

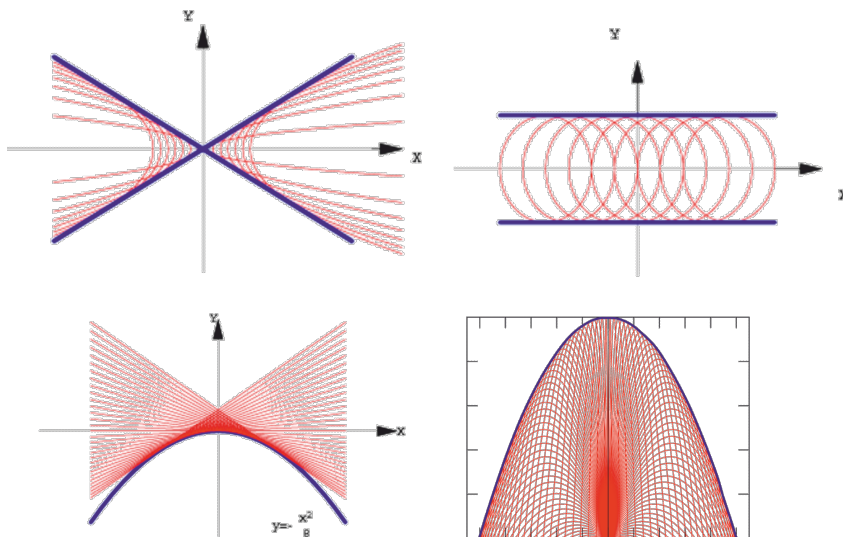
UNIVERSIDAD DE MURCIA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Notas de Clase

Basado en las clases de Antonio Linero Bas



Laura Fernández Sánchez

Curso 2025 – 2026

Índice general

1. Introducción a las EDPS	5
1.1. Tema 1: Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales	5
1.1.1. Contexto General: Ecuaciones Funcionales	5
1.1.2. Definiciones Básicas de EDPs	6
1.1.3. Clasificación según la Linealidad	7
1.1.4. Métodos de Integración Directa	8
1.1.5. Construcción de EDPs y Familias de Soluciones	10
1.1.6. Reducción de EDPs a Sistemas de Primer Orden	11
1.1.7. El Problema de Cauchy (Introducción)	11
1.2. Problemas Propuestos: Hoja 1 - Introducción	13
2. EDP's de primer orden	17
2.1. Introducción. Modelo de advección. Familias biparamétricas	17
2.1.1. Recordatorio Preliminar: Regla de Leibniz	17
2.1.2. Aplicación: El Modelo de Advección	17
2.2. Familias Biparamétricas de Curvas	18
2.2.1. Relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden	20
2.3. Ecuaciones Cuasi-Lineales de Primer Orden (EQL)	22
2.3.1. Definición y Estructura	22
2.3.2. Interpretación Geométrica	22
2.3.3. Construcción de las Curvas Características	23
2.3.4. Relación entre Características y Superficies Integrales	26
2.4. El Problema de Cauchy para Ecuaciones Cuasi-Lineales	27

2.4.1.	Planteamiento del Problema	28
2.4.2.	Teorema de Existencia y Unicidad	28
2.4.3.	Ejemplos Prácticos Resueltos	30
2.5.	Envolventes y Soluciones Singulares	36
2.5.1.	¿Qué es una Envolvente? (Intuición Geométrica)	36
2.5.2.	Cálculo de Envolventes	36
2.5.3.	Ejemplos de Envolventes en EDOs y EDPs	38
2.6.	Ecuación General de Primer Orden	40
2.6.1.	Planteamiento del Problema	40
2.6.2.	Conos de Monge	40
2.6.3.	Curvas Características (Franjas de Monge)	41
2.6.4.	Construcción de Superficies Integrales a través de Curvas Características	42
2.6.5.	Teorema de Existencia y Unicidad (Problema de Cauchy)	43
2.7.	Cálculo de Integrales Completas	46
2.7.1.	Conceptos Preliminares	46
2.7.2.	Casos Particulares de Resolución	47
2.7.3.	Ejercicio Resuelto: Superficies y Envolventes	49
2.8.	Ecuaciones de Pfaff y Método de Lagrange-Charpit	50
2.8.1.	Ecuaciones de Pfaff	50
2.8.2.	Métodos de Resolución de una Ecuación Integrable	54
2.8.3.	Método de Lagrange-Charpit	60
2.9.	Problemas Propuestos: Ecuaciones Cuasi-Lineales	61
3.	Clasificación EDP's 2ºorden lineales	65

Capítulo 1

Introducción a las EDPS

1.1. Tema 1: Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales

1.1.1. Contexto General: Ecuaciones Funcionales

Las Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDPs) son un subconjunto de un campo más amplio: las ecuaciones funcionales, donde la incógnita no es un número, sino una función.

Tipos de Ecuaciones Funcionales

Ejemplo 1.1.1: Ecuaciones Algebraicas y de Intervalo

- **Ecuación de Cauchy:** Buscar $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Solución: $f(x) = cx$ (funciones lineales).

- **Ecuación de D'Alembert (Intervalo):** $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right).$$

Solución: $f(x) = C$ (constante).

- **Ejercicio propuesto:** Hallar f continua tal que $f(x) + f(3x) = x$. (Pista: Iterando la relación se obtiene una serie geométrica).

Ejemplo 1.1.2: Ecuaciones en Diferencias Finitas

Relaciones de recurrencia del tipo:

$$x_{n+k} = F(n, x_{n+k-1}, \dots, x_n).$$

Describen evoluciones discretas (dinámica de poblaciones, algoritmos).

Ecuaciones Integrales

Aparecen cuando la incógnita está bajo el signo integral.

Definición 1.1.1: Ecuación de Volterra de 2ª Especie

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt$$

Donde $K(x, t)$ es el núcleo (kernel) y λ un parámetro.

Observación 1.1.1: Método de Resolución (Series de Neumann)

Se busca una solución en forma de serie de potencias respecto a λ :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda \varphi_1(x) + \lambda^2 \varphi_2(x) + \dots$$

Sustituyendo en la ecuación integral e igualando potencias de λ , obtenemos un sistema recursivo:

- $\varphi_0(x) = f(x)$.
- $\varphi_n(x) = \int_a^x K(x, t) \varphi_{n-1}(t) dt$.

Esto permite expresar la solución mediante núcleos iterados $K_n(x, t)$.

Ejemplo: Para $\varphi(x) = x - \int_0^x (t-x) \varphi(t) dt$, se puede comprobar que la solución es $\varphi(x) = \sin(x)$ (o similar según el núcleo exacto). En los apuntes se menciona $\varphi(x) = x - x^3/6$ como aproximación o solución a otro kernel.

1.1.2. Definiciones Básicas de EDPs

Sea $u = u(x_1, \dots, x_n) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función escalar.

Definición 1.1.2: Ecuación en Derivadas Parciales

Una EDP es una relación funcional del tipo:

$$F(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}, u_{x_1 x_1}, \dots) = 0$$

donde aparecen las variables independientes, la función incógnita y sus derivadas parciales hasta un orden finito.

Definición 1.1.3: Notación

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad D^\alpha u.$$

Convenio: u_{xy} denota derivar primero respecto a una variable y luego la otra (según el Teorema de Schwarz, el orden no importa para funciones C^2).

Definición 1.1.4: Orden de una EDP

El **orden** de una EDP es el orden de la derivada parcial más alta que aparece en la ecuación.

Ejemplo 1.1.3: Ejemplos de Orden

- $u_x - u_{xy} + u_{xxx} = 2u + x$. (Orden 3, variables x, y).
- $2x + 12y^2 - u_x + u_{yy} = 0$. (Orden 2).
- **Ecuación de Ondas:** $u_{xx} = u_{tt}$. (Orden 2). Una solución particular es $u(x, t) = \cos(x + 2t) - e^{x-2t}$. La solución general es $u(x, t) = f(x + 2t) + g(x - 2t)$.

1.1.3. Clasificación según la Linealidad**Definición 1.1.5: 1. EDP Lineal**

La ecuación es lineal respecto a la incógnita u y todas sus derivadas. Los coeficientes dependen solo de las variables independientes.

- Orden 1: $A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = D(x, y)$.
- Orden 2: $\sum A_{ij}u_{x_i x_j} + \sum B_i u_{x_i} + Cu = D$.

Si $D = 0$, es **homogénea**.

Definición 1.1.6: 2. EDP Cuasi-Lineal

La ecuación es **lineal respecto a las derivadas de orden máximo**. Los coeficientes de estas derivadas pueden depender de las derivadas de orden inferior y de la propia u .

- Orden 1: $A(x, y, u)u_x + B(x, y, u)u_y = C(x, y, u)$.
- Orden 2: $A(x, y, u, u_x, u_y)u_{xx} + \dots = G(x, y, u, u_x, u_y)$.

Definición 1.1.7: 3. EDP No Lineal

Cualquier ecuación que no sea cuasi-lineal. Ejemplo: $(u_x)^2 + u_y = 1$ o la ecuación de Monge-Ampère $u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 = f$.

Ejemplo 1.1.4: Clasificación Práctica

1. $u_x + 4u_y = u$. (**Lineal, Orden 1**). Solución general: $u(x, y) = e^x g(4x - y)$.
2. $2xu_x + yu_y = 2x$. (**Lineal, Orden 1**). Solución general: $u(x, y) = x + f(y^2/x)$.
3. $yu_x + (x - u)u_y = y$. (**Cuasi-Lineal, Orden 1**). Solución implícita: $u = \frac{1}{x}(1 - y^2/2) + \lambda$ (a verificar).
4. $u_x^2 + u_y^2 = u^2$. (**No Lineal**).

1.1.4. Métodos de Integración Directa

A diferencia de las EDOs donde la solución general depende de constantes arbitrarias (C_1, \dots, C_m) , en las EDPs la solución general depende de **funciones arbitrarias**. El número de funciones arbitrarias suele coincidir con el orden de la ecuación.

Casos Simples de Integración

- **Caso $u_y = 0$ (en \mathbb{R}^2):** Integramos respecto a y (tratando x como constante).

$$u(x, y) = \phi(x).$$

- **Caso $u_x = 0$ (en \mathbb{R}^4 , $u(x, y, z, t)$):**

$$u(x, y, z, t) = \Phi(y, z, t).$$

- **Caso $u_{xy} = 0$:** Integramos respecto a x : $u_y(x, y) = \psi(y)$. Integramos respecto a y : $u(x, y) = \int \psi(y) dy + f(x)$.

$$u(x, y) = f(x) + g(y).$$

- **Caso $u_{xy} = f(x, y)$ (No homogénea):** Integrando sucesivamente:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y f(\tau, s) ds \right) d\tau + \Phi(x) + \Psi(y).$$

Integración Mixta

Para $u_{xy} = f(x, y)$ en un dominio convexo: 1. Integramos respecto a y :

$$u_x(x, y) - u_x(x, y_0) = \int_{y_0}^y f(x, s) ds \implies u_x(x, y) = \alpha(x) + \int_{y_0}^y f(x, s) ds.$$

2. Integramos respecto a x :

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x \left(\int_{y_0}^y f(\tau, s) ds \right) d\tau + \Phi(x) + \Psi(y).$$

Muchas EDPs lineales de coeficientes constantes pueden reducirse a una integración directa mediante un cambio de coordenadas adecuado.

Ejemplo 1.1.5: Caso General $\alpha u_x + \beta u_y = 0$

Proponemos el cambio $\xi = \beta x - \alpha y$ (curvas características) y $\eta = \beta x + \alpha y$ (o cualquier otra independiente). Siguiendo el proceso anterior, llegamos a que la derivada en la dirección transversal es nula, obteniendo:

$$u(x, y) = \phi(\beta x - \alpha y).$$

Nota: También se puede ver geométricamente: el gradiente ∇u es ortogonal a (α, β) , por lo que u es constante en las líneas $\beta x - \alpha y = C$.

Ejemplo 1.1.6: Transporte Lineal con Coeficientes Constantes

Resolver $u_x + 4u_y = u$.

1. Cambio de Variable: Buscamos alinear una nueva coordenada con las curvas características.

$$\begin{cases} \xi = 4x + y \\ \eta = 4x - y \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{8}(\xi + \eta) \\ y = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{cases}$$

2. Regla de la Cadena:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \cdot 4 + u_\eta \cdot 4 \\ u_y &= u_\xi \cdot 1 + u_\eta \cdot (-1) \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$(4u_\xi + 4u_\eta) + 4(u_\xi - u_\eta) = u \implies 8u_\xi = u.$$

3. Integración: Es una EDO en ξ : $\frac{u_\xi}{u} = \frac{1}{8} \implies \ln|u| = \frac{\xi}{8} + K(\eta)$.

$$u(\xi, \eta) = C(\eta)e^{\xi/8}.$$

4. Deshacer el cambio:

$$u(x, y) = C(4x - y)e^{(4x+y)/8} = C(4x - y)e^{x/2+y/8}.$$

(Nota: Se puede reabsorber parte de la exponencial en la función arbitraria si se desea simplificar).

Ejemplo 1.1.7: Problema de Cauchy

Si añadimos la condición inicial $u(x, 0) = \cos(x)$. Usando la forma general simplificada $u(x, y) = e^x \phi(4x - y)$ (otra variante válida del cambio):

$$u(x, 0) = e^x \phi(4x) = \cos(x) \implies \phi(4x) = e^{-x} \cos(x).$$

Haciendo $t = 4x \implies x = t/4$: $\phi(t) = e^{-t/4} \cos(t/4)$. Solución final:

$$u(x, y) = e^x \cdot e^{-(4x-y)/4} \cos\left(\frac{4x-y}{4}\right) = e^{y/4} \cos\left(x - \frac{y}{4}\right).$$

Ejemplo 1.1.8: Ecuación de Ondas

Para $u_{yy} = a^2 u_{xx}$, el cambio canónico es $\xi = x + ay, \eta = x - ay$. Esto transforma la ecuación en $u_{\xi\eta} = 0$, cuya solución es la fórmula de D'Alembert:

$$u(x, y) = f(x + ay) + g(x - ay).$$

1.1.5. Construcción de EDPs y Familias de Soluciones

Al igual que eliminando constantes en una familia n -paramétrica de curvas obtenemos una EDO de orden n , eliminando **funciones arbitrarias** obtenemos EDPs.

Ejemplo 1.1.9: Eliminación de función arbitraria

Sea la familia $u(x, y) = e^{\sqrt{2xy+f(x-y)}}$. Derivando respecto a x e y y operando para eliminar $f(x - y)$ y $f'(x - y)$, llegamos a la relación:

$$u_x + u_y = \frac{x + y}{\ln u} u \iff (x + y)u = (u_x + u_y) \ln u.$$

Soluciones Implícitas**Observación 1.1.2: Teorema de la Función Inversa (Aplicado a EDPs)**

Sea $\Phi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función de clase \mathcal{C}^1 (por ejemplo, el cambio de coordenadas entre el espacio físico (x, y) y los parámetros característicos (t, s)).

Si en un punto $P_0 \in \Omega$ el Jacobiano es no nulo:

$$\det(J\Phi(P_0)) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial \phi_n}{\partial u_n} \end{pmatrix} \neq 0,$$

entonces existen entornos abiertos U de P_0 y V de $\Phi(P_0)$ tales que $\Phi : U \rightarrow V$ es una biyección con inversa $\Phi^{-1} : V \rightarrow U$ también de clase \mathcal{C}^1 .

Observación 1.1.3: Teorema de la Función Implícita

Sea $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase \mathcal{C}^1 definida en un abierto, denotando los puntos como (\mathbf{x}, z) . Sea $(\mathbf{x}_0, z_0) \in \Omega$ un punto tal que:

1. $F(\mathbf{x}_0, z_0) = 0$ (El punto está en la superficie).
2. $\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, z_0) \neq 0$ (Condición de no degeneración).

