . 84
3.2.1. Ejemplos Preliminaresrate . . . 84
3.3. Teorema de Cauchy-Kowalevski (Enunciado Débil) . . . 87

3.3.1. Aplicación Práctica: Resolución por Series 88
3.4. Problema de Cauchy y Teorema de Cauchy-Kowalevski 89

Capítulo 1

Introducción a las EDPS

1.1. Tema 1: Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

1.1.1. Contexto General: Ecuaciones Funcionales

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) son un subconjunto de un campo más amplio: las ecuaciones funcionales, donde la incógnita no es un número, sino una función.

Tipos de Ecuaciones Funcionales

Ejemplo 1.1.1: Ecuaciones Algebraicas y de Intervalo

- **Ecuación de Cauchy:** Buscar $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

  Solución: $f(x) = cx$ (funciones lineales).

- **Ecuación de D'Alembert (Intervalo):** $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

  Solución: $f(x) = C$ (constante).

- **Ejercicio propuesto:** Hallar f continua tal que $f(x) + f(3x) = x$. (Pista: Iterando la relación se obtiene una serie geométrica).

Ejemplo 1.1.2: Ecuaciones en Diferencias Finitas

Relaciones de recurrencia del tipo:

$$x_{n+k} = F(n, x_{n+k-1}, \dots, x_n).$$

Describen evoluciones discretas (dinámica de poblaciones, algoritmos).

Ecuaciones Integrales

Aparecen cuando la incógnita está bajo el signo integral.

Definición 1.1.1: Ecuación de Volterra de 2ª Especie

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)\,dt$$

Donde $K(x,t)$ es el núcleo (kernel) y λ un parámetro.

Observación 1.1.1: Método de Resolución (Series de Neumann)

Se busca una solución en forma de serie de potencias respecto a λ:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots$$

Sustituyendo en la ecuación integral e igualando potencias de λ, obtenemos un sistema recursivo:

- $\varphi_0(x) = f(x)$.
- $\varphi_n(x) = \int_a^x K(x,t)\varphi_{n-1}(t)\,dt$.

Esto permite expresar la solución mediante núcleos iterados $K_n(x,t)$.
Ejemplo: Para $\varphi(x) = x - \int_0^x (t-x)\varphi(t)dt$, se puede comprobar que la solución es $\varphi(x) = \sin(x)$ (o similar según el núcleo exacto). En los apuntes se menciona $\varphi(x) = x - x^3/6$ como aproximación o solución a otro kernel.

1.1.2. Definiciones Básicas de EDPs

Sea $u = u(x_1, \dots, x_n) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función escalar.

Definición 1.1.2: Ecuación en Derivadas Parciales

Una EDP es una relación funcional del tipo:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots) = 0$$

donde aparecen las variables independientes, la función incógnita y sus derivadas parciales hasta un orden finito.

Definición 1.1.3: Notación

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad D^\alpha u.$$

Convenio: u_{xy} denota derivar primero respecto a una variable y luego la otra (según el Teorema de Schwarz, el orden no importa para funciones $\mathcal{C}^2$).

Definición 1.1.4: Orden de una EDP

El **orden** de una EDP es el orden de la derivada parcial más alta que aparece en la ecuación.

Ejemplo 1.1.3: Ejemplos de Orden

- $u_x - u_{xy} + u_{xxx} = 2u + x$. (Orden 3, variables x, y).
- $2x + 12y^2 - u_x + u_{yy} = 0$. (Orden 2).
- **Ecuación de Ondas:** $u_{xx} = u_{tt}$. (Orden 2). Una solución particular es $u(x,t) = \cos(x+2t) - e^{x-2t}$. La solución general es $u(x,t) = f(x+2t) + g(x-2t)$.

1.1.3. Clasificación según la Linealidad

Definición 1.1.5: 1. EDP Lineal

La ecuación es lineal respecto a la incógnita u y todas sus derivadas. Los coeficientes dependen solo de las variables independientes.

- Orden 1: $A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$.
- Orden 2: $\sum A_{ij}u_{x_i x_j} + \sum B_i u_{x_i} + Cu = D$.

Si $D = 0$, es **homogénea**.

Definición 1.1.6: 2. EDP Cuasi-Lineal

La ecuación es **lineal respecto a las derivadas de orden máximo**. Los coeficientes de estas derivadas pueden depender de las derivadas de orden inferior y de la propia u.

- Orden 1: $A(x,y,u)u_x + B(x,y,u)u_y = C(x,y,u)$.
- Orden 2: $A(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + \cdots = G(x,y,u,u_x,u_y)$.

Definición 1.1.7: 3. EDP No Lineal

Cualquier ecuación que no sea cuasi-lineal. Ejemplo: $(u_x)^2 + u_y = 1$ o la ecuación de Monge-Ampère $u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = f$.

Ejemplo 1.1.4: Clasificación Práctica

1. $u_x + 4u_y = u$. **(Lineal, Orden 1)**. Solución general: $u(x, y) = e^x g(4x - y)$.
2. $2xu_x + yu_y = 2x$. **(Lineal, Orden 1)**. Solución general: $u(x, y) = x + f(y^2/x)$.
3. $yu_x + (x - u)u_y = y$. **(Cuasi-Lineal, Orden 1)**. Solución implícita: $u = \frac{1}{x}(1 - y^2/2) + \lambda$ (a verificar).
4. $u_x^2 + u_y^2 = u^2$. **(No Lineal)**.

1.1.4. Métodos de Integración Directa

A diferencia de las EDOs donde la solución general depende de constantes arbitrarias $(C_1, \dots, C_m)$, en las EDPs la solución general depende de **funciones arbitrarias**. El número de funciones arbitrarias suele coincidir con el orden de la ecuación.

Casos Simples de Integración

- **Caso $u_y = 0$ (en $\mathbb{R}^2$):** Integramos respecto a y (tratando x como constante).
$$u(x, y) = \phi(x).$$
- **Caso $u_x = 0$ (en $\mathbb{R}^4$, $u(x, y, z, t)$):**
$$u(x, y, z, t) = \Phi(y, z, t).$$
- **Caso $u_{xy} = 0$:** Integramos respecto a x: $u_y(x, y) = \psi(y)$. Integramos respecto a y: $u(x, y) = \int \psi(y)dy + f(x)$.
$$u(x, y) = f(x) + g(y).$$
- **Caso $u_{xy} = f(x, y)$ (No homogénea):** Integrando sucesivamente:
$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{y_0}^{y} f(\tau, s)\, ds \right) d\tau + \Phi(x) + \Psi(y).$$

Integración Mixta

Para $u_{xy} = f(x, y)$ en un dominio convexo: 1. Integramos respecto a y:
$$u_x(x, y) - u_x(x, y_0) = \int_{y_0}^{y} f(x, s)\, ds \implies u_x(x, y) = \alpha(x) + \int_{y_0}^{y} f(x, s)\, ds.$$
2. Integramos respecto a x:
$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{y_0}^{y} f(\tau, s)\, ds \right) d\tau + \Phi(x) + \Psi(y).$$

Muchas EDPs lineales de coeficientes constantes pueden reducirse a una integración directa mediante un cambio de coordenadas adecuado.

Ejemplo 1.1.5: Caso General $\alpha u_x + \beta u_y = 0$

Proponemos el cambio $\xi = \beta x - \alpha y$ (curvas características) y $\eta = \beta x + \alpha y$ (o cualquier otra independiente). Siguiendo el proceso anterior, llegamos a que la derivada en la dirección transversal es nula, obteniendo:

$$u(x, y) = \phi(\beta x - \alpha y).$$

Nota: También se puede ver geométricamente: el gradiente ∇u es ortogonal a (α, β), por lo que u es constante en las líneas $\beta x - \alpha y = C$.

Ejemplo 1.1.6: Transporte Lineal con Coeficientes Constantes

Resolver $u_x + 4u_y = u$.
1. Cambio de Variable: Buscamos alinear una nueva coordenada con las curvas características.

$$\begin{cases} \xi = 4x + y \\ \eta = 4x - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{8}(\xi + \eta) \\ y = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{cases}$$

2. Regla de la Cadena:

$$u_x = u_\xi \cdot 4 + u_\eta \cdot 4$$

$$u_y = u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot (-1)$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(4u_\xi + 4u_\eta) + 4(u_\xi - u_\eta) = u \implies 8u_\xi = u.$$

3. Integración: Es una EDO en ξ: $\frac{u_\xi}{u} = \frac{1}{8} \implies \ln|u| = \frac{\xi}{8} + K(\eta)$.

$$u(\xi, \eta) = C(\eta)e^{\xi/8}.$$

4. Deshacer el cambio:

$$u(x, y) = C(4x - y)e^{(4x+y)/8} = C(4x - y)e^{x/2+y/8}.$$

(Nota: Se puede reabsorber parte de la exponencial en la función arbitraria si se desea simplificar).

Ejemplo 1.1.7: Problema de Cauchy

Si añadimos la condición inicial $u(x, 0) = \cos(x)$. Usando la forma general simplificada $u(x, y) = e^x \phi(4x - y)$ (otra variante válida del cambio):

$$u(x, 0) = e^x \phi(4x) = \cos(x) \implies \phi(4x) = e^{-x}\cos(x).$$

Haciendo $t = 4x \implies x = t/4$: $\phi(t) = e^{-t/4}\cos(t/4)$. Solución final:

$$u(x, y) = e^x \cdot e^{-(4x-y)/4} \cos\left(\frac{4x - y}{4}\right) = e^{y/4} \cos\left(x - \frac{y}{4}\right).$$

Ejemplo 1.1.8: Ecuación de Ondas

Para $u_{yy} = a^2 u_{xx}$, el cambio canónico es $\xi = x + ay, \eta = x - ay$. Esto transforma la ecuación en $u_{\xi\eta} = 0$, cuya solución es la fórmula de D'Alembert:

$$u(x, y) = f(x + ay) + g(x - ay).$$

1.1.5. Construcción de EDPs y Familias de Soluciones

Al igual que eliminando constantes en una familia n-paramétrica de curvas obtenemos una EDO de orden n, eliminando **funciones arbitrarias** obtenemos EDPs.

Ejemplo 1.1.9: Eliminación de función arbitraria

Sea la familia $u(x, y) = e^{\sqrt{2xy+f(x-y)}}$. Derivando respecto a x e y y operando para eliminar $f(x - y)$ y $f'(x - y)$, llegamos a la relación:

$$u_x + u_y = \frac{x + y}{\ln u} u \iff (x + y)u = (u_x + u_y) \ln u.$$

Soluciones Implícitas

Observación 1.1.2: Teorema de la Función Inversa (Aplicado a EDPs)

Sea $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ (por ejemplo, el cambio de coordenadas entre el espacio físico (x, y) y los parámetros característicos (t, s)).
Si en un punto $P_0 \in \Omega$ el Jacobiano es no nulo:

$$\det(J\Phi(P_0)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces existen entornos abiertos U de P_0 y V de $\Phi(P_0)$ tales que $\Phi : U \to V$ es una biyección con inversa $\Phi^{-1} : V \to U$ también de clase $\mathcal{C}^1$.

Observación 1.1.3: Teorema de la Función Implícita

Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1$ definida en un abierto, denotando los puntos como $(\mathbf{x}, z)$. Sea $(\mathbf{x}_0, z_0) \in \Omega$ un punto tal que:

1. $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$ (El punto está en la superficie).
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$ (Condición de no degeneración).

Entonces, existen entornos $U \subset \mathbb{R}^n$ de $\mathbf{x}_0$ y $W \subset \mathbb{R}$ de z_0, y una única función $g : U \to W$ de clase $\mathcal{C}^1$ tal que $g(\mathbf{x}_0) = z_0$ y satisface idénticamente:

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Las derivadas parciales de la función implícita $z = g(\mathbf{x})$ vienen dadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial F/\partial x_i}{\partial F/\partial z}.$$

Si la solución viene dada por $F(x, y, u) = 0$ (p.ej. $xu + y = \phi(yu + x)$), podemos hallar la EDP derivando implícitamente y eliminando ϕ'. Para garantizar que la relación define a $u(x, y)$, usamos el **Teorema de la Función Implícita**: Se requiere que $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ en el punto de estudio. Si esto se cumple, existe una única solución local $u(x, y)$ diferenciable, cuyas derivadas se obtienen derivando la identidad.

1.1.6. Reducción de EDPs a Sistemas de Primer Orden

Cualquier EDP de orden superior puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden (aunque aumenta el número de incógnitas). Este proceso es crucial para teoremas de existencia como el de Cauchy-Kovalevskaya.

Mecanismo de conversión: Dada una EDP de orden k para u, introducimos nuevas incógnitas para todas las derivadas parciales de orden hasta $k - 1$.

Ejemplo 1.1.10: Reducción de la Ecuación de Laplace/Calor

Sea $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t$ (Ecuación del calor inhomogénea o similar). Variables: x, y, z, t.
Incógnita original: u.
Definimos nuevas variables:

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_x, \quad u_3 = u_y, \quad u_4 = u_z.$$

El sistema de primer orden equivalente (y compatible) sería:

$$\begin{aligned}
(u_1)_x &= u_2 \\
(u_1)_y &= u_3 \\
(u_1)_z &= u_4 \\
(u_1)_t &= (u_2)_x + (u_3)_y + (u_4)_z \quad \text{(Sustituyendo en la EDP original)}
\end{aligned}$$

Además, se deben añadir las condiciones de compatibilidad (Schwarz) como $(u_2)_y = (u_3)_x$, etc., para cerrar el sistema.

1.1.7. El Problema de Cauchy (Introducción)

Consiste en hallar una solución particular que satisfaga ciertos datos iniciales.

Ejemplo 1.1.11: Resolución de un P.C.

$$\begin{cases} 5u_x + 6u_y = 0 \\ u(x, 0) = 2x^2 \end{cases}$$

1. Solución general: $u(x,y) = \phi(6x-5y)$. 2. Imponer condición inicial en $y=0$:

$$u(x,0) = \phi(6x) = 2x^2.$$

3. Identificar la función ϕ: Si llamamos $t = 6x \implies x = t/6$.

$$\phi(t) = 2\left(\frac{t}{6}\right)^2 = \frac{t^2}{18}.$$

4. Solución final:

$$u(x,y) = \frac{1}{18}(6x-5y)^2.$$

Ejemplo 1.1.12: Reducción de la Ecuación de Ondas

Sea $u_{yy} = a^2 u_{xx}$. Hacemos el cambio $\xi = x+ay, \eta = x-ay$. Calculamos las segundas derivadas y sustituimos. Los términos cruzados se simplifican y llegamos a la forma canónica:

$$u_{\xi\eta} = 0 \implies u = \phi(\xi) + \psi(\eta).$$

Solución general (D'Alembert): $u(x,y) = \phi(x+ay) + \psi(x-ay)$.

Ejemplo 1.1.13: Verificación y Obtención de la EDP

Sea la relación $xu + y = \phi(uy+x)$ donde $\phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. ¿Qué EDP satisface $u(x,y)$?
1. Derivamos implícitamente respecto a x:

$$u + xu_x = \phi'(uy+x)\cdot(u_x y + 1).$$

2. Derivamos implícitamente respecto a y:

$$xu_y + 1 = \phi'(uy+x)\cdot(u_y y + u).$$

3. Eliminamos el término arbitrario ϕ' dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{u+xu_x}{xu_y+1} = \frac{yu_x+1}{yu_y+u}.$$

Operando en cruz:

$$(u+xu_x)(u+yu_y) = (xu_y+1)(yu_x+1).$$

Desarrollando y simplificando se obtiene la EDP correspondiente.

Ejemplo 1.1.14: Obtención de EDP

Consideramos la EDP $u = h(x-uy)$
Derivamos respecto a x y y:

$$u_x = h'\cdot(1-u_x y) \implies h' = \frac{u_x}{1-u_x y}.$$

$$u_y = h'\cdot(-u-u_y y) \implies h' = \frac{u_y}{-u-u_y y}.$$

Igualamos las expresiones para h':

$$\frac{u_x}{1-u_x y} = \frac{u_y}{-u-u_y y}.$$

$$u_x(-u-u_y y) = u_y(1-u_x y) \implies -uu_x - yu_x u_y = u_y - yu_x u_y.$$

Simplificando y reordenando:

$$uu_x + u_y = 0.$$

Esta es la ecuación de Burgers sin viscosidad (en forma implícita).

1.2. Problemas Propuestos: Hoja 1 - Introducción

Ecuaciones Funcionales e Integrales

1. **(Ecuación funcional de Cauchy)** Encontrar las funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

   Como consecuencia, resolver estas otras ecuaciones funcionales:

   a) $g(xy) = g(x) + g(y)$ con $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua.

   b) $h(xy) = h(x)h(y)$, con $h : (0, \infty) \to (0, \infty)$ continua.

2. Encontrar todas las funciones continuas $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ que satisfacen la ecuación funcional:

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad x \in [0, 1].$$

3. *a*) Comprobar que la función $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ es solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)\, dt.$$

   b) Resolver la ecuación integral $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)\, dt$, reduciéndola previamente a una ecuación diferencial.

Clasificación y Verificación de Soluciones

4. Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando si es EDO o EDP. Determina el orden, linealidad, y variables dependientes/independientes:

   a) $x''(t) + 5x'(t) - 6x(t) = 2\cos(3t)$ (Vibraciones mecánicas).

   b) $x' = k(4-x)(1-x)$ (Velocidades de reacción química).

   c) $8\frac{d^4y}{dx^4} = x(1-x)$ (Deflexión de una viga).

   d) $y'' - 2xy' + 2py = 0$, $p \in \mathbb{R}$ (Ecuación de Hermite).

   e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (Ecuación de Laplace).

f) $\frac{dP}{dt} = KP(P-\alpha)$ (Curva logística).
g) $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial N}{\partial r} + KN$ (Fisión nuclear).
h) $\frac{d^2y}{dx^2} - \epsilon(1-y^2)\frac{dy}{dx} + 9y = 0$ (Ecuación de Van der Pol).
i) $\sqrt{1-\alpha y}\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} = 0$ (Ecuación de Kidder).

5. Verificar que las siguientes funciones (soluciones fundamentales) son solución de la ecuación correspondiente:

   a) $u = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \implies u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} = 0$ (Laplace 3D).
   b) $u = \ln\big(x^2+y^2\big) \implies u_{xx}+u_{yy} = 0$ (Laplace 2D).
   c) $u = \sqrt{\frac{\pi}{t}}e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \implies \alpha^2 u_{xx} = u_t$ (Calor).
   d) $u = f(x-at)+g(x+at) \implies a^2u_{xx} = u_{tt}$ (Ondas).

6. Comprobar que $u = e^x f(2x-y)$, donde f es una función derivable arbitraria, es solución de $u_x + 2u_y = u$.

7. Consideramos la EDP $u_t = u_{xx} + 2\operatorname{sech}^2(x)u$. Sea $v(t) = e^{k^2t}\sinh(kx)$ ó $v(t) = e^{k^2t}\cosh(kx)$. Comprobar que $u = v_x - \tanh(x)v$ satisface la ecuación.

8. Mostrar que la función:
$$u = \ln\left(\frac{2f'(x)g'(y)}{(f(x)+g(y))^2}\right)$$
donde $f, g \in \mathcal{C}^2$ con $f'(x)g'(y) > 0$, satisface la ecuación de Liouville $u_{xy} = e^u$.

9. Comprobar que $u = 4\arctan\Big(e^{ax+a^{-1}y}\Big)$ $(a \neq 0)$ satisface la ecuación de Sine-Gordon $u_{xy} = \sin u$.

10. Dada la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV): $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$.

    a) Comprobar que la función $u(x,t;a,c) = \frac{c}{2}\operatorname{sech}^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-a)\right)$ es solución.
    b) Si $u = f(x+ct)$ satisface la ecuación, probar que f cumple la EDO: $cy' + 6yy' + y''' = 0$. Mostrar que existe un valor de c tal que $f(r) = 2\operatorname{sech}^2 r$ es solución.

Construcción de EDPs y Cambios de Variable

11. Dada la familia de paraboloides $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - z = 0$, encontrar la EDP de primer orden que satisface eliminando los parámetros α, β.

12. Encontrar EDPs de primer orden satisfechas por las siguientes familias (a, b parámetros, h función arbitraria):

    a) $z = (x+a)(y+b)$
    b) $ax^2 + by^2 + z^2 = 1$
    c) $z = xy + h(x^2+y^2)$
    d) $z = h\left(\frac{xy}{z}\right)$

13. Considérese la ecuación lineal $f(x,y)u_x + g(x,y)u_y = a(x,y)u + b(x,y)$. Probar que el cambio de variables $v = x$, $w = w(x,y)$ (donde $w(x,y) = C$ es la solución general de $y' = g/f$) transforma la ecuación en $z_v = p(v,w)z + q(v,w)$.

14. Probar que $u(x,y) = yf(x) + g(x) + xh(y) + l(y)$ (con funciones arbitrarias de clase $\mathcal{C}^2$) es la solución general de $u_{xxyy} = 0$.

15. Con un cambio apropiado de coordenadas, resolver el problema de Cauchy ($u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} 2u_x - 3u_y = 0 \\ u(x,x) = e^{5x} \end{cases}$$

Capítulo 2

EDP´s de primer orden

2.1. Introducción. Modelo de advección. Familias biparamétricas

2.1.1. Recordatorio Preliminar: Regla de Leibniz

Antes de abordar las EDPs, recordemos un resultado fundamental del cálculo integral paramétrico que utilizaremos para deducir leyes de conservación.

