

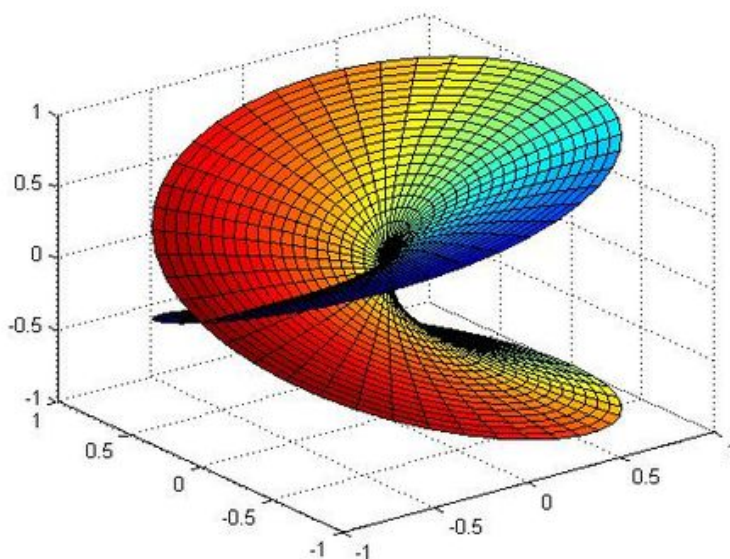
UNIVERSIDAD DE MURCIA

GRADO EN MATEMÁTICAS

Geometría Global de Superficies

Notas de Clase

Basado en las clases de M^a Ángeles Hernández Cifre



Laura Fernández Sánchez

Curso 2025 – 2026

Índice general

1. Geodésicas en superficies	5
1.1. Campos de vectores a lo largo de una curva	5
1.2. La derivada covariante	5
1.3. Campos paralelos y Transporte Paralelo	8
1.3.1. Campos paralelos	8
1.3.2. El transporte paralelo	9
1.4. Las Geodésicas	10
1.4.1. Ecuaciones diferenciales	13
1.5. La Aplicación Exponencial	16
1.6. Entornos Normales	20
1.7. El Lema de Gauss y Minimización	22
1.7.1. Propiedad Minimizante	27
1.8. Coordenadas normales y geodésicas polares	31
1.8.1. Sistema de coordenadas Normales	31
1.8.2. Coordenadas geodésicas polares	31
1.9. Teorema de Minding	36
2. Curvas Regulares a trozos y Variaciones	39
3. Teorema de Gauss Bonett	41
4. Completitud y Teorema de Hopf-Rinow	43
5. Superficies Abstractas	45

Capítulo 1

Geodésicas en superficies

1.1. Campos de vectores a lo largo de una curva

Sea S una superficie regular orientada con aplicación de Gauss $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ y sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva diferenciable.

Definición 1.1.1: Campo de vectores a lo largo de una curva

Sea S una superficie y $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ su aplicación de Gauss. Para una curva $\alpha : I \rightarrow S$ diferenciable, un **campo de vectores a lo largo de α** es una aplicación $V : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que

$$V(t) \in \mathbb{R}^3 = T_{\alpha(t)}S \oplus \text{span}\{N(t)\}.$$

Se dice que V es **diferenciable** si lo es como aplicación de I a \mathbb{R}^3 , es decir, $V \in C^\infty(I, \mathbb{R}^3)$. Además, diremos que V es **tangente** en S a lo largo de α si $V(t) \in T_{\alpha(t)}S$ para todo $t \in I$. Denotaremos a la familia de campos tangentes y diferenciables a lo largo de α como $\mathfrak{X}(\alpha)$.

Observación: Dado un campo de vectores V cualquiera a lo largo de α , siempre podemos descomponerlo en su parte tangencial y normal:

$$V(t) = V(t)^\top + V(t)^\perp = V(t)^\top + \langle V(t), N(t) \rangle N(t).$$

Por tanto, la componente tangencial viene dada por $V^\top = V - \langle V, N \rangle N \in \mathfrak{X}(\alpha)$.

1.2. La derivada covariante

Si proyectamos la derivada usual de \mathbb{R}^3 sobre el plano tangente, obtenemos la derivada covariante.

Definición 1.2.1: Derivada Covariante

Sea $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo tangente y diferenciable. Se define la derivada covariante (o intrínseca) de V como la parte tangente de la derivada usual $V'(t)$:

$$\frac{DV}{dt}(t) := V'(t)^\top = V'(t) - \langle V'(t), N(t) \rangle N(t) \in \mathfrak{X}(\alpha).$$

Proposición 1.2.1: Carácter intrínseco

$\frac{DV}{dt}$ es un concepto intrínseco; solo depende de la primera forma fundamental de S .

Demostración. Sea $\mathbf{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ una parametrización de la superficie y sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva tal que $\alpha(I) \subset \mathbf{X}(U)$. Podemos expresar la curva en coordenadas como $\alpha(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$.

Sea $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ un campo tangente a lo largo de α . Podemos expresarlo en la base del plano tangente $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ como:

$$V(t) = a(t)\mathbf{X}_u(u(t), v(t)) + b(t)\mathbf{X}_v(u(t), v(t)).$$

Para calcular la derivada covariante, primero calculamos la derivada usual $V'(t)$ usando la regla de la cadena y la regla del producto:

$$V'(t) = a'\mathbf{X}_u + a(\mathbf{X}_{uu}u' + \mathbf{X}_{uv}v') + b'\mathbf{X}_v + b(\mathbf{X}_{vu}u' + \mathbf{X}_{vv}v').$$

Ahora utilizamos las **Fórmulas de Gauss** para descomponer las segundas derivadas de la parametrización en sus partes tangencial y normal. Recordamos que:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_{uu} &= \Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + eN, \\ \mathbf{X}_{uv} &= \Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + fN, \\ \mathbf{X}_{vv} &= \Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + gN.\end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de $V'(t)$:

$$\begin{aligned}V'(t) &= a'\mathbf{X}_u + a[u'(\Gamma_{11}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{11}^2 \mathbf{X}_v + eN) + v'(\Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + fN)] \\ &\quad + b'\mathbf{X}_v + b[u'(\Gamma_{12}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{12}^2 \mathbf{X}_v + fN) + v'(\Gamma_{22}^1 \mathbf{X}_u + \Gamma_{22}^2 \mathbf{X}_v + gN)].\end{aligned}$$

Agrupando los términos tangenciales (coeficientes de \mathbf{X}_u y \mathbf{X}_v) y los normales (coeficientes de N), obtenemos:

$$\begin{aligned}V'(t) &= [a' + au'\Gamma_{11}^1 + av'\Gamma_{12}^1 + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\Gamma_{22}^1] \mathbf{X}_u \\ &\quad + [b' + au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2] \mathbf{X}_v \\ &\quad + [au'e + av'f + bu'f + bv'g] N.\end{aligned}$$

Por definición, la derivada covariante $\frac{DV}{dt}$ es la proyección ortogonal de $V'(t)$ sobre el plano tangente $T_{\alpha(t)}S$. Por tanto, descartamos la componente en N y nos queda:

$$\frac{DV}{dt} = (\dots)\mathbf{X}_u + (\dots)\mathbf{X}_v.$$

Observamos que esta expresión depende exclusivamente de a, b, u, v , sus primeras derivadas, y los **Símbolos de Christoffel** Γ_{ij}^k .

Como sabemos que los símbolos de Christoffel dependen únicamente de los coeficientes de la primera forma fundamental (E, F, G) y sus derivadas, concluimos que $\frac{DV}{dt}$ es un concepto intrínseco. \square

Proposición 1.2.2: Propiedades de la derivada covariante

Sean $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ y sea $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Entonces:

1. $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.
2. $\frac{D}{dt}(fV) = f'V + f\frac{DV}{dt}$.
3. $\langle V, W \rangle' = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$.