Entonces, existen entornos $U \subset \mathbb{R}^n$ de \mathbf{x}_0 y $W \subset \mathbb{R}$ de z_0 , y una única función $g : U \rightarrow W$ de clase \mathcal{C}^1 tal que $g(\mathbf{x}_0) = z_0$ y satisface idénticamente:

$$F(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in U.$$

Las derivadas parciales de la función implícita $z = g(\mathbf{x})$ vienen dadas por:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\partial F / \partial x_i}{\partial F / \partial z}.$$

Si la solución viene dada por $F(x, y, u) = 0$ (p.ej. $xu + y = \phi(yu + x)$), podemos hallar la EDP derivando implícitamente y eliminando ϕ' . Para garantizar que la relación define a $u(x, y)$, usamos el **Teorema de la Función Implícita**: Se requiere que $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$ en el punto de estudio. Si esto se cumple, existe una única solución local $u(x, y)$ diferenciable, cuyas derivadas se obtienen derivando la identidad.

1.1.6. Reducción de EDPs a Sistemas de Primer Orden

Cualquier EDP de orden superior puede transformarse en un sistema de ecuaciones de primer orden (aunque aumenta el número de incógnitas). Este proceso es crucial para teoremas de existencia como el de Cauchy-Kovalevskaya.

Mecanismo de conversión: Dada una EDP de orden k para u , introducimos nuevas incógnitas para todas las derivadas parciales de orden hasta $k - 1$.

Ejemplo 1.1.10: Reducción de la Ecuación de Laplace/Calor

Sea $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_t$ (Ecuación del calor inhomogénea o similar). Variables: x, y, z, t .

Incógnita original: u .

Definimos nuevas variables:

$$u_1 = u, \quad u_2 = u_x, \quad u_3 = u_y, \quad u_4 = u_z.$$

El sistema de primer orden equivalente (y compatible) sería:

$$(u_1)_x = u_2$$

$$(u_1)_y = u_3$$

$$(u_1)_z = u_4$$

$$(u_1)_t = (u_2)_x + (u_3)_y + (u_4)_z \quad (\text{Sustituyendo en la EDP original})$$

Además, se deben añadir las condiciones de compatibilidad (Schwarz) como $(u_2)_y = (u_3)_x$, etc., para cerrar el sistema.

1.1.7. El Problema de Cauchy (Introducción)

Consiste en hallar una solución particular que satisfaga ciertos datos iniciales.

Ejemplo 1.1.11: Resolución de un P.C.

$$\begin{cases} 5u_x + 6u_y = 0 \\ u(x, 0) = 2x^2 \end{cases}$$

1. Solución general: $u(x, y) = \phi(6x - 5y)$. 2. Imponer condición inicial en $y = 0$:

$$u(x, 0) = \phi(6x) = 2x^2.$$

3. Identificar la función ϕ : Si llamamos $t = 6x \implies x = t/6$.

$$\phi(t) = 2 \left(\frac{t}{6} \right)^2 = \frac{t^2}{18}.$$

4. Solución final:

$$u(x, y) = \frac{1}{18}(6x - 5y)^2.$$

Ejemplo 1.1.12: Reducción de la Ecuación de Ondas

Sea $u_{yy} = a^2 u_{xx}$. Hacemos el cambio $\xi = x + ay, \eta = x - ay$. Calculamos las segundas derivadas y sustituimos. Los términos cruzados se simplifican y llegamos a la forma canónica:

$$u_{\xi\eta} = 0 \implies u = \phi(\xi) + \psi(\eta).$$

Solución general (D'Alembert): $u(x, y) = \phi(x + ay) + \psi(x - ay)$.

Ejemplo 1.1.13: Verificación y Obtención de la EDP

Sea la relación $xu + y = \phi(uy + x)$ donde $\phi \in C^1(\mathbb{R})$. ¿Qué EDP satisface $u(x, y)$?

1. Derivamos implícitamente respecto a x :

$$u + xu_x = \phi'(uy + x) \cdot (u_y y + 1).$$

2. Derivamos implícitamente respecto a y :

$$xu_y + 1 = \phi'(uy + x) \cdot (u_y y + u).$$

3. Eliminamos el término arbitrario ϕ' dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{u + xu_x}{xu_y + 1} = \frac{yu_x + 1}{yu_y + u}.$$

Operando en cruz:

$$(u + xu_x)(u + yu_y) = (xu_y + 1)(yu_x + 1).$$

Desarrollando y simplificando se obtiene la EDP correspondiente.

Ejemplo 1.1.14: Obtención de EDP

Consideramos la EDP $u = h(x - uy)$

Derivamos respecto a x y y :

$$u_x = h' \cdot (1 - u_y y) \implies h' = \frac{u_x}{1 - u_y y}.$$

$$u_y = h' \cdot (-u - u_y y) \implies h' = \frac{u_y}{-u - u_y y}.$$

Igualemos las expresiones para h' :

$$\frac{u_x}{1 - u_x y} = \frac{u_y}{-u - u_y y}.$$

$$u_x(-u - u_y y) = u_y(1 - u_x y) \implies -u u_x - y u_x u_y = u_y - y u_x u_y.$$

Simplificando y reordenando:

$$u u_x + u_y = 0.$$

Esta es la ecuación de Burgers sin viscosidad (en forma implícita).

1.2. Problemas Propuestos: Hoja 1 - Introducción

Ecuaciones Funcionales e Integrales

1. (**Ecuación funcional de Cauchy**) Encontrar las funciones continuas $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Como consecuencia, resolver estas otras ecuaciones funcionales:

- a) $g(xy) = g(x) + g(y)$ con $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ continua.
- b) $h(xy) = h(x)h(y)$, con $h : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ continua.

2. Encontrar todas las funciones continuas $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ que satisfacen la ecuación funcional:

$$f(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{x+1}{2}\right), \quad x \in [0, 1].$$

3. a) Comprobar que la función $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ es solución de la ecuación integral de Volterra de segunda especie:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2} \varphi(t) dt.$$

- b) Resolver la ecuación integral $\varphi(x) = x - \int_0^x e^{x-t} \varphi(t) dt$, reduciéndola previamente a una ecuación diferencial.

Clasificación y Verificación de Soluciones

4. Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales, indicando si es EDO o EDP. Determina el orden, linealidad, y variables dependientes/independientes:

- a) $x''(t) + 5x'(t) - 6x(t) = 2 \cos(3t)$ (Vibraciones mecánicas).

- b) $x' = k(4-x)(1-x)$ (Velocidades de reacción química).

- c) $8 \frac{d^4 y}{dx^4} = x(1-x)$ (Deflexión de una viga).

- d) $y'' - 2xy' + 2py = 0$, $p \in \mathbb{R}$ (Ecuación de Hermite).

- e) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ (Ecuación de Laplace).

- f) $\frac{dP}{dt} = KP(P - \alpha)$ (Curva logística).
- g) $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial N}{\partial r} + KN$ (Fisión nuclear).
- h) $\frac{d^2 y}{dx^2} - \epsilon(1 - y^2) \frac{dy}{dx} + 9y = 0$ (Ecuación de Van der Pol).
- i) $\sqrt{1 - \alpha y} \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} = 0$ (Ecuación de Kidder).
5. Verificar que las siguientes funciones (soluciones fundamentales) son solución de la ecuación correspondiente:
- a) $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \implies u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ (Laplace 3D).
- b) $u = \ln(x^2 + y^2) \implies u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Laplace 2D).
- c) $u = \sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha^2 t}} \implies \alpha^2 u_{xx} = u_t$ (Calor).
- d) $u = f(x - at) + g(x + at) \implies a^2 u_{xx} = u_{tt}$ (Ondas).
6. Comprobar que $u = e^x f(2x - y)$, donde f es una función derivable arbitraria, es solución de $u_x + 2u_y = u$.
7. Consideramos la EDP $u_t = u_{xx} + 2 \operatorname{sech}^2(x)u$. Sea $v(t) = e^{k^2 t} \sinh(kx)$ ó $v(t) = e^{k^2 t} \cosh(kx)$. Comprobar que $u = v_x - \tanh(x)v$ satisface la ecuación.
8. Mostrar que la función:
- $$u = \ln \left(\frac{2f'(x)g'(y)}{(f(x) + g(y))^2} \right)$$
- donde $f, g \in \mathcal{C}^2$ con $f'(x)g'(y) > 0$, satisface la ecuación de Liouville $u_{xy} = e^u$.
9. Comprobar que $u = 4 \arctan(e^{ax+a^{-1}y})$ ($a \neq 0$) satisface la ecuación de Sine-Gordon $u_{xy} = \sin u$.
10. Dada la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV): $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$.
- a) Comprobar que la función $u(x, t; a, c) = \frac{c}{2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x - ct - a) \right)$ es solución.
- b) Si $u = f(x + ct)$ satisface la ecuación, probar que f cumple la EDO: $cy' + 6yy' + y''' = 0$. Mostrar que existe un valor de c tal que $f(r) = 2 \operatorname{sech}^2 r$ es solución.

Construcción de EDPs y Cambios de Variable

11. Dada la familia de paraboloides $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - z = 0$, encontrar la EDP de primer orden que satisface eliminando los parámetros α, β .
12. Encontrar EDPs de primer orden satisfechas por las siguientes familias (a, b parámetros, h función arbitraria):
- a) $z = (x + a)(y + b)$
- b) $ax^2 + by^2 + z^2 = 1$
- c) $z = xy + h(x^2 + y^2)$
- d) $z = h\left(\frac{xy}{z}\right)$
13. Considérese la ecuación lineal $f(x, y)u_x + g(x, y)u_y = a(x, y)u + b(x, y)$. Probar que el cambio de variables $v = x, w = w(x, y)$ (donde $w(x, y) = C$ es la solución general de $y' = g/f$) transforma la ecuación en $z_v = p(v, w)z + q(v, w)$.

14. Probar que $u(x, y) = yf(x) + g(x) + xh(y) + l(y)$ (con funciones arbitrarias de clase \mathcal{C}^2) es la solución general de $u_{xxyy} = 0$.
15. Con un cambio apropiado de coordenadas, resolver el problema de Cauchy ($u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$):

$$\begin{cases} 2u_x - 3u_y = 0 \\ u(x, x) = e^{5x} \end{cases}$$

Capítulo 2

EDP's de primer orden

2.1. Introducción. Modelo de advección. Familias biparamétricas

2.1.1. Recordatorio Preliminar: Regla de Leibniz

Antes de abordar las EDPs, recordemos un resultado fundamental del cálculo integral paramétrico que utilizaremos para deducir leyes de conservación.

Observación 2.1.1: Derivación bajo el signo integral (Regla de Leibniz)

Sea $f(\lambda, t)$ una función continua con derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ continua en un dominio $L \times [a, b]$.

- Si los límites son constantes:

$$F(\lambda) = \int_a^b f(\lambda, t) dt \implies F'(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) dt.$$

- **Caso General (Límites variables):** Si los límites de integración dependen del parámetro, $\Psi(\lambda)$ y $\varphi(\lambda)$, definimos $G(\lambda) = \int_{\varphi(\lambda)}^{\Psi(\lambda)} f(\lambda, t) dt$. Entonces:

$$\frac{dG}{d\lambda} = \int_{\varphi(\lambda)}^{\Psi(\lambda)} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, t) dt + f(\lambda, \Psi(\lambda))\Psi'(\lambda) - f(\lambda, \varphi(\lambda))\varphi'(\lambda).$$

2.1.2. Aplicación: El Modelo de Advección

Consideremos un problema físico de transporte en una dimensión.

- $u(x, t)$: Concentración de una sustancia (contaminante) en la posición x y tiempo t .
- c : Velocidad constante del fluido (arrastre).
- **Hipótesis:** No hay difusión (el contaminante no se crea, ni se destruye, ni se dispersa; solo se traslada).

Observación 2.1.2: Deducción de la Ecuación de Advección

Consideremos un tramo arbitrario $[0, b]$. La cantidad total de sustancia en el instante t es $\int_0^b u(x, t) dx$. Tras un intervalo de tiempo h , el fluido se ha desplazado una distancia ch . Por la ley de conservación de la masa:

$$\underbrace{\int_0^b u(x, t) dx}_{\text{Masa en } t} = \underbrace{\int_{ch}^{b+ch} u(x, t+h) dx}_{\text{Masa desplazada en } t+h}$$

Definimos la función auxiliar $E(h) = \int_{ch}^{b+ch} u(x, t+h) dx - \int_0^b u(x, t) dx \equiv 0$. Derivamos respecto a h en $h = 0$ usando la regla de Leibniz:

$$\left. \frac{d}{dh} \left(\int_{ch}^{b+ch} u(x, t+h) dx \right) \right|_{h=0} = \int_0^b \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) dx + c \cdot u(b, t) - c \cdot u(0, t) = 0.$$

Usando el Teorema Fundamental del Cálculo ($u(b, t) - u(0, t) = \int_0^b u_x(x, t) dx$):

$$\int_0^b \left(\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = 0.$$

Como el intervalo $[0, b]$ es arbitrario, el integrando debe ser nulo, obteniendo la **Ecuación del Transporte o Advección**:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

Observación 2.1.3: Solución General

Sabemos que la solución general es de la forma $u(x, t) = f(x - ct)$. Si imponemos una condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$, la solución única es $u(x, t) = u_0(x - ct)$.

2.2. Familias Biparamétricas de Curvas

Consideremos un sistema que define una familia de curvas en el espacio, dependiente de dos parámetros C_1 y C_2 :

$$\begin{cases} F(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \\ G(x, y, z, C_1, C_2) = 0 \end{cases}$$

donde:

- $(x, y, z) \in \Omega$, siendo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto.
- C_1, C_2 son constantes arbitrarias.
- $F, G \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathcal{A})$, con $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ el dominio de los parámetros.

Supongamos que un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ satisface ambas ecuaciones.

- **Definición de curva:** Podemos definir una curva localmente (por ejemplo, en forma paramétrica con parámetro x) si el Jacobiano respecto a y, z es no nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} x = x \\ y = \psi_1(x, C_1, C_2) \\ z = \psi_2(x, C_1, C_2) \end{cases} \quad (\text{en un entorno de } x_0)$$

- **Inversión de parámetros:** Se pueden despejar las constantes C_1 y C_2 en función de las coordenadas si el Jacobiano respecto a los parámetros es no nulo:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial C_1} & \frac{\partial F}{\partial C_2} \\ \frac{\partial G}{\partial C_1} & \frac{\partial G}{\partial C_2} \end{vmatrix} \neq 0 \implies \begin{cases} C_1 = f(x, y, z) \\ C_2 = g(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{en un entorno de } P)$$

Generación de Superficies

En la familia biparamétrica, seleccionamos una subfamilia imponiendo una relación funcional (familia monoparamétrica):

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \quad \text{o bien} \quad C_2 = \Psi(C_1).$$

Estas curvas, al moverse en el espacio, generan una superficie. Sustituyendo las expresiones obtenidas para los parámetros:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= f(x, y, z) \\ C_2 &= g(x, y, z) \\ \Phi(C_1, C_2) &= 0 \end{aligned} \right\} \implies \boxed{\Phi(f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0}$$

Observación 2.2.1: Interpretación Geométrica

La ecuación obtenida $\Phi(f, g) = 0$ representa el conjunto de superficies generadas por las curvas de la familia monoparamétrica $\Phi(C_1, C_2) = 0$.

Definición 2.2.1: Terminología

- Las curvas de la familia monoparamétrica que forman la superficie se llaman **curvas generatrices** o **características**.
- En contraposición, una curva se denomina **directriz** si no es una generatriz, pero tiene la propiedad de que **todas las generatrices pasan por ella** (intersecan a la directriz).

Si seleccionamos una subfamilia imponiendo una relación funcional entre los parámetros, digamos $\Phi(C_1, C_2) = 0$ (o $C_2 = \Psi(C_1)$), generamos una superficie.