Observación 2.1.1: Derivación bajo el signo integral (Regla de Leibniz)

Sea $f(\lambda, t)$ una función continua con derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ continua en un dominio $L \times [a, b]$.

- Si los límites son constantes:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, t)\, dt \implies F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt.$$

- **Caso General (Límites variables):** Si los límites de integración dependen del parámetro, $\Psi(\lambda)$ y $\varphi(\lambda)$, definimos $G(\lambda) = \int_{\varphi(\lambda)}^{\Psi(\lambda)} f(\lambda, t)\, dt$. Entonces:

$$\frac{dG}{d\lambda} = \int_{\varphi(\lambda)}^{\Psi(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t)\, dt + f(\lambda, \Psi(\lambda))\Psi'(\lambda) - f(\lambda, \varphi(\lambda))\varphi'(\lambda).$$

2.1.2. Aplicación: El Modelo de Advección

Consideremos un problema físico de transporte en una dimensión.

- $u(x, t)$: Concentración de una sustancia (contaminante) en la posición x y tiempo t.
- c: Velocidad constante del fluido (arrastre).
- **Hipótesis:** No hay difusión (el contaminante no se crea, ni se destruye, ni se dispersa; solo se traslada).

Observación 2.1.2: Deducción de la Ecuación de Advección

Consideremos un tramo arbitrario $[0, b]$. La cantidad total de sustancia en el instante t es $\int_0^b u(x,t)\,dx$. Tras un intervalo de tiempo h, el fluido se ha desplazado una distancia ch. Por la ley de conservación de la masa:

$$\underbrace{\int_0^b u(x,t)\,dx}_{\text{Masa en } t} = \underbrace{\int_{ch}^{b+ch} u(x,t+h)\,dx}_{\text{Masa desplazada en } t+h}$$

Definimos la función auxiliar $E(h) = \int_{ch}^{b+ch} u(x,t+h)\,dx - \int_0^b u(x,t)\,dx \equiv 0$. Derivamos respecto a h en $h = 0$ usando la regla de Leibniz:

$$\frac{d}{dh}\left(\int_{ch}^{b+ch} u(x,t+h)\,dx\right)\Bigg|_{h=0} = \int_0^b \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx + c\cdot u(b,t) - c\cdot u(0,t) = 0.$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo ($u(b,t) - u(0,t) = \int_0^b u_x(x,t)dx$):

$$\int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x}\right) dx = 0.$$

Como el intervalo $[0, b]$ es arbitrario, el integrando debe ser nulo, obteniendo la **Ecuación del Transporte o Advección**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

Observación 2.1.3: Solución General

Sabemos que la solución general es de la forma $u(x,t) = f(x - ct)$. Si imponemos una condición inicial $u(x,0) = u_0(x)$, la solución única es $u(x,t) = u_0(x - ct)$.

2.2. Familias Biparamétricas de Curvas

Consideremos un sistema que define una familia de curvas en el espacio, dependiente de dos parámetros C_1 y C_2:

$$\begin{cases} F(x,y,z,C_1,C_2) = 0 \\ G(x,y,z,C_1,C_2) = 0 \end{cases}$$

donde:

- $(x,y,z) \in \Omega$, siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto.
- C_1, C_2 son constantes arbitrarias.
- $F, G \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathcal{A})$, con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ el dominio de los parámetros.

Supongamos que un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ satisface ambas ecuaciones.

- **Definición de curva:** Podemos definir una curva localmente (por ejemplo, en forma paramétrica con parámetro x) si el Jacobiano respecto a y, z es no nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} x = x \\ y = \psi_1(x, C_1, C_2) \\ z = \psi_2(x, C_1, C_2) \end{cases} \qquad \text{(en un entorno de } x_0\text{)}$$

- **Inversión de parámetros:** Se pueden despejar las constantes C_1 y C_2 en función de las coordenadas si el Jacobiano respecto a los parámetros es no nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial C_1} & \frac{\partial F}{\partial C_2} \\ \frac{\partial G}{\partial C_1} & \frac{\partial G}{\partial C_2} \end{vmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} C_1 = f(x, y, z) \\ C_2 = g(x, y, z) \end{cases} \qquad \text{(en un entorno de } P\text{)}$$

Generación de Superficies

En la familia biparamétrica, seleccionamos una subfamilia imponiendo una relación funcional (familia monoparamétrica):

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \quad \text{o bien} \quad C_2 = \Psi(C_1).$$

Estas curvas, al moverse en el espacio, generan una superficie. Sustituyendo las expresiones obtenidas para los parámetros:

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= f(x, y, z) \\ C_2 &= g(x, y, z) \\ \Phi(C_1, C_2) &= 0 \end{aligned}\right\} \implies \boxed{\Phi(f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0}$$

Observación 2.2.1: Interpretación Geométrica

La ecuación obtenida $\Phi(f, g) = 0$ representa el conjunto de superficies generadas por las curvas de la familia monoparamétrica $\Phi(C_1, C_2) = 0$.

Definición 2.2.1: Terminología

- Las curvas de la familia monoparamétrica que forman la superficie se llaman **curvas generatrices** o **características**.
- En contraposición, una curva se denomina **directriz** si no es una generatriz, pero tiene la propiedad de que **todas las generatrices pasan por ella** (intersecan a la directriz).

Si seleccionamos una subfamilia imponiendo una relación funcional entre los parámetros, digamos $\Phi(C_1, C_2) = 0$ (o $C_2 = \Psi(C_1)$), generamos una superficie.

Ejemplos de construcción de superficies

Ejemplo 2.2.1: Conos (Haces de rectas)

Consideramos la familia de rectas que pasan por el origen:

$$\begin{cases} C_2x - C_1y = 0 \implies C_2 = C_1\frac{y}{x} \\ x - C_1z = 0 \implies C_1 = \frac{x}{z} \end{cases}$$

Despejando los parámetros: $C_1 = \frac{x}{z}$ y $C_2 = \frac{y}{z}$. Cualquier relación $\Phi(C_1, C_2) = 0$ genera una superficie cónica de la forma $\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$.

Ejemplo 2.2.2: Hiperboloide (Superficie de Revolución)

Sea la familia:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - C_1 = 0 \implies C_1 = x^2 + y^2 \\ z - C_2 = 0 \implies C_2 = z \end{cases}$$

Queremos hallar la superficie integral que tiene como **directriz** la curva $\gamma : \{x = z, y = 1\}$.

1. Evaluamos los parámetros sobre la directriz γ:
$$C_1 = x^2 + 1 = z^2 + 1, \quad C_2 = z.$$
2. Buscamos la relación entre C_1 y C_2:
$$C_1 = C_2^2 + 1 \implies \Phi(C_1, C_2) = C_1 - C_2^2 - 1 = 0.$$
3. Sustituimos C_1, C_2 por sus funciones originales $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$:
$$(x^2 + y^2) - z^2 - 1 = 0 \implies x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

El resultado es un hiperboloide de una hoja.

2.2.1. Relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden

A continuación, pondremos en relación estas familias biparamétricas de curvas con ciertas EDPs.

Dada $\Phi(f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0$ una superficie engendrada por el haz, supongamos que $f, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Aplicando el Teorema de la Función Implícita obtenemos $z = u(x, y)$. Derivamos respecto a x e y:

$$\begin{cases} \frac{\partial\Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \\ \frac{\partial\Phi}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial\Phi}{\partial g}\left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0 \end{cases}$$

Si queremos que haya soluciones no triviales para (Φ_f, Φ_g), imponemos que el determinante del sistema sea cero:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y agrupando términos mediante los Jacobianos $\frac{D(f,g)}{D(\cdot,\cdot)}$, obtenemos:

$$\frac{D(f,g)}{D(y,z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{D(f,g)}{D(z,x)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(f,g)}{D(x,y)}$$

Observación 2.2.2: Interpretación Vectorial

Esta es la **EDP asociada** a la familia $\Phi(f,g) = 0$. Se puede reescribir como producto escalar:

$$\vec{V} \cdot \vec{N} = 0$$

donde:

- $\vec{N} = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$ es el vector normal a la superficie $z = u(x,y)$.
- $\vec{V} = (a,b,c) = \left(\frac{D(f,g)}{D(y,z)}, \frac{D(f,g)}{D(z,x)}, \frac{D(f,g)}{D(x,y)}\right)$ es el vector tangente.

Esto expresa la condición común que deben satisfacer los planos tangentes: el vector $\vec{V}$ es tangente a las superficies generadas por el haz.

Proposición 2.2.1: La EDP Lineal/Cuasilineal

Desarrollando el determinante anterior, obtenemos una ecuación de la forma:

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z) \tag{2.2}$$

donde los coeficientes a, b, c vienen dados por los Jacobianos de la transformación:

$$a = \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}, \quad b = \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}, \quad c = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}.$$

Observación 2.2.3: Interpretación Geométrica

La ecuación anterior se puede escribir como producto escalar:

$$(a,b,c) \cdot (p,q,-1) = 0 \iff \vec{V} \cdot \vec{N} = 0.$$

Esto significa que el campo vectorial $\vec{V} = (a,b,c)$ es **tangente** a la superficie integral en todo punto. Las curvas integrales de este campo $\vec{V}$ son precisamente las características.

2.3. Ecuaciones Cuasi-Lineales de Primer Orden (EQL)

2.3.1. Definición y Estructura

Como vimos anteriormente, al desarrollar el determinante de la familia biparamétrica, obtenemos una estructura común para las ecuaciones de primer orden.

Definición 2.3.1: Ecuación Cuasi-Lineal (EQL)

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden se dice **cuasi-lineal** si es lineal respecto a las derivadas parciales de la función incógnita $z(x, y)$. Su forma general es:

$$a(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z)\frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z) \tag{2.3}$$

donde los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ están definidos en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Se asume la condición de no degeneración $|a| + |b| \neq 0$ en Ω.

Buscamos una solución $z = \phi(x, y)$ definida en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tal que su gráfico $\mathcal{S} = \{(x, y, \phi(x, y)) : (x, y) \in D\}$ esté contenido en Ω y satisfaga la ecuación idénticamente.

Observación 2.3.1: Carácter Local de la solución

Dos soluciones (ϕ_1, Ω_1) y (ϕ_2, Ω_2), diremos que son iguales si se cumple que $\phi_1|_{\Omega_1\cap\Omega_2} = \phi_2|_{\Omega_1\cap\Omega_2}$
La función incógnita se podrá poner en forma de superficie poniendo $z = \phi(x, y)$.

Definición 2.3.2: Superficie Integral

A la solución de (2.3) le llamaremos **superficie integral de la EQL**

2.3.2. Interpretación Geométrica

Los coeficientes de la EQL definen un campo vectorial en Ω:

$$\vec{V}(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)).$$

Sabemos que un vector normal a la superficie integral $z = \phi(x, y)$ es:

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, -1\right).$$

La ecuación diferencial se puede reescribir como un producto escalar:

$$a\frac{\partial \phi}{\partial x} + b\frac{\partial \phi}{\partial y} - c = 0 \iff (a, b, c) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, -1\right) = 0 \iff \vec{V} \cdot \vec{N} = 0.$$

Observación 2.3.2: Condición de Tangencia

La condición $\vec{V} \cdot \vec{N} = 0$ implica que el vector normal $\vec{N}$ en cualquier punto P de la superficie integral es perpendicular al vector $\vec{V}$. Por tanto, $\vec{V} = (a, b, c)$ es un vector

tangente a la superficie integral en todo punto. Esto sugiere que las superficies integrales están "tejidas"por curvas que son tangentes al campo $\vec{V}$. Este campo de vectores tangentes a la superficie integral son las **direcciones características** que dan lugar a las **curvas características.**

2.3.3. Construcción de las Curvas Características

Nos preguntamos: **¿Cómo construimos analíticamente estas curvas?**

Sea γ una curva integral parametrizada por $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\gamma : I \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

cuyo vector tangente en cada punto es $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Condición de Paralelismo

Para que γ sea una curva característica, su vector tangente debe ser paralelo al campo vectorial de coeficientes $\vec{V} = (a, b, c)$ en todo punto.

$$\gamma'(t) \parallel \vec{V}(\gamma(t)) \implies (x', y', z') = \lambda(t) \cdot (a, b, c)$$

Esto se expresa tradicionalmente mediante la igualdad de razones:

$$\frac{x'}{a(x,y,z)} = \frac{y'}{b(x,y,z)} = \frac{z'}{c(x,y,z)} = \lambda(t)$$

Observación 2.3.3: Reparametrización y el Sistema (SC)

En la ecuación anterior aparece un factor de proporcionalidad $\lambda(t)$. Sin embargo, mediante una **reparametrización conveniente** del parámetro t, podemos conseguir que el parámetro de proporcionalidad sea $\lambda(t) = 1$. De este modo, buscamos una curva cuyo vector tangente sea **justamente** (a, b, c).

Esto nos lleva directamente al **Sistema Característico (SC)** de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$(SC) \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(x,y,z) \\ \dfrac{dy}{dt} = b(x,y,z) \\ \dfrac{dz}{dt} = c(x,y,z) \end{cases} \tag{2.4}$$

Teorema 2.3.1: Existencia y Unicidad de la Curva

Si los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, podemos aplicar la teoría general de EDOs (Teorema de Picard-Lindelöf).
Dado un punto inicial $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, si imponemos las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

entonces el sistema tiene **solución única**.
Conclusión: Por cada punto $P \in \Omega$ pasa una **única** curva característica (salvo reparametrización).

Definición 2.3.3: Sistema Característico

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva en el espacio. Diremos que es una **curva característica** de la EQL si su vector tangente es paralelo al campo de coeficientes (a, b, c). Esto nos lleva al sistema de EDOs autónomo:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x, y, z) \\ y'(t) = b(x, y, z) \\ z'(t) = c(x, y, z) \end{cases} \tag{2.5}$$

En notación de diferenciales, esto equivale a la condición de paralelismo:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Construcción de la Solución General

Para resolver el sistema característico, buscamos dos integrales primeras independientes funcionales, $K_1(x, y, z) = C_1$ y $K_2(x, y, z) = C_2$, constantes sobre las curvas características. La solución general de la EQL se expresa como una relación arbitraria entre estas constantes:

$$\Phi(K_1, K_2) = 0 \quad \text{o bien} \quad K_2 = \Psi(K_1).$$

Proposición 2.3.1: Esquema Resumen: Resolución de EQL

El procedimiento general para resolver una ecuación cuasi-lineal $au_x + bu_y = c$ mediante el método de las características se resume en el siguiente flujo:

1. Ecuación Original (EQL)	$\xrightarrow{\text{Asociar}}$	**Sistema Característico (EDOs)** $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x,y,z) \\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,z) \\ \frac{dz}{dt} = c(x,y,z) \end{cases}$
2. Integración (Sin cond. iniciales)	$\xrightarrow{\text{Resolver}}$	**Solución Paramétrica General** $\begin{cases} x = X(t,c_1,c_2,c_3) \\ y = Y(t,c_1,c_2,c_3) \\ z = Z(t,c_1,c_2,c_3) \end{cases}$
3. Obtención de Invariantes (Eliminar cte. arbitraria)	$\xrightarrow[\text{el parámetro } t]{\text{Eliminar}}$	**Integrales Primeras (Haz)** $\begin{cases} K_1(x,y,z) = C_1 \\ K_2(x,y,z) = C_2 \end{cases}$
4. Solución General (Familia monoparamétrica)	$\xrightarrow[\text{Implícita}]{\text{Relación}}$	**Superficie Integral** $\boxed{\Phi(K_1,K_2)=0}$ o $K_2 = \Psi(K_1)$

Interpretación: Lo que ocurre geométricamente es que la unión de estas curvas características "genera"la superficie solución Σ.

Observación 2.3.4: ¿Por qué tenemos que eliminar el parámetro t?

Cuando resolvemos el sistema, obtenemos una curva característica parametrizada por t:

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), u(t))$$

Esta es una línea unidimensional en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, la solución de una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) de dos variables, $u(x,y)$, representa una **superficie** (una variedad de dimensión 2).
El parámetro t te dice en qué punto de la curva estás. Pero para definir una superficie, no te interesa saber çuándo"pasaste por un punto, sino **qué puntos pertenecen a la forma geométrica**.
Eliminar t es, esencialmente, proyectar o colapsar la información temporal para quedarte solo con la traza geométrica de las características en el espacio (x,y,u).
Veámoslo de la siguiente manera: los invariantes

$$K_1(x,y,u) = C_1 \quad \text{y} \quad K_2(x,y,u) = C_2$$

son funciones que permanecen constantes a lo largo de cada trayectoria característica.
Si te mueves sobre una característica, t cambia, pero K_1 y K_2 no. Por lo tanto, K_1 y K_2 actúan como etiquetas o nombres para cada curva.

- Si dejas t, estás describiendo el movimiento **dentro** de una curva.

- Si eliminas t y buscas una relación $\Phi(K_1, K_2) = 0$, estás seleccionando un **haz de curvas** que, juntas, tejen la superficie integral Σ.

Para definir un punto en una superficie en $\mathbb{R}^3$, necesitas 2 grados de libertad. En el método de las características, estos suelen ser:

- t**:** El parámetro que te mueve a lo largo de la curva.
- s**:** Un parámetro que te mueve de una curva a otra (normalmente introducido por la curva directriz γ).

La solución final $u(x, y)$ debe ser una función que dependa únicamente de las coordenadas espaciales x e y. Si t permaneciera en la ecuación, u sería una función de (x, y, t), lo cual carece de sentido para el problema original, ya que t es una variable auxiliar que nosotros inventamos para convertir la EDP en un sistema de EDOs.

2.3.4. Relación entre Características y Superficies Integrales

Teorema 2.3.2: Propiedad Fundamental de las Superficies Integrales

Toda superficie integral S, dada por $z = \phi(x, y)$, de la ecuación cuasi-lineal (EQL) está generada por curvas características. Es decir, si un punto $P_0 \in S$, la curva característica que pasa por P_0 está contenida enteramente en la superficie S.

Demostración. Sea $z = \phi(x, y)$ una solución de la ecuación cuasi-lineal definida en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie S, de modo que $z_0 = \phi(x_0, y_0)$.

Consideramos la **curva característica** $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida por el sistema característico:

$$(SC) \quad \begin{cases} x'(t) = a(x, y, z) \\ y'(t) = b(x, y, z) \\ z'(t) = c(x, y, z) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Sabemos que esta solución es **única** en un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Definimos la **función desviación** $U(t)$ como la diferencia entre la coordenada z de la curva y el valor de la superficie en ese punto $(x(t), y(t))$:

$$U(t) := z(t) - \phi(x(t), y(t)), \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Paso 1: Condición Inicial. Evaluamos en t_0:

$$U(t_0) = z(t_0) - \phi(x(t_0), y(t_0)) = z_0 - \phi(x_0, y_0) = 0,$$

ya que el punto P_0 pertenece a la superficie por hipótesis.

Paso 2: Derivada Temporal. Derivamos $U(t)$ respecto a t aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dU}{dt} = z'(t) - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t)\right].$$

Sustituimos las expresiones del sistema característico ($x' = a, y' = b, z' = c$):

$$\frac{dU}{dt} = c(x, y, z) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot a(x, y, z) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot b(x, y, z).$$

Como $z(t) = U(t) + \phi(x(t), y(t))$, sustituimos z para convertirla en una ecuación autónoma en U:

$$\frac{dU}{dt} = c(x, y, U + \phi) - a(x, y, U + \phi)\phi_x - b(x, y, U + \phi)\phi_y = F(t, U). \tag{2.6}$$

Como los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1$, la función $F(t, U)$ es Lipschitziana respecto a U.

Paso 3: Aplicación del Teorema de Unicidad. Consideramos el Problema de Valor Inicial para U:

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = F(t, U) \\ U(t_0) = 0 \end{cases}$$

Nos preguntamos: **¿Es $V(t) \equiv 0$ una solución?** Sustituimos $V = 0$ en la ecuación diferencial (2.6):

$$\frac{dV}{dt} \stackrel{?}{=} c(x, y, \phi) - a(x, y, \phi)\phi_x - b(x, y, \phi)\phi_y.$$

El lado derecho es **exactamente cero** porque $z = \phi(x, y)$ es solución de la EQL ($a\phi_x + b\phi_y = c$).

Por tanto, $V(t) = 0$ es solución. Por el **Teorema de Picard-Lindelöf** (Existencia y Unicidad de EDOs), es la **única** solución.

Conclusión:

$$U(t) \equiv 0 \implies z(t) - \phi(x(t), y(t)) = 0 \implies z(t) = \phi(x(t), y(t)).$$

Esto significa que la curva característica $\gamma(t)$ permanece siempre sobre la superficie integral S. $\square$

Teorema 2.3.3: Generación de Superficies

1. Si una superficie $\mathcal{S}$ está generada por una familia uniparamétrica de curvas características, entonces $\mathcal{S}$ es una superficie integral de la EQL.

2. Recíprocamente, toda superficie integral $\mathcal{S}$ de la EQL está generada por curvas características. (Si un punto está en la superficie, toda la curva característica que pasa por él está contenida en la superficie).