Demostración. **ii Derivada del producto por una función:**

Por definición, $\frac{D}{dt}(fV)$ es la componente tangencial de la derivada usual $(fV)'$. Aplicando la regla de la cadena usual:

$$\frac{D}{dt}(fV) = [(fV)']^\top = [f'V + fV']^\top.$$

Usando la linealidad de la proyección tangencial:

$$= (f'V)^\top + (fV')^\top.$$

Como V es un campo tangente, el vector $f'V$ es tangente a la superficie, por lo que su proyección es él mismo: $(f'V)^\top = f'V$. Por otro lado, $(fV')^\top = f(V')^\top = f\frac{DV}{dt}$. Concluimos que:

$$\frac{D}{dt}(fV) = f'V + f\frac{DV}{dt}.$$

iii Derivada del producto escalar:

Calculamos la derivada del producto escalar usual en \mathbb{R}^3 :

$$\langle V, W \rangle' = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle.$$

Para analizar el primer término, descomponemos V' en su parte tangencial (la derivada covariante) y su parte normal:

$$V' = \frac{DV}{dt} + (V')^\perp.$$

Sustituyendo esto en el producto escalar:

$$\langle V', W \rangle = \langle \frac{DV}{dt} + (V')^\perp, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle (V')^\perp, W \rangle.$$

Dado que W es un campo tangente y $(V')^\perp$ es normal a la superficie (paralelo a N), son ortogonales, por lo que $\langle (V')^\perp, W \rangle = 0$. Así obtenemos:

$$\langle V', W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle.$$

Aplicando un razonamiento análogo para el segundo término ($\langle V, W' \rangle = \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle$), llegamos al resultado final:

$$\langle V, W \rangle' = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle.$$

□

1.3. Campos paralelos y Transporte Paralelo

1.3.1. Campos paralelos

Definición 1.3.1: Campo paralelo

Se dice que un campo de vectores $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ es **paralelo** a lo largo de α si su derivada covariante es nula:

$$\frac{DV}{dt} = 0.$$

Ejemplo 1.3.1: El plano y la esfera

- En un plano Π , como el normal N es constante, un campo es paralelo si y solo si V es constante en el sentido usual (vectores paralelos euclídeos).
- En la esfera, a lo largo del ecuador $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, el campo $V_0(t) = (0, 0, 1)$ es paralelo. Además, el campo velocidad de cualquier circunferencia máxima es paralelo.

Proposición 1.3.1: Propiedades de campos paralelos

Sean $V, W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ campos paralelos.

1. Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $aV + bW$ es un campo paralelo (el espacio de campos paralelos es un espacio vectorial).
2. El producto escalar $\langle V, W \rangle$ es constante. En particular, la norma $|V|$ y el ángulo entre V y W son constantes a lo largo de la curva.

Demostración.

$$\text{I. } \frac{D}{dt}(aV + bW) = [aV' + bW']^\top = a\frac{DV}{dt} + b\frac{DW}{dt} = 0$$

$$\text{II. } \langle V, W \rangle' = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle = 0 \implies \langle V, W \rangle = c$$

□

Teorema 1.3.1: Existencia y unicidad de campos paralelos

Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva diferenciable y sea $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$ para cierto $t_0 \in I$. Entonces, existe un **único** campo paralelo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ tal que $V(t_0) = V_0$.

Demostración. Consideremos una parametrización $\mathbf{X}(u, v)$ alrededor de la traza de la curva. Fijamos el vector inicial $V_0 \in T_{\alpha(t_0)}S$.

Queremos encontrar funciones escalares $a(t), b(t)$ tales que el campo $V(t) = a(t)\mathbf{X}_u + b(t)\mathbf{X}_v$ verifique:

1. Condición inicial: $V(t_0) = V_0$, lo cual determina unívocamente $a(t_0)$ y $b(t_0)$.
2. Condición de paralelismo: $\frac{DV}{dt} = 0$.

Desarrollando la derivada covariante (utilizando la fórmula de la derivada de un campo en coordenadas que vimos anteriormente), la condición $\frac{DV}{dt} = 0$ implica que las componentes tangenciales deben anularse. Como $\{\mathbf{X}_u, \mathbf{X}_v\}$ es una base, sus coeficientes deben ser cero.

Esto nos lleva al siguiente **sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)** lineales de primer orden para las incógnitas $a(t)$ y $b(t)$:

$$\begin{cases} a' + a(u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1) + b(u'\Gamma_{12}^1 + v'\Gamma_{22}^1) = 0, \\ b' + a(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2) + b(u'\Gamma_{12}^2 + v'\Gamma_{22}^2) = 0. \end{cases}$$

Este es un sistema lineal de la forma $Y'(t) = A(t)Y(t)$. Por el **Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones para EDOs** (Picard-Lindelöf), dado que los coeficientes (que dependen de los símbolos de Christoffel y la curva) son diferenciables, existe una **única solución** $(a(t), b(t))$ definida en todo el intervalo I que satisface las condiciones iniciales dadas por V_0 .

Por tanto, existe un único campo paralelo V a lo largo de α . □

1.3.2. El transporte paralelo

Definición 1.3.2: Transporte paralelo

Dados $t_0, t_1 \in I$ con $\alpha(t_0) = p$ y $\alpha(t_1) = q$. Para cada $V_0 \in T_p S$, definimos el transporte paralelo de V_0 a lo largo de α hasta q como la imagen por la aplicación $P_{t_0}^{t_1}(\alpha) : T_p S \rightarrow T_q S$

$$P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(V_0) = V(t_1) \in T_q S,$$

donde V es el único campo paralelo a lo largo de α con $V(t_0) = V_0$.

Proposición 1.3.2: Isometría

La aplicación $P_{t_0}^{t_1}(\alpha) : T_p S \rightarrow T_q S$ es una **isometría lineal**.

Demostración. Sean $v_0, w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$. Queremos probar dos propiedades: linealidad y conservación del producto escalar.

1. Linealidad: Queremos demostrar que $P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(v_0 + w_0) = P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(v_0) + P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(w_0)$.

Por el Teorema de Existencia y Unicidad de campos paralelos:

- Existe un único campo $V \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo tal que $V(t_0) = v_0$.
- Existe un único campo $W \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo tal que $W(t_0) = w_0$.
- Existe un único campo $U \in \mathfrak{X}(\alpha)$ paralelo tal que $U(t_0) = v_0 + w_0$.

Por definición de transporte paralelo, tenemos que:

$$P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(v_0) = V(t_1), \quad P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(w_0) = W(t_1), \quad P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(v_0 + w_0) = U(t_1).$$

Consideremos ahora el campo suma $V + W$. Sabemos por las propiedades de los campos paralelos que la suma de dos campos paralelos es también un campo paralelo. Evaluamos este campo en t_0 :

$$(V + W)(t_0) = V(t_0) + W(t_0) = v_0 + w_0.$$

Observamos que el campo $V + W$ es paralelo y cumple la misma condición inicial que U . Por la **unicidad** del teorema de campos paralelos, deducimos que $U = V + W$.

Evaluando en t_1 :

$$U(t_1) = V(t_1) + W(t_1) \implies P(v_0 + w_0) = P(v_0) + P(w_0).$$

2. Isometría: Queremos ver que se conserva el producto escalar:

$$\langle P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(v_0), P_{t_0}^{t_1}(\alpha)(w_0) \rangle \stackrel{?}{=} \langle v_0, w_0 \rangle.$$

Sustituyendo por los campos definidos anteriormente:

$$\langle V(t_1), W(t_1) \rangle \stackrel{?}{=} \langle V(t_0), W(t_0) \rangle.$$

Sabemos, por una propiedad anterior, que el producto escalar de dos campos paralelos es constante a lo largo de la curva. Por tanto:

$$\langle V(t_1), W(t_1) \rangle = \langle V(t_0), W(t_0) \rangle.$$

Esto demuestra que la aplicación conserva el producto escalar y, por tanto, conserva normas y ángulos (es una isometría). \square

Proposición 1.3.3: Otras propiedades

- El transporte paralelo a lo largo de una curva $\alpha : I \rightarrow S$ no depende de la parametrización de la curva.
- Si S_1, S_2 son dos superficies regulares que son **tangentes** a lo largo de una curva, entonces el transporte paralelo a lo largo de esa curva es independiente de la superficie en la que se calcule.

1.4. Las Geodésicas

Cuando trabajamos con superficies buscamos trabajar con curvas que sean "buenas" en el sentido de que se aproximen a las propiedades de las rectas lo mejor posible. Estas son las geodésicas.

Definición 1.4.1: Geodésica

Una curva $\gamma : I \rightarrow S$ es una geodésica de S si su campo velocidad γ' es paralelo a lo largo de la curva, es decir:

$$\frac{D\gamma'}{dt} = 0.$$

Con la siguiente proposición vamos a buscar que se aproximen a las propiedades de la recta como hemos comentado.

Proposición 1.4.1: Propiedades de las geodésicas

Sea γ una geodésica no constante:

1. $|\gamma'(t)|$ es constante. Luego γ es una curva regular.
2. Si γ no está parametrizada por el arco, al menos está parametrizada proporcionalmente al arco.
3. Las geodésicas son invariantes por isometrías locales.
4. Una geodésica puede admitir intersecciones.
5. Si $h : J \rightarrow I$ es un cambio de parámetro, $\beta = \gamma \circ h$ es geodésica si y solo si el cambio es afín: $h(s) = as + b$.
6. Si γ está p.p.a. y $\gamma'' \neq 0$, es geodésica si y solo si su vector normal principal n_γ es paralelo a la normal de la superficie N .

Demostración de las propiedades.