Ejemplos de construcción de superficies

Ejemplo 2.2.1: Conos (Haces de rectas)

Consideramos la familia de rectas que pasan por el origen:

$$\begin{cases} C_2x - C_1y = 0 \implies C_2 = C_1 \frac{y}{x} \\ x - C_1z = 0 \implies C_1 = \frac{x}{z} \end{cases}$$

Despejando los parámetros: $C_1 = \frac{x}{z}$ y $C_2 = \frac{y}{z}$. Cualquier relación $\Phi(C_1, C_2) = 0$ genera una superficie cónica de la forma $\Phi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$.

Ejemplo 2.2.2: Hiperboloide (Superficie de Revolución)

Sea la familia:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - C_1 = 0 \implies C_1 = x^2 + y^2 \\ z - C_2 = 0 \implies C_2 = z \end{cases}$$

Queremos hallar la superficie integral que tiene como **directriz** la curva $\gamma : \{x = z, y = 1\}$.

1. Evaluamos los parámetros sobre la directriz γ :

$$C_1 = x^2 + 1 = z^2 + 1, \quad C_2 = z.$$

2. Buscamos la relación entre C_1 y C_2 :

$$C_1 = C_2^2 + 1 \implies \Phi(C_1, C_2) = C_1 - C_2^2 - 1 = 0.$$

3. Sustituimos C_1, C_2 por sus funciones originales $f(x, y, z)$ y $g(x, y, z)$:

$$(x^2 + y^2) - z^2 - 1 = 0 \implies x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

El resultado es un hiperboloide de una hoja.

2.2.1. Relación con Ecuaciones en Derivadas Parciales de Primer Orden

A continuación, pondremos en relación estas familias biparamétricas de curvas con ciertas EDPs.

Dada $\Phi(f(x, y, z), g(x, y, z)) = 0$ una superficie engendrada por el haz, supongamos que $f, g \in C^1(\Omega)$. Aplicando el Teorema de la Función Implícita obtenemos $z = u(x, y)$. Derivamos respecto a x e y :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial f} \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial g} \left(\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0 \end{cases}$$

Si queremos que haya soluciones no triviales para (Φ_f, Φ_g) , imponemos que el determinante del

sistema sea cero:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante y agrupando términos mediante los Jacobianos $\frac{D(f,g)}{D(\cdot,\cdot)}$, obtenemos:

$$\frac{D(f,g)}{D(y,z)} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{D(f,g)}{D(z,x)} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(f,g)}{D(x,y)}$$

Observación 2.2.2: Interpretación Vectorial

Esta es la **EDP asociada** a la familia $\Phi(f,g) = 0$. Se puede reescribir como producto escalar:

$$\vec{V} \cdot \vec{N} = 0$$

donde:

- $\vec{N} = (\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, -1)$ es el vector normal a la superficie $z = u(x,y)$.
- $\vec{V} = (a, b, c) = (\frac{D(f,g)}{D(y,z)}, \frac{D(f,g)}{D(z,x)}, \frac{D(f,g)}{D(x,y)})$ es el vector tangente.

Esto expresa la condición común que deben satisfacer los planos tangentes: el vector \vec{V} es tangente a las superficies generadas por el haz.

Proposición 2.2.1: La EDP Lineal/Cuasilineal

Desarrollando el determinante anterior, obtenemos una ecuación de la forma:

$$a(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x,y,z) \frac{\partial z}{\partial y} = c(x,y,z) \quad (2.2)$$

donde los coeficientes a, b, c vienen dados por los Jacobianos de la transformación:

$$a = \frac{\partial(f,g)}{\partial(y,z)}, \quad b = \frac{\partial(f,g)}{\partial(z,x)}, \quad c = \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)}.$$

Observación 2.2.3: Interpretación Geométrica

La ecuación anterior se puede escribir como producto escalar:

$$(a, b, c) \cdot (p, q, -1) = 0 \iff \vec{V} \cdot \vec{N} = 0.$$

Esto significa que el campo vectorial $\vec{V} = (a, b, c)$ es **tangente** a la superficie integral en todo punto. Las curvas integrales de este campo \vec{V} son precisamente las características.

2.3. Ecuaciones Cuasi-Lineales de Primer Orden (EQL)

2.3.1. Definición y Estructura

Como vimos anteriormente, al desarrollar el determinante de la familia biparamétrica, obtenemos una estructura común para las ecuaciones de primer orden.

Definición 2.3.1: Ecuación Cuasi-Linear (EQL)

Una ecuación en derivadas parciales de primer orden se dice **cuasi-lineal** si es lineal respecto a las derivadas parciales de la función incógnita $z(x, y)$. Su forma general es:

$$a(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial x} + b(x, y, z) \frac{\partial z}{\partial y} = c(x, y, z) \quad (2.3)$$

donde los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ están definidos en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Se asume la condición de no degeneración $|a| + |b| \neq 0$ en Ω .

Buscamos una solución $z = \phi(x, y)$ definida en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tal que su gráfico $\mathcal{S} = \{(x, y, \phi(x, y)) : (x, y) \in D\}$ esté contenido en Ω y satisfaga la ecuación idénticamente.

Observación 2.3.1: Carácter Local de la solución

Dos soluciones (ϕ_1, Ω_1) y (ϕ_2, Ω_2) , diremos que son iguales si se cumple que $\phi_1|_{\Omega_1 \cap \Omega_2} = \phi_2|_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

La función incógnita se podrá poner en forma de superficie poniendo $z = \phi(x, y)$.

Definición 2.3.2: Superficie Integral

A la solución de (2.3) le llamaremos **superficie integral de la EQL**.

2.3.2. Interpretación Geométrica

Los coeficientes de la EQL definen un campo vectorial en Ω :

$$\vec{V}(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z)).$$

Sabemos que un vector normal a la superficie integral $z = \phi(x, y)$ es:

$$\vec{N} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, -1 \right).$$

La ecuación diferencial se puede reescribir como un producto escalar:

$$a \frac{\partial \phi}{\partial x} + b \frac{\partial \phi}{\partial y} - c = 0 \iff (a, b, c) \cdot \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, -1 \right) = 0 \iff \vec{V} \cdot \vec{N} = 0.$$

Observación 2.3.2: Condición de Tangencia

La condición $\vec{V} \cdot \vec{N} = 0$ implica que el vector normal \vec{N} en cualquier punto P de la superficie integral es perpendicular al vector \vec{V} . Por tanto, $\vec{V} = (a, b, c)$ es un vector

tangente a la superficie integral en todo punto. Esto sugiere que las superficies integrales están "tejidas" por curvas que son tangentes al campo \vec{V} . Este campo de vectores tangentes a la superficie integral son las **direcciones características** que dan lugar a las **curvas características**.

2.3.3. Construcción de las Curvas Características

Nos preguntamos: **¿Cómo construimos analíticamente estas curvas?**

Sea γ una curva integral parametrizada por $t \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

cuyo vector tangente en cada punto es $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Condición de Paralelismo

Para que γ sea una curva característica, su vector tangente debe ser paralelo al campo vectorial de coeficientes $\vec{V} = (a, b, c)$ en todo punto.

$$\gamma'(t) \parallel \vec{V}(\gamma(t)) \implies (x', y', z') = \lambda(t) \cdot (a, b, c)$$

Esto se expresa tradicionalmente mediante la igualdad de razones:

$$\frac{x'}{a(x, y, z)} = \frac{y'}{b(x, y, z)} = \frac{z'}{c(x, y, z)} = \lambda(t)$$

Observación 2.3.3: Reparametrización y el Sistema (SC)

En la ecuación anterior aparece un factor de proporcionalidad $\lambda(t)$. Sin embargo, mediante una **reparametrización conveniente** del parámetro t , podemos conseguir que el parámetro de proporcionalidad sea $\lambda(t) = 1$. De este modo, buscamos una curva cuyo vector tangente sea **justamente** (a, b, c) .

Esto nos lleva directamente al **Sistema Característico (SC)** de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:

$$(SC) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \end{cases} \quad (2.4)$$

Teorema 2.3.1: Existencia y Unicidad de la Curva

Si los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, podemos aplicar la teoría general de EDOs (Teorema de Picard-Lindelöf).

Dado un punto inicial $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$, si imponemos las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0$$

entonces el sistema tiene **solución única**.

Conclusión: Por cada punto $P \in \Omega$ pasa una **única** curva característica (salvo reparametrización).

Definición 2.3.3: Sistema Característico

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ una curva en el espacio. Diremos que es una **curva característica** de la EQL si su vector tangente es paralelo al campo de coeficientes (a, b, c) . Esto nos lleva al sistema de EDOs autónomo:

$$\begin{cases} x'(t) = a(x, y, z) \\ y'(t) = b(x, y, z) \\ z'(t) = c(x, y, z) \end{cases} \quad (2.5)$$

En notación de diferenciales, esto equivale a la condición de paralelismo:

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{c}.$$

Construcción de la Solución General

Para resolver el sistema característico, buscamos dos integrales primeras independientes funcionales, $K_1(x, y, z) = C_1$ y $K_2(x, y, z) = C_2$, constantes sobre las curvas características. La solución general de la EQL se expresa como una relación arbitraria entre estas constantes:

$$\Phi(K_1, K_2) = 0 \quad \text{o bien} \quad K_2 = \Psi(K_1).$$

Proposición 2.3.1: Esquema Resumen: Resolución de EQL

El procedimiento general para resolver una ecuación cuasi-lineal $au_x + bu_y = c$ mediante el método de las características se resume en el siguiente flujo:

1. Ecuación Original (EQL)	$\xrightarrow{\text{Asociar}}$	Sistema Característico (EDOs) $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, z) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, z) \\ \frac{dz}{dt} = c(x, y, z) \end{cases}$
2. Integración (Sin cond. iniciales)	$\xrightarrow{\text{Resolver}}$	Solución Paramétrica General $\begin{cases} x = X(t, c_1, c_2, c_3) \\ y = Y(t, c_1, c_2, c_3) \\ z = Z(t, c_1, c_2, c_3) \end{cases}$
3. Obtención de Invariantes (Eliminar cte. arbitraria)	$\xrightarrow[\text{el parámetro } t]{\text{Eliminar}}$	Integrales Primeras (Haz) $\begin{cases} K_1(x, y, z) = C_1 \\ K_2(x, y, z) = C_2 \end{cases}$
4. Solución General (Familia monoparamétrica)	$\xrightarrow[\text{Implícita}]{\text{Relación}}$	Superficie Integral $\boxed{\Phi(K_1, K_2) = 0} \quad \text{o} \quad K_2 = \Psi(K_1)$

Interpretación: Lo que ocurre geoméricamente es que la unión de estas curvas características "genera" la superficie solución Σ .

Observación 2.3.4: ¿Por qué tenemos que eliminar el parámetro t ?

Cuando resolvemos el sistema, obtenemos una curva característica parametrizada por t :

$$\Gamma(t) = (x(t), y(t), u(t))$$

Esta es una línea unidimensional en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, la solución de una Ecuación en Derivadas Parciales (EDP) de dos variables, $u(x, y)$, representa una **superficie** (una variedad de dimensión 2).

El parámetro t te dice en qué punto de la curva estás. Pero para definir una superficie, no te interesa saber cuándo "pasaste por un punto, sino **qué puntos pertenecen a la forma geométrica**.

Eliminar t es, esencialmente, proyectar o colapsar la información temporal para quedarte solo con la traza geométrica de las características en el espacio (x, y, u) .

Veámoslo de la siguiente manera: los invariantes

$$K_1(x, y, u) = C_1 \quad \text{y} \quad K_2(x, y, u) = C_2$$

son funciones que permanecen constantes a lo largo de cada trayectoria característica.

Si te mueves sobre una característica, t cambia, pero K_1 y K_2 no. Por lo tanto, K_1 y K_2 actúan como etiquetas o nombres para cada curva.

- Si dejas t , estás describiendo el movimiento **dentro** de una curva.

- Si eliminas t y buscas una relación $\Phi(K_1, K_2) = 0$, estás seleccionando un **haz de curvas** que, juntas, tejen la superficie integral Σ .

Para definir un punto en una superficie en \mathbb{R}^3 , necesitas 2 grados de libertad. En el método de las características, estos suelen ser:

- t : El parámetro que te mueve a lo largo de la curva.
- s : Un parámetro que te mueve de una curva a otra (normalmente introducido por la curva directriz γ).

La solución final $u(x, y)$ debe ser una función que dependa únicamente de las coordenadas espaciales x e y . Si t permaneciera en la ecuación, u sería una función de (x, y, t) , lo cual carece de sentido para el problema original, ya que t es una variable auxiliar que nosotros inventamos para convertir la EDP en un sistema de EDOs.

2.3.4. Relación entre Características y Superficies Integrales

Teorema 2.3.2: Propiedad Fundamental de las Superficies Integrales

Toda superficie integral S , dada por $z = \phi(x, y)$, de la ecuación cuasi-lineal (EQL) está generada por curvas características. Es decir, si un punto $P_0 \in S$, la curva característica que pasa por P_0 está contenida enteramente en la superficie S .

Demostración. Sea $z = \phi(x, y)$ una solución de la ecuación cuasi-lineal definida en un abierto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de la superficie S , de modo que $z_0 = \phi(x_0, y_0)$.

Consideramos la **curva característica** $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ definida por el sistema característico:

$$(SC) \quad \begin{cases} x'(t) = a(x, y, z) \\ y'(t) = b(x, y, z) \\ z'(t) = c(x, y, z) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $z(t_0) = z_0$. Sabemos que esta solución es **única** en un intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$.

Definimos la **función desviación** $U(t)$ como la diferencia entre la coordenada z de la curva y el valor de la superficie en ese punto $(x(t), y(t))$:

$$U(t) := z(t) - \phi(x(t), y(t)), \quad t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta).$$

Paso 1: Condición Inicial. Evaluamos en t_0 :

$$U(t_0) = z(t_0) - \phi(x(t_0), y(t_0)) = z_0 - \phi(x_0, y_0) = 0,$$

ya que el punto P_0 pertenece a la superficie por hipótesis.

Paso 2: Derivada Temporal. Derivamos $U(t)$ respecto a t aplicando la regla de la cadena:

$$\frac{dU}{dt} = z'(t) - \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right].$$

Sustituimos las expresiones del sistema característico ($x' = a, y' = b, z' = c$):

$$\frac{dU}{dt} = c(x, y, z) - \frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot a(x, y, z) - \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot b(x, y, z).$$

Como $z(t) = U(t) + \phi(x(t), y(t))$, sustituimos z para convertirla en una ecuación autónoma en U :

$$\frac{dU}{dt} = c(x, y, U + \phi) - a(x, y, U + \phi)\phi_x - b(x, y, U + \phi)\phi_y = F(t, U). \quad (2.6)$$

Como los coeficientes $a, b, c \in C^1$, la función $F(t, U)$ es Lipschitziana respecto a U .

Paso 3: Aplicación del Teorema de Unicidad. Consideramos el Problema de Valor Inicial para U :

$$(\tilde{P}) \quad \begin{cases} \frac{dU}{dt} = F(t, U) \\ U(t_0) = 0 \end{cases}$$

Nos preguntamos: ¿Es $V(t) \equiv 0$ una solución? Sustituimos $V = 0$ en la ecuación diferencial (2.6):

$$\frac{dV}{dt} \stackrel{?}{=} c(x, y, \phi) - a(x, y, \phi)\phi_x - b(x, y, \phi)\phi_y.$$

El lado derecho es **exactamente cero** porque $z = \phi(x, y)$ es solución de la EQL ($a\phi_x + b\phi_y = c$).

Por tanto, $V(t) = 0$ es solución. Por el **Teorema de Picard-Lindelöf** (Existencia y Unicidad de EDOs), es la **única** solución.

Conclusión:

$$U(t) \equiv 0 \implies z(t) - \phi(x(t), y(t)) = 0 \implies z(t) = \phi(x(t), y(t)).$$

Esto significa que la curva característica $\gamma(t)$ permanece siempre sobre la superficie integral S . \square

Teorema 2.3.3: Generación de Superficies

1. Si una superficie \mathcal{S} está generada por una familia uniparamétrica de curvas características, entonces \mathcal{S} es una superficie integral de la EQL.
2. Recíprocamente, toda superficie integral \mathcal{S} de la EQL está generada por curvas características. (Si un punto está en la superficie, toda la curva característica que pasa por él está contenida en la superficie).