Proposición 2.3.2: Intersección de Soluciones

Si dos superficies integrales $\mathcal{S}_1$ y $\mathcal{S}_2$ tienen un punto P en común, entonces comparten la curva característica entera que pasa por P. Recíprocamente, si dos superficies integrales se cortan transversalmente a lo largo de una curva Γ, entonces Γ es necesariamente una curva característica.

2.4. El Problema de Cauchy para Ecuaciones Cuasi-Lineales

Del conjunto infinito de soluciones de la Ecuación Cuasi-Lineal (EQL), queremos seleccionar una específica. Para ello, imponemos una condición geométrica adicional.

2.4.1. Planteamiento del Problema

Consideramos una curva Γ en el espacio, denominada **curva directriz** o curva de datos iniciales. Parametrizamos esta curva en función de $s \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}$$

donde f, g, h son funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno de s_0.

Definición 2.4.1: Problema de Cauchy (PC)

El problema consiste en encontrar una superficie integral $z = u(x, y)$ de la ecuación:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

tal que contenga a la curva Γ. Es decir, que se cumpla la condición de compatibilidad:

$$h(s) = u(f(s), g(s)), \quad \forall s \in I.$$

Ejemplo 2.4.1: Caso Particular (Condición Inicial Clásica)

Si la curva directriz está sobre el plano $y = 0$ (o $x = 0$), el problema suele presentarse como:

$$\begin{cases} \text{(EQL)} \\ u(x, 0) = \rho(x) \end{cases} \implies \Gamma : \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = \rho(s) \end{cases}$$

2.4.2. Teorema de Existencia y Unicidad

El siguiente resultado nos da las condiciones para asegurar que el problema tiene solución y que esta es única en un entorno local.

Teorema 2.4.1: Existencia y Unicidad Local

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Consideramos el problema de Cauchy (PC) bajo las siguientes hipótesis:

1. **Regularidad de la Ecuación:** Los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.
2. **Regularidad de la Curva:** Las funciones $f, g, h \in \mathcal{C}^1(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ con $\delta > 0$, tales que:
$$f(s_0) = x_0, \quad g(s_0) = y_0, \quad h(s_0) = z_0.$$
3. **Condición de Transversalidad:** En el punto P_0 (correspondiente a s_0), el vector tangente a la proyección de la curva directriz (f', g') **no es paralelo** al vector característico base (a, b). Esto se expresa mediante el determinante:
$$\Delta(s_0) = \begin{vmatrix} a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.7}$$

Conclusión: Entonces, el Problema de Cauchy tiene **solución única** $z = u(x, y)$ definida en un entorno U del punto (x_0, y_0).

Observación 2.4.1: Interpretación Geométrica de la Transversalidad

La condición $\Delta \neq 0$ implica que la proyección de la curva inicial Γ sobre el plano XY **no es tangente** a las curvas características proyectadas (curvas base).

- Si $\Delta \neq 0$: Las características .ªtraviesan"la curva inicial, generando una superficie bien definida.
- Si $\Delta = 0$ en un punto: La curva inicial es tangente a una característica. El Teorema de la Función Inversa falla y no podemos despejar los parámetros.
- Si Γ es ella misma una curva característica: El problema puede tener infinitas soluciones o ninguna (dependiendo de la compatibilidad).

(Demostración Constructiva)

Consideramos la parametrización obtenida al resolver el sistema característico:

$$\begin{cases} X = X(t, s) \\ Y = Y(t, s) \\ Z = Z(t, s) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales en $t = 0$: $X(0, s) = f(s)$, $Y(0, s) = g(s)$, $Z(0, s) = h(s)$.

Sabemos que X, Y, Z satisfacen las ecuaciones características:
$$\frac{\partial X}{\partial t} = a(X, Y, Z), \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = b(X, Y, Z), \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = c(X, Y, Z).$$

Gracias a la condición de transversalidad, en un entorno de la curva inicial existe la transformación inversa:
$$t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

Definimos $u(x,y) = Z(T(x,y), S(x,y))$.

Verificación de la EDP. Queremos comprobar que $au_x + bu_y = c$. Derivamos u respecto a x e y usando la regla de la cadena:

$$u_x = \frac{\partial Z}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial Z}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial S}\frac{\partial S}{\partial y}.$$

Para hallar las parciales de T y S, diferenciamos las identidades $x = X(T(x,y), S(x,y))$ e $y = Y(T(x,y), S(x,y))$ respecto a x:

$$\begin{cases} 1 = X_t T_x + X_s S_x \\ 0 = Y_t T_x + Y_s S_x \end{cases}$$

Resolvemos este sistema lineal para T_x y S_x usando la Regla de Cramer. El determinante del sistema es el Jacobiano $J = X_t Y_s - X_s Y_t$ (que es no nulo por transversalidad).

$$T_x = \frac{Y_s}{J}, \quad S_x = \frac{-Y_t}{J}.$$

Análogamente, derivando respecto a y:

$$T_y = \frac{-X_s}{J}, \quad S_y = \frac{X_t}{J}.$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación original $au_x + bu_y$:

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= X_t \left(Z_t \frac{Y_s}{J} + Z_s \frac{-Y_t}{J} \right) + Y_t \left(Z_t \frac{-X_s}{J} + Z_s \frac{X_t}{J} \right) \\ &= \frac{1}{J} [X_t Z_t Y_s - X_t Z_s Y_t - Y_t Z_t X_s + Y_t Z_s X_t] \\ &= \frac{1}{J} [Z_t (X_t Y_s - Y_t X_s) + Z_s (Y_t X_t - X_t Y_t)] \\ &= \frac{1}{J} [Z_t \cdot J + 0] = Z_t. \end{aligned}$$

Como $Z_t(t,s) = c(X,Y,Z)$, concluimos que $au_x + bu_y = c$. □

2.4.3. Ejemplos Prácticos Resueltos

Ejemplo 2.4.2: Resolución de un Problema de Cauchy (Tres Enfoques)

Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_x + yu_y = 0 \\ u(0,y) = f(y), \quad \text{donde } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

1. Método del Sistema Característico (Directo)

Planteamos el sistema de EDOs asociado a los coeficientes $(1, y, 0)$:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \implies x(t) = t + c_1 \\ y'(t) = y \implies y(t) = c_2 e^t \\ z'(t) = 0 \implies z(t) = c_3 \end{cases}$$

Queremos que la curva pase por un punto genérico de la curva inicial $(0, y_0, f(y_0))$ en $t = 0$:

- $x(0) = 0 \implies c_1 = 0 \implies x = t.$
- $y(0) = y_0 \implies c_2 = y_0 \implies y = y_0 e^t.$
- $z(0) = f(y_0) \implies c_3 = f(y_0) \implies z = f(y_0).$

Eliminamos el parámetro t y la constante y_0:

$$t = x \implies y = y_0 e^x \implies y_0 = ye^{-x}.$$

Sustituyendo en la ecuación de z:

$$z = f(y_0) \implies \boxed{u(x, y) = f(ye^{-x})}.$$

Estudio de la Unicidad (Transversalidad): Comprobamos la condición sobre la curva inicial parametrizada como $x = 0, y = s$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Como el determinante es distinto de cero, tenemos todas las hipótesis para asegurar **Existencia y Unicidad**.

---

2. Método de los Invariantes (Solución General)
Buscamos la relación entre y y x eliminando dt:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} \implies \int dy/y = \int dx \implies \ln|y| = x + C \implies ye^{-x} = C_1.$$

Para z, tenemos $dz = 0 \implies z = C_2$.
La solución general es de la forma $z = \phi(C_1)$, es decir:

$$u(x, y) = \phi(ye^{-x}).$$

Aplicamos la condición inicial $u(0, y) = f(y)$:

$$f(y) = \phi(y \cdot e^0) \implies \phi(y) = f(y).$$

Por tanto, la solución es $u(x, y) = f(ye^{-x})$.

---

3. Método Constructivo (Parametrización Completa)
Usando la demostración del Teorema de Cauchy. Parametrizamos la curva inicial como $\Gamma(s) : (0, s, f(s))$. Resolvemos el sistema característico con condiciones $x(0) = 0, y(0) = s, z(0) = f(s)$:

$$\begin{cases} x(t, s) = t \\ y(t, s) = se^t \\ z(t, s) = f(s) \end{cases}$$

Invertimos el cambio de variables (despejamos s y t en función de x, y):

- De la primera ec.: $t = x$.
- De la segunda ec.: $y = se^x \implies s = ye^{-x}$.

Sustituimos en $z(t, s)$:

$$z = f(s) \implies \boxed{u(x, y) = f(ye^{-x})}.$$

Ejemplo 2.4.3: Coeficientes Variables

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = xy \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

Nota: Asumimos $yu_x + xu_y = xy$ basándonos en las características $x' = y, y' = x, z' = xy$.

1. **Curvas características:**
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy}$$
De la primera igualdad: $xdx = ydy \implies x^2 - y^2 = C_1$. De $\frac{dz}{xy} = \frac{dy}{x} \implies dz = ydy \implies z = \frac{y^2}{2} + C_2 \implies C_2 = z - \frac{y^2}{2}$.
2. **Solución General:** $z - \frac{y^2}{2} = \phi(x^2 - y^2) \implies z = \frac{y^2}{2} + \phi(x^2 - y^2)$.
3. **Condición Inicial:** $u(x, 0) = x^2$. Sustituimos $y = 0, z = x^2$:
$$x^2 = 0 + \phi(x^2) \implies \phi(\mu) = \mu.$$
4. **Solución Particular:**
$$z = \frac{y^2}{2} + (x^2 - y^2) = x^2 - \frac{y^2}{2}.$$

Ejemplo 2.4.4: Rotación (Círculos característicos)

Hallar la superficie integral de $xu_y - yu_x = 0$ que pasa por la curva $x = 0, z = y^2$.
Resolución:

- Características: $x' = -y$, $y' = x \implies x(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t$. Invariante geométrico: $xx' + yy' = -xy + yx = 0 \implies x^2 + y^2 = C_1$.
- Ecuación para z: $z' = 0 \implies z = C_2$.
- Solución General: $z = \phi(x^2 + y^2)$.
- Aplicando $x = 0, z = y^2$: $y^2 = \phi(y^2) \implies \phi(r) = r$.
- Solución: $u(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloide de revolución).

Ejemplo 2.4.5: Resolución Constructiva: Ecuación No Homogénea

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} xu_x + 2yu_y = u + x^2 \\ u(x,x) = 0 \quad \text{(Sobre la recta } y = x) \end{cases}$$

1. Identificación y Parametrización

- Coeficientes: $a(x,y,u) = x$, $b(x,y,u) = 2y$, $c(x,y,u) = u + x^2$.
- Curva inicial Γ: $x = s$, $y = s$, $z = 0$ (pues $u(s,s) = 0$).

2. Condición de Transversalidad Evaluamos el determinante Jacobiano de la proyección en $t = 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(x_0,y_0) & b(x_0,y_0) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & 2y_0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_0 - 2y_0.$$

Como estamos sobre la recta $y = x$, tenemos $\Delta = x_0 - 2x_0 = -x_0$.

Observación 2.4.2: OJO

El determinante es distinto de cero si $x_0 \neq 0$. Por tanto, existe solución única en un entorno de cualquier punto de la recta inicial, excepto en el origen $(0,0)$.

3. Sistema Característico

$$\begin{cases} x' = x \implies x(t) = c_1 e^t \\ y' = 2y \implies y(t) = c_2 e^{2t} \\ z' = z + x^2 \implies z' - z = (c_1 e^t)^2 = c_1^2 e^{2t} \end{cases}$$

Para la ecuación de z, resolvemos la EDO lineal:

- Solución homogénea ($z' - z = 0$): $z_h = c_3 e^t$.
- Solución particular ($z_p = Ae^{2t}$): $2Ae^{2t} - Ae^{2t} = c_1^2 e^{2t} \implies A = c_1^2$.
- Solución general: $z(t) = c_3 e^t + c_1^2 e^{2t}$.

4. Aplicación de Condiciones Iniciales ($t = 0$) Imponemos que la curva pase por $\Gamma(s)$ en $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = s \\ y(0) = c_2 = s \\ z(0) = c_3 + c_1^2 = 0 \implies c_3 + s^2 = 0 \implies c_3 = -s^2 \end{cases}$$

Sustituyendo las constantes, obtenemos la superficie paramétrica:

$$\begin{cases} x(t,s) = se^t \\ y(t,s) = se^{2t} \\ z(t,s) = -s^2 e^t + s^2 e^{2t} \end{cases}$$

5. Inversión y Solución Final Necesitamos despejar s y t (o e^t) en función de x, y. Observamos las ecuaciones de x e y:

$$\frac{y}{x} = \frac{se^{2t}}{se^t} = e^t \implies \boxed{e^t = \frac{y}{x}}$$

Sustituyendo e^t en la ecuación de x:

$$x = s\left(\frac{y}{x}\right) \implies \boxed{s = \frac{x^2}{y}}$$

Finalmente, sustituimos s y e^t en la expresión de z:

$$\begin{aligned} z &= -s^2 e^t + s^2 e^{2t} \\ &= -\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ &= -\frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y}{x} + \frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} \\ &= -\frac{x^3}{y} + x^2 \end{aligned}$$

Solución: $\boxed{u(x, y) = x^2 - \dfrac{x^3}{y}}$.

Ejemplo 2.4.6: Resolución del Ejercicio 5 del Tema 2

Resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{1}{y}u_x + u_y = \frac{e^{-x}}{x}u$$

con la condición inicial $u = h(x)$ sobre la recta $y = 1$ para $x > 0$.
1. Identificación y Parametrización de la Curva Inicial Identificamos los coeficientes de la ecuación cuasi-lineal $au_x + bu_y = c$:

$$a(x, y, u) = \frac{1}{y}, \quad b(x, y, u) = 1, \quad c(x, y, u) = \frac{e^{-x}}{x}u$$

Parametrizamos la curva inicial $\Gamma(s)$ usando $x = s$ como parámetro ($s > 0$):

$$\begin{cases} f(s) = s \\ g(s) = 1 \\ z_0(s) = h(s) \end{cases}$$

Observación 2.4.3: Verificación del Teorema 2.4.1: Existencia y Unicidad Local

Comprobamos las hipótesis del teorema sobre nuestra curva:

1. **Regularidad:** Los coeficientes a, b, c y los datos f, g, h son de clase $\mathcal{C}^1$ en el dominio $y > 0, x > 0$.

2. **Condición de Transversalidad:** Evaluamos el determinante en un punto genérico de la curva $P_0 = (s, 1, h(s))$:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a(P_0) & b(P_0) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (1)(1) = -1 \neq 0.$$

Como $\Delta(s) \neq 0$, el Teorema nos garantiza que **existe una única solución local** en un entorno de la curva inicial.

2. Sistema Característico Planteamos el sistema de EDOs parametrizado por t:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y} \\ \frac{dy}{dt} = 1 \\ \frac{du}{dt} = \frac{e^{-x}}{x} u \end{cases}$$

3. Integración y Aplicación de Condiciones Iniciales ($t = 0$)

- De la segunda ecuación: $\frac{dy}{dt} = 1 \implies y(t) = t + C_1$. En $t = 0$, $y(0) = 1 \implies C_1 = 1 \implies \boxed{y(t) = t + 1}$.

- Sustituimos $y(t)$ en la primera ecuación: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+1} \implies x(t) = \ln(t + 1) + C_2$. En $t = 0$, $x(0) = s \implies C_2 = s \implies \boxed{x(t) = \ln(t + 1) + s}$.

- Para la ecuación de u, notamos que $e^{-x(t)} = e^{-(\ln(t+1)+s)} = \frac{e^{-s}}{t+1}$. Sustituyendo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\frac{e^{-s}}{t+1}}{\ln(t+1) + s} u \implies \frac{du}{u} = \frac{e^{-s}}{(t+1)(\ln(t+1) + s)} dt$$

Hacemos el cambio de variable $w = \ln(t + 1) + s \implies dw = \frac{1}{t+1} dt$:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{e^{-s}}{w} dw \implies \ln|u| = e^{-s} \ln|w| + C_3 \implies u(t, s) = K \cdot (\ln(t + 1) + s)^{e^{-s}}$$

En $t = 0$, $u(0, s) = h(s)$:

$$h(s) = K \cdot (\ln(1) + s)^{e^{-s}} = K \cdot s^{e^{-s}} \implies K = h(s) s^{-e^{-s}}$$

Por tanto, la expresión paramétrica para u es:

$$\boxed{u(t, s) = h(s) \left(\frac{\ln(t + 1) + s}{s} \right)^{e^{-s}}}$$

4. Inversión y Solución Final Despejamos t y s en función de x, y:

- $t+1=y$.
- $s = x - \ln(t+1) \implies \boxed{s = x - \ln y}$.

Sustituimos en la ecuación de $u(t,s)$:

$$u(x,y) = h(x-\ln y)\left(\frac{\ln y + (x - \ln y)}{x - \ln y}\right)^{e^{-(x-\ln y)}}$$

Simplificamos el exponente: $e^{-(x-\ln y)} = e^{\ln y - x} = ye^{-x}$.
Solución analítica:

$$\boxed{u(x,y) = h(x-\ln y)\left(\frac{x}{x-\ln y}\right)^{ye^{-x}}}$$

2.5. Envolventes y Soluciones Singulares

En la teoría de familias de curvas y superficies, a veces aparece una solución que no se obtiene simplemente fijando las constantes arbitrarias de la solución general. Esta es la **envolvente**.

2.5.1. ¿Qué es una Envolvente? (Intuición Geométrica)

Para entender la envolvente, imagina el proceso de dibujar arte con hilos (hilorama) o trazar infinitas líneas rectas sobre un papel con una regla, variando ligeramente el ángulo y la posición según una ley específica. Aunque solo has trazado líneas rectas (elementos simples), al observar el conjunto completo notarás que la intersección y acumulación de todas esas rectas recorta y hace emerger visualmente una curva suave y continua. Esa curva emergente es la **envolvente**.

Geométricamente, la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas (o superficies) es una nueva variedad geométrica que cumple una propiedad definitoria: **en cada uno de sus puntos, es tangente a al menos un miembro de la familia original**. Es la frontera o el perfil geométrico que abraza a toda la familia.

2.5.2. Cálculo de Envolventes

Deducción de la Ecuación de la Envolvente

Para calcular la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas planas definida implícitamente por $\Phi(x,y,c) = 0$ (o explícitamente $y = y(x,c)$), buscamos el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

El sistema que define la envolvente (eliminando el parámetro c) es:

$$\begin{cases} \Phi(x,y,c) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c}(x,y,c) = 0 \end{cases} \tag{2.8}$$

Justificación (Derivación). Supongamos que la envolvente se puede parametrizar suavemente por el propio parámetro c como una curva $\gamma(c) = (x(c), y(c))$.

1. Como la curva envolvente está contenida en la familia (es decir, para cada c, el punto $(x(c), y(c))$ satisface la ecuación de la curva correspondiente), tenemos la identidad:

$$\Phi(x(c), y(c), c) = 0 \quad (1).$$

2. Derivamos totalmente respecto a c usando la Regla de la Cadena:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \quad (2). \tag{2.9}$$

3. **Condición de Tangencia:** La envolvente debe ser tangente a la curva de la familia en cada punto de contacto.

- La pendiente de la curva de la familia (para c fijo) viene dada por el Teorema de la Función Implícita (asumiendo $\Phi_y \neq 0$):

$$y'(x)_{\text{fam}} = -\frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y}.$$

- La pendiente de la curva envolvente (parametrizada) es:

$$y'(x)_{\text{env}} = \frac{dy/dc}{dx/dc}.$$

Igualando las pendientes (tangencia):

$$\frac{dy/dc}{dx/dc} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} \implies \Phi_y \frac{dy}{dc} = -\Phi_x \frac{dx}{dc} \implies \Phi_x \frac{dx}{dc} + \Phi_y \frac{dy}{dc} = 0.$$

4. Sustituyendo esta relación en la ecuación (2):

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dc}\right)}_{=0} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Por tanto, llegamos a la condición necesaria:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

□

Generalizamos el concepto de envolvente para familias de superficies.

Definición 2.5.1: Envolvente de una Familia de Superficies

Dada una familia uniparamétrica de superficies definida implícitamente por $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$, su envolvente es una superficie que es tangente a cada miembro de la familia a lo largo de una curva.
Para hallar la ecuación de la envolvente, se debe eliminar el parámetro λ del sistema:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Si la familia viene dada explícitamente por $z = g(x, y, \lambda)$, el sistema es $z = g$ y $\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$.

Proposición 2.5.1: Propiedades de la Envolvente

1. Si $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ es una familia de soluciones de una EDP $F(x, y, z, p, q) = 0$, entonces su envolvente también es solución de la EDP (solución singular).

2. Si una curva $\gamma(s)$ es tangente en cada punto a una superficie de la familia $\Phi(\cdot, \lambda(s)) = 0$, y la dependencia es suave, entonces $\gamma(s)$ está contenida en la envolvente.

2.5.3. Ejemplos de Envolventes en EDOs y EDPs

Un ejemplo clásico en EDOs (extrapolable a EDPs) es la ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + \psi(y').$$

Su solución general es la familia de rectas $y = Cx + \psi(C)$. Sin embargo, existe una **solución singular** que es la envolvente de esta familia de rectas. Se obtiene eliminando el parámetro C del sistema:

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C) \\ 0 = x + \psi'(C) \quad \text{(derivada respecto a } C) \end{cases}$$

Ejemplo 2.5.1: Envolvente Parabólica

Sea la familia de soluciones generales $y = Cx + C - C^2$. Para hallar la envolvente, derivamos respecto a C:

$$0 = x + 1 - 2C \implies C = \frac{x+1}{2}.$$

Sustituimos este valor de C en la ecuación original:

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)x + \left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

Esta parábola es solución de la ecuación diferencial, pero no es una recta (no pertenece a la familia general). Es la solución singular.