1. La rapidez es constante:

Como γ es una geodésica, su campo velocidad γ' es paralelo, es decir, $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$. Sabemos que el transporte paralelo conserva el producto escalar y, por tanto, la norma. Así, $|\gamma'(t)| = |\gamma'(t_0)| = c$ (constante). Veamos que $c \neq 0$: Si existiera t_0 tal que $\gamma'(t_0) = 0$, por la unicidad del campo paralelo (con condición inicial 0), tendríamos $\gamma'(t) \equiv 0$, lo que implicaría que la curva es constante (caso excluido).

2. Parametrización proporcional al arco:

Supongamos que γ no está p.p.a. La longitud de arco se define como $s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du$. Por el apartado anterior, sabemos que $|\gamma'(u)| = c$. Entonces:

$$s(t) = \int_0^t c du = ct.$$

Esto muestra que el parámetro t es proporcional a la longitud de arco s (relación lineal).

3. Cambio de parámetro afín:

Sea $\beta(s) = \gamma(h(s))$. Calculamos su aceleración derivando dos veces:

$$\beta'(s) = \gamma'(h(s))h'(s) \implies \beta''(s) = \gamma''(h(s))(h'(s))^2 + \gamma'(h(s))h''(s).$$

Tomamos la derivada covariante (proyección tangencial $[\cdot]^\top$):

$$\frac{D\beta'}{ds} = (\beta''(s))^\top = \underbrace{[\gamma''(h(s))]^\top}_{=0} (h'(s))^2 + \underbrace{[\gamma'(h(s))]^\top}_{\gamma'} h''(s).$$

(El primer término es nulo porque γ es geodésica). Nos queda $\frac{D\beta'}{ds} = \gamma'(h(s))h''(s)$. Para que β sea geodésica, necesitamos $\frac{D\beta'}{ds} = 0$. Como $\gamma' \neq 0$, esto equivale a $h''(s) = 0$, lo que implica $h(s) = as + b$.

4. Relación con la normal (Frenet):

Supongamos γ p.p.a. y $\gamma'' \neq 0$. Por las fórmulas de Frenet, $\gamma''(s) = kn_\gamma$. Descomponemos la aceleración en componentes intrínsecas:

$$\gamma''(s) = \frac{D\gamma'}{ds} + (\gamma''(s))^\perp.$$

Al ser geodésica, $\frac{D\gamma'}{ds} = 0$, luego $\gamma''(s)$ es puramente normal a la superficie (paralelo a N). Como γ'' es paralelo a n_γ y a N simultáneamente, concluimos que $n_\gamma(s) = \pm N(s)$.

□

Ejemplo 1.4.1: Geodésicas en superficies elementales

- Las geodésicas del plano son las rectas.
- Las geodésicas de la esfera son las circunferencias máximas.
- Las geodésicas del cilindro son las rectas, circunferencias y hélices.

De la definición de geodésica, podemos deducir que S es una geodésica sii $\gamma'' + \langle \gamma', N' \rangle N = 0$. A partir de esta expresión, vamos a calcular las geodésicas en los ejemplos.

Cálculo de geodésicas en el Plano. Sea el plano $S = \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle p, \vec{a} \rangle = c\}$ con vector normal constante $N(p) = \vec{a}$ (unitario). Sea $\gamma : I \rightarrow S$ una geodésica. La condición de geodésica es que su aceleración γ'' sea normal a la superficie:

$$\gamma'' = \frac{D\gamma'}{dt} + (\gamma'')^\perp = 0 + \langle \gamma'', N \rangle N.$$

Truco: Sabemos que $\langle \gamma', N \rangle = 0$ (la velocidad es tangente). Derivamos esta expresión:

$$\langle \gamma'', N \rangle + \langle \gamma', N' \rangle = 0.$$

Como el plano tiene normal constante, $N' = 0$. Por tanto, $\langle \gamma'', N \rangle = 0$. Sustituyendo arriba:

$$\gamma'' = 0 \cdot N = 0 \implies \gamma(t) = p + t\vec{v}.$$

Conclusión: Las geodésicas del plano son las **rectas**.

□

Cálculo de geodésicas en la Esfera $\mathbb{S}^2(r)$. Sea $p \in \mathbb{S}^2(r)$ y $\vec{v} \in T_p\mathbb{S}^2(r)$ con $|\vec{v}| = c$. Sabemos que $|\gamma'(t)| = c$ constante por estar considerando una geodésica (propiedades de las geodésicas). El vector normal es $N(t) = \frac{1}{r}\gamma(t)$. La condición de geodésica es:

$$\frac{D\gamma'}{dt} = \gamma'' - \langle \gamma'', N \rangle N = 0 \implies \gamma'' = \langle \gamma'', N \rangle N.$$

Para calcular el término $\langle \gamma'', N \rangle$, derivamos la condición de tangencia $\langle \gamma', N \rangle = 0$:

$$\langle \gamma'', N \rangle + \langle \gamma', N' \rangle = 0 \implies \langle \gamma'', N \rangle = -\langle \gamma', N' \rangle.$$

Como $N(t) = \frac{1}{r}\gamma(t)$ (el vector posición), entonces $N'(t) = \frac{1}{r}\gamma'(t)$. Así:

$$\langle \gamma'', N \rangle = -\langle \gamma', \frac{1}{r}\gamma' \rangle = -\frac{1}{r}|\gamma'|^2 = -\frac{c^2}{r}.$$

La ecuación diferencial queda:

$$\gamma'' = -\frac{c^2}{r}N = -\frac{c^2}{r}\left(\frac{1}{r}\gamma\right) \implies \gamma'' + \frac{c^2}{r^2}\gamma = 0.$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico ($\gamma'' + k^2\gamma = 0$).

Ver Anexo de ecuaciones diferenciales

Su solución general con condiciones iniciales $\gamma(0) = p, \gamma'(0) = \vec{v}$ es:

$$\gamma(t) = \cos\left(\frac{c}{r}t\right)p + \frac{r}{c}\sin\left(\frac{c}{r}t\right)\vec{v}.$$

Conclusión: Como la curva está contenida en el plano generado por p y \vec{v} que pasa por el origen, las geodésicas son **circunferencias máximas** (círculos grandes). \square

Cálculo de geodésicas en el Cilindro. Sea el cilindro C de radio r con eje z . Un punto es $\gamma(t) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$. El normal es $N(\gamma(t)) = (\frac{\gamma_1}{r}, \frac{\gamma_2}{r}, 0)$, por lo que $N' = (\frac{\gamma_1'}{r}, \frac{\gamma_2'}{r}, 0)$. La condición de geodésica $\gamma'' \perp S$ implica $\gamma'' = \lambda N$, es decir:

$$(\gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3'') = \lambda \left(\frac{\gamma_1}{r}, \frac{\gamma_2}{r}, 0\right).$$

De la tercera componente obtenemos inmediatamente:

$$\gamma_3'' = 0 \implies \gamma_3(t) = p_3 + tv_3 \quad (\text{Movimiento rectilíneo uniforme en el eje } z).$$

Para las otras componentes, usamos que la rapidez $|\gamma'| = c$ es constante:

$$c^2 = |\gamma'|^2 = (\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 + (\gamma_3')^2.$$

Como $\gamma_3' = v_3$ (constante), tenemos que la velocidad horizontal al cuadrado es $(\gamma_1')^2 + (\gamma_2')^2 = c^2 - v_3^2$. Esto reduce el problema a encontrar geodésicas en un círculo de radio r con velocidad constante $\sqrt{c^2 - v_3^2}$. La solución es un movimiento circular uniforme:

$$\gamma_{1,2}(t) = (r \cos(\omega t), r \sin(\omega t)), \quad \text{con } \omega = \frac{\sqrt{c^2 - v_3^2}}{r}.$$

Combinando todo, la solución general es:

$$\gamma(t) = (r \cos(At + B), r \sin(At + B), Ct + D).$$

Conclusión: Las geodésicas del cilindro son **hélices** (si $v_3 \neq 0$ y rotación $\neq 0$), **circunferencias** (si $v_3 = 0$) o **rectas verticales** (si no hay rotación). \square

1.4.1. Ecuaciones diferenciales

En su momento, cuando vimos si un campo era paralelo, $\forall V \in \mathfrak{X}(\alpha)$, con $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$,

$$V(t) = a(t)X_u(u(t), v(t)) + b(t)X_v(u(t), v(t)) \text{ es paralelo} \iff$$

$$\begin{cases} a' + a(u'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1) + b(u'\Gamma_{12}^1 + v'\Gamma_{22}^1) = 0, \\ b' + a(u'\Gamma_{11}^2 + v'\Gamma_{12}^2) + b(u'\Gamma_{12}^2 + v'\Gamma_{22}^2) = 0. \end{cases}$$