Proposición 2.3.2: Intersección de Soluciones

Si dos superficies integrales \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 tienen un punto P en común, entonces comparten la curva característica entera que pasa por P . Recíprocamente, si dos superficies integrales se cortan transversalmente a lo largo de una curva Γ , entonces Γ es necesariamente una curva característica.

2.4. El Problema de Cauchy para Ecuaciones Cuasi-Lineales

Del conjunto infinito de soluciones de la Ecuación Cuasi-Linear (EQL), queremos seleccionar una específica. Para ello, imponemos una condición geométrica adicional.

2.4.1. Planteamiento del Problema

Consideramos una curva Γ en el espacio, denominada **curva directriz** o curva de datos iniciales. Parametrizamos esta curva en función de $s \in I \subseteq \mathbb{R}$:

$$\Gamma : \begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \\ z = h(s) \end{cases}$$

donde f, g, h son funciones de clase \mathcal{C}^1 en un entorno de s_0 .

Definición 2.4.1: Problema de Cauchy (PC)

El problema consiste en encontrar una superficie integral $z = u(x, y)$ de la ecuación:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$$

tal que contenga a la curva Γ . Es decir, que se cumpla la condición de compatibilidad:

$$h(s) = u(f(s), g(s)), \quad \forall s \in I.$$

Ejemplo 2.4.1: Caso Particular (Condición Inicial Clásica)

Si la curva directriz está sobre el plano $y = 0$ (o $x = 0$), el problema suele presentarse como:

$$\begin{cases} \text{(EQL)} \\ u(x, 0) = \rho(x) \end{cases} \implies \Gamma : \begin{cases} x = s \\ y = 0 \\ z = \rho(s) \end{cases}$$

2.4.2. Teorema de Existencia y Unicidad

El siguiente resultado nos da las condiciones para asegurar que el problema tiene solución y que esta es única en un entorno local.

Teorema 2.4.1: Existencia y Unicidad Local

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un conjunto abierto y sea $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Consideramos el problema de Cauchy (PC) bajo las siguientes hipótesis:

1. **Regularidad de la Ecuación:** Los coeficientes $a, b, c \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.
2. **Regularidad de la Curva:** Las funciones $f, g, h \in \mathcal{C}^1(s_0 - \delta, s_0 + \delta)$ con $\delta > 0$, tales que:

$$f(s_0) = x_0, \quad g(s_0) = y_0, \quad h(s_0) = z_0.$$

3. **Condición de Transversalidad:** En el punto P_0 (correspondiente a s_0), el vector tangente a la proyección de la curva directriz (f', g') **no es paralelo** al vector característico base (a, b) . Esto se expresa mediante el determinante:

$$\Delta(s_0) = \begin{vmatrix} a(x_0, y_0, z_0) & b(x_0, y_0, z_0) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.7)$$

Conclusión: Entonces, el Problema de Cauchy tiene **solución única** $z = u(x, y)$ definida en un entorno U del punto (x_0, y_0) .

Observación 2.4.1: Interpretación Geométrica de la Transversalidad

La condición $\Delta \neq 0$ implica que la proyección de la curva inicial Γ sobre el plano XY **no es tangente** a las curvas características proyectadas (curvas base).

- Si $\Delta \neq 0$: Las características "atraviesan" la curva inicial, generando una superficie bien definida.
- Si $\Delta = 0$ en un punto: La curva inicial es tangente a una característica. El Teorema de la Función Inversa falla y no podemos despejar los parámetros.
- Si Γ es ella misma una curva característica: El problema puede tener infinitas soluciones o ninguna (dependiendo de la compatibilidad).

(Demostración Constructiva)

Consideramos la parametrización obtenida al resolver el sistema característico:

$$\begin{cases} X = X(t, s) \\ Y = Y(t, s) \\ Z = Z(t, s) \end{cases}$$

con las condiciones iniciales en $t = 0$: $X(0, s) = f(s)$, $Y(0, s) = g(s)$, $Z(0, s) = h(s)$.

Sabemos que X, Y, Z satisfacen las ecuaciones características:

$$\frac{\partial X}{\partial t} = a(X, Y, Z), \quad \frac{\partial Y}{\partial t} = b(X, Y, Z), \quad \frac{\partial Z}{\partial t} = c(X, Y, Z).$$

Gracias a la condición de transversalidad, en un entorno de la curva inicial existe la transformación inversa:

$$t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

Definimos $u(x, y) = Z(T(x, y), S(x, y))$.

Verificación de la EDP. Queremos comprobar que $au_x + bu_y = c$. Derivamos u respecto a x e y usando la regla de la cadena:

$$u_x = \frac{\partial Z}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial Z}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial S} \frac{\partial S}{\partial y}.$$

Para hallar las parciales de T y S , diferenciamos las identidades $x = X(T(x, y), S(x, y))$ e $y = Y(T(x, y), S(x, y))$ respecto a x :

$$\begin{cases} 1 = X_t T_x + X_s S_x \\ 0 = Y_t T_x + Y_s S_x \end{cases}$$

Resolvemos este sistema lineal para T_x y S_x usando la Regla de Cramer. El determinante del sistema es el Jacobiano $J = X_t Y_s - X_s Y_t$ (que es no nulo por transversalidad).

$$T_x = \frac{Y_s}{J}, \quad S_x = \frac{-Y_t}{J}.$$

Análogamente, derivando respecto a y :

$$T_y = \frac{-X_s}{J}, \quad S_y = \frac{X_t}{J}.$$

Sustituimos estas expresiones en la ecuación original $au_x + bu_y$:

$$\begin{aligned} au_x + bu_y &= X_t \left(Z_t \frac{Y_s}{J} + Z_s \frac{-Y_t}{J} \right) + Y_t \left(Z_t \frac{-X_s}{J} + Z_s \frac{X_t}{J} \right) \\ &= \frac{1}{J} [X_t Z_t Y_s - X_t Z_s Y_t - Y_t Z_t X_s + Y_t Z_s X_t] \\ &= \frac{1}{J} [Z_t (X_t Y_s - Y_t X_s) + Z_s (Y_t X_t - X_t Y_t)] \\ &= \frac{1}{J} [Z_t \cdot J + 0] = Z_t. \end{aligned}$$

Como $Z_t(t, s) = c(X, Y, Z)$, concluimos que $au_x + bu_y = c$. □

2.4.3. Ejemplos Prácticos Resueltos

Ejemplo 2.4.2: Resolución de un Problema de Cauchy (Tres Enfoques)

Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} u_x + y u_y = 0 \\ u(0, y) = f(y), \quad \text{donde } f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \end{cases}$$

1. Método del Sistema Característico (Directo)

Planteamos el sistema de EDOs asociado a los coeficientes $(1, y, 0)$:

$$\begin{cases} x'(t) = 1 \implies x(t) = t + c_1 \\ y'(t) = y \implies y(t) = c_2 e^t \\ z'(t) = 0 \implies z(t) = c_3 \end{cases}$$

Queremos que la curva pase por un punto genérico de la curva inicial $(0, y_0, f(y_0))$ en $t = 0$:

- $x(0) = 0 \implies c_1 = 0 \implies x = t.$
- $y(0) = y_0 \implies c_2 = y_0 \implies y = y_0 e^t.$
- $z(0) = f(y_0) \implies c_3 = f(y_0) \implies z = f(y_0).$

Eliminamos el parámetro t y la constante y_0 :

$$t = x \implies y = y_0 e^x \implies y_0 = y e^{-x}.$$

Sustituyendo en la ecuación de z :

$$z = f(y_0) \implies \boxed{u(x, y) = f(y e^{-x})}.$$

Estudio de la Unicidad (Transversalidad): Comprobamos la condición sobre la curva inicial parametrizada como $x = 0, y = s$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y_0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Como el determinante es distinto de cero, tenemos todas las hipótesis para asegurar ****Existencia y Unicidad****.

2. Método de los Invariantes (Solución General)

Buscamos la relación entre y y x eliminando dt :

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{y} \implies \int dy/y = \int dx \implies \ln |y| = x + C \implies y e^{-x} = C_1.$$

Para z , tenemos $dz = 0 \implies z = C_2$.

La solución general es de la forma $z = \phi(C_1)$, es decir:

$$u(x, y) = \phi(y e^{-x}).$$

Aplicamos la condición inicial $u(0, y) = f(y)$:

$$f(y) = \phi(y \cdot e^0) \implies \phi(y) = f(y).$$

Por tanto, la solución es $u(x, y) = f(y e^{-x})$.

3. Método Constructivo (Parametrización Completa)

Usando la demostración del Teorema de Cauchy. Parametrizamos la curva inicial como $\Gamma(s) : (0, s, f(s))$. Resolvemos el sistema característico con condiciones $x(0) = 0, y(0) = s, z(0) = f(s)$:

$$\begin{cases} x(t, s) = t \\ y(t, s) = s e^t \\ z(t, s) = f(s) \end{cases}$$

Invertimos el cambio de variables (despejamos s y t en función de x, y):

- De la primera ec.: $t = x$.
- De la segunda ec.: $y = se^x \implies s = ye^{-x}$.

Sustituimos en $z(t, s)$:

$$z = f(s) \implies \boxed{u(x, y) = f(ye^{-x})}.$$

Ejemplo 2.4.3: Coeficientes Variables

$$\begin{cases} yu_x + xu_y = xy \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

Nota: Asumimos $yu_x + xu_y = xy$ basándonos en las características $x' = y, y' = x, z' = xy$.

1. **Curvas características:**

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{xy}$$

De la primera igualdad: $x dx = y dy \implies x^2 - y^2 = C_1$. De $\frac{dz}{xy} = \frac{dy}{x} \implies dz = y dy \implies z = \frac{y^2}{2} + C_2 \implies C_2 = z - \frac{y^2}{2}$.

2. **Solución General:** $z - \frac{y^2}{2} = \phi(x^2 - y^2) \implies z = \frac{y^2}{2} + \phi(x^2 - y^2)$.

3. **Condición Inicial:** $u(x, 0) = x^2$. Sustituimos $y = 0, z = x^2$:

$$x^2 = 0 + \phi(x^2) \implies \phi(\mu) = \mu.$$

4. **Solución Particular:**

$$z = \frac{y^2}{2} + (x^2 - y^2) = x^2 - \frac{y^2}{2}.$$

Ejemplo 2.4.4: Rotación (Círculos característicos)

Hallar la superficie integral de $xu_y - yu_x = 0$ que pasa por la curva $x = 0, z = y^2$.

Resolución:

- Características: $x' = -y, y' = x \implies x(t) = A \cos t + B \sin t$. Invariante geométrico: $xx' + yy' = -xy + yx = 0 \implies x^2 + y^2 = C_1$.
- Ecuación para z : $z' = 0 \implies z = C_2$.
- Solución General: $z = \phi(x^2 + y^2)$.
- Aplicando $x = 0, z = y^2$: $y^2 = \phi(y^2) \implies \phi(r) = r$.
- Solución: $u(x, y) = x^2 + y^2$ (Paraboloide de revolución).

Ejemplo 2.4.5: Resolución Constructiva: Ecuación No Homogénea

Resolver el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} xu_x + 2yu_y = u + x^2 \\ u(x, x) = 0 \quad (\text{Sobre la recta } y = x) \end{cases}$$

1. Identificación y Parametrización

- Coeficientes: $a(x, y, u) = x$, $b(x, y, u) = 2y$, $c(x, y, u) = u + x^2$.
- Curva inicial Γ : $x = s$, $y = s$, $z = 0$ (pues $u(s, s) = 0$).

2. Condición de Transversalidad Evaluamos el determinante Jacobiano de la proyección en $t = 0$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ f'(s_0) & g'(s_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0 & 2y_0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x_0 - 2y_0.$$

Como estamos sobre la recta $y = x$, tenemos $\Delta = x_0 - 2x_0 = -x_0$.

Observación 2.4.2: OJO

El determinante es distinto de cero si $x_0 \neq 0$. Por tanto, existe solución única en un entorno de cualquier punto de la recta inicial, excepto en el origen $(0, 0)$.

3. Sistema Característico

$$\begin{cases} x' = x \implies x(t) = c_1 e^t \\ y' = 2y \implies y(t) = c_2 e^{2t} \\ z' = z + x^2 \implies z' - z = (c_1 e^t)^2 = c_1^2 e^{2t} \end{cases}$$

Para la ecuación de z , resolvemos la EDO lineal:

- Solución homogénea ($z' - z = 0$): $z_h = c_3 e^t$.
- Solución particular ($z_p = Ae^{2t}$): $2Ae^{2t} - Ae^{2t} = c_1^2 e^{2t} \implies A = c_1^2$.
- Solución general: $z(t) = c_3 e^t + c_1^2 e^{2t}$.

4. Aplicación de Condiciones Iniciales ($t = 0$) Imponemos que la curva pase por $\Gamma(s)$ en $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = c_1 = s \\ y(0) = c_2 = s \\ z(0) = c_3 + c_1^2 = 0 \implies c_3 + s^2 = 0 \implies c_3 = -s^2 \end{cases}$$

Sustituyendo las constantes, obtenemos la superficie paramétrica:

$$\begin{cases} x(t, s) = se^t \\ y(t, s) = se^{2t} \\ z(t, s) = -s^2 e^t + s^2 e^{2t} \end{cases}$$

5. Inversión y Solución Final Necesitamos despejar s y t (o e^t) en función de x, y . Observamos las ecuaciones de x e y :

$$\frac{y}{x} = \frac{se^{2t}}{se^t} = e^t \implies \boxed{e^t = \frac{y}{x}}$$

Sustituyendo e^t en la ecuación de x :

$$x = s \left(\frac{y}{x} \right) \implies \boxed{s = \frac{x^2}{y}}$$

Finalmente, sustituimos s y e^t en la expresión de z :

$$\begin{aligned} z &= -s^2 e^t + s^2 e^{2t} \\ &= -\left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x^2}{y}\right)^2 \left(\frac{y}{x}\right)^2 \\ &= -\frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y}{x} + \frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x^2} \\ &= -\frac{x^3}{y} + x^2 \end{aligned}$$

Solución: $\boxed{u(x, y) = x^2 - \frac{x^3}{y}}.$

Ejemplo 2.4.6: Resolución del Ejercicio 5 del Tema 2

Resolver la ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{1}{y}u_x + u_y = \frac{e^{-x}}{x}u$$

con la condición inicial $u = h(x)$ sobre la recta $y = 1$ para $x > 0$.

1. Identificación y Parametrización de la Curva Inicial Identificamos los coeficientes de la ecuación cuasi-lineal $au_x + bu_y = c$:

$$a(x, y, u) = \frac{1}{y}, \quad b(x, y, u) = 1, \quad c(x, y, u) = \frac{e^{-x}}{x}u$$

Parametrizamos la curva inicial $\Gamma(s)$ usando $x = s$ como parámetro ($s > 0$):

$$\begin{cases} f(s) = s \\ g(s) = 1 \\ z_0(s) = h(s) \end{cases}$$

Observación 2.4.3: Verificación del Teorema 2.4.1: Existencia y Unicidad Local

Comprobamos las hipótesis del teorema sobre nuestra curva:

1. **Regularidad:** Los coeficientes a, b, c y los datos f, g, h son de clase \mathcal{C}^1 en el dominio $y > 0, x > 0$.
2. **Condición de Transversalidad:** Evaluamos el determinante en un punto genérico de la curva $P_0 = (s, 1, h(s))$:

$$\Delta(s) = \begin{vmatrix} a(P_0) & b(P_0) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1} & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (1)(0) - (1)(1) = -1 \neq 0.$$

Como $\Delta(s) \neq 0$, el Teorema nos garantiza que **existe una única solución local** en un entorno de la curva inicial.