Ejemplo 2.5.2: Construcción de una Solución Singular

Consideremos la familia de superficies:

$$z = (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2$$

(Nota: En los apuntes hay una corrección, inicialmente parece $(y-1)^2$ pero el cálculo desarrollado corresponde a $(y-\lambda)^2$).

1. Ecuación Diferencial asociada: Derivamos respecto a x e y:

$$p = 2(x-\lambda), \quad q = 2(y-\lambda).$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$z = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \implies 4z = p^2 + q^2.$$

Esta es una EDP no lineal. La familia dada es su solución completa.

2. Cálculo de la Envolvente: Derivamos la ecuación de la familia respecto a λ:

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2(x-\lambda)(-1) + 2(y-\lambda)(-1) = 0$$

$$-(x-\lambda) - (y-\lambda) = 0 \implies x + y - 2\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{x+y}{2}.$$

Sustituimos este λ en la ecuación original:

$$\begin{aligned} z &= \left(x - \frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x+y}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-x}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{(x-y)^2}{4} = \frac{1}{2}(x-y)^2. \end{aligned}$$

La superficie $z = \frac{1}{2}(x-y)^2$ es la **solución singular** (la envolvente).

Ejemplo 2.5.3: Envolvente de una familia de planos

Consideremos la familia de planos (Clairaut generalizado):

$$z = \alpha x + \alpha^2 y$$

Aquí el parámetro es $\lambda = \alpha$.

1. Derivamos respecto al parámetro α:

$$0 = x + 2\alpha y \implies \alpha = \frac{-x}{2y}.$$

2. Sustituimos en la ecuación de la familia:

$$z = \left(\frac{-x}{2y}\right)x + \left(\frac{-x}{2y}\right)^2 y = \frac{-x^2}{2y} + \frac{x^2}{4y}.$$

3. Simplificamos:

$$z = \frac{-2x^2 + x^2}{4y} = \frac{-x^2}{4y} \implies 4yz + x^2 = 0.$$

La envolvente es la superficie $x^2 + 4yz = 0$.

2.6. Ecuación General de Primer Orden

2.6.1. Planteamiento del Problema

Estudiamos ahora la ecuación general en derivadas parciales de primer orden para una función incógnita $z(x, y)$, que puede ser no lineal.

Definición 2.6.1: Forma General

La ecuación se presenta como:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{2.11}$$

donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Suponemos que $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$ y que se cumple la condición de no degeneración:

$$|F_p| + |F_q| \neq 0$$

(es decir, la ecuación depende realmente de al menos una derivada parcial).

Observación 2.6.1:

Esta condición de que

$$|F_p| + |F_q| \neq 0$$

se pone para poder aplicar el *Teorema de la Función Implícita* respecto p o respecto q (a alguna de las dos). Por ejemplo, si $F_q \neq 0$, tendremos $q = \varphi(p)$.

El **Problema de Cauchy** consiste en hallar una superficie integral $z = u(x, y)$ que pase por una curva dada $\Gamma(s) = (f(s), g(s), h(s))$.

2.6.2. Conos de Monge

Aquí radica la diferencia fundamental con el caso cuasi-lineal. Recordemos la ecuación del plano tangente a una superficie integral en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\pi : \quad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

- **Caso Cuasi-Lineal** $(ap + bq = c)$**:** En un punto fijo P_0, la ecuación impone una relación lineal entre p y q. Esto significa que todos los posibles planos tangentes solución deben contener una recta fija (la dirección característica (a, b, c)). El "haz"de planos tangentes gira en torno a esta recta.
- **Caso General No Lineal** $(F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0)$**:** En un punto fijo P_0, la relación entre p y q ya no es lineal. Los posibles vectores normales $\vec{N} = (p, q, -1)$ no son coplanarios ni perpendiculares a una única dirección.

  El conjunto de planos tangentes admisibles en P_0 forma una familia uniparamétrica (podemos despejar $q = \Psi(p)$ localmente por el T.F.I.).

$$z - z_0 = p(x - x_0) + \Psi(p)(y - y_0).$$

La **envolvente** de esta familia de planos tangentes en el punto fijo P_0 es una superficie cónica con vértice en P_0.

Definición 2.6.2: Cono de Monge

El **Cono de Monge** en P_0 se define como la **envolvente** de esta familia de planos tangentes admisibles. Geométricamente, representa las direcciones permitidas para las superficies integrales en ese punto.

Observación 2.6.2: Relación con la Superficie Integral

Una superficie $z = u(x, y)$ es **integral** si, en cada uno de sus puntos P_0, toca de forma tangencial al Cono de Monge de P_0.
En ese caso, la generatriz del cono a través de la cual se produce el contacto con la superficie define una dirección sobre la misma, llamada **dirección característica**.

Observación 2.6.3: Generatrices del Cono de Monge

Para calcular sus generatrices, derivamos la ecuación del plano respecto al parámetro p:

$$\begin{cases} z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) & \text{(Plano)} \\ 0 = (x - x_0) + \frac{dq}{dp}(y - y_0) & \text{(Derivada)} \end{cases}$$

Diferenciando implícitamente $F(P_0, p, q) = 0$, tenemos $F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0 \implies \frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q}$. Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$0 = (x - x_0) - \frac{F_p}{F_q}(y - y_0) \implies \frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación del plano, obtenemos la relación para z:

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{z - z_0}{pF_p + qF_q}.$$

Las rectas generatrices del Cono de Monge tienen la dirección del vector:

$$\vec{v} = (F_p, F_q, pF_p + qF_q).$$

2.6.3. Curvas Características (Franjas de Monge)

Buscamos curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sobre la superficie solución que sean tangentes en cada punto a una generatriz del Cono de Monge. Esto nos da las primeras tres ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = F_p(x, y, z, p, q) \\ y'(t) = F_q(x, y, z, p, q) \\ z'(t) = pF_p + qF_q \end{cases}$$

Sin embargo, este sistema está incompleto porque depende de $p(t)$ y $q(t)$ (las derivadas de la solución a lo largo de la curva), que son desconocidas a priori. Necesitamos ecuaciones para $p'(t)$ y $q'(t)$.

Deducción de las ecuaciones para p y q: Derivamos la identidad $F(x, y, u(x, y), u_x, u_y) = 0$ respecto a x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}p + \frac{\partial F}{\partial p}p_x + \frac{\partial F}{\partial q}q_x = 0.$$

Usando que $q_x = u_{yx} = u_{xy} = p_y$ (Teorema de Schwarz) y las ecuaciones de x' e y':

$$F_x + pF_z + x'p_x + y'p_y = 0 \implies F_x + pF_z + \frac{dp}{dt} = 0.$$

Despejando p' (y análogamente para q' derivando respecto a y), obtenemos el sistema completo.

Teorema 2.6.1: Sistema Característico (Caso General)

El sistema característico asociado a $F(x, y, z, p, q) = 0$ consta de 5 EDOs:

$$\begin{cases} x'(t) = F_p \\ y'(t) = F_q \\ z'(t) = pF_p + qF_q \\ p'(t) = -(F_x + pF_z) \\ q'(t) = -(F_y + qF_z) \end{cases} \tag{2.12}$$

Junto con la condición algebraica $F(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)) = 0$. Una solución $\mathcal{B}(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ se denomina **Franja o Banda Característica**.

2.6.4. Construcción de Superficies Integrales a través de Curvas Características

Se demuestra que toda solución (superficie integral) se obtiene mediante esas **bandas características**. Esta es la proposición análoga a la propiedad fundamental del caso cuasi-lineal.

Proposición 2.6.1: Unicidad de la Banda en la Superficie

Sea $\mathcal{B}(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ una **banda característica** definida en un intervalo I de valores del parámetro t.
Sea $z = u(x, y)$ una solución (superficie integral) de la ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$.
Si para algún instante $t_0 \in I$ se cumple que la banda toca a la superficie (coinciden el punto y el plano tangente):

$$\begin{cases} z(t_0) = u(x(t_0), y(t_0)) \\ p(t_0) = u_x(x(t_0), y(t_0)) \\ q(t_0) = u_y(x(t_0), y(t_0)) \end{cases}$$

entonces se cumple para todo $t \in I$:

$$\begin{cases} z(t) = u(x(t), y(t)) \\ p(t) = u_x(x(t), y(t)) \\ q(t) = u_y(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Interpretación: Si una franja característica tiene un elemento de contacto común con una superficie integral, entonces toda la franja está contenida en la superficie integral (es decir, la curva soporte está en la superficie y los planos tangentes de la franja son los planos tangentes a la superficie).

2.6.5. Teorema de Existencia y Unicidad (Problema de Cauchy)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$ un abierto y $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $|F_p| + |F_q| \neq 0$. Consideremos el problema de Cauchy para $F(x, y, z, p, q) = 0$ con una curva inicial $\Gamma(s) = (f(s), g(s), h(s))$ para $s \in I$.

Para poder resolver el problema, necesitamos "levantar"la curva inicial Γ a una **franja inicial** $(f(s), g(s), h(s), p_0(s), q_0(s))$ que cumpla tres condiciones:

1. **Condición de Franja (Tangencia):** La función incógnita debe tener diferencial compatible con la curva:
$$h'(s) = p_0(s) f'(s) + q_0(s) g'(s).$$

2. **Condición de la Ecuación:** Los valores iniciales deben satisfacer la EDP:
$$F(f(s), g(s), h(s), p_0(s), q_0(s)) = 0.$$

3. **Condición de Transversalidad:** La dirección característica no debe ser tangente a la curva inicial (proyectada):
$$\Delta = \begin{vmatrix} F_p(p_0, q_0, \dots) & F_q(p_0, q_0, \dots) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Teorema 2.6.2: Existencia y Unicidad

Si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 en un punto s_0, existe una única solución $z = u(x, y)$ en un entorno de la curva inicial que contiene dicha franja. **Nota:** Es posible que existan varios pares $(p_0(s), q_0(s))$ que satisfagan las condiciones algebraicas (1) y (2). Cada par válido define una solución única distinta.

Ejemplo 2.6.1: Resolución paso a paso

Resolver:

$$\begin{cases} p^2 - 3q^2 - u = 0 \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

1. Planteamiento del Sistema Característico: Aquí $F = p^2 - 3q^2 - z$. Derivadas: $F_p = 2p, F_q = -6q, F_x = 0, F_y = 0, F_z = -1$.

$$\begin{cases} x' = 2p \\ y' = -6q \\ z' = 2p^2 - 6q^2 \quad (\text{Nota: } = 2(p^2 - 3q^2) = 2z \text{ sobre la solución}) \\ p' = -(0 + p(-1)) = p \\ q' = -(0 + q(-1)) = q \end{cases}$$

Resolvemos primero para p y q:

$$p(t) = c_1 e^t, \quad q(t) = c_2 e^t.$$

Sustituyendo en x', y':

$$x(t) = 2c_1 e^t + c_3, \quad y(t) = -6c_2 e^t + c_4.$$

2. Determinación de la Franja Inicial (p_0, q_0)**:** Parametrización de la curva inicial: $x = s, y = 0, z = s^2$.

- **Condición de Franja:** $h'(s) = p_0 f' + q_0 g'$

$$2s = p_0(s) \cdot 1 + q_0(s) \cdot 0 \implies \boxed{p_0(s) = 2s}.$$

- **Condición de Ecuación:** $p_0^2 - 3q_0^2 - z_0 = 0$

$$(2s)^2 - 3q_0^2 - s^2 = 0 \implies 3s^2 = 3q_0^2 \implies \boxed{q_0(s) = \pm s}.$$

Hay dos posibles soluciones.
Interpretación de este resultado: Nos han salido dos posibilidades para $(p(s), q(s))$. En principio ya vimos que la curva puede tener muchas direcciones para la normal (aquí hay 2, una para cada valor que nos ha salido de $q(s)$). Para cada normal tendré un plano tangente. Una vez que elija y fije UNA de ellas, esa será la solución única que verificará la condición de Cauchy si fijo también p y q.

3. Comprobación de Transversalidad:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p_0 & -6q_0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6q_0 = \pm 6s.$$

Es no nulo si $s \neq 0$. Existe solución única alrededor de puntos no nulos. Se deduce la existencia y unicidad de la solución (una vez fijada, eso sí, la elección de $(p(s), q(s))$).

Trabajamos el caso en el que $(p(s), q(s)) = (2s, s)$:
4. Integración con Condiciones Iniciales: En $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = f(s) = s \\ y(0) = g(s) = 0 \\ z(0) = h(s) = s^2 \\ p(0) = p(s) = 2s \\ q(0) = q(s) = s \end{cases}$$

1. **Para p y q:**

$$p' = p \implies p(t) = c_1 e^t. \quad \text{En } t = 0: \quad 2s = c_1 e^0 \implies \boxed{c_1 = 2s}.$$

$$q' = q \implies q(t) = c_2 e^t. \quad \text{En } t = 0: \quad s = c_2 e^0 \implies \boxed{c_2 = s}.$$

   Por tanto: $p(t) = 2se^t, \quad q(t) = se^t$.

2. **Para x:** Sustituimos $p(t)$ en la ecuación de x':

$$x' = 2p = 2(2se^t) = 4se^t.$$

   Integramos respecto a t:

$$x(t) = \int 4se^t dt = 4se^t + c_3.$$

   Imponemos $x(0) = s$:

$$s = 4s(1) + c_3 \implies c_3 = s - 4s \implies \boxed{c_3 = -3s}.$$

   Solución particular: $x(t) = 4se^t - 3s$.

3. **Para y:** Sustituimos $q(t)$ en la ecuación de y':

$$y' = -6q = -6(se^t) = -6se^t.$$

   Integramos respecto a t:

$$y(t) = \int -6se^t dt = -6se^t + c_4.$$

   Imponemos $y(0) = 0$:

$$0 = -6s(1) + c_4 \implies \boxed{c_4 = 6s}.$$

   Solución particular: $y(t) = -6se^t + 6s$.

4. **Para z:**

$$z' = 2z \implies \frac{z'}{z} = 2 \implies \ln|z| = 2t + K \implies z(t) = c_5 e^{2t}.$$

   Imponemos $z(0) = s^2$:

$$s^2 = c_5 e^0 \implies \boxed{c_5 = s^2}.$$

   Solución particular: $z(t) = s^2 e^{2t}$.

5. Inversión y Solución Final: Tenemos el sistema paramétrico:

$$\begin{cases} x = s(4e^t - 3) \\ y = 6s(1 - e^t) \\ z = (se^t)^2 \end{cases}$$

Buscamos eliminar s y t. Observamos una combinación lineal entre x e y para aislar el término se^t:

$$6x + 3y = 6[s(4e^t - 3)] + 3[6s(1 - e^t)]$$

$$6x + 3y = 24se^t - 18s + 18s - 18se^t = 6se^t.$$

Despejamos el término común:

$$se^t = x + \frac{1}{2}y.$$

Sustituyendo esto directamente en la ecuación de $z = (se^t)^2$:

$$\boxed{z = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2}.$$

2.7. Cálculo de Integrales Completas

2.7.1. Conceptos Preliminares

Dada una ecuación en derivadas parciales $F(x, y, z, p, q) = 0$, buscamos soluciones que dependan de parámetros arbitrarios.

Definición 2.7.1: Integral Completa

Una solución $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ de la EDP que depende de dos constantes arbitrarias independientes a y b se denomina **Integral Completa**.
Nota: La integral completa no tiene por qué ser única y, en general, no recoge todas las soluciones de la EDP (por ejemplo, no suele incluir las soluciones singulares).

Definición 2.7.2: Tipos de Soluciones

- **Solución General:** Es una familia de soluciones que depende de una **función arbitraria**. Se suele construir a partir de la integral completa usando envolventes de familias uniparamétricas ($b = \phi(a)$).
- **Solución Singular:** Es aquella solución que satisface la ecuación pero no se puede obtener particularizando las constantes de la integral completa ni de la solución general (suele ser la envolvente de la integral completa).

2.7.2. Casos Particulares de Resolución

Analizamos métodos simplificados para hallar integrales completas en ecuaciones diferenciales en derivadas parciales (EDPs) con estructuras específicas. En particular, estudiamos aquellos casos donde falta alguna de las variables espaciales explícitas o la propia función incógnita (x, y, z).

Caso 1: La ecuación no depende explícitamente de x, y, z

Observación 2.7.1: Estructura y Justificación Teórica

La forma general de esta ecuación se reduce a:

$$F(p, q) = 0$$

donde, empleando la notación clásica, $p = z_x$ y $q = z_y$.
¿Por qué p y q son constantes? Si recurrimos a las ecuaciones características generales (el sistema de Charpit para EDPs no lineales), las derivadas de p y q a lo largo de una curva característica respecto a un parámetro t vienen dadas por:

$$\frac{dp}{dt} = -(F_x + pF_z) \quad \text{y} \quad \frac{dq}{dt} = -(F_y + qF_z)$$

Como la ecuación $F(p, q) = 0$ no contiene explícitamente x, y, z, las derivadas parciales F_x, F_y, F_z son idénticamente nulas. Por lo tanto, $\frac{dp}{dt} = 0$ y $\frac{dq}{dt} = 0$. Esto demuestra algebraicamente que tanto p como q permanecen constantes en las ecuaciones características simplificadas.

Metodología de Resolución:

1. Como p y q son constantes, proponemos que una de ellas tome un valor arbitrario constante, por ejemplo $p = a$.

2. Sustituimos este valor en la ecuación original para despejar la otra derivada en función de ese parámetro a:
$$F(a, q) = 0 \implies q = \varphi(a)$$

3. Utilizamos la relación diferencial fundamental (la diferencial total de la función incógnita z):
$$dz = pdx + qdy$$
Sustituimos nuestros valores constantes en la forma diferencial:
$$dz = adx + \varphi(a)dy$$

4. Integramos directamente de forma exacta para obtener la **integral completa**:
$$z = ax + \varphi(a)y + b$$
donde b es la segunda constante de integración independiente que debe aparecer en una integral completa de primer orden. Geométricamente, esta solución representa una familia biparamétrica de planos en el espacio.

Ejemplo 2.7.1: Ejemplo 2.7.1: Aplicación del Caso 1

Resolver la EDP:

$$u_x = 1 + 2u_y + 4(u_y)^2$$

Solución Paso a Paso:

- **1. Identificación:** Reconocemos la notación de Monge donde $u_x = p$ y $u_y = q$. La ecuación se reescribe como:

  $$p = 1 + 2q + 4q^2$$

  Observamos que tiene la estructura de un Caso 1, $F(p, q) = 0$, ya que no aparecen explícitamente las variables x, y, u.

- **2. Asignación de constante:** En este problema concreto, como p ya está despejada explícitamente en función de q, resulta algebraicamente más directo asignar la constante a q (es decir, hacemos $q = a$) en lugar de despejar una raíz cuadrada.

- **3. Cálculo de la otra derivada:** Si $q = a$, entonces sustituyendo en la ecuación original obtenemos el valor constante de p:

  $$p = 1 + 2a + 4a^2$$

- **4. Integración:** Sustituimos los valores de p y q en la diferencial total $du = pdx + qdy$:

  $$du = (1 + 2a + 4a^2)dx + ady$$

  Integrando directamente ambas partes, hallamos la integral completa:

  $$\boxed{u(x, y) = (1 + 2a + 4a^2)x + ay + b}$$

Ejemplo 2.7.2: Ejemplo Adicional: Aplicación del Caso 1

Resolver la ecuación en derivadas parciales no lineal:

$$u_x = 6(u_y)^4 + 1$$

1. Identificación y Clasificación: Empleamos la notación clásica de Monge para las derivadas de primer orden, definiendo $p = u_x$ y $q = u_y$. Reescribimos la ecuación en términos de p y q:

$$p = 6q^4 + 1 \implies p - 6q^4 - 1 = 0$$

Observamos que la ecuación tiene la estructura $F(p, q) = 0$. Al no aparecer de forma explícita las variables independientes (x, y) ni la función incógnita (u), confirmamos que estamos estrictamente ante el **Caso 1**.
2. Asignación de Constantes (Ecuaciones Características): Por la teoría del sistema de Charpit, sabemos que para ecuaciones del tipo $F(p, q) = 0$, las derivadas p y q se mantienen constantes a lo largo de las curvas características. Por conveniencia algebraica (dado que p ya está despejada), proponemos que q sea una constante arbitraria a:

$$q = a$$

Sustituyendo este valor en nuestra ecuación original, determinamos unívocamente el valor constante de p en función de a:

$$p = 6a^4 + 1$$

3. Construcción de la Forma Diferencial: Sabemos que la diferencial total de la función superficie $u(x, y)$ viene dada por:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \implies du = p\,dx + q\,dy$$

Sustituimos nuestros valores constantes parametrizados por a en esta expresión fundamental:

$$du = (6a^4 + 1)dx + a\,dy$$

4. Integración Exacta y Solución Final: Dado que los coeficientes de dx y dy son constantes (independientes de x e y), la forma diferencial es trivialmente exacta. Procedemos a integrar directamente:

$$\int du = \int (6a^4 + 1)dx + \int a\,dy$$

$$u(x, y) = (6a^4 + 1)x + ay + b$$

donde b surge como la segunda constante de integración.
Conclusión Geométrica: La **integral completa** buscada es:

$$\boxed{u(x, y) = (6a^4 + 1)x + ay + b}$$

Esta solución depende de dos constantes arbitrarias independientes (a y b), lo cual es preceptivo para una integral completa de una EDP de primer orden en dos variables independientes. Geométricamente, esta solución representa una familia biparamétrica de planos en el espacio $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.7.3: Resolución del Problema de Cauchy a partir de la Integral Completa

Resolver el problema de Cauchy para la EDP:

$$u_x = 6(u_y)^4 + 1$$

con la condición inicial $u(0, y) = y + \frac{1}{2}$.
1. Recordar la Integral Completa En el apartado anterior, al tratarla como una ecuación del **Caso 1** ($F(p, q) = 0$), obtuvimos la siguiente familia biparamétrica de planos que representa la Integral Completa:

$$u(x, y) = (6a^4 + 1)x + ay + b$$

2. Imposición de la Condición Inicial Queremos seleccionar de esta infinita familia de planos aquel (o aquellos) que contenga a la curva inicial. Evaluamos nuestra Integral Completa en $x = 0$:

$$u(0, y) = (6a^4 + 1)(0) + ay + b = ay + b$$

Por otro lado, el enunciado nos exige que $u(0, y) = y + \frac{1}{2}$. Igualando ambas expresiones:

$$ay + b = y + \frac{1}{2}$$

Dado que esta igualdad debe cumplirse **para todo valor de** y a lo largo de la curva inicial, podemos identificar directamente los coeficientes (polinomios idénticos):

- Coeficiente de y: $a = 1$.
- Término independiente: $b = \frac{1}{2}$.