Entonces, $\gamma : I \rightarrow S$ es geodésica $\Leftrightarrow \gamma'$ es paralelo.

$$\gamma(t) = X(u(t), v(t)), \quad \gamma'(t) \in \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \text{coordenadas } \underbrace{(u'(t))}_a, \underbrace{(v'(t))}_b$$

Sustituyo en la ecuación anterior y me queda lo siguiente:

Sea (U, \mathbf{X}) una parametrización de S y $\gamma(t) = \mathbf{X}(u(t), v(t))$. La condición de geodésica se traduce en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden (usando los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k):

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0, \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0. \end{cases}$$

Teorema 1.4.1: Existencia y unicidad de geodésicas maximales

Sea S una superficie regular, $p \in S$ y $v \in T_p S$, existe una única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow S$ (con I_v abierto conteniendo al 0) tal que:

- $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = v$.
- Si $\alpha : J \rightarrow S$ es otra geodésica con $\alpha(0) = p$ y $\alpha'(0) = v$, entonces $J \subset I_v$ y $\alpha = \gamma_v|_J$

Idea de la demostración. Sea $p \in S, \vec{v} \in T_p S$. Definimos el conjunto:

$$\mathcal{J}_{p, \vec{v}} = \{\gamma : I \rightarrow S \mid 0 \in I, \gamma(0) = p, \gamma'(0) = \vec{v}\}.$$

Veamos que $\mathcal{J}_{p, \vec{v}} \neq \emptyset$ (vamos a usar las EDOs de las geodésicas). Cogemos una parametrización de la superficie que contenga a p . Sea (U, X) parametrización con $p \in X(U) \Rightarrow p = X(u_0, v_0)$. Expresamos el vector en la base coordenada:

$$\vec{v} = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0).$$

Por el **Teorema de Existencia y Unicidad de sistemas de EDOs**, existe una **única** solución $(u(t), v(t))$ al sistema de ecuaciones de las geodésicas tal que:

$$\begin{cases} u(0) = u_0, & v(0) = v_0 \\ u'(0) = a, & v'(0) = b \end{cases}$$

Defino $\gamma(t) = X(u(t), v(t))$. Esta curva cumple las condiciones iniciales y el sistema, por tanto es geodésica (y es única).

$$\Rightarrow \mathcal{J}_{p, \vec{v}} \neq \emptyset.$$

¡OJO!

Esto no acaba la demostración. Esta geodésica la he encontrado en $V = X(U)$ (en la parametrización). ¿Qué ocurre en la superficie? Esto es un resultado **local**, no global como lo está diciendo en el enunciado.

Técnica que usaremos mucho (Unicidad):

Supongamos $\gamma_1 : I_1 \rightarrow S$ y $\gamma_2 : I_2 \rightarrow S$ con $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p$ y $\gamma_1'(0) = \gamma_2'(0) = \vec{v}$. Sea el conjunto:

$$A = \{t \in \underbrace{I_1 \cap I_2}_{\text{conexo}} \mid \gamma_1(t) = \gamma_2(t) \text{ y } \gamma_1'(t) = \gamma_2'(t)\}.$$

Sabemos que $A \neq \emptyset$ porque $0 \in A$.

Vamos a ver que $A = I_1 \cap I_2$. (No lo vamos a hacer en detalle). Demostramos que A es **cerrado** y **abierto** en el conexo $I_1 \cap I_2$.

$$\implies A = I_1 \cap I_2.$$

Así, en el trozo común tengo las mismas geodésicas.

Para extenderlo a maximales creo que se va cogiendo intervalos y se extiende hasta donde se quiera. \square

Definición 1.4.2: Geodésicamente completa

Una superficie S es **geodésicamente completa en un punto** $p \in S$ si $I_v = \mathbb{R}$ para todo $v \in T_p S$. Se dice además que S es **geodésicamente completa** cuando lo es en todos sus puntos.

Recordemos que en una superficie, para una curva α también podíamos definir una base (Triedro de Darboux): $\alpha : I \rightarrow S$ p.p.a,

$$\{\alpha', J\alpha', N\}$$

donde N es el normal a la superficie y $J(\gamma)$ la rotación de 90.

Definición 1.4.3: Curvatura geodésica

Sea S una superficie regular. Para una curva **p.p.a.** $\alpha : I \rightarrow S$, la **curvatura geodésica** se define como:

$$k_g(s) = \langle \alpha''(s), J\alpha'(s) \rangle = \langle \alpha''(s), N(s) \wedge \alpha'(s) \rangle.$$

Una **pregeodésica** es una curva que se puede reparametrizar para ser una geodésica.

En ejercicios demostraremos de dónde sale la siguiente definición:

Definición 1.4.4: Curvatura geodésica para α no p.p.a

Sea S una superficie regular. $\alpha : I \rightarrow S$, la **curvatura geodésica** se define como:

$$k_g(s) = \frac{\langle \alpha''(s), N(s) \wedge \alpha'(s) \rangle}{|\alpha'|^3}.$$

Proposición 1.4.2: Caracterización Geodésica

Sea $\alpha : I \rightarrow S$ una curva **p.p.a.** en una superficie regular S . Entonces, α es una geodésica si, y solo si, $k_g(s) = 0$ para todo $s \in I$.

Demostración. Sabemos que la curvatura geodésica es $k_g = \langle \alpha'', N \wedge \alpha' \rangle$. Entonces:

$$k_g = 0 \iff \langle \alpha'', N \wedge \alpha' \rangle = 0 \iff \alpha'' \perp (N \wedge \alpha') = \alpha'' \perp J\alpha'.$$

Además, como α está parametrizada por el arco (p.p.a.), sabemos que $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 1$. Derivando esta expresión:

$$\langle \alpha'', \alpha' \rangle = 0 \iff \alpha'' \perp \alpha'.$$

Si el vector aceleración α'' es perpendicular a α' y también a $J\alpha'$ (que forman una base del plano tangente), entonces α'' es perpendicular a todo el plano tangente:

$$\implies \alpha'' \perp T_{\alpha(t)}S \implies \alpha'' \parallel N(\alpha(t)).$$

Esto es equivalente a decir que α es una **geodésica** (por la propiedad de que su aceleración es normal a la superficie). \square

1.5. La Aplicación Exponencial

La aplicación exponencial nos permite mapear el espacio tangente sobre la superficie siguiendo geodésicas.

Definición 1.5.1: Aplicación Exponencial

Sea $p \in S$ con S una superficie regular y $D_p = \{v \in T_pS : 1 \in I_v\}$. Se define la aplicación exponencial $\exp_p : D_p \subset T_pS \rightarrow S$ como:

$$\exp_p(v) = \gamma_v(1), \quad \text{con } \exp_p(0) = p.$$

Observación 1.5.1: Dominio de la exponencial en superficies completas

Si una superficie regular S es geodésicamente completa en $p \in S$, entonces el dominio de la aplicación exponencial $D_p \equiv T_pS$.

Observación 1.5.2: Interpretación métrica de la exponencial

Otra forma de entender la aplicación exponencial es a través de la longitud de las curvas. Sea $\gamma_{\vec{v}}$ la geodésica radial definida por \vec{v} , es decir, con $\gamma_{\vec{v}}(0) = p$ y $\gamma'_{\vec{v}}(0) = \vec{v}$. Sabemos que el punto imagen es $\exp_p(\vec{v}) = \gamma_{\vec{v}}(1)$. Calculemos la longitud de este segmento de geodésica desde $t = 0$ hasta $t = 1$:

$$L_p^{\exp_p(\vec{v})}(\gamma_{\vec{v}}) = L_0^1(\gamma_{\vec{v}}) = \int_0^1 |\gamma'_{\vec{v}}(t)| dt.$$

Recordemos una propiedad fundamental de las geodésicas: tienen ****rapidez constante****. Por tanto, $|\gamma'_{\vec{v}}(t)| = |\gamma'_{\vec{v}}(0)| = |\vec{v}|$ para todo t . La integral se simplifica inmediatamente:

$$\int_0^1 |\gamma'_{\vec{v}}(t)| dt = \int_0^1 |\vec{v}| dt = |\vec{v}| \cdot (1 - 0) = |\vec{v}|.$$

Conclusión: La norma del vector $|\vec{v}|$ en el espacio tangente T_pS representa exactamente la **distancia geodésica** sobre la superficie desde el punto p hasta el punto $\exp_p(\vec{v})$. Es decir, la exponencial enrolla el plano tangente sobre la superficie preservando las longitudes radiales.