2. **Sistema Característico** Planteamos el sistema de EDOs parametrizado por t :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{y} \\ \frac{dy}{dt} = 1 \\ \frac{du}{dt} = \frac{e^{-x}}{x} u \end{cases}$$

3. **Integración y Aplicación de Condiciones Iniciales** ($t = 0$)

- De la segunda ecuación: $\frac{dy}{dt} = 1 \implies y(t) = t + C_1$. En $t = 0, y(0) = 1 \implies C_1 = 1 \implies \boxed{y(t) = t + 1}$.
- Sustituimos $y(t)$ en la primera ecuación: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t+1} \implies x(t) = \ln(t+1) + C_2$. En $t = 0, x(0) = s \implies C_2 = s \implies \boxed{x(t) = \ln(t+1) + s}$.
- Para la ecuación de u , notamos que $e^{-x(t)} = e^{-(\ln(t+1)+s)} = \frac{e^{-s}}{t+1}$. Sustituyendo:

$$\frac{du}{dt} = \frac{\frac{e^{-s}}{t+1}}{\ln(t+1) + s} u \implies \frac{du}{u} = \frac{e^{-s}}{(t+1)(\ln(t+1) + s)} dt$$

Hacemos el cambio de variable $w = \ln(t+1) + s \implies dw = \frac{1}{t+1} dt$:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{e^{-s}}{w} dw \implies \ln|u| = e^{-s} \ln|w| + C_3 \implies u(t, s) = K \cdot (\ln(t+1) + s) e^{-s}$$

En $t = 0, u(0, s) = h(s)$:

$$h(s) = K \cdot (\ln(1) + s) e^{-s} = K \cdot s e^{-s} \implies K = h(s) s^{-e^{-s}}$$

Por tanto, la expresión paramétrica para u es:

$$\boxed{u(t, s) = h(s) \left(\frac{\ln(t+1) + s}{s} \right)^{e^{-s}}}$$

4. **Inversión y Solución Final** Despejamos t y s en función de x, y :

- $t + 1 = y$.
- $s = x - \ln(t + 1) \implies \boxed{s = x - \ln y}$.

Sustituimos en la ecuación de $u(t, s)$:

$$u(x, y) = h(x - \ln y) \left(\frac{\ln y + (x - \ln y)}{x - \ln y} \right) e^{-(x - \ln y)}$$

Simplificamos el exponente: $e^{-(x - \ln y)} = e^{\ln y - x} = ye^{-x}$.

Solución analítica:

$$\boxed{u(x, y) = h(x - \ln y) \left(\frac{x}{x - \ln y} \right) ye^{-x}}$$

2.5. Envolvertes y Soluciones Singulares

En la teoría de familias de curvas y superficies, a veces aparece una solución que no se obtiene simplemente fijando las constantes arbitrarias de la solución general. Esta es la **envolvente**.

2.5.1. ¿Qué es una Envolvente? (Intuición Geométrica)

Para entender la envolvente, imagina el proceso de dibujar arte con hilos (hilorama) o trazar infinitas líneas rectas sobre un papel con una regla, variando ligeramente el ángulo y la posición según una ley específica. Aunque solo has trazado líneas rectas (elementos simples), al observar el conjunto completo notarás que la intersección y acumulación de todas esas rectas recorta y hace emerger visualmente una curva suave y continua. Esa curva emergente es la **envolvente**.

Geométricamente, la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas (o superficies) es una nueva variedad geométrica que cumple una propiedad definitoria: **en cada uno de sus puntos, es tangente a al menos un miembro de la familia original**. Es la frontera o el perfil geométrico que abraza a toda la familia.

2.5.2. Cálculo de Envolvertes

Deducción de la Ecuación de la Envolvente

Para calcular la envolvente de una familia uniparamétrica de curvas planas definida implícitamente por $\Phi(x, y, c) = 0$ (o explícitamente $y = y(x, c)$), buscamos el lugar geométrico de los puntos de tangencia.

El sistema que define la envolvente (eliminando el parámetro c) es:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, c) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial c}(x, y, c) = 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Justificación (Derivación). Supongamos que la envolvente se puede parametrizar suavemente por el propio parámetro c como una curva $\gamma(c) = (x(c), y(c))$.

1. Como la curva envolvente está contenida en la familia (es decir, para cada c , el punto $(x(c), y(c))$ satisface la ecuación de la curva correspondiente), tenemos la identidad:

$$\Phi(x(c), y(c), c) = 0 \quad (1).$$

2. Derivamos totalmente respecto a c usando la Regla de la Cadena:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \quad (2).$$

3. **Condición de Tangencia:** La envolvente debe ser tangente a la curva de la familia en cada punto de contacto.

- La pendiente de la curva de la familia (para c fijo) viene dada por el Teorema de la Función Implícita (asumiendo $\Phi_y \neq 0$):

$$y'(x)_{\text{fam}} = -\frac{\partial \Phi / \partial x}{\partial \Phi / \partial y}.$$

- La pendiente de la curva envolvente (parametrizada) es:

$$y'(x)_{\text{env}} = \frac{dy/dc}{dx/dc}.$$

Igualando las pendientes (tangencia):

$$\frac{dy/dc}{dx/dc} = -\frac{\Phi_x}{\Phi_y} \implies \Phi_y \frac{dy}{dc} = -\Phi_x \frac{dx}{dc} \implies \Phi_x \frac{dx}{dc} + \Phi_y \frac{dy}{dc} = 0.$$

4. Sustituyendo esta relación en la ecuación (2):

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{dc} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{dc} \right)}_{=0} + \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

Por tanto, llegamos a la condición necesaria:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0.$$

□

Generalizamos el concepto de envolvente para familias de superficies.

Definición 2.5.1: Envolvente de una Familia de Superficies

Dada una familia uniparamétrica de superficies definida implícitamente por $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$, su envolvente es una superficie que es tangente a cada miembro de la familia a lo largo de una curva.

Para hallar la ecuación de la envolvente, se debe eliminar el parámetro λ del sistema:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Si la familia viene dada explícitamente por $z = g(x, y, \lambda)$, el sistema es $z = g$ y $\frac{\partial g}{\partial \lambda} = 0$.

Proposición 2.5.1: Propiedades de la Envolvente

1. Si $\Phi(x, y, z, \lambda) = 0$ es una familia de soluciones de una EDP $F(x, y, z, p, q) = 0$, entonces su envolvente también es solución de la EDP (solución singular).
2. Si una curva $\gamma(s)$ es tangente en cada punto a una superficie de la familia $\Phi(\cdot, \lambda(s)) = 0$, y la dependencia es suave, entonces $\gamma(s)$ está contenida en la envolvente.

2.5.3. Ejemplos de Envolventes en EDOs y EDPs

Un ejemplo clásico en EDOs (extrapolable a EDPs) es la ecuación de Clairaut:

$$y = xy' + \psi(y').$$

Su solución general es la familia de rectas $y = Cx + \psi(C)$. Sin embargo, existe una **solución singular** que es la envolvente de esta familia de rectas. Se obtiene eliminando el parámetro C del sistema:

$$\begin{cases} y = Cx + \psi(C) \\ 0 = x + \psi'(C) \quad (\text{derivada respecto a } C) \end{cases}$$

Ejemplo 2.5.1: Envolvente Parabólica

Sea la familia de soluciones generales $y = Cx + C - C^2$. Para hallar la envolvente, derivamos respecto a C :

$$0 = x + 1 - 2C \implies C = \frac{x+1}{2}.$$

Sustituimos este valor de C en la ecuación original:

$$y = \left(\frac{x+1}{2}\right)x + \left(\frac{x+1}{2}\right) - \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 = \frac{(x+1)^2}{2} - \frac{(x+1)^2}{4} = \frac{(x+1)^2}{4}.$$

Esta parábola es solución de la ecuación diferencial, pero no es una recta (no pertenece a la familia general). Es la solución singular.

Ejemplo 2.5.2: Construcción de una Solución Singular

Consideremos la familia de superficies:

$$z = (x - \lambda)^2 + (y - \lambda)^2$$

(Nota: En los apuntes hay una corrección, inicialmente parece $(y - 1)^2$ pero el cálculo desarrollado corresponde a $(y - \lambda)^2$).

1. Ecuación Diferencial asociada: Derivamos respecto a x e y :

$$p = 2(x - \lambda), \quad q = 2(y - \lambda).$$

Sustituyendo en la ecuación original:

$$z = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 \implies 4z = p^2 + q^2.$$

Esta es una EDP no lineal. La familia dada es su solución completa.

2. Cálculo de la Envolvente: Derivamos la ecuación de la familia respecto a λ :

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 2(x - \lambda)(-1) + 2(y - \lambda)(-1) = 0$$

$$-(x - \lambda) - (y - \lambda) = 0 \implies x + y - 2\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{x + y}{2}.$$

Sustituimos este λ en la ecuación original:

$$\begin{aligned} z &= \left(x - \frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{x + y}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 + \left(\frac{y - x}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{(x - y)^2}{4} = \frac{1}{2}(x - y)^2. \end{aligned}$$

La superficie $z = \frac{1}{2}(x - y)^2$ es la **solución singular** (la envolvente).

Ejemplo 2.5.3: Envolvente de una familia de planos

Consideremos la familia de planos (Clairaut generalizado):

$$z = \alpha x + \alpha^2 y$$

Aquí el parámetro es $\lambda = \alpha$.

1. Derivamos respecto al parámetro α :

$$0 = x + 2\alpha y \implies \alpha = \frac{-x}{2y}.$$

2. Sustituimos en la ecuación de la familia:

$$z = \left(\frac{-x}{2y}\right)x + \left(\frac{-x}{2y}\right)^2 y = \frac{-x^2}{2y} + \frac{x^2}{4y}.$$

3. Simplificamos:

$$z = \frac{-2x^2 + x^2}{4y} = \frac{-x^2}{4y} \implies 4yz + x^2 = 0.$$

La envolvente es la superficie $x^2 + 4yz = 0$.

2.6. Ecuación General de Primer Orden

2.6.1. Planteamiento del Problema

Estudiamos ahora la ecuación general en derivadas parciales de primer orden para una función incógnita $z(x, y)$, que puede ser no lineal.

Definición 2.6.1: Forma General

La ecuación se presenta como:

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \quad (2.11)$$

donde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ y $q = \frac{\partial z}{\partial y}$. Suponemos que $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$ y que se cumple la condición de no degeneración:

$$|F_p| + |F_q| \neq 0$$

(es decir, la ecuación depende realmente de al menos una derivada parcial).

Observación 2.6.1:

Esta condición de que

$$|F_p| + |F_q| \neq 0$$

se pone para poder aplicar el *Teorema de la Función Implícita* respecto p o respecto q (a alguna de las dos). Por ejemplo, si $F_q \neq 0$, tendremos $q = \varphi(p)$.

El **Problema de Cauchy** consiste en hallar una superficie integral $z = u(x, y)$ que pase por una curva dada $\Gamma(s) = (f(s), g(s), h(s))$.

2.6.2. Conos de Monge

Aquí radica la diferencia fundamental con el caso cuasi-lineal. Recordemos la ecuación del plano tangente a una superficie integral en un punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\pi : \quad z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0).$$

- **Caso Cuasi-Lineal** ($ap + bq = c$): En un punto fijo P_0 , la ecuación impone una relación lineal entre p y q . Esto significa que todos los posibles planos tangentes solución deben contener una recta fija (la dirección característica (a, b, c)). El "haz" de planos tangentes gira en torno a esta recta.
- **Caso General No Lineal** ($F(x_0, y_0, z_0, p, q) = 0$): En un punto fijo P_0 , la relación entre p y q ya no es lineal. Los posibles vectores normales $\vec{N} = (p, q, -1)$ no son coplanarios ni perpendiculares a una única dirección.

El conjunto de planos tangentes admisibles en P_0 forma una familia uniparamétrica (podemos despejar $q = \Psi(p)$ localmente por el T.F.I.).

$$z - z_0 = p(x - x_0) + \Psi(p)(y - y_0).$$

La **envolvente** de esta familia de planos tangentes en el punto fijo P_0 es una superficie cónica con vértice en P_0 .

Definición 2.6.2: Cono de Monge

El **Cono de Monge** en P_0 se define como la **envolvente** de esta familia de planos tangentes admisibles. Geométricamente, representa las direcciones permitidas para las superficies integrales en ese punto.

Observación 2.6.2: Relación con la Superficie Integral

Una superficie $z = u(x, y)$ es **integral** si, en cada uno de sus puntos P_0 , toca de forma tangencial al Cono de Monge de P_0 .

En ese caso, la generatriz del cono a través de la cual se produce el contacto con la superficie define una dirección sobre la misma, llamada **dirección característica**.

Observación 2.6.3: Generatrices del Cono de Monge

Para calcular sus generatrices, derivamos la ecuación del plano respecto al parámetro p :

$$\begin{cases} z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0) & (\text{Plano}) \\ 0 = (x - x_0) + \frac{dq}{dp}(y - y_0) & (\text{Derivada}) \end{cases}$$

Diferenciando implícitamente $F(P_0, p, q) = 0$, tenemos $F_p + F_q \frac{dq}{dp} = 0 \implies \frac{dq}{dp} = -\frac{F_p}{F_q}$. Sustituyendo en la segunda ecuación:

$$0 = (x - x_0) - \frac{F_p}{F_q}(y - y_0) \implies \frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q}.$$

Sustituyendo esto en la ecuación del plano, obtenemos la relación para z :

$$\frac{x - x_0}{F_p} = \frac{y - y_0}{F_q} = \frac{z - z_0}{pF_p + qF_q}.$$

Las rectas generatrices del Cono de Monge tienen la dirección del vector:

$$\vec{v} = (F_p, F_q, pF_p + qF_q).$$

2.6.3. Curvas Características (Franjas de Monge)

Buscamos curvas $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ sobre la superficie solución que sean tangentes en cada punto a una generatriz del Cono de Monge. Esto nos da las primeras tres ecuaciones del sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = F_p(x, y, z, p, q) \\ y'(t) = F_q(x, y, z, p, q) \\ z'(t) = pF_p + qF_q \end{cases}$$

Sin embargo, este sistema está incompleto porque depende de $p(t)$ y $q(t)$ (las derivadas de la solución a lo largo de la curva), que son desconocidas a priori. Necesitamos ecuaciones para $p'(t)$ y $q'(t)$.

Deducción de las ecuaciones para p y q : Derivamos la identidad $F(x, y, u(x, y), u_x, u_y) = 0$ respecto a x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p + \frac{\partial F}{\partial p} p_x + \frac{\partial F}{\partial q} q_x = 0.$$

Usando que $q_x = u_{yx} = u_{xy} = p_y$ (Teorema de Schwarz) y las ecuaciones de x' e y' :

$$F_x + pF_z + x'p_x + y'p_y = 0 \implies F_x + pF_z + \frac{dp}{dt} = 0.$$

Despejando p' (y análogamente para q' derivando respecto a y), obtenemos el sistema completo.

Teorema 2.6.1: Sistema Característico (Caso General)

El sistema característico asociado a $F(x, y, z, p, q) = 0$ consta de 5 EDOs:

$$\begin{cases} x'(t) = F_p \\ y'(t) = F_q \\ z'(t) = pF_p + qF_q \\ p'(t) = -(F_x + pF_z) \\ q'(t) = -(F_y + qF_z) \end{cases} \quad (2.12)$$

Junto con la condición algebraica $F(x(t), y(t), z(t), p(t), q(t)) = 0$. Una solución $\mathcal{B}(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ se denomina **Franja o Banda Característica**.

2.6.4. Construcción de Superficies Integrales a través de Curvas Características

Se demuestra que toda solución (superficie integral) se obtiene mediante esas **bandas características**. Esta es la proposición análoga a la propiedad fundamental del caso cuasi-lineal.

Proposición 2.6.1: Unicidad de la Banda en la Superficie

Sea $\mathcal{B}(t) = (x(t), y(t), z(t), p(t), q(t))$ una **banda característica** definida en un intervalo I de valores del parámetro t .

Sea $z = u(x, y)$ una solución (superficie integral) de la ecuación $F(x, y, z, p, q) = 0$.