3. Solución Final Sustituyendo los valores hallados $a = 1$ y $b = \frac{1}{2}$ en la Integral Completa original:

$$u(x, y) = (6(1)^4 + 1)x + (1)y + \frac{1}{2}$$

$$\boxed{u(x, y) = 7x + y + \frac{1}{2}}$$

Geométricamente, hemos encontrado el único plano de la familia biparamétrica que contiene a la recta inicial en el plano $x = 0$.

Observación 2.7.2: Análisis de Existencia y Unicidad (Transversalidad)

Para justificar formalmente que esta es la **única** solución posible, debemos comprobar la condición de transversalidad sobre la franja inicial.
A. Parametrización y Franja Inicial: Parametrizamos la curva inicial Γ usando s:

$$x_0(s) = 0, \quad y_0(s) = s, \quad z_0(s) = s + \frac{1}{2}$$

Calculamos las derivadas respecto a s: $x_0'(s) = 0, y_0'(s) = 1, z_0'(s) = 1$.
Para hallar la franja inicial (p_0, q_0), usamos la condición de franja $z_0' = p_0 x_0' + q_0 y_0'$:

$$1 = p_0(0) + q_0(1) \implies \boxed{q_0(s) = 1}$$

Sustituimos q_0 en la EDP $p - 6q^4 - 1 = 0$:

$$p_0 - 6(1)^4 - 1 = 0 \implies \boxed{p_0(s) = 7}$$

Como los valores de p_0 y q_0 son únicos y reales, la franja inicial está unívocamente determinada.
B. Condición de Transversalidad: Definimos $F(p, q) = p - 6q^4 - 1$. Sus derivadas parciales son:

$$F_p = 1, \quad F_q = -24q^3$$

Evaluamos el determinante de transversalidad Δ a lo largo de la franja inicial:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ x_0'(s) & y_0'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -24(1)^3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (-24)(0) = 1$$

Conclusión: Como $\Delta = 1 \neq 0$ en todo punto de la curva inicial, la curva **no es característica** en ninguna parte. Por el Teorema de Existencia y Unicidad Local, garantizamos que el problema de Cauchy está bien planteado y que la solución clásica que hemos encontrado ($u = 7x + y + 1/2$) es **única**.

Observación 2.7.3: Nota

Hemos obtenido que tanto a como b son valor fijos. Podría ocurrir que llegásemos a una expresión en la que $b = b(a)$. En ese caso, la solución general se obtendría a través de la envolvente de $\phi(x, y, z, a, b(a))$.

Caso 2: Ecuaciones de Variables Separables

Este caso aplica cuando la ecuación no lineal de primer orden no depende explícitamente de la función incógnita z, y además los términos que contienen x y p pueden separarse algebraicamente de los términos que contienen y y q. Es decir, la ecuación $F(x, y, p, q) = 0$ puede reescribirse en la forma:

$$\Psi_1(x, p) = \Psi_2(y, q)$$

Observación 2.7.4: Estrategia de Separación y Justificación Lógica

¿Por qué igualamos a una constante a?
Supongamos que existe una solución $z(x, y)$ cuyas derivadas parciales $p = z_x$ y $q = z_y$ satisfacen la ecuación $\Psi_1(x, p) = \Psi_2(y, q)$.
Dado que x e y son **variables independientes**, podemos mantener y fija y variar x. Al hacer esto, el lado derecho $\Psi_2(y, q)$ permanece inalterado (pues no depende de x), lo que obliga a que el lado izquierdo $\Psi_1(x, p)$ también permanezca constante ante cualquier variación de x. Aplicando el mismo razonamiento variando y y fijando x, concluimos que ambas expresiones no pueden depender ni de x ni de y.
Por imperativo lógico, ambas funciones deben ser iguales a una misma constante arbitraria a:

$$\Psi_1(x, p) = a \quad \text{y} \quad \Psi_2(y, q) = a$$

¿Qué ocurre a partir de aquí y a qué llegamos?
Esta igualación rompe"la ecuación original acoplada en dos ecuaciones algebraicas desacopladas. Suponiendo que se dan las condiciones del Teorema de la Función Implícita, podemos despejar p y q de forma independiente:

$$p = \varphi_1(x, a) \quad \text{y} \quad q = \varphi_2(y, a)$$

Llegamos entonces a que el problema de hallar la superficie se reduce a integrar una forma diferencial. Si tomamos la diferencial total $dz = p\,dx + q\,dy$, y sustituimos nuestras expresiones:

$$dz = \varphi_1(x, a)\,dx + \varphi_2(y, a)\,dy$$

Dado que el coeficiente de dx solo depende de x y el de dy solo depende de y, la condición de exactitud (rotacional nulo bidimensional, $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 0$) se cumple trivialmente. Esto nos permite integrar directamente para obtener la **integral completa**:

$$\boxed{z(x, y) = \int \varphi_1(x, a)\,dx + \int \varphi_2(y, a)\,dy + b}$$

donde b es la segunda constante de integración independiente, confirmando que tenemos una familia biparamétrica de superficies.

Ejemplo 2.7.4: Ejemplo del Caso 2

Resolución paso a paso de la Ecuación $pq = 2xy$
Resolver la ecuación en derivadas parciales no lineal:

$$pq = 2xy$$

1. Separación de Variables: Observamos que no aparece z y que podemos agrupar las variables x, p a un lado y y, q al otro. Dividiendo entre x y q (asumiendo que son no nulos), obtenemos:

$$\frac{p}{x} = \frac{2y}{q}$$

2. Igualación a la constante arbitraria a: Aplicando la lógica de la separación de variables independientes, igualamos ambas partes a una constante a:

$$\frac{p}{x} = a \quad \text{y} \quad \frac{2y}{q} = a$$

3. Despeje de p y q: Aislamos las derivadas parciales en función de su respectiva variable y el parámetro a:

$$p = ax$$

$$q = \frac{2y}{a}$$

4. Planteamiento de la Diferencial Total: Sustituimos estas expresiones en la ecuación diferencial total para la función superficie $z(x, y)$:

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

$$dz = (ax)\,dx + \left(\frac{2y}{a}\right)\,dy$$

5. Integración y Solución Final: Como la forma es exacta (las variables están separadas), integramos término a término:

$$\int dz = \int ax\,dx + \int \frac{2y}{a}\,dy$$

$$z(x, y) = a\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{2}{a}\left(\frac{y^2}{2}\right) + b$$

Simplificando, obtenemos la **integral completa**:

$$\boxed{z(x, y) = \frac{a}{2}x^2 + \frac{1}{a}y^2 + b}$$

Esta solución representa una familia biparamétrica (parámetros a y b) de paraboloides.

Caso 3: La ecuación no depende explícitamente de x, y

Este caso abarca las ecuaciones no lineales de primer orden que adoptan la forma general:

$$F(z, p, q) = 0$$

donde la función incógnita z y sus derivadas parciales $p = z_x, q = z_y$ están presentes en la ecuación, pero las variables espaciales independientes x e y no aparecen de forma explícita.

Observación 2.7.5: Estrategia de Reducción (Cambio a Ondas Viajeras)

La ausencia explícita de las coordenadas espaciales x e y confiere a la ecuación una simetría traslacional. Para aprovechar esta estructura, la técnica matemática estándar consiste en buscar soluciones que colapsen las dos dimensiones espaciales en una sola variable combinada.
Proponemos el siguiente cambio de variables lineal:

$$u = ax + y$$

donde a es una constante arbitraria que representa, geométricamente, la pendiente o dirección de propagación en el plano (x, y). Asumimos entonces que la solución de la superficie depende únicamente de esta variable combinada: $z = z(u)$.
Para aplicar este cambio a nuestra EDP, necesitamos reescribir las derivadas parciales p y q empleando la **Regla de la Cadena** para funciones de varias variables:

- $p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = z' \cdot a = az'$
- $q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = z' \cdot 1 = z'$

donde $z' = \frac{dz}{du}$ denota la derivada ordinaria de z respecto a u.
Al sustituir estas expresiones de p y q en la EDP original $F(z, p, q) = 0$, obtenemos:

$$F(z, az', z') = 0$$

¡El gran logro analítico de esta sustitución es que hemos transformado una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) en una **Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)** de primer orden para $z(u)$! Una vez integrada esta EDO, bastará con deshacer el cambio $u = ax + y$ para recuperar la integral completa en términos de x e y.

Ejemplo 2.7.5: Resolución paso a paso de una ecuación del Caso 3

Resolver la ecuación en derivadas parciales no lineal:

$$z^2 = 4pq$$

1. Identificación y Cambio de Variables: Observamos que la ecuación es de la forma $F(z, p, q) = 0$, ya que carece de x e y. Aplicamos la transformación $u = ax + y$, asumiendo la forma de solución $z = z(u)$. Por la regla de la cadena deducida anteriormente, sabemos que:

$$p = az' \quad \text{y} \quad q = z'$$

2. Reducción a una EDO: Sustituimos p y q en la ecuación diferencial original:

$$z^2 = 4(az')(z')$$

$$z^2 = 4a(z')^2$$

3. Despeje de la Derivada Ordinaria: Para resolver la EDO, aislamos el término diferencial $(z')^2$ y tomamos la raíz cuadrada en ambos miembros:

$$(z')^2 = \frac{z^2}{4a} \implies z' = \pm \frac{z}{2\sqrt{a}}$$

Recordando que $z' = \frac{dz}{du}$, reescribimos la expresión obteniendo una EDO de variables separables clásica:

$$\frac{dz}{du} = \pm \frac{z}{2\sqrt{a}}$$

4. Integración de la EDO: Agrupamos la variable dependiente z con dz y la independiente u con du:

$$\frac{dz}{z} = \pm \frac{1}{2\sqrt{a}} du$$

Integramos directamente ambos lados de la igualdad:

$$\int \frac{dz}{z} = \int \pm \frac{1}{2\sqrt{a}} du$$

$$\ln |z| = \pm \frac{u}{2\sqrt{a}} + C$$

Para despejar z, aplicamos la función exponencial a ambos lados:

$$z(u) = e^{\pm \frac{u}{2\sqrt{a}} + C} = e^C \cdot e^{\pm \frac{u}{2\sqrt{a}}}$$

Podemos redefinir la constante exponencial e^C como una nueva constante arbitraria b. Así, la solución de la EDO es:

$$z(u) = be^{\pm \frac{u}{2\sqrt{a}}}$$

5. Solución Final (Integral Completa): Finalmente, para obtener la solución a nuestro problema original de EDP, deshacemos el cambio de variable $u = ax + y$:

$$\boxed{z(x, y) = be^{\pm \frac{ax+y}{2\sqrt{a}}}}$$

Esta expresión es la **integral completa** de la ecuación propuesta, conformando una familia de superficies que depende de dos constantes arbitrarias e independientes (a y b).

Ejemplo 2.7.6: Resolución paso a paso de otra ecuación

Resolver la ecuación en derivadas parciales no lineal:

$$u^2 = 4u_x u_y$$

1. Identificación y Cambio de Variables: Utilizando la notación clásica $p = u_x$ y $q = u_y$, reescribimos la ecuación:

$$u^2 = 4pq$$

Observamos que la ecuación es de la forma $F(u, p, q) = 0$, ya que carece explícitamente de las variables espaciales x e y. Estamos ante el **Caso 3**.

Para aplicar el método de ondas viajeras, dado que la variable dependiente ya se llama u, definiremos una nueva variable independiente combinada ξ:

$$\xi = ax + y$$

Asumimos que la solución depende únicamente de esta nueva variable: $u = u(\xi)$. Calculamos las derivadas parciales aplicando la regla de la cadena ($u' = \frac{du}{d\xi}$):

$$p = u_x = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = au'$$

$$q = u_y = \frac{du}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} = u' \cdot 1 = u'$$

2. Reducción a una EDO: Sustituimos las expresiones de p y q en la ecuación original:

$$u^2 = 4(au')(u')$$

$$u^2 = 4a(u')^2$$

3. Despeje de la Derivada Ordinaria: Aislamos el término diferencial $(u')^2$ y tomamos la raíz cuadrada:

$$(u')^2 = \frac{u^2}{4a} \implies u' = \pm\frac{u}{2\sqrt{a}}$$

Reescribiendo la derivada ordinaria obtenemos una EDO de variables separables:

$$\frac{du}{d\xi} = \pm\frac{u}{2\sqrt{a}}$$

4. Integración de la EDO: Separamos las variables, agrupando u con du y ξ con $d\xi$:

$$\frac{du}{u} = \pm\frac{1}{2\sqrt{a}}d\xi$$

Integramos directamente en ambos miembros:

$$\int \frac{du}{u} = \int \pm\frac{1}{2\sqrt{a}}d\xi$$

$$\ln|u| = \pm\frac{\xi}{2\sqrt{a}} + C$$

Aplicamos la función exponencial para despejar $u(\xi)$:

$$u(\xi) = e^{\pm\frac{\xi}{2\sqrt{a}}+C} = e^C \cdot e^{\pm\frac{\xi}{2\sqrt{a}}}$$

Llamando a la constante $e^C = b$, obtenemos la solución de la EDO:

$$u(\xi) = be^{\pm\frac{\xi}{2\sqrt{a}}}$$

5. Solución Final (Integral Completa): Para recuperar la solución en términos de las variables originales espaciales, deshacemos el cambio de variable $\xi = ax + y$:

$$\boxed{u(x,y) = be^{\pm\frac{ax+y}{2\sqrt{a}}}}$$

Esta es la **integral completa**, la cual conforma una familia biparamétrica de superficies (dependiente de las constantes arbitrarias a y b).

Caso 4: Ecuación de Clairaut Generalizada

La ecuación de Clairaut en derivadas parciales es una generalización directa de su homóloga en EDOs. Se caracteriza por tener la función incógnita z despejada y expresada como una combinación lineal de las variables espaciales ponderadas por sus respectivas derivadas, más una función no lineal que depende exclusivamente de dichas derivadas. Su forma canónica es:

$$z = px + qy + \Psi(p, q)$$

Observación 2.7.6: Justificación Analítica (¿Por qué p y q son constantes?)

Para un estudiante de Matemáticas, no basta con aplicar la receta; veamos por qué $p = a$ y $q = b$.
Si diferenciamos la ecuación original $z = px + qy + \Psi(p, q)$ con respecto a x, aplicando la regla de la cadena y recordando que $z_x = p$:

$$p = p + xp_x + yq_x + \Psi_p p_x + \Psi_q q_x$$

Simplificando, restamos p en ambos lados y agrupamos términos:

$$0 = p_x(x + \Psi_p) + q_x(y + \Psi_q)$$

De manera análoga, si diferenciamos respecto a y (sabiendo que $z_y = q$):

$$q = p_y x + q + yq_y + \Psi_p p_y + \Psi_q q_y$$

$$0 = p_y(x + \Psi_p) + q_y(y + \Psi_q)$$

Dado que por el Teorema de Schwarz las derivadas cruzadas coinciden ($p_y = z_{xy} = z_{yx} = q_x$), nos encontramos ante un sistema homogéneo para las derivadas segundas. Una solución trivial y universal (que no impone restricciones geométricas sobre x e y) es forzar que todas las derivadas segundas se anulen:

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad q_x = 0, \quad q_y = 0$$

Si las derivadas de p y q son nulas en todas las direcciones espaciales, esto implica analíticamente que p y q deben ser constantes reales arbitrarias a lo largo de las superficies integrales:

$$p = a \quad \text{y} \quad q = b$$

Sustituyendo estas constantes directamente en la ecuación original, obtenemos la **integral completa**:

$$\boxed{z(x, y) = ax + by + \Psi(a, b)}$$

Geométricamente, esta integral completa representa una familia biparamétrica de planos en $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 2.7.7: Resolución paso a paso: Ecuación de Clairaut

Resolver la ecuación en derivadas parciales no lineal:

$$u = xu_x + yu_y + u_y^2 + 3u_x + 5$$

1. Identificación y Cambio de Notación: Empleamos la notación clásica de Monge asignando $p = u_x$ y $q = u_y$. Reescribimos la ecuación:

$$u = xp + yq + q^2 + 3p + 5$$

2. Clasificación de la Ecuación: Reordenamos los términos para comparar con las formas canónicas estudiadas:

$$u = px + qy + (q^2 + 3p + 5)$$

Observamos que encaja perfectamente con la estructura de la ecuación de Clairaut generalizada $u = px + qy + \Psi(p, q)$, donde la función residual que depende solo de las derivadas es:

$$\Psi(p, q) = q^2 + 3p + 5$$

3. Obtención de la Integral Completa: Por el teorema desarrollado anteriormente, sabemos que las derivadas se reducen a constantes arbitrarias $p = a$ y $q = b$. Sustituimos estos valores directamente en nuestra estructura:

$$u(x, y) = ax + by + (b^2 + 3a + 5)$$

La **integral completa** es, por tanto:

$$\boxed{u(x, y) = ax + by + b^2 + 3a + 5}$$

Nota Geométrica Adicional: Esta solución define una familia de infinitos planos en el espacio tridimensional. En este tipo de ecuaciones, si se quisiera buscar la **solución singular** (la envolvente de esta familia de planos), se derivaría la integral completa respecto a a y b para igualar a cero.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial a} = x + 3 = 0 \implies x = -3 \\ \frac{\partial u}{\partial b} = y + 2b = 0 \implies b = -\frac{y}{2} \end{cases}$$

En este caso particular, como la derivada respecto a a no nos permite despejar a en función de las variables espaciales (solo nos da la restricción plana $x = -3$), la familia no posee una superficie envolvente regular tradicional en todo el espacio, sino que degenera topológicamente.

Caso 5: La ecuación no depende de una variable espacial (ej. y) ni de la función incógnita

Este último caso de reducción se presenta cuando la ecuación en derivadas parciales tiene la forma general:

$$F(x, p, q) = 0$$

o, de manera equivalente y más directa para el cálculo analítico:

$$p = \Psi(x, q)$$

La característica geométrica y algebraica principal es la ausencia explícita tanto de la variable dependiente (la función incógnita z o u) como de **una** de las variables espaciales independientes (en este caso de estudio, y).

Observación 2.7.7: Justificación Analítica (Invarianza a lo largo de las características)

Para fundamentar rigurosamente el método, sin recurrir a memorizar recetas", acudimos a las ecuaciones características del sistema de Charpit. La evolución de la derivada q a lo largo de una curva característica parametrizada por t viene dictada por la EDO:

$$\frac{dq}{dt} = -\left(\frac{\partial F}{\partial y} + q\frac{\partial F}{\partial z}\right)$$

Como nuestra ecuación $F(x, p, q) = 0$ no contiene explícitamente ni la variable y ni la función z, ambas derivadas parciales se anulan idénticamente ($F_y = 0$ y $F_z = 0$). En consecuencia, la ecuación diferencial ordinaria colapsa a:

$$\frac{dq}{dt} = 0$$

Esto demuestra lógicamente que q (la derivada parcial respecto a la variable espacial ausente) permanece **estrictamente constante** a lo largo de las curvas características. Por tanto, podemos fijarla globalmente como una constante arbitraria a:

$$q = a$$

Al sustituir esta constante en la ecuación original, reducimos el problema a despejar la otra derivada p en función únicamente de la variable x que sí aparece, y del parámetro a:

$$p = \Psi(x, a)$$

Finalmente, construimos la diferencial total de la superficie $dz = p\,dx + q\,dy$. Al sustituir nuestras deducciones, obtenemos una forma diferencial donde las variables están separadas:

$$dz = \Psi(x, a)\,dx + a\,dy$$

Dado que el rotacional bidimensional de esta forma es nulo (es una diferencial exacta), la **integral completa** se halla mediante integración directa término a término:

$$z(x, y) = \int \Psi(x, a)\,dx + ay + b$$

Ejemplo 2.7.8: Batería de Ejemplos: Aplicación del Caso 5

En los siguientes ejemplos, la función incógnita se denota como $u(x, y)$, por lo que adoptamos $p = u_x$ y $q = u_y$.