Lema 1.5.1: de homogeneidad de las geodésicas

Sean S una superficie regular, $p \in S$ y $\mathbf{v} \in T_p S$. Sea $\gamma_{\mathbf{v}} : I_{\mathbf{v}} \rightarrow S$ la geodésica maximal con $\gamma_{\mathbf{v}}(0) = p$ y $\gamma'_{\mathbf{v}}(0) = \mathbf{v}$, y sea $\lambda > 0$. Si $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset I_{\mathbf{v}}$, entonces $(-\varepsilon_1/\lambda, \varepsilon_2/\lambda) \subset I_{\lambda\mathbf{v}}$, y además $\gamma_{\lambda\mathbf{v}}(t) = \gamma_{\mathbf{v}}(\lambda t)$ para todo $t \in (-\varepsilon_1/\lambda, \varepsilon_2/\lambda)$, donde $\gamma_{\lambda\mathbf{v}} : I_{\lambda\mathbf{v}} \rightarrow S$ es la única geodésica maximal con condiciones iniciales $\gamma_{\lambda\mathbf{v}}(0) = p$ y $\gamma'_{\lambda\mathbf{v}}(0) = \lambda\mathbf{v}$.

Nosotros realmente usaremos:

Lema de Homogeneidad

Si γ_v es la geodésica con velocidad inicial v , entonces la geodésica con velocidad inicial λv es simplemente una reparametrización de la anterior:

$$\gamma_{\lambda v}(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Esto implica que $\exp_p(tv) = \gamma_v(t)$.

Demostración del Lema de Homogeneidad. Sea $\gamma_v : I_v \rightarrow S$ la geodésica maximal tal que $\gamma_v(0) = p$ y $\gamma'_v(0) = \mathbf{v}$.

Definimos la curva auxiliar $\alpha : I_{\alpha} \rightarrow S$, donde el intervalo es $I_{\alpha} = \{t \in \mathbb{R} \mid \lambda t \in I_v\}$, dada por:

$$\alpha(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Comprobamos sus condiciones iniciales:

- $\alpha(0) = \gamma_v(0) = p$.
- $\alpha'(t) = \lambda \gamma'_v(\lambda t) \implies \alpha'(0) = \lambda \gamma'_v(0) = \lambda \mathbf{v}$.

Calculamos la derivada covariante de la velocidad para ver si es geodésica:

$$\frac{D\alpha'}{dt} = \lambda^2 \frac{D\gamma'_v(\lambda t)}{dt} = 0 \quad (\text{pues } \gamma_v \text{ es geodésica}).$$

Por tanto, α es una geodésica que parte de p con velocidad $\lambda\mathbf{v}$. Por el **Teorema de Existencia y Unicidad de geodésicas maximales**, α debe coincidir con $\gamma_{\lambda\mathbf{v}}$ en su dominio común. Como $\gamma_{\lambda\mathbf{v}}$ es maximal, tenemos que $I_{\alpha} \subset I_{\lambda\mathbf{v}}$ y:

$$\gamma_{\lambda\mathbf{v}}(t) = \alpha(t) \text{ en } I_{\alpha} \implies \gamma_{\lambda\mathbf{v}}(t) = \gamma_v(\lambda t).$$

Veamos lo de los intervalos: ¿Se cumple que $(-\frac{\varepsilon_1}{\lambda}, \frac{\varepsilon_2}{\lambda}) \subset I_{\lambda\mathbf{v}}$?

Vamos a ver que $(-\frac{\varepsilon_1}{\lambda}, \frac{\varepsilon_2}{\lambda}) \subset I_{\alpha}$. Como $I_{\alpha} \subset I_{\lambda\mathbf{v}}$, ya lo tendríamos.

Sea $t \in (-\frac{\varepsilon_1}{\lambda}, \frac{\varepsilon_2}{\lambda})$. Como $\lambda > 0$, multiplicando la desigualdad:

$$-\varepsilon_1 < \lambda t < \varepsilon_2 \implies \lambda t \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_2).$$

Por hipótesis, $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2) \subset I_v$, luego $\lambda t \in I_v$. Por cómo hemos definido $I_{\alpha} = \{t \mid \lambda t \in I_v\}$, concluimos que $t \in I_{\alpha}$.

Por tanto, el intervalo escalado está en el dominio y se cumple la fórmula de homogeneidad. \square

Observación 1.5.3: Observación del Teorema Anterior

El mismo teorema vale para un $\lambda < 0$ si el intervalo $(-\epsilon_1, \epsilon_2)$ es simétrico (o sea, $\epsilon_1 = \epsilon_2$).

Demostración. Basta aplicar la demostración anterior. La primera parte es idéntica y la parte de los intervalos es igual. Simplemente, al multiplicar por el λ , se intercambian las desigualdades, pero al ser el intervalo simétrico, también nos vale. \square

Teorema 1.5.1: Propiedades de la aplicación exponencial

Sean S una superficie regular y $p \in S$. Entonces:

- i) Para cualesquiera $\mathbf{v} \in T_p S$ y $t \in I_{\mathbf{v}}$ con $t > 0$, se tiene que $t\mathbf{v} \in D_p$. Además, $\exp_p(t\mathbf{v}) = \gamma_{\mathbf{v}}(t)$.
 - i.a) D_p es estrellado respecto a $\mathbf{0}$.
 - i.b) Para todo $\mathbf{v} \in T_p S$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda\mathbf{v} \in D_p$, es decir, *todas las direcciones están en D_p* .
- II) El dominio de la exponencial D_p es un abierto, y $\exp_p : D_p \rightarrow S$ es una aplicación diferenciable.
- III) La aplicación \exp_p es un difeomorfismo local en $\mathbf{0}$.

Demostración. (i) Sea $t \in I_{\mathbf{v}}$. Usaremos el lema de homogeneidad con $\lambda = t \implies \frac{t}{t} = 1 \in I_{t\mathbf{v}} \implies t\mathbf{v} \in D_p$ por la propia definición del conjunto. La otra parte se tiene también por el Lema de Homogeneidad de las geodésicas:

$$\exp_p(t\vec{v}) = \gamma_{t\mathbf{v}}(1) \underset{\text{lema}}{=} \gamma_{\mathbf{v}}(t)$$

(i.a) Se tiene como consecuencia de i: Sea $\vec{v} \in D_p$. ¿Se cumple que $[\vec{0}, \vec{v}] \subset D_p$? Sí porque $[\vec{0}, \vec{v}] = \{\lambda\vec{v} : \lambda \in [0, 1]\}$. Como $I_{\mathbf{v}}$ es un intervalo y $1 \in I_{\mathbf{v}}$, entonces $[0, 1] \subset I_{\mathbf{v}}$.

$$\lambda \in [0, 1] \implies \lambda \in I_{\mathbf{v}} \implies \gamma_{\mathbf{v}}(\lambda) = \exp_p(\lambda\vec{v}) \implies \lambda\vec{v} \in D_p$$

(i.b) Como $0 \in I_{\mathbf{v}}$, al ser abierto $I_{\mathbf{v}}$, $\exists \lambda > 0$ tal que $\lambda \in I_{\mathbf{v}} \implies \lambda\vec{v} \in D_p$.

(ii) María Ángeles no lo demuestra.

(iii) Consideramos la diferencial de la exponencial en el origen:

$$\exp_p : D_p \subset T_p S \rightarrow S \implies d(\exp_p)_{\vec{0}} : \underbrace{T_{\vec{0}} D_p}_{=T_p S} \rightarrow \underbrace{T_{\exp_p(\vec{0})} S}_{=T_p S \leftarrow \exp_p(\vec{0})=p}$$

Nota: En la diferencial ponemos el propio plano porque D_p es un trozo de plano de $T_p S$, si le calculamos su plano tangente en un punto, obviamente saldrá todo $T_p S$.

Es decir, $d(\exp_p)_{\vec{0}} : T_p S \rightarrow T_p S$ viene dada por:

$$d(\exp_p)_{\vec{0}}(\vec{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp_p \circ \alpha)(t)$$

siendo $\alpha : I \rightarrow D_p$ una curva con $\alpha(0) = \vec{0}$, $\alpha'(0) = \vec{v}$. Como la elección de α puede ser cualquier curva con tal de que verifique las condiciones iniciales y, muy importante, esté en la superficie (en este caso D_p), pues cogeremos la más sencilla posible. Como D_p es un plano, podremos entonces tomar la recta $\alpha(t) = \vec{v} \cdot t$.

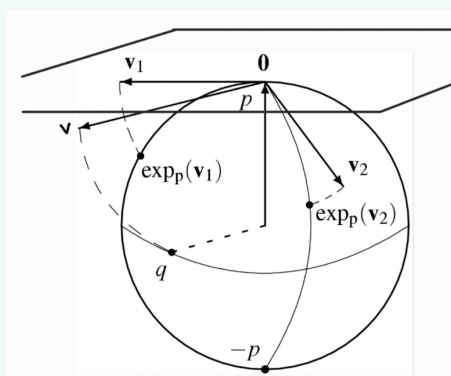
Tendremos entonces:

$$d(\exp_p)_{\vec{0}}(\vec{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(t\vec{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_v(t) = \gamma'_v(0) = \vec{v}$$

Es decir: $d(\exp_p)_{\vec{0}} \equiv \mathbb{I}_d$ (la identidad) $\implies \exp_p$ es un **difeomorfismo en el origen** (por el Teorema de la Función Inversa). \square

Ejemplo 1.5.1: La aplicación exponencial en la esfera

Veamos la aplicación exponencial en la esfera.