Si para algún instante $t_0 \in I$ se cumple que la banda toca a la superficie (coinciden el punto y el plano tangente):

$$\begin{cases} z(t_0) = u(x(t_0), y(t_0)) \\ p(t_0) = u_x(x(t_0), y(t_0)) \\ q(t_0) = u_y(x(t_0), y(t_0)) \end{cases}$$

entonces se cumple para todo $t \in I$:

$$\begin{cases} z(t) = u(x(t), y(t)) \\ p(t) = u_x(x(t), y(t)) \\ q(t) = u_y(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Interpretación: Si una franja característica tiene un elemento de contacto común con una superficie integral, entonces toda la franja está contenida en la superficie integral (es decir, la curva soporte está en la superficie y los planos tangentes de la franja son los planos tangentes a la superficie).

2.6.5. Teorema de Existencia y Unicidad (Problema de Cauchy)

Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$ un abierto y $F \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ con $|F_p| + |F_q| \neq 0$. Consideremos el problema de Cauchy para $F(x, y, z, p, q) = 0$ con una curva inicial $\Gamma(s) = (f(s), g(s), h(s))$ para $s \in I$.

Para poder resolver el problema, necesitamos "levantar" la curva inicial Γ a una **franja inicial** $(f(s), g(s), h(s), p_0(s), q_0(s))$ que cumpla tres condiciones:

1. **Condición de Franja (Tangencia):** La función incógnita debe tener diferencial compatible con la curva:

$$h'(s) = p_0(s)f'(s) + q_0(s)g'(s).$$

2. **Condición de la Ecuación:** Los valores iniciales deben satisfacer la EDP:

$$F(f(s), g(s), h(s), p_0(s), q_0(s)) = 0.$$

3. **Condición de Transversalidad:** La dirección característica no debe ser tangente a la curva inicial (proyectada):

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_p(p_0, q_0, \dots) & F_q(p_0, q_0, \dots) \\ f'(s) & g'(s) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Teorema 2.6.2: Existencia y Unicidad

Si se cumplen las condiciones 1, 2 y 3 en un punto s_0 , existe una única solución $z = u(x, y)$ en un entorno de la curva inicial que contiene dicha franja. **Nota:** Es posible que existan varios pares $(p_0(s), q_0(s))$ que satisfagan las condiciones algebraicas (1) y (2). Cada par válido define una solución única distinta.

Ejemplo 2.6.1: Resolución paso a paso

Resolver:

$$\begin{cases} p^2 - 3q^2 - u = 0 \\ u(x, 0) = x^2 \end{cases}$$

1. Planteamiento del Sistema Característico: Aquí $F = p^2 - 3q^2 - z$. Derivadas: $F_p = 2p, F_q = -6q, F_x = 0, F_y = 0, F_z = -1$.

$$\begin{cases} x' = 2p \\ y' = -6q \\ z' = 2p^2 - 6q^2 \quad (\text{Nota: } = 2(p^2 - 3q^2) = 2z \text{ sobre la solución}) \\ p' = -(0 + p(-1)) = p \\ q' = -(0 + q(-1)) = q \end{cases}$$

Resolvemos primero para p y q :

$$p(t) = c_1 e^t, \quad q(t) = c_2 e^t.$$

Sustituyendo en x', y' :

$$x(t) = 2c_1 e^t + c_3, \quad y(t) = -6c_2 e^t + c_4.$$

2. Determinación de la Franja Inicial (p_0, q_0) : Parametrización de la curva inicial: $x = s, y = 0, z = s^2$.

■ **Condición de Franja:** $h'(s) = p_0 f' + q_0 g'$

$$2s = p_0(s) \cdot 1 + q_0(s) \cdot 0 \implies \boxed{p_0(s) = 2s}.$$

■ **Condición de Ecuación:** $p_0^2 - 3q_0^2 - z_0 = 0$

$$(2s)^2 - 3q_0^2 - s^2 = 0 \implies 3s^2 = 3q_0^2 \implies \boxed{q_0(s) = \pm s}.$$

Hay dos posibles soluciones.

Interpretación de este resultado: Nos han salido dos posibilidades para $(p(s), q(s))$. En principio ya vimos que la curva puede tener muchas direcciones para la normal (aquí hay 2, una para cada valor que nos ha salido de $q(s)$). Para cada normal tendré un plano tangente. Una vez que elija y fije UNA de ellas, esa será la solución única que verificará la condición de Cauchy si fijo también p y q .

3. Comprobación de Transversalidad:

$$\Delta = \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ f' & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2p_0 & -6q_0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 6q_0 = \pm 6s.$$

Es no nulo si $s \neq 0$. Existe solución única alrededor de puntos no nulos. Se deduce la existencia y unicidad de la solución (una vez fijada, eso sí, la elección de $(p(s), q(s))$).

Trabajamos el caso en el que $(p(s), q(s)) = (2s, s)$:

4. Integración con Condiciones Iniciales: En $t = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = f(s) = s \\ y(0) = g(s) = 0 \\ z(0) = h(s) = s^2 \\ p(0) = p(s) = 2s \\ q(0) = q(s) = s \end{cases}$$

1. **Para p y q :**

$$p' = p \implies p(t) = c_1 e^t. \quad \text{En } t = 0: \quad 2s = c_1 e^0 \implies \boxed{c_1 = 2s}.$$

$$q' = q \implies q(t) = c_2 e^t. \quad \text{En } t = 0: \quad s = c_2 e^0 \implies \boxed{c_2 = s}.$$

Por tanto: $p(t) = 2se^t$, $q(t) = se^t$.

2. **Para x :** Sustituimos $p(t)$ en la ecuación de x' :

$$x' = 2p = 2(2se^t) = 4se^t.$$

Integramos respecto a t :

$$x(t) = \int 4se^t dt = 4se^t + c_3.$$

Imponemos $x(0) = s$:

$$s = 4s(1) + c_3 \implies c_3 = s - 4s \implies \boxed{c_3 = -3s}.$$

Solución particular: $x(t) = 4se^t - 3s$.

3. **Para y :** Sustituimos $q(t)$ en la ecuación de y' :

$$y' = -6q = -6(se^t) = -6se^t.$$

Integramos respecto a t :

$$y(t) = \int -6se^t dt = -6se^t + c_4.$$

Imponemos $y(0) = 0$:

$$0 = -6s(1) + c_4 \implies \boxed{c_4 = 6s}.$$

Solución particular: $y(t) = -6se^t + 6s$.

4. **Para z :**

$$z' = 2z \implies \frac{z'}{z} = 2 \implies \ln |z| = 2t + K \implies z(t) = c_5 e^{2t}.$$

Imponemos $z(0) = s^2$:

$$s^2 = c_5 e^0 \implies \boxed{c_5 = s^2}.$$

Solución particular: $z(t) = s^2 e^{2t}$.

5. Inversión y Solución Final: Tenemos el sistema paramétrico:

$$\begin{cases} x = s(4e^t - 3) \\ y = 6s(1 - e^t) \\ z = (se^t)^2 \end{cases}$$

Buscamos eliminar s y t . Observamos una combinación lineal entre x e y para aislar el término se^t :

$$\begin{aligned} 6x + 3y &= 6[s(4e^t - 3)] + 3[6s(1 - e^t)] \\ 6x + 3y &= 24se^t - 18s + 18s - 18se^t = 6se^t. \end{aligned}$$

Despejamos el término común:

$$se^t = x + \frac{1}{2}y.$$

Sustituyendo esto directamente en la ecuación de $z = (se^t)^2$:

$$z = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2.$$

2.7. Cálculo de Integrales Completas

2.7.1. Conceptos Preliminares

Dada una ecuación en derivadas parciales $F(x, y, z, p, q) = 0$, buscamos soluciones que dependan de parámetros arbitrarios.

Definición 2.7.1: Integral Completa

Una solución $\Phi(x, y, z, a, b) = 0$ de la EDP que depende de dos constantes arbitrarias independientes a y b se denomina **Integral Completa**.

Nota: La integral completa no tiene por qué ser única y, en general, no recoge todas las soluciones de la EDP (por ejemplo, no suele incluir las soluciones singulares).

Definición 2.7.2: Tipos de Soluciones

- **Solución General:** Es una familia de soluciones que depende de una **función arbitraria**. Se suele construir a partir de la integral completa usando envolventes de familias uniparamétricas ($b = \phi(a)$).
- **Solución Singular:** Es aquella solución que satisface la ecuación pero no se puede obtener particularizando las constantes de la integral completa ni de la solución general (suele ser la envolvente de la integral completa).

2.7.2. Casos Particulares de Resolución

Analizamos métodos para hallar integrales completas en ecuaciones con estructuras específicas (donde falta alguna variable x, y, z).

Caso 1: La ecuación no depende de x, y, z

La forma es $F(p, q) = 0$.

- **Método:** Como p y q son constantes en la ecuación característica simplificada, proponemos $p = a$ (constante).
- Despejamos q de la ecuación: $F(a, q) = 0 \implies q = \varphi(a)$.
- Sustituimos en la forma diferencial $dz = p dx + q dy$:

$$dz = a dx + \varphi(a) dy \implies z = ax + \varphi(a)y + b.$$

Ejemplo 2.7.1: Ejemplo Caso 1

Resolver $u_x = 1 + 2u_y + 4(u_y)^2$. **Solución:** Identificamos $p = 1 + 2q + 4q^2$. Hacemos $q = a$. Entonces $p = 1 + 2a + 4a^2$. La integral completa es:

$$z = (1 + 2a + 4a^2)x + ay + b.$$

Caso 2: Variables Separables

La ecuación se puede escribir como $\Psi_1(x, p) = \Psi_2(y, q)$.

- **Método:** Igualamos ambos términos a una constante arbitraria a .

$$\Psi_1(x, p) = a \implies p = \varphi_1(x, a); \quad \Psi_2(y, q) = a \implies q = \varphi_2(y, a).$$

- Integramos $dz = p dx + q dy$:

$$z = \int \varphi_1(x, a) dx + \int \varphi_2(y, a) dy + b.$$

Ejemplo 2.7.2: Ejemplo Caso 2

Resolver $u_x u_y = 2xy$. **Solución:** Separamos variables: $\frac{u_x}{x} = \frac{2y}{u_y}$. Hacemos $\frac{p}{x} = \frac{2y}{q} = a$. Despejamos: $p = ax$, $q = \frac{2y}{a}$. Integramos:

$$z = \int ax dx + \int \frac{2y}{a} dy + b = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{a} + b.$$

Caso 3: La ecuación no depende de x, y

La forma es $F(z, p, q) = 0$.

- **Método:** Buscamos soluciones de onda viajera $z = z(u)$ donde $u = x + ay$.
- Por regla de la cadena: $p = \frac{dz}{du} \cdot 1 = z'$, $q = \frac{dz}{du} \cdot a = az'$.
- Sustituimos en la EDP: $F(z, z', az') = 0$, que es una EDO de primer orden.

Ejemplo 2.7.3: Ejemplo Caso 3

Resolver $z^2 = 4pq$. **Solución:** Sustituimos $p = z'$, $q = az'$:

$$z^2 = 4(z')(az') = 4a(z')^2 \implies z = \pm 2\sqrt{a}z'.$$

Resolvemos la EDO separable $\frac{dz}{z} = \frac{du}{\pm 2\sqrt{a}}$:

$$\ln |z| = \frac{u}{\pm 2\sqrt{a}} + C \implies z = be^{\frac{x+ay}{\pm 2\sqrt{a}}}.$$

Caso 4: Ecuación de Clairaut Generalizada

La forma es $z = px + qy + \Psi(p, q)$.

- **Método:** Es una generalización directa de la EDO de Clairaut. La integral completa son planos.
- Hacemos $p = a$ y $q = b$.

$$z = ax + by + \Psi(a, b).$$

Ejemplo 2.7.4: Ejemplo Caso 4

Resolver $u = xu_x + yu_y + (u_x)^2 + (u_y)^2$. **Solución:** Identificamos la estructura Clairaut con $\Psi(p, q) = p^2 + q^2$. Integral completa:

$$z = ax + by + a^2 + b^2.$$

Caso 5: La ecuación no depende de una variable (ej. y) o es lineal en ella

Forma general $F(x, p, q) = 0$ (no aparece y, z). O más flexible, $p = \Psi(x, q)$.

- **Método:** Hacemos $q = a$ (constante).
- Despejamos $p = \Psi(x, a)$.
- Integramos: $z = \int \Psi(x, a) dx + ay + b$.

Ejemplo 2.7.5: Varios Ejemplos Caso 5

1. $u_x = \cos(2x) + 3u_y^2$. Hacemos $q = a$. Entonces $p = \cos(2x) + 3a^2$.

$$z = \int (\cos(2x) + 3a^2) dx + ay + b = \frac{1}{2} \sin(2x) + 3a^2 x + ay + b.$$

2. $u_x = 2x^2 + u_y^2$. Hacemos $q = a$. $p = 2x^2 + a^2$.

$$z = \frac{2}{3} x^3 + a^2 x + ay + b.$$

3. $u_x = 4u_y^2 + 2$. Hacemos $q = a$. $p = 4a^2 + 2$.

$$z = (4a^2 + 2)x + ay + b.$$

2.7.3. Ejercicio Resuelto: Superficies y Envolventes**Ejemplo 2.7.6: Ejercicio Típico de Control**

Consideramos la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$.

1. **Encontrar una EDP de primer orden que satisfagan todos los planos tangentes a esta superficie.**

Calculamos el plano tangente en un punto genérico (x_0, y_0, z_0) :

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1}}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1}}.$$

Observamos que $z_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + 1}$. Buscamos una relación entre p y q que elimine x_0, y_0 . Calculamos $p^2 + q^2$:

$$p^2 + q^2 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{x_0^2 + y_0^2 + 1} = \frac{(x_0^2 + y_0^2 + 1) - 1}{x_0^2 + y_0^2 + 1} = 1 - \frac{1}{z_0^2}.$$

Pero en el plano tangente (Clairaut) $Z = pX + qY + \Psi(p, q)$, el término independiente es la intersección con el eje Z o relacionado con la estructura. Alternativamente, usamos la propiedad geométrica. La ecuación del plano es $z = px + qy + \sqrt{1 - p^2 - q^2}$.

Comprobación: $1 - p^2 - q^2 = 1 - \frac{x_0^2 + y_0^2}{z_0^2} = \frac{z_0^2 - (x_0^2 + y_0^2)}{z_0^2} = \frac{1}{z_0^2}$. Luego $\sqrt{1 - p^2 - q^2} = 1/z_0$. La EDP es de tipo Clairaut:

$$z = xp + yq + \sqrt{1 - p^2 - q^2}.$$

Su integral completa es la familia de planos:

$$z = ax + by + \sqrt{1 - a^2 - b^2}, \quad \text{con } a^2 + b^2 \leq 1.$$

2. **Demostrar que la EDP obtenida admite soluciones que son conos de revolución alrededor del eje Z.**

Estrategia: Calcular la envolvente de una subfamilia uniparamétrica. Tomamos la relación entre parámetros $a^2 + b^2 = c^2$ (constante) para buscar simetría radial, o usamos coordenadas polares en el espacio de parámetros. Probamos imponiendo una relación $b = \Psi(a)$.

Para obtener un cono, la envolvente debe ser cónica. Probemos la familia dada por $a^2 + b^2 = k^2$ (fijo $k \in (0, 1)$). Esto no genera un cono directamente, sino un cilindro o similar.

Cálculo de la Envolvente Singular: Derivamos la integral completa respecto a a y b (si fueran independientes para la singular):

$$0 = x - \frac{a}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}, \quad 0 = y - \frac{b}{\sqrt{1 - a^2 - b^2}}.$$

Despejando a y b se recupera la superficie original $z^2 = x^2 + y^2 + 1$ (Hiperboloide), que es la envolvente general.