1. Resolver $u_x = \cos(2x) + 3u_y^2$

- **Identificación:** La ecuación es $p = \cos(2x) + 3q^2$. No aparecen de forma explícita ni y ni u.
- **Reducción Charpit:** Fijamos la derivada respecto a la variable ausente y como una constante: $q = a$.
- **Despeje:** Sustituimos q para hallar p: $p = \cos(2x) + 3a^2$.

- **Integración Exacta:** Planteamos la diferencial total $du = p\,dx + q\,dy$ e integramos:

$$u(x,y) = \int (\cos(2x) + 3a^2)\,dx + \int a\,dy$$

La integral completa es:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{1}{2}\text{sen}(2x) + 3a^2x + ay + b}$$

2. Resolver $u_x = 2x^2 + u_y^2$

- **Identificación:** La ecuación es $p = 2x^2 + q^2$. Nuevamente, faltan y y u.
- **Reducción Charpit:** Imponemos $q = a$.
- **Despeje:** Obtenemos directamente $p = 2x^2 + a^2$.
- **Integración Exacta:** Integramos la diferencial total $du = (2x^2 + a^2)dx + a\,dy$:

$$u(x,y) = \int (2x^2 + a^2)\,dx + ay$$

La integral completa es:

$$\boxed{u(x,y) = \frac{2}{3}x^3 + a^2x + ay + b}$$

3. Resolver $u_x = 4u_y^2 + 2$

- **Identificación:** La ecuación es $p = 4q^2 + 2$. Este es un subcaso notable; faltan x, y y u. Al faltar todo, podríamos resolverlo también por el **Caso 1**, pero aplicaremos la lógica del Caso 5 por coherencia estructural.
- **Reducción Charpit:** Hacemos $q = a$.
- **Despeje:** Resulta que p es completamente constante frente a cualquier variación espacial: $p = 4a^2 + 2$.
- **Integración Exacta:**

$$u(x,y) = \int (4a^2 + 2)\,dx + \int a\,dy$$

La integral completa es:

$$\boxed{u(x,y) = (4a^2 + 2)x + ay + b}$$

(Como era de prever teóricamente por la ausencia total de variables espaciales, la solución degenera en una familia de planos en $\mathbb{R}^3$).

2.7.3. Ejercicio Resuelto: Superficies y Envolventes

Ejemplo 2.7.9: Ejercicio Típico de Control

Consideramos la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

1. **Encontrar una EDP de primer orden que satisfagan todos los planos tangentes a esta superficie.**

   Calculamos el plano tangente en un punto genérico (x_0, y_0, z_0):

   $$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1}}.$$

   Observamos que $z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1}$. Buscamos una relación entre p y q que elimine x_0, y_0. Calculamos $p^2 + q^2$:

   $$p^2 + q^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + 1} = \frac{(x_0^2 + y_0^2 + 1) - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 1} = 1 - \frac{1}{z_0^2}.$$

   Pero en el plano tangente (Clairaut) $Z = pX + qY + \Psi(p, q)$, el término independiente es la intersección con el eje Z o relacionado con la estructura. Alternativamente, usamos la propiedad geométrica. La ecuación del plano es $z = px + qy + \sqrt{1 - p^2 - q^2}$. Comprobación: $1 - p^2 - q^2 = 1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} = \frac{z_0^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{z_0^2} = \frac{1}{z_0^2}$. Luego $\sqrt{1 - p^2 - q^2} = 1/z_0$. La EDP es de tipo Clairaut:

   $$z = xp + yq + \sqrt{1 - p^2 - q^2}.$$

   Su integral completa es la familia de planos:

   $$z = ax + by + \sqrt{1 - a^2 - b^2}, \quad \text{con } a^2 + b^2 \le 1.$$

2. **Demostrar que la EDP obtenida admite soluciones que son conos de revolución alrededor del eje Z.**

   Estrategia: Calcular la envolvente de una subfamilia uniparamétrica. Tomamos la relación entre parámetros $a^2 + b^2 = c^2$ (constante) para buscar simetría radial, o usamos coordenadas polares en el espacio de parámetros. Probamos imponiendo una relación $b = \Psi(a)$.

   Para obtener un cono, la envolvente debe ser cónica. Probemos la familia dada por $a^2 + b^2 = k^2$ (fijo $k \in (0, 1)$). Esto no genera un cono directamente, sino un cilindro o similar.

   Cálculo de la Envolvente Singular: Derivamos la integral completa respecto a a y b (si fueran independientes para la singular):

   $$0 = x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}, \quad 0 = y - \frac{b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}.$$

   Despejando a y b se recupera la superficie original $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ (Hiperboloide), que es la envolvente general.

Búsqueda del Cono: Para hallar un cono $z^2 = x^2 + y^2$, necesitamos una relación específica. Si imponemos la condición de que la superficie pase por el origen (vértice del cono), la ecuación Clairaut $0 = 0 + 0 + \sqrt{1 - a^2 - b^2}$ implica $a^2 + b^2 = 1$. Si $a^2 + b^2 = 1$, el término de la raíz se anula:

$$z = ax + by, \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1.$$

Esta es una familia de planos que pasan por el origen. La envolvente de esta familia: $b = \sqrt{1 - a^2}$. $z = ax + y\sqrt{1 - a^2}$. Derivamos respecto a a: $0 = x + y\frac{-a}{\sqrt{1-a^2}} \implies x = \frac{ay}{\sqrt{1-a^2}} \implies x^2(1 - a^2) = a^2y^2$. $x^2 = a^2(x^2 + y^2) \implies a = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Sustituyendo en z:

$$z = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado: $z^2 = x^2 + y^2$. Efectivamente, es un cono de revolución.

2.8. Ecuaciones de Pfaff y Método de Lagrange-Charpit

2.8.1. Ecuaciones de Pfaff

Una ecuación diferencial de Pfaff en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma diferencial:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \tag{2.13}$$

donde $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial dado.

Observación 2.8.1: Significado Geométrico

Resolver la ecuación consiste en encontrar una familia de superficies $U(x, y, z) = C$ tales que sean ortogonales a las líneas de campo de $\vec{F}$.
Si $U(x, y, z) = C$ es solución, su vector normal es $\nabla U = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$. La ecuación de Pfaff establece que el desplazamiento tangente (dx, dy, dz) sobre la superficie es ortogonal a (P, Q, R), es decir, ∇U debe ser paralelo a $\vec{F}$.

Caso 1: Campos Conservativos

Si el campo $\vec{F} = (P, Q, R)$ es conservativo, es decir, existe un potencial escalar U tal que $\nabla U = \vec{F}$, entonces la solución es directa:

$$U(x, y, z) = C.$$

Condición de irrotacionalidad: Sabemos que $\vec{F}$ es conservativo (en un dominio simplemente conexo) si y solo si $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = (0, 0, 0).$$

Ejemplo 2.8.1: Ejemplo Canónico: Esferas Concéntricas

Resolver la ecuación de Pfaff:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

1. Identificación del Campo Vectorial La ecuación tiene la forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, donde el campo es:

$$\vec{F} = (P, Q, R) = (x, y, z).$$

2. Condición de Integrabilidad (Frobenius) Antes de integrar, verificamos si el campo es conservativo calculando su rotacional:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Calculamos las componentes:

- Componente **i**: $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0 - 0 = 0.$
- Componente **j**: $\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 - 0 = 0.$
- Componente **k**: $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 0.$

Como $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, la condición de integrabilidad $\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$ se cumple trivialmente. Es una **Ecuación Diferencial Exacta**.
3. Integración Directa Al ser un diferencial exacto, existe una función potencial U tal que $dU = xdx + ydy + zdz$. Integramos término a término:

$$\int x\,dx + \int y\,dy + \int z\,dz = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = C$$

Reordenando la constante ($K = 2C$), obtenemos la familia de superficies integrales:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = K}$$

4. Interpretación Geométrica

- La solución representa una familia de **esferas concéntricas** centradas en el origen.
- El campo vectorial $\vec{F} = (x, y, z)$ es el vector de posición (radio vector), que siempre es **perpendicular** a la superficie de la esfera.
- La ecuación de Pfaff $xdx+ydy+zdz = 0$ es equivalente al producto escalar $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$. Esto nos dice geométricamente que cualquier desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ sobre la superficie solución debe ser ortogonal al radio vector.

Ejemplo 2.8.2: Campo Conservativo

Resolver $(4x^3y + z^4)dx + (x^4 + 4y^3z)dy + (y^4 + 4z^3x)dz = 0$. Calculamos el rotacional y vemos que es nulo. Por integración directa ("método del potencial"):

$$U(x, y, z) = x^4y + y^4z + z^4x = C.$$

Caso 2: Factor Integrante (Integrabilidad)

Si $\text{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$, el campo no es gradiente. Sin embargo, podemos buscar un factor escalar $\mu(x, y, z)$ (factor integrante) tal que el nuevo campo $\mu\vec{F} = (\mu P, \mu Q, \mu R)$ sí sea conservativo:

$$\text{rot}(\mu\vec{F}) = \vec{0}.$$

En este caso, se cumplirá que $(\mu P, \mu Q, \mu R)$ sea un gradiente de una función $U(x, y, z)$, es decir, $(\mu P, \mu Q, \mu R) = \nabla U$. Entonces $U(x, y, z) = C$ será la familia de superficies solución de la ecuación de Pfaff original.

Teorema 2.8.1: Condición de Integrabilidad de Frobenius

La ecuación de Pfaff admite un factor integrante (y por tanto familias de superficies solución) si y solo si el campo es ortogonal a su rotacional:

$$\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \tag{2.14}$$

Si esta condición no se cumple, no existen superficies integrales $U(x, y, z) = C$ ortogonales al campo (sistema no holónomo).

Ejemplo 2.8.3: Resolución paso a paso

Resolver: $yz\,dx + 2xz\,dy + xy\,dz = 0$. Aquí $\vec{F} = (yz, 2xz, xy)$.
1. Comprobación: Calculamos el rotacional y verificamos $\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$.
2. Reducción dimensional: Tratamos una variable como constante (ej. $z = cte \implies dz = 0$). La ecuación reducida es: $yz\,dx + 2xz\,dy = 0$. Dividiendo por z (si $z \neq 0$):

$$y\,dx + 2x\,dy = 0.$$

Esta es una EDO de variables separables:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2}\frac{dx}{x} \implies \ln y = -\frac{1}{2}\ln x + C \implies yx^{1/2} = K \implies xy^2 = C.$$

3. Reconstrucción: Asumimos que la çonstante"depende de z:

$$U(x, y, z) = xy^2 - C(z) = 0.$$

Para hallar $C(z)$, imponemos que esta función satisfaga la ecuación original. Calculamos el diferencial total dU:

$$dU = y^2dx + 2xydy - C'(z)dz = 0.$$

Para que esta ecuación sea equivalente a la original ($yzdx + 2xzdy + xydz = 0$), sus coeficientes deben ser proporcionales:

$$\frac{y^2}{yz} = \frac{2xy}{2xz} = \frac{-C'(z)}{xy}.$$

Simplificando las dos primeras fracciones obtenemos $\frac{y}{z} = \frac{y}{z}$ (consistente). Igualamos con la tercera:

$$\frac{y}{z} = \frac{-C'(z)}{xy} \implies C'(z) = -\frac{xy^2}{z}.$$

Como en la superficie tenemos $xy^2 = C(z)$, sustituimos:

$$C'(z) = -\frac{C(z)}{z} \implies \frac{C'(z)}{C(z)} = -\frac{1}{z} \implies \ln C(z) = -\ln z + k \implies C(z) = \frac{K}{z}.$$

4. Solución General:

$$xy^2 = \frac{K}{z} \implies \boxed{xy^2 z = K}.$$

Ejemplo 2.8.4: Ejemplo: Ecuación No Integrable

Estudiar la integrabilidad de la ecuación de Pfaff:

$$(x + y)dx + (x - z)dy + x^2 yz\, dz = 0$$

Identificamos las componentes del campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$P = x + y, \quad Q = x - z, \quad R = x^2 yz$$

Calculamos el rotacional de $\vec{F}$:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x + y & x - z & x^2 yz \end{vmatrix}$$

Desarrollando las componentes:

- Componente **i**: $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2 z - (-1) = x^2 z + 1$.
- Componente **j**: $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 2xyz = -2xyz$.
- Componente **k**: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0$.

Por tanto, $\text{rot}(\vec{F}) = (x^2 z + 1, -2xyz, 0)$.
Comprobamos la condición de integrabilidad de Frobenius ($\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) &= P(x^2 z + 1) + Q(-2xyz) + R(0) \\ &= (x + y)(x^2 z + 1) + (x - z)(-2xyz) \\ &= x^3 z + x + x^2 yz + y - 2x^2 yz + 2xyz^2 \\ &= x^3 z - x^2 yz + 2xyz^2 + x + y \neq 0 \end{aligned}$$

Como el producto escalar no es idénticamente nulo, la ecuación **no admite factor integrante** y, por consiguiente, **no es integrable**. Geométricamente, no existe una familia de superficies ortogonales a este campo vectorial.

2.8.2. Métodos de Resolución de una Ecuación Integrable

Una vez verificada la condición de integrabilidad de Frobenius ($\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$), sabemos que existen superficies integrales. El método de resolución depende de si el campo ya es conservativo o si necesita ser adaptado.

Caso A: El campo es conservativo (rot$(\vec{F}) = \vec{0}$)

Si el rotacional es el vector nulo, la forma diferencial $Pdx + Qdy + Rdz$ es **exacta**. Esto significa que existe directamente una función potencial $U(x, y, z)$ tal que $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

Método de cálculo (Integración directa):

1. Como $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, integramos P respecto a x:

$$U(x, y, z) = \int P(x, y, z)dx + g(y, z)$$

2. Derivamos este resultado respecto a y y lo igualamos a Q para obtener $\frac{\partial g}{\partial y}$. Integramos para hallar $g(y, z)$, añadiendo una nueva constante que dependa solo de z, digamos $h(z)$.

3. Derivamos el resultado final respecto a z, lo igualamos a R y obtenemos $h(z)$.

4. La familia de superficies solución será $U(x, y, z) = C$.

Ejemplo 2.8.5: Resolución paso a paso: Ecuación Exacta (Campo Conservativo)

Resolver la ecuación de Pfaff:

$$2xyz\,dx + x^2z\,dy + (x^2y + 1)\,dz = 0$$

1. Identificación del Campo Vectorial La ecuación tiene la forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, con el campo $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$P = 2xyz, \quad Q = x^2z, \quad R = x^2y + 1$$

2. Condición de Integrabilidad (Cálculo del Rotacional) Comprobamos si el campo es conservativo calculando su rotacional ($\nabla \times \vec{F}$):

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz & x^2z & x^2y + 1 \end{vmatrix}$$

Evaluamos cada componente:

- Componente **i**: $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 1) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z) = x^2 - x^2 = 0$.
- Componente **j**: $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(2xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 1) = 2xy - 2xy = 0$.
- Componente **k**: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz) = 2xz - 2xz = 0$.

Como $\text{rot}(\vec{F}) = (0,0,0)$, el campo es **irrotacional** (y conservativo en $\mathbb{R}^3$). La condición de Frobenius $\vec{F}\cdot\text{rot}(\vec{F}) = 0$ se cumple trivialmente. Estamos ante una **Ecuación Diferencial Exacta**.

3. Integración para hallar el Potencial $U(x,y,z)$ Buscamos una función U tal que $dU = Pdx + Qdy + Rdz$. Esto implica resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz \quad (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2 z \quad (2) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y + 1 \quad (3) \end{cases}$$

Paso A: Integramos (1) con respecto a x:

$$U(x,y,z) = \int 2xyz\,dx = x^2yz + g(y,z)$$

donde $g(y,z)$ es una çonstante"de integración que depende de y y z.

Paso B: Derivamos este resultado con respecto a y y lo igualamos a (2):

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2 z + \frac{\partial g}{\partial y}$$

$$x^2 z + \frac{\partial g}{\partial y} = x^2 z \implies \frac{\partial g}{\partial y} = 0$$

Esto significa que g no depende de y, por lo que $g(y,z) = h(z)$. Actualizamos nuestra función: $U(x,y,z) = x^2yz + h(z)$.

Paso C: Derivamos este nuevo resultado con respecto a z y lo igualamos a (3):

$$\frac{\partial U}{\partial z} = x^2 y + h'(z)$$

$$x^2y + h'(z) = x^2y + 1 \implies h'(z) = 1$$

Integramos respecto a z:

$$h(z) = \int 1\,dz = z + C$$

Por tanto, la función potencial es:

$$U(x,y,z) = x^2yz + z$$

4. Solución Final La familia de superficies integrales que son ortogonales al campo $\vec{F}$ viene dada por las superficies equipotenciales $U(x,y,z) = C$:

$$\boxed{x^2yz + z = C}$$

Caso B: El campo no es conservativo pero es integrable ($\textbf{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$ y $\vec{F}\cdot\textbf{rot}(\vec{F}) = 0$)

En este caso, la forma diferencial no es exacta, por lo que no existe el potencial directamente. Sin embargo, la condición de Frobenius garantiza la existencia de un **factor integrante** $\mu(x,y,z)$

tal que el campo $\mu\vec{F}$ sí sea conservativo.

En lugar de buscar μ a ciegas (lo cual suele ser muy complejo), se emplea una técnica de **reducción dimensional**:

Método de cálculo (Tratamiento de una variable como constante): Método de Lagrange

1. **Congelamos una variable:** Suponemos que una de las variables es constante, por ejemplo $z = \text{cte} \implies dz = 0$.
2. **Resolvemos la EDO bidimensional:** La ecuación original se reduce a $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0$, donde z actúa como un parámetro. Al ser una EDO de dos variables, siempre admite factor integrante localmente. La resolvemos para obtener una integral primera de la forma:
$$V(x, y, z) = C$$
3. **Reconstrucción de la constante:** Como supusimos z constante, la çonstante"de integración C en realidad depende de z. Hacemos $C \to C(z)$, por lo que nuestra superficie candidata es:
$$V(x, y, z) = C(z)$$
4. **Determinación de $C(z)$:** Diferenciamos totalmente la ecuación $V(x, y, z) - C(z) = 0$:
$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - C'(z)\right) dz = 0$$
Para que esta ecuación describa la misma familia de superficies que la original ($Pdx + Qdy + Rdz = 0$), sus coeficientes deben ser estrictamente proporcionales:
$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z} - C'(z)}{R}$$
De esta cadena de igualdades (y usando la relación $V(x, y, z) = C(z)$ para eliminar x e y si es necesario), obtendremos una EDO ordinaria simple para $C(z)$. Al resolverla, sustituimos $C(z)$ en $V(x, y, z) = C(z)$ para obtener la solución general.