[Esfera $\mathbb{S}^2(r)$ con plano tangente $T_p \mathbb{S}^2(r)$ en el polo norte p . Mostrar vectores \vec{v} y su imagen $\exp_p(\vec{v})$ sobre la esfera.]

Sabemos (ya la calculamos) que la fórmula es:

$$\exp_p(\vec{v}) = \gamma_v(1) = \cos\left(\frac{|\vec{v}|}{r}\right)p + \frac{r}{|\vec{v}|} \sin\left(\frac{|\vec{v}|}{r}\right)\vec{v}$$

Sea p el polo norte de la esfera. Entonces, el **ecuador** es: Ecuador = $\{q \in \mathbb{S}^2(r) : \langle p, q \rangle = 0\}$.

¿Cuándo se tiene $\exp_p(\vec{v}) \in \text{Ecuador}$?

$$\langle \exp_p(\vec{v}), p \rangle = 0 \iff \cos\left(\frac{|\vec{v}|}{r}\right) \langle p, p \rangle = 0$$

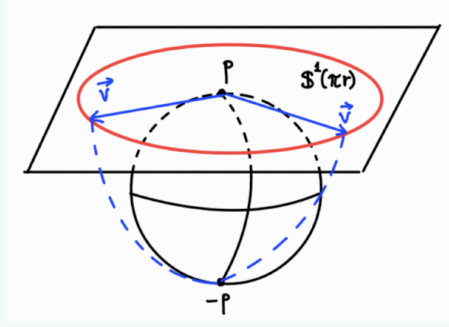
(El término del seno se va porque $\langle \vec{v}, p \rangle = 0$, ya que $\vec{v} \in T_p S$). Como $p \neq 0$, entonces:

$$\cos\left(\frac{|\vec{v}|}{r}\right) = 0 \iff \frac{|\vec{v}|}{r} = \frac{\pi}{2} \implies |\vec{v}| = \frac{\pi}{2}r.$$

Es decir, si el vector \vec{v} tiene módulo $|\vec{v}| = \frac{\pi}{2}r$, la exponencial llegará al ecuador. Pero si lo queremos en un **punto concreto** p_0 del ecuador, hay que marcar la dirección de \vec{v} , sustituyendo en $\exp_p(\vec{v})$ sabiendo que $|\vec{v}| = \frac{\pi}{2}r$ (lo que implica $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$):

$$\exp_p(\vec{v}) = p_0 \iff p_0 = \frac{r}{|\vec{v}|} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \vec{v} \implies \boxed{\vec{v} = \frac{|\vec{v}|}{r} p_0 = \frac{\pi}{2} p_0}$$

Entonces la exponencial llegará a un punto p_0 del ecuador partiendo de p cogiendo $\vec{v} = \frac{\pi}{2} p_0$.
¿Y si queremos llegar a la antípoda?



Es decir, qué $\vec{v} \in T_p S$ tomamos para que $\exp_p(\vec{v}) = -p$.

$$\underbrace{\cos\left(\frac{|\vec{v}|}{r}\right)}_{\text{deberá ser } -1} p + \underbrace{\frac{r}{|\vec{v}|} \sin\left(\frac{|\vec{v}|}{r}\right)}_{\text{deberá ser } 0} \vec{v} = -p \implies \frac{|\vec{v}|}{r} = \pi \implies |\vec{v}| = \pi r$$

Pero entonces aquí tenemos **infinitos vectores** (toda una circunferencia $S^1(\pi r)$ en el plano tangente) que llevan \exp_p a $-p$.

Entonces la exponencial ahí ya no puede ser inyectiva, pero en todo punto de $S^2(r)$ quitando ese (la antípoda), habrá un entorno para el que la exponencial será un difeomorfismo. Adelantando la siguiente definición, el conjunto $U = \{\vec{v} \in T_p S^2(r) : |\vec{v}| < \pi r\}$ será un **entorno normal**.

1.6. Entornos Normales

Gracias a que la exponencial es un difeomorfismo local en 0, podemos definir coordenadas locales basadas en geodésicas.

Definición 1.6.1: Entorno Normal

Un entorno V de $p \in S$ se llama **entorno normal** de p si V es la imagen por \exp_p de un entorno U de $0 \in T_p S$ tal que:

1. U es estrellado respecto a 0.
2. $\exp_p|_U : U \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

Nota: Se dice que un abierto es un *entorno uniformemente normal* si es entorno normal de todos sus puntos. Siempre existen estos entornos.

Teorema 1.6.1: Existencia y unicidad de geodésicas radiales

Sea V un entorno normal de p_0 . Entonces, para todo punto $p \in V$, existe un **único** segmento de geodésica radial $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow V$ que une p_0 con p y está totalmente contenido en V .

Demostración. Sea V un entorno normal de p_0 y sea $p \in V$. Por ser V un entorno normal, $\exists \mathcal{U} \subset D_{p_0}$ abierto, **estrellado** respecto del origen $\vec{0} \in \mathcal{U}$, tal que $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \rightarrow V$ es un **difeomorfismo**.

Como $p \in V$ y $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \rightarrow V$ es un difeomorfismo (biyección), entonces:

$$\exists! \vec{v} \in \mathcal{U} / \exp_{p_0}(\vec{v}) = p$$

-Existencia- Construyamos la geodésica. (quiero ver $p = \exp_{p_0}(\vec{v}) = \gamma_v(1)$)

Sabemos que con las condiciones iniciales será:

$$\gamma_v : I_v \rightarrow S / \gamma_v(0) = p_0, \gamma'_v(0) = \vec{v}. \quad (\text{geodésica maximal})$$

Definimos entonces: $\gamma_p := \gamma_v|_{[0,1]}$. Veamos que cumple el teorema:

- $\gamma_p(0) = \gamma_v(0) = p_0$.
- $\gamma_p(1) = \gamma_v(1) = \exp_{p_0}(\vec{v}) = p$

Faltaría ver que γ_p “no se sale” de V , i.e., $\gamma_p(t) \in V \forall t \in [0, 1]$?

Sea $t \in (0, 1)$. Como $\vec{v} \in \mathcal{U}$ y \mathcal{U} es estrellado, $t \cdot \vec{v} \in \mathcal{U} \implies \exp_{p_0}(t\vec{v}) \in V$.

Pero:

$$\exp_{p_0}(t\vec{v}) \stackrel{\text{Lema Homogeneidad Geodésicas}}{=} \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t) \in V \quad \checkmark$$

La idea es ver que existe una única geodésica que parte de p_0 , llega a p y **no se sale** de V .

Como V es un entorno normal de p_0 , existe un abierto $U \subset D_{p_0} \subset T_{p_0}S$ que es **estrellado** respecto del origen, tal que la restricción de la exponencial $\exp_{p_0} : U \rightarrow V$ es un difeomorfismo. Dado que $p \in V$ y la exponencial es biyectiva en U , existe un único vector $\vec{v} \in U$ tal que $\exp_{p_0}(\vec{v}) = p$.

Unicidad: Supongamos que existe otra $\alpha : [0, 1] \rightarrow V$ geodésica con $\alpha(0) = p_0, \alpha(1) = p$.

Consideremos $\vec{w} = \alpha'(0)$, por la unicidad de geodésicas maximales se tiene que: $\alpha = \gamma_w|_{[0,1]}$.

Se tiene $p = \alpha(1) = \gamma_w(1) = \exp_{p_0}(\vec{w})$. Entonces, como $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \rightarrow V$ es un difeomorfismo y $\exp_{p_0}(\vec{v}) = p$ (con $\vec{v} \in \mathcal{U}$), si $\vec{w} \in \mathcal{U}$, por la inyectividad se tendrá $\vec{v} = \vec{w}$ y habremos terminado.

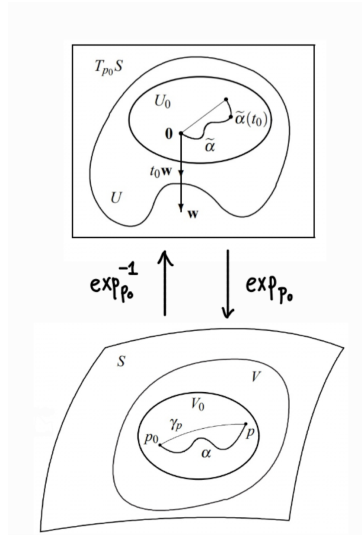
Faltará entonces ver que $\vec{w} \in \mathcal{U}$.