Búsqueda del Cono: Para hallar un cono $z^2 = x^2 + y^2$, necesitamos una relación específica. Si imponemos la condición de que la superficie pase por el origen (vértice del cono), la ecuación Clairaut $0 = 0 + 0 + \sqrt{1 - a^2 - b^2}$ implica $a^2 + b^2 = 1$. Si $a^2 + b^2 = 1$, el término de la raíz se anula:

$$z = ax + by, \quad \text{con } a^2 + b^2 = 1.$$

Esta es una familia de planos que pasan por el origen. La envolvente de esta familia: $b = \sqrt{1 - a^2}$. $z = ax + y\sqrt{1 - a^2}$. Derivamos respecto a a : $0 = x + y \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}} \implies x = \frac{ay}{\sqrt{1 - a^2}} \implies x^2(1 - a^2) = a^2 y^2$. $x^2 = a^2(x^2 + y^2) \implies a = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Sustituyendo en z :

$$z = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Elevando al cuadrado: $z^2 = x^2 + y^2$. Efectivamente, es un cono de revolución.

2.8. Ecuaciones de Pfaff y Método de Lagrange-Charpit

2.8.1. Ecuaciones de Pfaff

Una ecuación diferencial de Pfaff en \mathbb{R}^3 tiene la forma diferencial:

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0 \quad (2.13)$$

donde $\vec{F} = (P, Q, R)$ es un campo vectorial dado.

Observación 2.8.1: Significado Geométrico

Resolver la ecuación consiste en encontrar una familia de superficies $U(x, y, z) = C$ tales que sean ortogonales a las líneas de campo de \vec{F} .

Si $U(x, y, z) = C$ es solución, su vector normal es $\nabla U = (\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z})$. La ecuación de Pfaff establece que el desplazamiento tangente (dx, dy, dz) sobre la superficie es ortogonal a (P, Q, R) , es decir, ∇U debe ser paralelo a \vec{F} .

Caso 1: Campos Conservativos

Si el campo $\vec{F} = (P, Q, R)$ es conservativo, es decir, existe un potencial escalar U tal que $\nabla U = \vec{F}$, entonces la solución es directa:

$$U(x, y, z) = C.$$

Condición de irrotacionalidad: Sabemos que \vec{F} es conservativo (en un dominio simplemente conexo) si y solo si $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$.

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = (0, 0, 0).$$

Ejemplo 2.8.1: Ejemplo Canónico: Esferas Concéntricas

Resolver la ecuación de Pfaff:

$$x dx + y dy + z dz = 0$$

1. Identificación del Campo Vectorial La ecuación tiene la forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, donde el campo es:

$$\vec{F} = (P, Q, R) = (x, y, z).$$

2. Condición de Integrabilidad (Frobenius) Antes de integrar, verificamos si el campo es conservativo calculando su rotacional:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Calculamos las componentes:

- Componente \mathbf{i} : $\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0 - 0 = 0$.
- Componente \mathbf{j} : $\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 - 0 = 0$.
- Componente \mathbf{k} : $\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0 - 0 = 0$.

Como $\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$, la condición de integrabilidad $\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$ se cumple trivialmente. Es una ****Ecuación Diferencial Exacta****.

3. Integración Directa Al ser un diferencial exacto, existe una función potencial U tal que $dU = xdx + ydy + zdz$. Integramos término a término:

$$\int x dx + \int y dy + \int z dz = C$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = C$$

Reordenando la constante ($K = 2C$), obtenemos la familia de superficies integrales:

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = K}$$

4. Interpretación Geométrica

- La solución representa una familia de **esferas concéntricas** centradas en el origen.
- El campo vectorial $\vec{F} = (x, y, z)$ es el vector de posición (radio vector), que siempre es **perpendicular** a la superficie de la esfera.
- La ecuación de Pfaff $xdx + ydy + zdz = 0$ es equivalente al producto escalar $\vec{r} \cdot d\vec{r} = 0$. Esto nos dice geoméricamente que cualquier desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$ sobre la superficie solución debe ser ortogonal al radio vector.

Ejemplo 2.8.2: Campo Conservativo

Resolver $(4x^3y + z^4)dx + (x^4 + 4y^3z)dy + (y^4 + 4z^3x)dz = 0$. Calculamos el rotacional y vemos que es nulo. Por integración directa ("método del potencial"):

$$U(x, y, z) = x^4y + y^4z + z^4x = C.$$

Caso 2: Factor Integrante (Integrabilidad)

Si $\text{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$, el campo no es gradiente. Sin embargo, podemos buscar un factor escalar $\mu(x, y, z)$ (factor integrante) tal que el nuevo campo $\mu\vec{F} = (\mu P, \mu Q, \mu R)$ sí sea conservativo:

$$\text{rot}(\mu\vec{F}) = \vec{0}.$$

En este caso, se cumplirá que $(\mu P, \mu Q, \mu R)$ sea un gradiente de una función $U(x, y, z)$, es decir, $(\mu P, \mu Q, \mu R) = \nabla U$. Entonces $U(x, y, z) = C$ será la familia de superficies solución de la ecuación de Pfaff original.

Teorema 2.8.1: Condición de Integrabilidad de Frobenius

La ecuación de Pfaff admite un factor integrante (y por tanto familias de superficies solución) si y solo si el campo es ortogonal a su rotacional:

$$\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Si esta condición no se cumple, no existen superficies integrales $U(x, y, z) = C$ ortogonales al campo (sistema no holónomo).

Ejemplo 2.8.3: Resolución paso a paso

Resolver: $yz dx + 2xz dy + xy dz = 0$. Aquí $\vec{F} = (yz, 2xz, xy)$.

1. Comprobación: Calculamos el rotacional y verificamos $\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$.

2. Reducción dimensional: Tratamos una variable como constante (ej. $z = cte \implies dz = 0$). La ecuación reducida es: $yz dx + 2xz dy = 0$. Dividiendo por z (si $z \neq 0$):

$$y dx + 2x dy = 0.$$

Esta es una EDO de variables separables:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{x} \implies \ln y = -\frac{1}{2} \ln x + C \implies yx^{1/2} = K \implies xy^2 = C.$$

3. Reconstrucción: Asumimos que la constante depende de z :

$$U(x, y, z) = xy^2 - C(z) = 0.$$

Para hallar $C(z)$, imponemos que esta función satisfaga la ecuación original. Calculamos el diferencial total dU :

$$dU = y^2 dx + 2xy dy - C'(z) dz = 0.$$

Para que esta ecuación sea equivalente a la original ($yz dx + 2xz dy + xy dz = 0$), sus coeficientes deben ser proporcionales:

$$\frac{y^2}{yz} = \frac{2xy}{2xz} = \frac{-C'(z)}{xy}.$$

Simplificando las dos primeras fracciones obtenemos $\frac{y}{z} = \frac{y}{z}$ (consistente). Igualamos con la tercera:

$$\frac{y}{z} = \frac{-C'(z)}{xy} \implies C'(z) = -\frac{xy^2}{z}.$$

Como en la superficie tenemos $xy^2 = C(z)$, sustituimos:

$$C'(z) = -\frac{C(z)}{z} \implies \frac{C'(z)}{C(z)} = -\frac{1}{z} \implies \ln C(z) = -\ln z + k \implies C(z) = \frac{K}{z}.$$

4. Solución General:

$$xy^2 = \frac{K}{z} \implies \boxed{xy^2 z = K}.$$

Ejemplo 2.8.4: Ejemplo: Ecuación No Integrable

Estudiar la integrabilidad de la ecuación de Pfaff:

$$(x + y)dx + (x - z)dy + x^2 yz dz = 0$$

Identificamos las componentes del campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$P = x + y, \quad Q = x - z, \quad R = x^2 yz$$

Calculamos el rotacional de \vec{F} :

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x + y & x - z & x^2 yz \end{vmatrix}$$

Desarrollando las componentes:

- Componente \mathbf{i} : $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = x^2 z - (-1) = x^2 z + 1.$
- Componente \mathbf{j} : $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0 - 2xyz = -2xyz.$
- Componente \mathbf{k} : $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 - 1 = 0.$

Por tanto, $\text{rot}(\vec{F}) = (x^2z + 1, -2xyz, 0)$.

Comprobamos la condición de integrabilidad de Frobenius ($\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$):

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) &= P(x^2z + 1) + Q(-2xyz) + R(0) \\ &= (x + y)(x^2z + 1) + (x - z)(-2xyz) \\ &= x^3z + x + x^2yz + y - 2x^2yz + 2xyz^2 \\ &= x^3z - x^2yz + 2xyz^2 + x + y \neq 0\end{aligned}$$

Como el producto escalar no es idénticamente nulo, la ecuación **no admite factor integrante** y, por consiguiente, **no es integrable**. Geométricamente, no existe una familia de superficies ortogonales a este campo vectorial.

2.8.2. Métodos de Resolución de una Ecuación Integrable

Una vez verificada la condición de integrabilidad de Frobenius ($\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$), sabemos que existen superficies integrales. El método de resolución depende de si el campo ya es conservativo o si necesita ser adaptado.

Caso A: El campo es conservativo ($\text{rot}(\vec{F}) = \vec{0}$)

Si el rotacional es el vector nulo, la forma diferencial $Pdx + Qdy + Rdz$ es **exacta**. Esto significa que existe directamente una función potencial $U(x, y, z)$ tal que $dU = Pdx + Qdy + Rdz$.

Método de cálculo (Integración directa):

1. Como $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, integramos P respecto a x :

$$U(x, y, z) = \int P(x, y, z)dx + g(y, z)$$

2. Derivamos este resultado respecto a y y lo igualamos a Q para obtener $\frac{\partial g}{\partial y}$. Integramos para hallar $g(y, z)$, añadiendo una nueva constante que dependa solo de z , digamos $h(z)$.
3. Derivamos el resultado final respecto a z , lo igualamos a R y obtenemos $h(z)$.
4. La familia de superficies solución será $U(x, y, z) = C$.

Ejemplo 2.8.5: Resolución paso a paso: Ecuación Exacta (Campo Conservativo)

Resolver la ecuación de Pfaff:

$$2xyz \, dx + x^2z \, dy + (x^2y + 1) \, dz = 0$$

1. Identificación del Campo Vectorial La ecuación tiene la forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, con el campo $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$P = 2xyz, \quad Q = x^2z, \quad R = x^2y + 1$$

2. Condición de Integrabilidad (Cálculo del Rotacional) Comprobamos si el campo es conservativo calculando su rotacional ($\nabla \times \vec{F}$):

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xyz & x^2z & x^2y + 1 \end{vmatrix}$$

Evaluamos cada componente:

- Componente **i**: $\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y + 1) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2z) = x^2 - x^2 = 0$.
- Componente **j**: $\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}(2xyz) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2y + 1) = 2xy - 2xy = 0$.
- Componente **k**: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2z) - \frac{\partial}{\partial y}(2xyz) = 2xz - 2xz = 0$.

Como $\text{rot}(\vec{F}) = (0, 0, 0)$, el campo es **irrotacional** (y conservativo en \mathbb{R}^3). La condición de Frobenius $\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$ se cumple trivialmente. Estamos ante una **Ecuación Diferencial Exacta**.

3. Integración para hallar el Potencial $U(x, y, z)$ Buscamos una función U tal que $dU = Pdx + Qdy + Rdz$. Esto implica resolver el sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = 2xyz & (1) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = x^2z & (2) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = x^2y + 1 & (3) \end{cases}$$

Paso A: Integramos (1) con respecto a x :

$$U(x, y, z) = \int 2xyz \, dx = x^2yz + g(y, z)$$

donde $g(y, z)$ es una "constante" de integración que depende de y y z .

Paso B: Derivamos este resultado con respecto a y y lo igualamos a (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= x^2z + \frac{\partial g}{\partial y} \\ x^2z + \frac{\partial g}{\partial y} &= x^2z \implies \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Esto significa que g no depende de y , por lo que $g(y, z) = h(z)$. Actualizamos nuestra función: $U(x, y, z) = x^2yz + h(z)$.

Paso C: Derivamos este nuevo resultado con respecto a z y lo igualamos a (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial z} &= x^2y + h'(z) \\ x^2y + h'(z) &= x^2y + 1 \implies h'(z) = 1 \end{aligned}$$

Integramos respecto a z :

$$h(z) = \int 1 \, dz = z + C$$

Por tanto, la función potencial es:

$$U(x, y, z) = x^2yz + z$$

4. Solución Final La familia de superficies integrales que son ortogonales al campo \vec{F} viene dada por las superficies equipotenciales $U(x, y, z) = C$:

$$\boxed{x^2yz + z = C}$$

Caso B: El campo no es conservativo pero es integrable ($\text{rot}(\vec{F}) \neq \vec{0}$ y $\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$)

En este caso, la forma diferencial no es exacta, por lo que no existe el potencial directamente. Sin embargo, la condición de Frobenius garantiza la existencia de un **factor integrante** $\mu(x, y, z)$ tal que el campo $\mu\vec{F}$ sí sea conservativo.

En lugar de buscar μ a ciegas (lo cual suele ser muy complejo), se emplea una técnica de **reducción dimensional**:

Método de cálculo (Tratamiento de una variable como constante): Método de Lagrange

1. **Congelamos una variable:** Suponemos que una de las variables es constante, por ejemplo $z = \text{cte} \implies dz = 0$.
2. **Resolvemos la EDO bidimensional:** La ecuación original se reduce a $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0$, donde z actúa como un parámetro. Al ser una EDO de dos variables, siempre admite factor integrante localmente. La resolvemos para obtener una integral primera de la forma:

$$V(x, y, z) = C$$

3. **Reconstrucción de la constante:** Como supusimos z constante, la constante de integración C en realidad depende de z . Hacemos $C \rightarrow C(z)$, por lo que nuestra superficie candidata es:

$$V(x, y, z) = C(z)$$

4. **Determinación de $C(z)$:** Diferenciamos totalmente la ecuación $V(x, y, z) - C(z) = 0$:

$$\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z} - C'(z) \right) dz = 0$$

Para que esta ecuación describa la misma familia de superficies que la original ($Pdx + Qdy + Rdz = 0$), sus coeficientes deben ser estrictamente proporcionales:

$$\frac{\frac{\partial V}{\partial x}}{P} = \frac{\frac{\partial V}{\partial y}}{Q} = \frac{\frac{\partial V}{\partial z} - C'(z)}{R}$$

De esta cadena de igualdades (y usando la relación $V(x, y, z) = C(z)$ para eliminar x e y si es necesario), obtendremos una EDO ordinaria simple para $C(z)$. Al resolverla, sustituimos $C(z)$ en $V(x, y, z) = C(z)$ para obtener la solución general.

Ejemplo 2.8.6: Ecuación Integrable con Factor Integrante

Resolver la ecuación de Pfaff:

$$yz \, dx + (xz + yz^3) \, dy - 2xy \, dz = 0$$

1. Identificación del Campo Vectorial La ecuación es de la forma $\vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, con $\vec{F} = (P, Q, R)$:

$$P = yz, \quad Q = xz + yz^3, \quad R = -2xy$$

2. Condición de Integrabilidad de Frobenius Calculamos el rotacional del campo

$\text{rot}(\vec{F})$:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ yz & xz + yz^3 & -2xy \end{vmatrix}$$

Evaluable las componentes:

- $\mathbf{i} : \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = (-2x) - (x + 3yz^2) = -3x - 3yz^2 = -3(x + yz^2)$
- $\mathbf{j} : \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = (y) - (-2y) = 3y$
- $\mathbf{k} : \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (z) - (z) = 0$

El rotacional es $\text{rot}(\vec{F}) = (-3(x + yz^2), 3y, 0) \neq \vec{0}$, por lo que **no es exacta** (no es un campo gradiente).

Comprobamos si es integrable ($\vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \text{rot}(\vec{F}) &= (yz)[-3(x + yz^2)] + (xz + yz^3)(3y) + (-2xy)(0) \\ &= -3xyz - 3y^2z^3 + 3xyz + 3y^2z^3 = 0 \end{aligned}$$

Como el producto escalar es cero, la ecuación **es integrable** (admite un factor integrante).