Ejemplo 2.8.6: Ecuación Integrable con Factor Integrante

Resolver la ecuación de Pfaff:
$$yz\,dx + (xz + yz^3)\,dy - 2xy\,dz = 0$$

1. Identificación del Campo Vectorial La ecuación es de la forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, con $\vec{F} = (P, Q, R)$:
$$P = yz, \quad Q = xz + yz^3, \quad R = -2xy$$

2. Condición de Integrabilidad de Frobenius Calculamos el rotacional del campo $\text{rot}(\vec{F})$:
$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz + yz^3 & -2xy \end{vmatrix}$$
Evaluando las componentes:

- **i** : $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = (-2x) - (x + 3yz^2) = -3x - 3yz^2 = -3(x + yz^2)$
- **j** : $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = (y) - (-2y) = 3y$
- **k** : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (z) - (z) = 0$

El rotacional es $\text{rot}(\vec{F}) = (-3(x + yz^2), 3y, 0) \neq \vec{0}$, por lo que **no es exacta** (no es un campo gradiente).
Comprobamos si es integrable ($\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) &= (yz)[-3(x + yz^2)] + (xz + yz^3)(3y) + (-2xy)(0) \\ &= -3xyz - 3y^2z^3 + 3xyz + 3y^2z^3 = 0 \end{aligned}$$

Como el producto escalar es cero, la ecuación **es integrable** (admite un factor integrante).
3. Reducción Dimensional (Congelar una variable) Consideramos z como una constante, de modo que $dz = 0$. La ecuación se reduce a dos variables:

$$yz\,dx + (xz + yz^3)\,dy = 0$$

Dividimos entre z (asumiendo $z \neq 0$):

$$y\,dx + (x + yz^2)\,dy = 0$$

Reescribimos agrupando términos:

$$(y\,dx + x\,dy) + yz^2\,dy = 0$$

Observamos que el primer paréntesis es la diferencial exacta $d(xy)$. Integramos la ecuación (manteniendo z constante):

$$xy + \frac{y^2z^2}{2} = C$$

Para evitar fracciones, multiplicamos por 2 y obtenemos la integral primera paramétrica en z:

$$2xy + y^2z^2 = C(z)$$

4. Reconstrucción de la Constante $C(z)$ Ahora diferenciamos totalmente nuestra superficie candidata $V(x, y, z) = 2xy + y^2z^2 = C(z)$ respecto a las tres variables:

$$dV = 2y\,dx + (2x + 2yz^2)\,dy + (2y^2z - C'(z))\,dz = 0$$

Para que esta ecuación represente la misma familia que la original ($Pdx + Qdy + Rdz = 0$), los coeficientes deben ser proporcionales:

$$\frac{2y}{yz} = \frac{2x + 2yz^2}{xz + yz^3} = \frac{2y^2z - C'(z)}{-2xy}$$

Simplificamos las dos primeras fracciones:

$$\frac{2y}{yz} = \frac{2}{z} \quad \text{y} \quad \frac{2(x + yz^2)}{z(x + yz^2)} = \frac{2}{z}$$

Igualamos esta proporción al término de dz:

$$\frac{2y^2z - C'(z)}{-2xy} = \frac{2}{z} \implies z(2y^2z - C'(z)) = -4xy$$

$$2y^2z^2 - zC'(z) = -4xy$$

Para resolver la EDO en $C(z)$, necesitamos eliminar x e y. Usamos nuestra relación de la superficie $2xy + y^2z^2 = C(z) \implies -4xy = 2y^2z^2 - 2C(z)$. Sustituimos esto en la ecuación:

$$2y^2z^2 - zC'(z) = 2y^2z^2 - 2C(z)$$

Cancelamos $2y^2z^2$ en ambos lados:

$$-zC'(z) = -2C(z) \implies zC'(z) = 2C(z)$$

Separamos variables para integrar:

$$\frac{C'(z)}{C(z)} = \frac{2}{z} \implies \int \frac{dC}{C} = \int \frac{2}{z}dz$$

$$\ln|C(z)| = 2\ln|z| + K \implies C(z) = Kz^2$$

5. Solución Final Sustituimos $C(z)$ en la ecuación de la superficie:

$$2xy + y^2z^2 = Kz^2$$

Dividiendo toda la expresión entre z^2, obtenemos la forma más elegante de la solución general:

$$\boxed{\frac{2xy}{z^2} + y^2 = K}$$

Ejemplo 2.8.7: Resolución alternativa: Fijando la variable y

Resolver la ecuación de Pfaff (ya comprobada su integrabilidad):

$$yz\,dx + (xz + yz^3)\,dy - 2xy\,dz = 0$$

1. Reducción Dimensional (Congelar la variable y) Consideramos y como una constante, de modo que $dy = 0$. La ecuación se reduce a las variables x y z:

$$yz\,dx - 2xy\,dz = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre y (asumiendo que $y \neq 0$):

$$z\,dx - 2x\,dz = 0$$

Esta es una EDO de variables separables. Dividimos entre xz:

$$\frac{dx}{x} - 2\frac{dz}{z} = 0$$

Integramos directamente:

$$\ln|x| - 2\ln|z| = K \implies \ln\left|\frac{x}{z^2}\right| = K \implies \frac{x}{z^2} = C$$

Como y era nuestra variable congelada, la çonstante"de integración C es en realidad una función que depende de y. Obtenemos nuestra superficie candidata:

$$V(x, y, z) = \frac{x}{z^2} = C(y)$$

2. Reconstrucción de la Función $C(y)$ Diferenciamos totalmente la ecuación $V(x, y, z) - C(y) = 0$ respecto a x, y, z:

$$dV = \frac{1}{z^2}\, dx - C'(y)\, dy - \frac{2x}{z^3}\, dz = 0$$

Para que esta ecuación diferencial represente la misma familia de superficies que la ecuación original ($Pdx + Qdy + Rdz = 0$), sus coeficientes deben ser estrictamente proporcionales:

$$\frac{\frac{1}{z^2}}{yz} = \frac{-C'(y)}{xz + yz^3} = \frac{-\frac{2x}{z^3}}{-2xy}$$

Simplificamos la primera y la tercera fracción para comprobar la consistencia:

$$\frac{1}{yz^3} = \frac{-C'(y)}{z(x + yz^2)} = \frac{1}{yz^3}$$

La igualdad entre la primera y la tercera fracción confirma que el método es correcto. Ahora igualamos la primera con la segunda para hallar $C'(y)$:

$$\frac{1}{yz^3} = \frac{-C'(y)}{z(x + yz^2)}$$

3. Resolución de la EDO para $C(y)$ Para resolver esta ecuación, necesitamos que todo dependa únicamente de y. Debemos eliminar x y z. De nuestra superficie candidata sabemos que $\frac{x}{z^2} = C(y)$, lo que implica que $x = C(y)z^2$.
Sustituimos x en el denominador de la fracción central:

$$z(x + yz^2) = z(C(y)z^2 + yz^2) = z^3(C(y) + y)$$

Volviendo a la proporción:

$$\frac{1}{yz^3} = \frac{-C'(y)}{z^3(C(y) + y)}$$

Cancelamos el factor común z^3 en ambos denominadores:

$$\frac{1}{y} = \frac{-C'(y)}{C(y) + y}$$

Multiplicamos en cruz para reorganizar la EDO:

$$C(y) + y = -yC'(y) \implies yC'(y) + C(y) = -y$$

Observamos que el lado izquierdo es exactamente la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dy}[y \cdot C(y)] = -y$$

Integramos ambos lados respecto a y:

$$y \cdot C(y) = -\frac{y^2}{2} + \widetilde{K}$$

Despejamos $C(y)$:

$$C(y) = -\frac{y}{2} + \frac{\widetilde{K}}{y}$$

4. Solución Final Sustituimos la función $C(y)$ que acabamos de encontrar en la ecuación original de la superficie candidata $\frac{x}{z^2} = C(y)$:

$$\frac{x}{z^2} = -\frac{y}{2} + \frac{\widetilde{K}}{y}$$

Para dar el resultado en una forma más elegante y sin denominadores, multiplicamos toda la expresión por $2y$:

$$\frac{2xy}{z^2} = -y^2 + 2\widetilde{K}$$

Llamando a la constante arbitraria $K = 2\widetilde{K}$, reordenamos para obtener exactamente la misma solución general que conseguimos al fijar z:

$$\boxed{\frac{2xy}{z^2} + y^2 = K}$$

Observación 2.8.2: L

a ecuación

$$dz = pdx + qdy$$

es un caso particular de la ecuación de Pfaff, donde $P = -p$, $Q = -q$ y $R = 1$.

2.8.3. Interpretación de la Ecuación de Pfaff

El estudio de las ecuaciones de Pfaff es un pilar fundamental porque actúa como puente natural entre el análisis vectorial clásico, la geometría diferencial de variedades y la topología. Una ecuación de Pfaff en $\mathbb{R}^3$ adopta la forma general:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \tag{2.15}$$

Para comprenderla con el rigor matemático adecuado, y trascender la mera manipulación algebraica, es necesario desdoblar su significado en dos vertientes interconectadas que se enriquecen mutuamente: la analítica (basada en el álgebra exterior) y la geométrica (enfocada en los fibrados tangentes).

Interpretación Analítica (Cálculo Exterior y Formas Diferenciales)

Desde un punto de vista estrictamente analítico, la expresión del lado izquierdo se identifica formalmente con una **1-forma diferencial**, que denotaremos como $\omega = Pdx+Qdy+Rdz \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$. Resolver la ecuación de Pfaff $\omega = 0$ significa encontrar subvariedades (superficies) inmersas en

$\mathbb{R}^3$ sobre las cuales la restricción (el *pullback* a través de la inclusión) de esta 1-forma se anula idénticamente.

Para profundizar, calculemos la derivada exterior de ω, $d\omega \in \Omega^2(\mathbb{R}^3)$, que formaliza el concepto de rotacional:

$$d\omega = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx \tag{2.16}$$

Observación 2.8.3: Factores Integrantes y el Ideal Diferencial

Si la 1-forma no es cerrada ($d\omega \neq 0$), el problema analítico se reorienta a la búsqueda de un **factor integrante** $\mu(x, y, z) \neq 0$ tal que la nueva 1-forma conformada, $\mu\omega$, sí sea cerrada. Imponer $d(\mu\omega) = 0$ equivale a exigir que $d\mu \wedge \omega + \mu d\omega = 0$.
En el lenguaje del álgebra exterior, esto significa que $d\omega$ debe pertenecer al ideal algebraico generado por ω, es decir, $d\omega = \alpha \wedge \omega$ para alguna 1-forma $\alpha = -\frac{d\mu}{\mu}$. Cuando esto ocurre, decimos que el ideal $\mathcal{I} = \langle \omega \rangle$ es un *ideal diferencial*.

Teorema 2.8.2: El Teorema de Frobenius (Versión Formas Diferenciales)

Analíticamente, la condición necesaria y suficiente para que el ideal generado por ω sea diferencial (y por ende, exista el factor integrante) se obtiene multiplicando exteriormente la condición de exactitud por ω:

$$d(\mu\omega) \wedge \omega = (d\mu \wedge \omega + \mu d\omega) \wedge \omega = 0$$

Dado que $\omega \wedge \omega = 0$ por la antisimetría del producto cuña, obtenemos la condición de integrabilidad analítica:

$$\mu(d\omega \wedge \omega) = 0 \implies \omega \wedge d\omega = 0$$

Esta 3-forma, $\omega \wedge d\omega$, es el análogo exterior del producto mixto $\vec{F} \cdot \mathrm{rot}(\vec{F})$. Su anulación es la piedra angular que dictamina si un sistema de Pfaff se puede resolver analíticamente mediante integración.

Interpretación Geométrica (Distribuciones y Foliaciones)

Geométricamente, el problema se traslada al fibrado tangente $T\mathbb{R}^3$. La ecuación de Pfaff se puede interpretar como la anulación del producto escalar estándar entre el campo vectorial de coeficientes y el vector de desplazamientos:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

donde $\vec{F} = (P, Q, R)$ y $d\vec{r} = (dx, dy, dz) \in T_p\mathbb{R}^3$.

Observación 2.8.4: Campo de Planos y Distribuciones de Rango 2

En cada punto $p = (x, y, z)$, si $\vec{F}(p) \neq \vec{0}$, el conjunto de vectores tangentes $v \in T_p\mathbb{R}^3$ que anulan a ω_p (es decir, el núcleo o kernel de ω) forma un **subespacio vectorial de dimensión 2**.

$$\Delta_p = \ker(\omega_p) = \{v \in T_p\mathbb{R}^3 \mid \omega_p(v) = 0\}$$

Geométricamente, la forma de Pfaff ω no define una superficie, sino que asigna a cada punto del espacio un plano tangente que es ortogonal a $\vec{F}$. Esta asignación suave $p \mapsto \Delta_p$ se denomina **distribución de codimensión 1** (o rango 2).

Observación 2.8.5: El Caso No Integrable y las Estructuras de Contacto

El extremo opuesto y geométricamente más complejo ocurre cuando el producto cuña no se anula en ninguna parte: $\omega \wedge d\omega \neq 0$ en todo punto. En este escenario, la distribución de planos sufre una rotación o "torsiónçontinua alrededor de cualquier trayectoria.
Esta torsión impide absolutamente la integración local; no existe ninguna superficie que pueda ser tangente a estos planos en un conjunto abierto, ya que la curva de la superficie obligaría a los planos a coincidir de formas que su rotación prohíbe. Esta "frustración topológica"no es un callejón sin salida, sino que define una **estructura de contacto** (y a ω como una *forma de contacto*). En lugar de superficies de nivel, este comportamiento es la base de la geometría simpléctica de dimensión impar, fundamental en la formulación de la mecánica hamiltoniana y la termodinámica.

2.8.4. Método de Lagrange-Charpit

Este método generaliza el método de las características para encontrar una **Integral Completa** de una ecuación no lineal general $F(x, y, z, p, q) = 0$.

La idea es encontrar una segunda relación entre las variables, $G(x, y, z, p, q) = a$ (donde a es una constante), que sea compatible con la ecuación original. Si tenemos el sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ G(x, y, z, p, q) = a \end{cases}$$

podemos despejar $p = p(x, y, z, a)$ y $q = q(x, y, z, a)$. Si esta forma es exacta (cumple la condición de compatibilidad), podemos integrar $dz = pdx + qdy$.

Teorema 2.8.3: Ecuaciones Auxiliares de Charpit

Para hallar la función G, buscamos una integral primera del siguiente sistema de EDOs:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)} \tag{2.17}$$

Basta con encontrar una relación $G(x, y, z, p, q) = a$ que involucre a p o q y sea funcionalmente independiente de F.

Ejemplo 2.8.8: Resolución con Lagrange-Charpit

Hallar una integral completa de $p^2 + q^2 = x^2$ (nota: corregido del apunte $p^2 + q^2 - x^2 = 0$).
1. Definir F:

$$F \equiv p^2 + q^2 - x^2 = 0.$$

Derivadas: $F_p = 2p$, $F_q = 2q$, $F_x = -2x$, $F_y = 0$, $F_z = 0$.

2. Sistema Auxiliar:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2p^2 + 2q^2} = \frac{dp}{-(-2x) - p(0)} = \frac{dq}{-0 - q(0)}.$$

Simplificando:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{2x} = \frac{dq}{0}.$$

3. Búsqueda de la Integral G: De la última fracción $\frac{dq}{0}$, deducimos $dq = 0 \implies q = a$ (constante). Esta es la relación más simple. Sin embargo, intentemos usar otra relación del sistema para ilustrar. Tomamos $\frac{dx}{2p} = \frac{dp}{2x} \implies xdx = pdp \implies \frac{x^2}{2} = \frac{p^2}{2} + C \implies x^2 - p^2 = a$.
Usemos la relación del sistema original $F = 0$: $p^2 + q^2 - x^2 = 0$. Si elegimos $G = x^2 - p^2 = a$, sustituyendo en F: $(x^2 - a) + q^2 - x^2 = 0 \implies q^2 = a \implies q = \sqrt{a}$. Entonces $p = \sqrt{x^2 - a}$.
4. Integración Final:

$$dz = pdx + qdy = \sqrt{x^2 - a}\, dx + \sqrt{a}\, dy.$$

Integrando:

$$z = \int \sqrt{x^2 - a}\, dx + \sqrt{a} y + b.$$

(La integral de $\sqrt{x^2 - a}$ es estándar y da lugar a la solución completa con dos parámetros a, b).

2.9. Problemas Propuestos: Ecuaciones Cuasi-Lineales

1. Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:
   a) $u_x - 2yu_y + 5y^2 u = 0$
   b) $u_x + 2u_y = u$ en $\mathbb{R}^2$.
   c) $xu_x + cu = 0$.

2. Encontrar la función $u : (-1, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ que es solución de:

$$(1 + x)u_x + yu_y = x - 2y$$

   y satisface las condiciones $u(x, 0) = 1$ y $u(0, y) = \cos y$.

3. Describir todas las soluciones de la ecuación $u_y = 0$ definidas en la región $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$.

4. Describir todas las soluciones de la ecuación $u_x + 2u_y = u$ definidas en $\mathbb{R}^2$.

5. Resolver la ecuación $\frac{1}{y} u_x + u_y = \frac{e^{-x}}{x} u$, con condición inicial $u(x, 1) = h(x)$ para $x > 0$.

6. Resolver el problema de Cauchy:

$$(x + 2)u_x + 2yu_y = 2u, \quad u(-1, y) = \sqrt{y}, \quad y > 0.$$

7. Encontrar la solución de la ecuación $uu_x + u_y = 1$ con condición de Cauchy sobre la curva $x = y$, dada por $u = \frac{x}{2}$ (para $x < 2$).

8. Considérese la ecuación lineal general:

$$f(x, y)u_x + g(x, y)u_y = a(x, y)u + b(x, y).$$

Probar que el cambio de variables $v = x$, $w = w(x, y)$, donde $w(x, y) = C$ es la solución general de la ecuación diferencial ordinaria $y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$, transforma la ecuación en otra de la forma:

$$z_v = p(v, w)z + q(v, w).$$

Como aplicación, usar este cambio de variables para resolver:

$$y^3u_x - xy^2u_y = xu \quad \text{y} \quad xy(u_x - u_y) = (x - y)u.$$

9. Hallar una solución general de las siguientes ecuaciones:

   a) $ye^u u_x + xe^y u_y = \frac{y}{x}$
   b) $(x + u)u_x + yu_y = u + y^2$
   c) $\frac{b-c}{a}yuu_x + \frac{c-a}{b}xuu_y = \frac{a-b}{c}xy$, con a, b, c parámetros adecuados.

10. Probar que la ecuación $(x^2 - 1)u_x + xu_y = 1$ no tiene ninguna solución definida en todo $\mathbb{R}^2$.

11. Encontrar una familia de factores integrantes para la ecuación diferencial ordinaria:

$$(t^3y - 2y^4) + (y^3t - 2t^4)y'(t) = 0.$$

12. Sea u una solución de la ecuación $(ax+by)u_x+(cx+dy)u_y = u$ definida en todo $\mathbb{R}^2$, donde los parámetros satisfacen $a + d < 0$ y $ad - bc > 0$. Probar que u es idénticamente nula.

13. Encontrar una EDP de primer orden que satisfagan todos los planos tangentes a la familia de conos $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ con vértice en el origen.

14. Encontrar una EDP de primer orden que satisfagan todos los cilindros cuyas generatrices son paralelas a la recta dada por intersección de $ax + by + c = 0$ y $z = 0$.

15. Resolver el problema mixto de condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -\lambda u & x, t > 0 \\ u(0, t) = g(t) & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Nota: Los dominios $x > ct$ y $x < ct$ deben tratarse de modo diferente. La condición de frontera afecta a $x < ct$ y la inicial a $x > ct$.

16. **Modelo Biológico:** Para estudiar la absorción de nutrientes de un saltamontes, modelamos su tracto digestivo como un tubo de longitud l y sección A. A través del tracto fluyen nutrientes a velocidad c con concentración $n(x, t)$, siendo absorbidos a un ritmo proporcional a $\sqrt{n}$.

a) ¿Cuál es la EDP que modeliza el proceso?

b) Si el tracto está vacío en $t = 0$ y luego se introducen nutrientes con concentración constante n_0 por la boca ($x = 0$), formular las condiciones iniciales y de frontera.

c) Resolver el problema y dibujar la gráfica de la concentración de salida ($x = l$) para $t > 0$.

d) Interpretar físicamente por qué $u(x, t) = 0$ para $x > ct$.

17. Se sabe que una solución de $uu_x + yu_y = 1$ definida en el semiplano $y > 1$ satisface $u(0, e) = 1/2$. Calcular $u(1, e^2)$.

18. Hallar una solución general de la ecuación $2xuu_x + 2yuu_y + x^2 + y^2 = 0$.

19. Hallar la superficie $z = u(x, y)$ ($\mathcal{C}^1$ en el primer cuadrante) que contiene a la recta $\{(t, 2t, 1/2) : t > 0\}$ y cuyo plano tangente en cada punto (x_0, y_0, z_0) es perpendicular al vector $(x_0^2, y_0^2, x_0 + y_0)$. (Interpretación corregida del enunciado original "perpendicular al plano...").

20. Hallar una EDP de primer orden que tenga entre sus soluciones a las funciones $u_1 = -e^x$, $u_2 = -xy$ y $u_3 = e^x - 2xy$.

21. Hallar todas las soluciones de $x^2u_x + y^2u_y = (x + y)u$ en el primer cuadrante.

22. Hallar una EDP de primer orden que tenga entre sus soluciones a los planos paralelos a la recta $\{(t + 1, 2t + 2, 3t + 3) : t \in \mathbb{R}\}$.

23. Hallar una solución del problema de Cauchy $(x^2 - 1)u_x - 2yu_y = x - 1$, con $u(0, y) = y$, definida en $\Omega = (-1, \infty) \times \mathbb{R}$. Probar que la solución es única en $\Omega_1 = (-1, 1) \times \mathbb{R}$.

24. Construir una superficie $z = u(x, y)$ tal que por cada punto del eje Z pase una recta que forma con la vertical un ángulo igual a la distancia del punto al origen, y cuya proyección en el plano XY es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.

25. Hallar una solución general de $(y^2 - u^3)u_x + (u^3 - x)u_y = x - y^2$.

Capítulo 3

Clasificación EDP´s 2ºorden lineales

3.1. Clasificación de las EDPs lineales de segundo orden

Consideramos la ecuación general de segundo orden:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + F(x, y, u, u_x, u_y) = 0 \tag{3.1}$$

Donde $a_{ij} = a_{ij}(x, y)$. La **idea** es buscar un cambio de variables (transformación invertible):

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = \psi(x, y) \end{cases}$$

de modo que la ecuación se exprese de forma más sencilla. Usando la regla de la cadena para $u(x, y) = \mu(\xi, \eta)$:

- $u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x$
- $u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y$
- $u_{xx} = u_{\xi\xi}(\xi_x)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}(\eta_x)^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}$
- $u_{yy} = u_{\xi\xi}(\xi_y)^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}(\eta_y)^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}$
- $u_{xy} = u_{\xi\xi}(\xi_x\xi_y) + u_{\eta\eta}(\eta_x\eta_y) + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}$

Sustituyendo en , obtenemos la ecuación transformada:

$$\bar{a}_{11}u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}u_{\eta\eta} + \tilde{F} = 0 \tag{3.2}$$

donde los nuevos coeficientes son:

- $\bar{a}_{11} = a_{11}(\xi_x)^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}(\xi_y)^2$
- $\bar{a}_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y$
- $\bar{a}_{22} = a_{11}(\eta_x)^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}(\eta_y)^2$

3.1.1. Ecuaciones Características

Para simplificar la ecuación, buscamos que $\bar{a}_{11} = 0$. Esto implica que $\varphi(x, y)$ debe satisfacer la ecuación:

$$a_{11}(z_x)^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}(z_y)^2 = 0 \tag{3.3}$$

Lema 3.1.1: Relación con EDO

$\varphi(x, y) = C$ es solución general de la EDO $a_{11}(\frac{dy}{dx})^2 - 2a_{12}(\frac{dy}{dx}) + a_{22} = 0$ si y solo si φ es solución de (**??**).