Se tiene que $\alpha([0, 1])$ es compacto contenido en V abierto (pq α es continua y $[0, 1]$ compacto). Pero la frontera de V es problemática, luego, gracias a que $\alpha([0, 1])$ es compacto, $\exists V_0$ abierto tal que:

$$\alpha([0, 1]) \subset V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$$

Por el difeomorfismo \exp_{p_0} se pasa todo a $T_{p_0}S$, sean:

$$\left. \begin{array}{l} \tilde{\alpha} = \exp_{p_0}^{-1}(\alpha) \\ \mathcal{U}_0 = \exp_{p_0}^{-1}(V_0) \end{array} \right\} \tilde{\alpha}([0, 1]) \subset \mathcal{U}_0 \subset \overline{\mathcal{U}_0} \subset \mathcal{U}$$



Esquema del paso del entorno V en S al entorno \mathcal{U} en $T_{p_0}S$ mediante $\exp_{p_0}^{-1}$.

(veamos que $\vec{w} \in \mathcal{U}_0$ por red. abs.)

Si el vector $\vec{w} \notin \mathcal{U}_0$, lo queremos contraer para que esté en \mathcal{U} , pero siga sin estar en \mathcal{U}_0 , i.e., que vaya a la frontera de \mathcal{U}_0 , en $\overline{\mathcal{U}_0}$.

Sea $t_0 \in (0, 1)$ tal que $t_0 \cdot \vec{w} \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$, se tiene:

$$\underbrace{\exp_{p_0}(t_0 \vec{w})}_{\in \mathcal{U}} = \gamma_{t_0 \vec{w}}(1) = \gamma_w(t_0) = \alpha(t_0) = \underbrace{\exp_{p_0}(\tilde{\alpha}(t_0))}_{\in \mathcal{U}}$$

Como $\exp_{p_0}(\mathcal{U})$ en \mathcal{U} es un difeomorfismo, se tiene: $t_0 \cdot \vec{w} = \tilde{\alpha}(t_0)$ porque $t_0 \cdot \vec{w} \notin \mathcal{U}_0$, pero $\tilde{\alpha}(t_0) \in \mathcal{U}_0$.

$$(\exp_{p_0}(\vec{v}) = \exp_{p_0}(\vec{w}))_{\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{U}} \implies \vec{v} = \vec{w} \implies \gamma_v = \gamma_w$$

□

1.7. El Lema de Gauss y Minimización

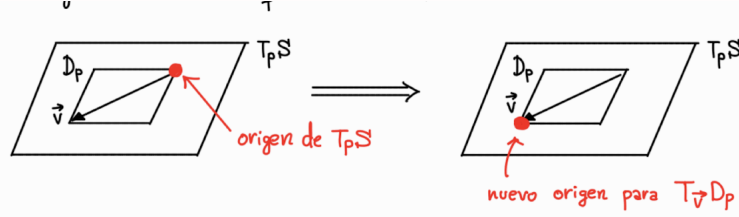
Este es uno de los resultados clave que relaciona la geometría métrica (distancias) con las geodésicas.

Observación 1.7.1: Identificación del espacio tangente

Nota: Sabemos que $\exp_p : D_p \rightarrow S$ y, dado $\vec{v} \in D_p$, se tiene que:

$$d(\exp_p)_{\vec{v}} : \underbrace{T_{\vec{v}}D_p}_{\cong T_p S} \rightarrow T_{\exp_p(\vec{v})}S,$$

pero $T_{\vec{v}}D_p$ no es realmente igual a $T_p S$, pero se identifican, porque realmente cambia el origen, y si cambia el origen, cambia el punto de referencia desde el que se toma \vec{v} .

**Teorema 1.7.1: Lema de Gauss**

Sea $p \in S$, $v \in D_p \setminus \{0\}$ y $w \in T_v(T_p S) \cong T_p S$. (Excluimos el caso en el que $v = \vec{0}$ porque en este caso, $d(\exp_p)_{\vec{0}} = 1_{T_p S}$).

1. **Radial:** Si w y v son colineales, entonces $|d(\exp_p)_v(w)| = |w|$ (la exponencial preserva longitudes en dirección radial).
2. **Ortogonal:** Si $w \perp v$, entonces $d(\exp_p)_v(v) \perp d(\exp_p)_v(w)$ (la exponencial preserva la ortogonalidad con respecto a la dirección radial).

Demostración (del Lema de Gauss). (i) Supongamos que \vec{w} y \vec{v} son colineales, i.e., $\vec{w} = \lambda \vec{v}$, entonces se tiene:

$$d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(\alpha(t))$$

Definimos la curva en el dominio D_p :

$$\begin{cases} \alpha : I \rightarrow D_p \subset T_p S \\ \alpha(0) = \vec{v}, \alpha'(0) = \vec{w} \end{cases} \implies \alpha(t) = \vec{v} + t\vec{w} = \vec{v} + t\lambda\vec{v} = (1 + t\lambda)\vec{v}$$

(nota: porque $\exp_p : D_p \rightarrow S$)

Sustituyendo en la diferencial:

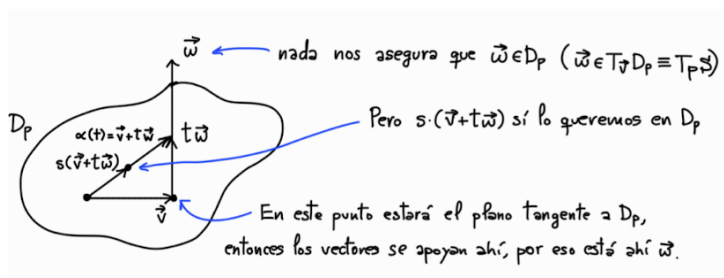
$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p((1 + t\lambda)\vec{v}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_v(1 + t\lambda) = \gamma'_v(1 + t\lambda) \Big|_{t=0} \cdot \lambda = \gamma'_v(1) \cdot \lambda$$

Luego, tomando módulos y usando que la norma de la velocidad es constante por ser geodésica ($|\gamma'_v(1)| = |\gamma'_v(0)|$):

$$|d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w})| = |\lambda| \cdot |\gamma'_v(1)| = |\lambda| \cdot |\gamma'_v(0)| = |\lambda| \cdot |\vec{v}| = |\lambda \vec{v}| = |\vec{w}| \quad \square$$

(ii) Tenemos $\vec{w} \perp \vec{v}$. Llamamos $\alpha(t) = \vec{v} + t\vec{w}$.

Definimos $\varphi(s, t) = \exp_p(s \cdot \alpha(t))$. Habría que determinar su dominio...



Esquema del dominio D_p y la construcción vectorial.

Notas sobre el diagrama:

- Sobre \vec{w} : *Nada nos asegura que $\vec{w} \in D_p$ ($\vec{w} \in T_{\vec{v}}D_p \equiv T_pS$).*
- Sobre el vector resultante: *Pero $s \cdot (\vec{v} + t\vec{w})$ sí lo queremos en D_p .*
- Sobre el punto de origen \vec{v} : *En este punto estará el plano tangente a D_p , entonces los vectores se apoyan ahí, por eso está ahí \vec{w} .*

Entonces el dominio serán intervalos para t y s tales que $s(\vec{v} + t\vec{w}) \in D_p$ (φ tendrá un dominio de la forma $\varphi : (-\epsilon', 1 + \epsilon') \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S$), pero como la demostración es muy tediosa (está en su libro), supondremos que tenemos esos dos abiertos que nos definen nuestro dominio de φ . Hecho eso...

Calculamos las derivadas parciales de $\varphi(s, t)$ (llamamos $\alpha(t) := (\vec{v} + t\vec{w})$):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = d(\exp_p)_{s \cdot \alpha(t)}(s \alpha'(t)) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, 0) = d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w})$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = d(\exp_p)_{s \cdot \alpha(t)}(\alpha(t)) \implies \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0) = d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v})$$

Tenemos entonces que probar que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(1, 0) \perp \frac{\partial \varphi}{\partial s}(1, 0)$, pero más aún...

$$i \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, 0) \right\rangle = 0 ?$$

Sea $f(s) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, 0) \right\rangle$. Si vemos que en un punto f vale 0 y que $f' = 0$, ya estará.

→ **Veamos lo que vale $f(0)$.** Se tiene que $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0) = d(\exp_p)_{\vec{0}}(\vec{0}) = d(\text{Id})_{\vec{0}}(\vec{0}) = \vec{0}$.

$$\text{Luego } f(0) = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0, 0) \right\rangle = \langle \vec{0}, \vec{v} \rangle = 0$$

→ ¿ $f'(s) = 0$? Derivando el producto escalar:

$$f'(s) = \underbrace{\left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(s, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right\rangle}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right\rangle}_{\textcircled{2}}$$

Veamos cada uno por separado.