3. Reducción Dimensional (Congelar una variable) Consideramos z como una constante, de modo que $dz = 0$. La ecuación se reduce a dos variables:

$$yz \, dx + (xz + yz^3) \, dy = 0$$

Dividimos entre z (asumiendo $z \neq 0$):

$$y \, dx + (x + yz^2) \, dy = 0$$

Reescribimos agrupando términos:

$$(y \, dx + x \, dy) + yz^2 \, dy = 0$$

Observamos que el primer paréntesis es la diferencial exacta $d(xy)$. Integramos la ecuación (manteniendo z constante):

$$xy + \frac{y^2 z^2}{2} = C$$

Para evitar fracciones, multiplicamos por 2 y obtenemos la integral primera paramétrica en z :

$$2xy + y^2 z^2 = C(z)$$

4. Reconstrucción de la Constante $C(z)$ Ahora diferenciamos totalmente nuestra superficie candidata $V(x, y, z) = 2xy + y^2 z^2 = C(z)$ respecto a las tres variables:

$$dV = 2y \, dx + (2x + 2yz^2) \, dy + (2y^2 z - C'(z)) \, dz = 0$$

Para que esta ecuación represente la misma familia que la original ($Pdx + Qdy + Rdz = 0$), los coeficientes deben ser proporcionales:

$$\frac{2y}{yz} = \frac{2x + 2yz^2}{xz + yz^3} = \frac{2y^2 z - C'(z)}{-2xy}$$

Simplificamos las dos primeras fracciones:

$$\frac{2y}{yz} = \frac{2}{z} \quad \text{y} \quad \frac{2(x + yz^2)}{z(x + yz^2)} = \frac{2}{z}$$

Igualemos esta proporción al término de dz :

$$\frac{2y^2z - C'(z)}{-2xy} = \frac{2}{z} \implies z(2y^2z - C'(z)) = -4xy$$

$$2y^2z^2 - zC'(z) = -4xy$$

Para resolver la EDO en $C(z)$, necesitamos eliminar x e y . Usamos nuestra relación de la superficie $2xy + y^2z^2 = C(z) \implies -4xy = 2y^2z^2 - 2C(z)$. Sustituimos esto en la ecuación:

$$2y^2z^2 - zC'(z) = 2y^2z^2 - 2C(z)$$

Cancelamos $2y^2z^2$ en ambos lados:

$$-zC'(z) = -2C(z) \implies zC'(z) = 2C(z)$$

Separamos variables para integrar:

$$\frac{C'(z)}{C(z)} = \frac{2}{z} \implies \int \frac{dC}{C} = \int \frac{2}{z} dz$$

$$\ln |C(z)| = 2 \ln |z| + K \implies C(z) = Kz^2$$

5. Solución Final Sustituimos $C(z)$ en la ecuación de la superficie:

$$2xy + y^2z^2 = Kz^2$$

Dividiendo toda la expresión entre z^2 , obtenemos la forma más elegante de la solución general:

$$\boxed{\frac{2xy}{z^2} + y^2 = K}$$

Ejemplo 2.8.7: Resolución alternativa: Fijando la variable y

Resolver la ecuación de Pfaff (ya comprobada su integrabilidad):

$$yz \, dx + (xz + yz^3) \, dy - 2xy \, dz = 0$$

1. Reducción Dimensional (Congelar la variable y) Consideramos y como una constante, de modo que $dy = 0$. La ecuación se reduce a las variables x y z :

$$yz \, dx - 2xy \, dz = 0$$

Dividimos toda la ecuación entre y (asumiendo que $y \neq 0$):

$$z \, dx - 2x \, dz = 0$$

Esta es una EDO de variables separables. Dividimos entre xz :

$$\frac{dx}{x} - 2 \frac{dz}{z} = 0$$

Integramos directamente:

$$\ln|x| - 2\ln|z| = K \implies \ln\left|\frac{x}{z^2}\right| = K \implies \frac{x}{z^2} = C$$

Como y era nuestra variable congelada, la "constante" de integración C es en realidad una función que depende de y . Obtenemos nuestra superficie candidata:

$$V(x, y, z) = \frac{x}{z^2} = C(y)$$

2. Reconstrucción de la Función $C(y)$ Diferenciamos totalmente la ecuación $V(x, y, z) - C(y) = 0$ respecto a x, y, z :

$$dV = \frac{1}{z^2} dx - C'(y) dy - \frac{2x}{z^3} dz = 0$$

Para que esta ecuación diferencial represente la misma familia de superficies que la ecuación original ($Pdx + Qdy + Rdz = 0$), sus coeficientes deben ser estrictamente proporcionales:

$$\frac{\frac{1}{z^2}}{yz} = \frac{-C'(y)}{xz + yz^3} = \frac{-\frac{2x}{z^3}}{-2xy}$$

Simplificamos la primera y la tercera fracción para comprobar la consistencia:

$$\frac{1}{yz^3} = \frac{-C'(y)}{z(x + yz^2)} = \frac{1}{yz^3}$$

La igualdad entre la primera y la tercera fracción confirma que el método es correcto. Ahora igualamos la primera con la segunda para hallar $C'(y)$:

$$\frac{1}{yz^3} = \frac{-C'(y)}{z(x + yz^2)}$$

3. Resolución de la EDO para $C(y)$ Para resolver esta ecuación, necesitamos que todo dependa únicamente de y . Debemos eliminar x y z . De nuestra superficie candidata sabemos que $\frac{x}{z^2} = C(y)$, lo que implica que $x = C(y)z^2$. Sustituimos x en el denominador de la fracción central:

$$z(x + yz^2) = z(C(y)z^2 + yz^2) = z^3(C(y) + y)$$

Volviendo a la proporción:

$$\frac{1}{yz^3} = \frac{-C'(y)}{z^3(C(y) + y)}$$

Cancelamos el factor común z^3 en ambos denominadores:

$$\frac{1}{y} = \frac{-C'(y)}{C(y) + y}$$

Multiplicamos en cruz para reorganizar la EDO:

$$C(y) + y = -yC'(y) \implies yC'(y) + C(y) = -y$$

Observamos que el lado izquierdo es exactamente la derivada de un producto:

$$\frac{d}{dy}[y \cdot C(y)] = -y$$

Integramos ambos lados respecto a y :

$$y \cdot C(y) = -\frac{y^2}{2} + \tilde{K}$$

Despejamos $C(y)$:

$$C(y) = -\frac{y}{2} + \frac{\tilde{K}}{y}$$

4. Solución Final Sustituimos la función $C(y)$ que acabamos de encontrar en la ecuación original de la superficie candidata $\frac{x}{z^2} = C(y)$:

$$\frac{x}{z^2} = -\frac{y}{2} + \frac{\tilde{K}}{y}$$

Para dar el resultado en una forma más elegante y sin denominadores, multiplicamos toda la expresión por $2y$:

$$\frac{2xy}{z^2} = -y^2 + 2\tilde{K}$$

Llamando a la constante arbitraria $K = 2\tilde{K}$, reordenamos para obtener exactamente la misma solución general que conseguimos al fijar z :

$$\boxed{\frac{2xy}{z^2} + y^2 = K}$$

2.8.3. Método de Lagrange-Charpit

Este método generaliza el método de las características para encontrar una **Integral Completa** de una ecuación no lineal general $F(x, y, z, p, q) = 0$.

La idea es encontrar una segunda relación entre las variables, $G(x, y, z, p, q) = a$ (donde a es una constante), que sea compatible con la ecuación original. Si tenemos el sistema:

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ G(x, y, z, p, q) = a \end{cases}$$

podemos despejar $p = p(x, y, z, a)$ y $q = q(x, y, z, a)$. Si esta forma es exacta (cumple la condición de compatibilidad), podemos integrar $dz = p dx + q dy$.

Teorema 2.8.2: Ecuaciones Auxiliares de Charpit

Para hallar la función G , buscamos una integral primera del siguiente sistema de EDOs:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-(F_x + pF_z)} = \frac{dq}{-(F_y + qF_z)} \quad (2.15)$$

Basta con encontrar una relación $G(x, y, z, p, q) = a$ que involucre a p o q y sea funcionalmente independiente de F .

Ejemplo 2.8.8: Resolución con Lagrange-Charpit

Hallar una integral completa de $p^2 + q^2 = x^2$ (nota: corregido del apunte $p^2 + q^2 - x^2 = 0$).

1. Definir F:

$$F \equiv p^2 + q^2 - x^2 = 0.$$

Derivadas: $F_p = 2p$, $F_q = 2q$, $F_x = -2x$, $F_y = 0$, $F_z = 0$.

2. Sistema Auxiliar:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2p^2 + 2q^2} = \frac{dp}{-(-2x) - p(0)} = \frac{dq}{-0 - q(0)}.$$

Simplificando:

$$\frac{dx}{2p} = \frac{dy}{2q} = \frac{dz}{2(p^2 + q^2)} = \frac{dp}{2x} = \frac{dq}{0}.$$

3. Búsqueda de la Integral G: De la última fracción $\frac{dq}{0}$, deducimos $dq = 0 \implies q = a$ (constante). Esta es la relación más simple. Sin embargo, intentemos usar otra relación del sistema para ilustrar. Tomamos $\frac{dx}{2p} = \frac{dp}{2x} \implies xdx = pdp \implies \frac{x^2}{2} = \frac{p^2}{2} + C \implies x^2 - p^2 = a$.

Usemos la relación del sistema original $F = 0$: $p^2 + q^2 - x^2 = 0$. Si elegimos $G = x^2 - p^2 = a$, sustituyendo en F : $(x^2 - a) + q^2 - x^2 = 0 \implies q^2 = a \implies q = \sqrt{a}$. Entonces $p = \sqrt{x^2 - a}$.

4. Integración Final:

$$dz = p dx + q dy = \sqrt{x^2 - a} dx + \sqrt{a} dy.$$

Integrando:

$$z = \int \sqrt{x^2 - a} dx + \sqrt{a} y + b.$$

(La integral de $\sqrt{x^2 - a}$ es estándar y da lugar a la solución completa con dos parámetros a, b).

2.9. Problemas Propuestos: Ecuaciones Cuasi-Lineales

1. Resolver las siguientes ecuaciones en derivadas parciales:

a) $u_x - 2yu_y + 5y^2u = 0$

b) $u_x + 2u_y = u$ en \mathbb{R}^2 .

c) $xu_x + cu = 0$.

2. Encontrar la función $u : (-1, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 que es solución de:

$$(1 + x)u_x + yu_y = x - 2y$$

y satisface las condiciones $u(x, 0) = 1$ y $u(0, y) = \cos y$.

3. Describir todas las soluciones de la ecuación $u_y = 0$ definidas en la región $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$.

4. Describir todas las soluciones de la ecuación $u_x + 2u_y = u$ definidas en \mathbb{R}^2 .

5. Resolver la ecuación $\frac{1}{y}u_x + u_y = \frac{e^{-x}}{x}u$, con condición inicial $u(x, 1) = h(x)$ para $x > 0$.

6. Resolver el problema de Cauchy:

$$(x+2)u_x + 2yu_y = 2u, \quad u(-1, y) = \sqrt{y}, \quad y > 0.$$

7. Encontrar la solución de la ecuación $uu_x + u_y = 1$ con condición de Cauchy sobre la curva $x = y$, dada por $u = \frac{x}{2}$ (para $x < 2$).

8. Considérese la ecuación lineal general:

$$f(x, y)u_x + g(x, y)u_y = a(x, y)u + b(x, y).$$

Probar que el cambio de variables $v = x$, $w = w(x, y)$, donde $w(x, y) = C$ es la solución general de la ecuación diferencial ordinaria $y'(x) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}$, transforma la ecuación en otra de la forma:

$$z_v = p(v, w)z + q(v, w).$$

Como aplicación, usar este cambio de variables para resolver:

$$y^3u_x - xy^2u_y = xu \quad \text{y} \quad xy(u_x - u_y) = (x - y)u.$$

9. Hallar una solución general de las siguientes ecuaciones:

a) $ye^u u_x + xe^y u_y = \frac{y}{x}$

b) $(x + u)u_x + yu_y = u + y^2$

c) $\frac{b-c}{a}yuu_x + \frac{c-a}{b}xuu_y = \frac{a-b}{c}xy$, con a, b, c parámetros adecuados.

10. Probar que la ecuación $(x^2 - 1)u_x + xu_y = 1$ no tiene ninguna solución definida en todo \mathbb{R}^2 .

11. Encontrar una familia de factores integrantes para la ecuación diferencial ordinaria:

$$(t^3y - 2y^4) + (y^3t - 2t^4)y'(t) = 0.$$

12. Sea u una solución de la ecuación $(ax + by)u_x + (cx + dy)u_y = u$ definida en todo \mathbb{R}^2 , donde los parámetros satisfacen $a + d < 0$ y $ad - bc > 0$. Probar que u es idénticamente nula.

13. Encontrar una EDP de primer orden que satisfagan todos los planos tangentes a la familia de conos $z^2 = a^2(x^2 + y^2)$ con vértice en el origen.

14. Encontrar una EDP de primer orden que satisfagan todos los cilindros cuyas generatrices son paralelas a la recta dada por intersección de $ax + by + c = 0$ y $z = 0$.

15. Resolver el problema mixto de condiciones iniciales y de frontera:

$$\begin{cases} u_t + cu_x = -\lambda u & x, t > 0 \\ u(0, t) = g(t) & t > 0 \\ u(x, 0) = 0 & x > 0 \end{cases}$$

Nota: Los dominios $x > ct$ y $x < ct$ deben tratarse de modo diferente. La condición de frontera afecta a $x < ct$ y la inicial a $x > ct$.

16. **Modelo Biológico:** Para estudiar la absorción de nutrientes de un saltamontes, modelamos su tracto digestivo como un tubo de longitud l y sección A . A través del tracto fluyen nutrientes a velocidad c con concentración $n(x, t)$, siendo absorbidos a un ritmo proporcional a \sqrt{n} .
- ¿Cuál es la EDP que modeliza el proceso?
 - Si el tracto está vacío en $t = 0$ y luego se introducen nutrientes con concentración constante n_0 por la boca ($x = 0$), formular las condiciones iniciales y de frontera.
 - Resolver el problema y dibujar la gráfica de la concentración de salida ($x = l$) para $t > 0$.
 - Interpretar físicamente por qué $u(x, t) = 0$ para $x > ct$.
17. Se sabe que una solución de $uu_x + yu_y = 1$ definida en el semiplano $y > 1$ satisface $u(0, e) = 1/2$. Calcular $u(1, e^2)$.
18. Hallar una solución general de la ecuación $2xuu_x + 2yuu_y + x^2 + y^2 = 0$.
19. Hallar la superficie $z = u(x, y)$ (C^1 en el primer cuadrante) que contiene a la recta $\{(t, 2t, 1/2) : t > 0\}$ y cuyo plano tangente en cada punto (x_0, y_0, z_0) es perpendicular al vector $(x_0^2, y_0^2, x_0 + y_0)$. (Interpretación corregida del enunciado original "perpendicular al plano...").
20. Hallar una EDP de primer orden que tenga entre sus soluciones a las funciones $u_1 = -e^x$, $u_2 = -xy$ y $u_3 = e^x - 2xy$.
21. Hallar todas las soluciones de $x^2u_x + y^2u_y = (x + y)u$ en el primer cuadrante.
22. Hallar una EDP de primer orden que tenga entre sus soluciones a los planos paralelos a la recta $\{(t + 1, 2t + 2, 3t + 3) : t \in \mathbb{R}\}$.
23. Hallar una solución del problema de Cauchy $(x^2 - 1)u_x - 2yu_y = x - 1$, con $u(0, y) = y$, definida en $\Omega = (-1, \infty) \times \mathbb{R}$. Probar que la solución es única en $\Omega_1 = (-1, 1) \times \mathbb{R}$.
24. Construir una superficie $z = u(x, y)$ tal que por cada punto del eje Z pase una recta que forma con la vertical un ángulo igual a la distancia del punto al origen, y cuya proyección en el plano XY es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
25. Hallar una solución general de $(y^2 - u^3)u_x + (u^3 - x)u_y = x - y^2$.

Capítulo 3

Clasificación EDP 's 2ºorden lineales