Demostración. Por el Teorema de la Función Implícita, si $\varphi(x, y) = C$, entonces $\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$. Sustituyendo en la EDO:

$$a_{11}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right) + a_{22} = 0$$

Multiplicando por $(\varphi_y)^2$ obtenemos la ecuación en cuestión. □

3.1.2. Clasificación

A través de la EDO obtenida en el Lema, podemos sacar sus "soluciones .ª partir de la fórmula de la ecuación de segundo grado. Vamos a clasificar la EDP en función del número de soluciones que tenga esta ecuación. La clasificación depende del discriminante $\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$:

- **Hiperbólica**: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$. Existen dos familias de curvas características reales.
- **Parabólica**: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Existe una única familia de curvas características reales.
- **Elíptica**: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. No existen curvas características reales (son complejas).

Observación 3.1.1: Invarianza del Tipo y EDPs Mixtas

1. **EDP Mixta:** Puede ocurrir que la EDP sea "mixta", es decir, que tenga diferentes tipos (elíptica, hiperbólica o parabólica) en diferentes zonas de la región Ω donde se consideran los coeficientes a_{11}, a_{12}, a_{22}.
2. **Invarianza:** Se cumple que la ecuación transformada:

   $$\overline{a_{11}}u_{\xi\xi} + 2\overline{a_{12}}u_{\xi\eta} + \overline{a_{22}}u_{\eta\eta} + \overline{F} = 0$$

   también tiene el **mismo tipo** que la inicial, en el correspondiente punto. Se comprueba mediante la relación de los discriminantes:

   $$(\overline{a_{12}})^2 - \overline{a_{11}} \cdot \overline{a_{22}} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) \cdot D^2$$

   donde $D = \det\left(\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right) \neq 0$ (el cambio es biyectivo).

TIPO HIPERBÓLICO (en Ω)

Resolvemos las ecuaciones características. Al ser hiperbólica, el discriminante es positivo, lo que nos da dos raíces reales distintas ($+\sqrt{\dots}$ y $-\sqrt{\dots}$):

$$\left.\begin{matrix} +\sqrt{\Delta} \rightsquigarrow \varphi(x,y) = C \\ -\sqrt{\Delta} \rightsquigarrow \psi(x,y) = C \end{matrix}\right\} \implies \begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

La EDP inicial se transforma en:

$$\boxed{u_{\xi\eta} = \Phi(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta)} \quad \leftarrow \textbf{1ª FORMA CANÓNICA (Hiperbólica)}$$

Paso a la 2ª Forma Canónica

Incluso, podemos aplicar otro nuevo cambio de variables:

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \beta \\ \eta = \alpha - \beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{\xi+\eta}{2} \\ \beta = \frac{\xi-\eta}{2} \end{cases}$$

Aplicando la regla de la cadena a las derivadas:

$$u_\eta = u_\alpha \cdot \frac{1}{2} - u_\beta \cdot \frac{1}{2}$$

$$u_{\eta\xi} = \frac{1}{2}\left(u_{\alpha\alpha} \cdot \frac{1}{2} + u_{\alpha\beta}\frac{1}{2} - \left(u_{\beta\alpha}\frac{1}{2} + u_{\beta\beta}\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta})$$

La ecuación se convierte en:

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = 4\Phi} \quad \leftarrow \textbf{2ª FORMA CANÓNICA} \quad \text{(Prototipo: Ecuación de Ondas)}$$

Observación 3.1.2: Independencia Funcional

Se cumple que el Jacobiano es no nulo:

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Esto indica que ξ y η son funciones funcionalmente independientes.

TIPO ELÍPTICO (en Ω)

En este caso el discriminante es negativo ($\Delta < 0$). Las raíces de la ecuación característica son complejas conjugadas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \xrightarrow{\text{Integramos}} \varphi(x,y) = C \quad \text{(compleja)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}} \xrightarrow{\text{Integramos}} \varphi^*(x,y) = C \quad \text{(conjugada de } \varphi\text{)}$$

(Nota: En $\mathbb{C}$ son formalmente hiperbólicos).

Para eludir el manejo de funciones de variable compleja, tomamos el cambio basado en la parte real e imaginaria:

$$\left.\begin{array}{l}\xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \varphi^*(x,y)\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{Cambio Real}} \begin{cases}\alpha = \frac{\varphi+\varphi^*}{2} = \mathrm{Re}(\varphi) \\ \beta = \frac{\varphi-\varphi^*}{2i} = \mathrm{Im}(\varphi)\end{cases}$$

Sustituyendo las derivadas ($\xi_x = \alpha_x + i\beta_x$, etc.) en la ecuación original, se obtiene que los nuevos coeficientes cumplen $\overline{a_{11}} = \overline{a_{22}}$ y $\overline{a_{12}} = 0$.

Entonces la ecuación (1) queda:

$$\overline{a_{11}}u_{\alpha\alpha} + \overline{a_{22}}u_{\beta\beta} = \Phi \implies \boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = \widetilde{\Phi}}$$

Prototipos:

- Ecuación de Laplace: $\widetilde{\Phi} = 0$.
- Ecuación de Poisson: $\widetilde{\Phi} \neq 0$.

TIPO PARABÓLICO (en Ω)

En este caso el discriminante es nulo ($\Delta = 0$). Existe una única familia de características.

1. Elegimos $\xi = \varphi(x,y)$ de modo que $\varphi(x,y) = C$ sea la solución general de la ecuación característica única:
$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}.$$
2. Como segunda variable $\eta = \psi(x,y)$, tomamos simplemente **cualquier expresión** que haga que ξ y η sean funcionalmente independientes.

Definición 3.1.1: Independencia Funcional

Sea $M \subseteq \mathbb{R}^2$ un abierto y $f_1, f_2 : M \to \mathbb{R}$ funciones de clase $\mathcal{C}^1(M)$.
Se dice que f_1, f_2 son **funcionalmente independientes** en un punto $a \in M$ si el Jacobiano no se anula:

$$\frac{D(f_1,f_2)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y}\end{vmatrix} \neq 0$$

Estrategia práctica: Por ejemplo, si $\varphi_y \neq 0$, podemos tomar $\psi(x,y) = x$. El Jacobiano sería:

$$\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y \\ 1 & 0\end{vmatrix} = -\varphi_y \neq 0.$$

Sustituyendo en la ecuación, se eliminan los términos en $u_{\xi\xi}$, llegándose a la forma canónica:

$$\boxed{u_{\eta\eta} = \Phi(\xi,\eta,u,u_\eta,u_\xi)} \quad \text{(Prototipo: Ecuación del Calor)}$$

Ejemplos de Reducción a Forma Canónica

Ejemplo 3.1.1: Ejemplo 1: Caso Hiperbólico con Coeficientes Constantes

Consideramos la ecuación:

$$u_{xx} + 10u_{xy} + 9u_{yy} = y$$

Identificamos coeficientes: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 5$, $a_{22} = 9$. Discriminante: $\Delta = 5^2 - 1 \cdot 9 = 16 > 0$ (Hiperbólica).

1. Ecuaciones Características:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 \pm \sqrt{16}}{1} = 5 \pm 4 \implies \begin{cases} y' = 9 \\ y' = 1 \end{cases}$$

Integrando obtenemos las familias de curvas:

$$y = 9x + C_1 \implies \xi = 9x - y$$

$$y = x + C_2 \implies \eta = x - y$$

2. Cambio de Variables y Transformación: Calculamos las derivadas $(u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy})$ en función de ξ, η y sustituimos en la ecuación original. Al simplificar, los términos $u_{\xi\xi}$ y $u_{\eta\eta}$ se anulan (como se esperaba), y el coeficiente cruzado queda:

$$2\overline{a_{12}} = -64.$$

El término independiente y se despeja del sistema: $y = \frac{\xi - 9\eta}{8}$.
La ecuación reducida (1ª Forma Canónica) es:

$$-64u_{\xi\eta} = \frac{\xi - 9\eta}{8} \implies \boxed{u_{\xi\eta} = \frac{9\eta - \xi}{512}}$$

3. Integración (Solución General): Integramos respecto a ξ:

$$u_\eta = \int \frac{9\eta - \xi}{512} d\xi = \frac{1}{512}\left(9\eta\xi - \frac{\xi^2}{2}\right) + \varphi(\eta)$$

Integramos respecto a η:

$$u(\xi, \eta) = \frac{1}{512}\left(\frac{9\xi\eta^2}{2} - \frac{\xi^2\eta}{2}\right) + \Psi(\eta) + \Phi(\xi)$$

Finalmente, deshacemos el cambio $\xi = 9x - y$, $\eta = x - y$.
4. Segunda Forma Canónica: Si hacemos el cambio adicional $\alpha = \frac{\xi+\eta}{2}$, $\beta = \frac{\xi-\eta}{2}$, la ecuación se transforma en:

$$\frac{1}{4}(u_{\alpha\alpha} - 4u_{\beta\beta}) = \frac{9(\alpha - \beta) - (\alpha + \beta)}{512} \dots$$

Ejemplo 3.1.2: Ejemplo 2: Ecuación con Coeficientes Variables (Tricomi)

Consideramos la ecuación:

$$yu_{xx} + u_{yy} = 0$$

Aquí $a_{11} = y, a_{12} = 0, a_{22} = 1$. Discriminante $\Delta = -y$.
CASO A: Región Elíptica $(y > 0)$ $\Delta < 0$. Características complejas:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{i}{\sqrt{y}} \implies \sqrt{y}dy = \pm idx \implies \frac{2}{3}y^{3/2} = \pm ix + C$$

Tomamos el cambio real:

$$\alpha = 3x, \quad \beta = 2y^{3/2}$$

Al transformar la ecuación, llegamos a la forma canónica elíptica:

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = -\frac{1}{3\beta}u_\beta}$$

CASO B: Región Hiperbólica $(y < 0)$ $\Delta > 0$. Características reales.

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{-y}} \implies \xi = 3x + 2(-y)^{3/2}, \quad \eta = 3x - 2(-y)^{3/2}$$

La 1ª Forma Canónica resulta:

$$u_{\xi\eta} = \frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi - u_\eta)$$

Usando variables α, β (2ª Forma Canónica), se obtiene:

$$\boxed{u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \frac{1}{3\beta}u_\beta}$$

3.2. El Problema de Cauchy para EDPs Lineales de Segundo Orden

Antes de abordar el teorema general, realizamos una breve incursión mediante ejemplos para ilustrar la variedad de comportamientos (existencia, unicidad o carencia de ellas) que presentan estos problemas dependiendo del tipo de ecuación.

3.2.1. Ejemplos Preliminaresrate

Ejemplo 3.2.1: Compatibilidad y Analiticidad

Consideramos el sistema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(x,0) = \phi_0(x) \quad \text{con } \phi_0, \phi_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \\ u_t(x,0) = \phi_1(x) \end{cases}$$

Observamos que la propia ecuación impone una relación entre los datos iniciales. Si u es solución, en $t = 0$ se debe cumplir:

$$u_t(x,0) = u_{xx}(x,0) \implies \phi_1(x) = \phi_0''(x).$$

Este es un sistema **sobredeterminado**. Si no se cumple esta condición, no existe solución clásica.
Comparación con Cauchy-Kowalevski: Si consideramos el problema:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = \phi_1(t) \\ u_x(0,t) = \phi_2(t) \end{cases}$$

Por el Teorema de Cauchy-Kowalevski, este problema tiene una **única solución analítica** si ϕ_1, ϕ_2 son funciones **analíticas** reales (es decir, se pueden expresar como series de potencias convergentes).

Ejemplo 3.2.2: Ejemplo 3: Ecuación de Laplace y Principio de Reflexión

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0 \\ u(x,0) = 0 \\ u_y(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es solución, entonces $\Delta u = 0$ y se dice que u es **armónica**. En teoría compleja, sabemos que localmente $u = \text{Re}(f)$ para alguna función $f = u + iv$ analítica en Ω $(y > 0)$.
Principio de Reflexión de Schwarz: Dado que $u(x,0) = 0$ en el borde real, podemos extender la función $\tilde{f}$ al semiplano inferior $(y < 0)$ mediante:

$$\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z) & \text{en } \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & \text{en el reflejado} \end{cases}$$

La función extendida es analítica. Esto implica que la extensión de u:

$$\tilde{u}(x,y) = \begin{cases} u(x,y) & \text{si } y \geq 0 \\ -u(x,-y) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

es armónica en todo el entorno del eje x. **Conclusión:** Para que exista solución, el dato $u_y(x,0) = h(x)$ **debe ser analítico**.

Ejemplo 3.2.3: Ejemplo 4: Ecuación de Ondas y Fórmula de D'Alembert

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = f(x) \quad \text{con } f \in \mathcal{C}^2, g \in \mathcal{C}^1 \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases}$$

1. Clasificación y Reducción: Discriminante: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0 - 1(-1) = 1 > 0$ (**Hiperbólica**). Características:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1 = 0 \implies \frac{dx}{dt} = \pm 1 \implies \begin{cases} x - t = C_1 \\ x + t = C_2 \end{cases}$$

Cambio de variables: $\xi = x + t, \eta = x - t$. La ecuación se reduce a $u_{\xi\eta} = 0$.
2. Solución General: Integrando $u_{\xi\eta} = 0$ obtenemos $u(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$. Deshaciendo el cambio:

$$u(x,t) = \varphi(x+t) + \psi(x-t) \quad (*)$$

3. Imposición de Condiciones Iniciales ($t = 0$):

- $u(x,0) = \varphi(x) + \psi(x) = f(x)$
- $u_t(x,0) = \varphi'(x) \cdot 1 + \psi'(x) \cdot (-1) = \varphi'(x) - \psi'(x) = g(x)$

Integrando la segunda ecuación:

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_a^x g(s)ds + K$$

Resolviendo el sistema para φ y ψ:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \int_a^x g(s)ds + K\right] \\ \psi(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int_a^x g(s)ds - K\right] \end{cases}$$

4. Solución Final (Sustituyendo en *):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+t) + \int_a^{x+t} g(s)ds + K\right] + \frac{1}{2}\left[f(x-t) - \int_a^{x-t} g(s)ds - K\right]$$

Agrupando las integrales ($\int_a^{x+t} - \int_a^{x-t} = \int_{x-t}^{x+t}$):

$$\boxed{u(x,t) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\,ds}$$

Esta es la **Solución de D'Alembert**.

3.3. Teorema de Cauchy-Kowalevski (Enunciado Débil)

Consideramos un punto $X^0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Sea la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^N} = F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial^N u}{\partial x_1^{N-1}\partial x_n}, \ldots\right) \tag{3.4}$$

que resulta de despejar con respecto a una de sus derivadas de orden mayor (orden N) respecto a la variable x_1.

Ejemplo 3.3.1: Ejemplo de estructura

Para $N = 3, n = 2$:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} = F\left(x_1, x_2, u, u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_1x_1}, u_{x_1x_2}, u_{x_2x_2}, u_{x_1x_1x_2}, u_{x_1x_2x_2}\right)$$

Condiciones Iniciales (Datos de Cauchy)

Añadimos las siguientes condiciones sobre el hiperplano $x_1 = x_{10}$ (al fijar la variable x_1):

$$\begin{cases} u(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = \psi_0(x_2, x_3, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = \psi_1(x_2, \ldots, x_n) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = \psi_2(x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial^{N-1} u}{\partial x_1^{N-1}}(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = \psi_{N-1}(x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Definición 3.3.1: Función Analítica

Una función $f(x)$ es analítica en un punto x_0 si admite desarrollo en serie de potencias:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

En varias variables:

$$f(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} (x - x_0)^j (y - y_0)^k$$

Teorema 3.3.1: Enunciado del Teorema

Si las funciones $\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{N-1}$ son **analíticas** en un entorno de $\bar{X}^0 = (x_{20}, \ldots, x_{n0})$, y si la función F es **analítica** en un entorno de sus argumentos (en el punto evaluado), entonces:
El problema de Cauchy admite una **única solución analítica** $u(x_1, \ldots, x_n)$ en un entorno de $X^0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$.

Caso Particular ($N = 2, n = 2$)

Variables (t, x) y punto $X^0 = (t_0, x_0)$.

$$\begin{cases} u_{tt} = F(t, x, u, u_t, u_x, u_{tx}, u_{xx}) \\ u(t_0, x) = \varphi_0(x) \\ u_t(t_0, x) = \varphi_1(x) \end{cases}$$

Si F es analítica en $(t_0, x_0, u(t_0, x_0), \dots)$ y φ_0, φ_1 son analíticas alrededor de x_0, el problema tiene una **única solución analítica** en un entorno de (t_0, x_0).

Observación 3.3.1: Notas Adicionales

- Geométricamente, u_t representa la derivada en la dirección normal a la curva inicial $t = t_0$.
- Si F es **lineal**, la única solución que hay es analítica (porque si no, podría haber soluciones no analíticas o distribucionales, pero el teorema de Holmgren asegura la unicidad en el caso lineal).
- Si tenemos dos soluciones analíticas definidas en entornos distintos, estas coinciden y son únicas en la **intersección** de los entornos.

3.3.1. Aplicación Práctica: Resolución por Series

Ejemplo 3.3.2: Cálculo de Solución Analítica

Resolver el problema de Cauchy:

$$(P) \qquad \begin{cases} u_{xx} = u_t \\ u(0, t) = e^t \\ u_x(0, t) = 2 \end{cases}$$

1. Análisis: Los coeficientes (constantes) y los datos $(e^t, 2)$ son analíticos. Por el teorema, existe solución única analítica alrededor de $(0, 0)$.
2. Construcción de la Serie: Proponemos una solución en series de potencias respecto a x (ya que los datos están en $x = 0$):

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t) x^n$$

Calculamos las derivadas:

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty} K_n'(t) x^n$$

$$u_{xx} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) K_n(t) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) K_{n+2}(t) x^n$$

3. Relación de Recurrencia: Igualando coeficientes de x^n en la EDP $u_{xx} = u_t$:

$$(n+2)(n+1) K_{n+2}(t) = K_n'(t), \quad \forall n \geq 0.$$

4. Condiciones Iniciales:

- $u(0,t) = K_0(t) = e^t$.
- $u_x(0,t) = K_1(t) = 2 \implies K_1'(t) = 0$.

5. **Resolución de los Coeficientes:**
   - **Términos Impares:** $K_1(t) = 2$. $K_3(t) = \frac{K_1'(t)}{3\cdot 2} = 0$. Por recurrencia, $K_{2n+1}(t) = 0$ para todo $n \geq 1$. El único término impar es $2x$.
   - **Términos Pares:** $K_0(t) = e^t$. $K_2(t) = \frac{K_0'(t)}{2\cdot 1} = \frac{e^t}{2!}$. $K_4(t) = \frac{K_2'(t)}{4\cdot 3} = \frac{e^t}{4!}$. En general: $K_{2n}(t) = \frac{e^t}{(2n)!}$.
6. **Solución Final:** Sustituimos en la serie:

$$u(x,t) = 2x + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^t}{(2n)!} x^{2n} = 2x + e^t \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{\cosh x}$$

$$\boxed{u(x,t) = 2x + e^t \cosh x}$$

3.4. Problema de Cauchy y Teorema de Cauchy-Kowalevski

Teorema 3.4.1: Cauchy-Kowalevski (Enunciado débil)

Sea el problema de Cauchy para una ecuación de orden N:

$$\frac{\partial^N u}{\partial x_1^N} = F\left(x_i, u, \ldots, \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}\right)$$

con condiciones iniciales $\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k} = \varphi_k$ para $k = 0, \ldots, N-1$ en $x_1 = x_{10}$. Si F y todas las φ_k son **analíticas** en un entorno de sus argumentos, entonces el problema admite una **única solución analítica** en un entorno del punto inicial.

Ejemplo 3.4.1: Cálculo de solución analítica

Resolver $u_{xx} = u_t$ con $u(0,t) = e^t, u_x(0,t) = 2$. Buscamos $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} K_n(t) x^n$. Derivando e igualando potencias de x: $(n+2)(n+1)K_{n+2}(t) = K_n'(t)$.

- Condición $u(0,t) = e^t \Rightarrow K_0(t) = e^t$.
- Condición $u_x(0,t) = 2 \Rightarrow K_1(t) = 2$.

Recursión: $K_2(t) = \frac{K_0'}{2\cdot 1} = \frac{e^t}{2!}$, $K_4(t) = \frac{e^t}{4!}$, etc. $\Rightarrow K_{2n}(t) = \frac{e^t}{(2n)!}$. Para impares: $K_1(t) = 2, K_1' = 0 \Rightarrow K_3 = 0, K_5 = 0 \ldots$
Solución final: $u(x,t) = 2x + e^t \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!} = 2x + e^t \cosh(x)$.