Sobre ②:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}(s, 0) = \frac{d^2}{ds^2}(\exp_p(s \cdot \vec{v})) = \gamma_v''(s)$$

(es la $\varphi(s, t)$ en el $(s, 0)$, y como t no influye en la derivada, se puede evaluar antes de derivar, como si tuviéramos $\tilde{\varphi}(s) = \varphi(s, 0)$). Como γ_v es geodésica, su aceleración γ_v'' va en la dirección del normal.

Para $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, 0)$, si fijamos en $\varphi(s, t)$ la s , por ejemplo s_0 , se nos queda que $\varphi(s_0, t) =: \beta_{s_0}(t)$ es una curva en la superficie. Entonces $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s, 0) = \beta'_{s_0}(0)$ es el vector velocidad de una curva en S , entonces es **tangente**. Como $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2}$ va en la dirección del normal, entonces son ortogonales:

$$\Rightarrow \textcircled{2} = \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s^2} \right\rangle = 0$$

Observemos que hasta ahora no hemos usado en ningún momento la ortogonalidad de \vec{v} y \vec{w} . O sea, que estos argumentos y resultados que estamos sacando de aquí, realmente, nos valen para cualquier par de vectores.

Sobre ①:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s \partial t}(s, 0), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, 0) \right\rangle &= \left\langle \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \Big|_{t=0} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left\langle \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t), \frac{\partial \varphi}{\partial s}(s, t) \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 = \textcircled{*} \end{aligned}$$

Pero se tiene que: $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{d}{ds}(\exp_p(s \cdot \alpha(t))) = \frac{d}{ds}(\gamma_{\alpha(t)}(s)) = \gamma'_{\alpha(t)}(s)$. (la derivada no involucra a t , entonces $\alpha(t)$ es un vector “constante”)

Luego:

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial s} \right|^2 = |\gamma'_{\alpha(t)}(s)|^2 \underset{\uparrow}{=} |\gamma'_{\alpha(t)}(0)|^2 = |\alpha(t)|^2 = |\vec{v} + t\vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2 + 2t\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

(es constante por ser geodésica)

Entonces:

$$\textcircled{*} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (|\vec{v}|^2 + t^2|\vec{w}|^2 + 2t\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle) = \frac{1}{2} \cdot 2\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$$

(por hip. $\vec{v} \perp \vec{w}$)

Concluimos entonces que $f'(s) = \textcircled{1} + \textcircled{2} = 0$, como queríamos probar. □

Definición 1.7.1: Discos y circunferencias geodésicas

Sea $r > 0$ tal que $D(\vec{0}, r) \subset D_p$ ó $\mathbb{S}(\vec{0}, r) \subset D_p$. Definimos:

$$\mathcal{D}(p, r) := \exp_p(D(\vec{0}, r)) = \text{disco geodésico}$$

(como dejar caer el disco de D_p sobre la superficie)

$$\mathcal{S}(p, r) := \exp_p(\mathbb{S}(\vec{0}, r)) = \text{circunferencia geodésica}$$

El **radio geodésico** que parte de p es la imagen por \exp_p de una semirrecta en $T_p S$ que parte de $\vec{0}$.

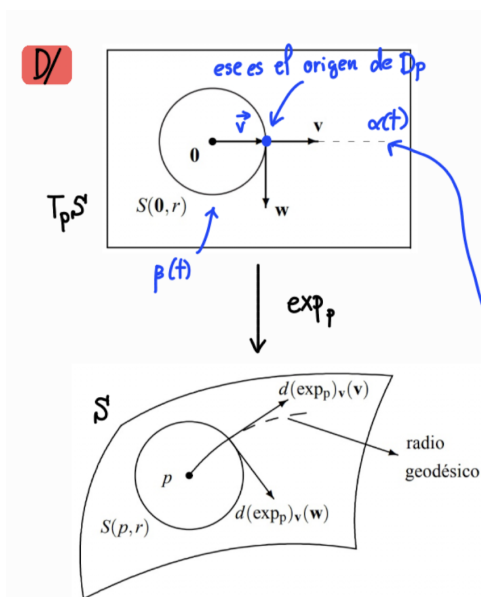
Lema 1.7.1: de Gauss (Versión geométrica)

En una superficie regular, las circunferencias geodésicas y los radios geodésicos se cortan **ortogonalmente**.

Demostración. La primera versión (algebraica) nos decía que como $\vec{v} \perp \vec{w}$, entonces:

$$d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v}) \perp d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w})$$

Pero analicemos qué significa cada término geoméricamente:



1. El vector radial: Se tiene que:

$$d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{v}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp_p(\alpha(t)) = (\exp_p \circ \alpha)'(0)$$

donde $\alpha(t) = \vec{v} + t\vec{v}$ (recta radial en el tangente) con $\alpha(0) = \vec{v}, \alpha'(0) = \vec{v}$. Esto es el vector velocidad de la curva $\exp_p \circ \alpha$, que es un **Radio Geodésico**.

2. El vector tangencial:

$$d(\exp_p)_{\vec{v}}(\vec{w}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp_p(\beta(t)) = (\exp_p \circ \beta)'(0)$$

donde $\beta(t)$ es la curva en el plano tangente (la circunferencia) tal que $\beta(0) = \vec{v}$ y $\beta'(0) = \vec{w}$ (tangente a la circunferencia en $T_p S$). *Esto es el vector tangente a la imagen de la circunferencia, es decir, a la **circunferencia geodésica**.*

Conclusión: Hemos probado entonces que los radios geodésicos cortan ortogonalmente a las circunferencias geodésicas. \square

1.7.1. Propiedad Minimizante

Teorema 1.7.2: Propiedad minimizante de las geodésicas

Sea S una superficie regular, V un entorno normal centrado en $p_0 \in S$ y $p \in V$.

- (I) El segmento de la geodésica radial $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow V$ que une $p_0 = \gamma_p(0)$ y $p = \gamma_p(1)$ es la única curva **contenida en** V de menor longitud uniendo p_0 y p .

Es decir, si $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ es otra curva diferenciable en V con $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$, entonces:

$$L_0^1(\gamma_p) \leq L_a^b(\alpha),$$

dándose la igualdad si, y solo si, α es una reparametrización de γ_p .

Importante: Si no parto de este punto p_0 , NO PUEDO ASEGURAR NADA.

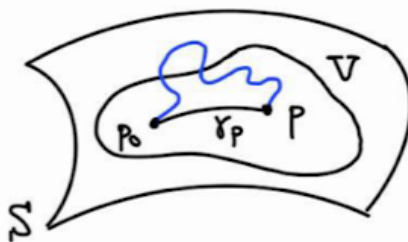
- (II) Además, si $r > 0$ es tal que $\mathcal{D}(p_0, r)$ (disco geodésico) $\subset V(p_0)$, dado $p \in \mathcal{D}(p_0, r)$ se tiene que:

$$L_0^1(\gamma_p) \leq L_a^b(\alpha)$$

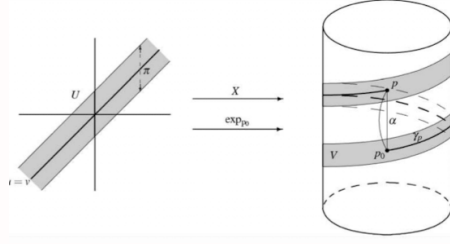
para toda curva $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ verificando $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$.

Observación 1.7.2: Notas e interpretación geométrica

- (1) Es muy importante que V sea entorno normal.
- (2) La geodésica radial es la curva más corta uniendo esos puntos **DENTRO** del entorno V . Fuera de él no podemos asegurar nada. Sin embargo, para el disco geodésico $\mathcal{D}(p_0, r) \subset V$ sí podemos asegurar que la geodésica radial que une el centro con cualquier otro punto del disco es la curva más corta que lo hace en **TODA** la superficie.



(3) En el cilindro por ejemplo:



La franja sombreada, V , es un entorno normal. La curva α (la que da la vuelta por detrás) valdría para el Teorema porque no se sale de V ($\alpha \subset V$), pero no podemos asegurarlo para $\gamma_p \not\subset V$ (el segmento recto).

Demostración del Teorema (Apartado i). (i) V es un entorno normal de p_0 , entonces $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \rightarrow V$ es un **difeomorfismo**, por lo que si tenemos $p \in V \implies \exists! \vec{v} \in \mathcal{U} / \exp_{p_0}(\vec{v}) = p$, y con ese vector \vec{v} construimos la radial:

$$\gamma_p := \gamma_v|_{[0,1]} / \gamma_p(0) = p_0, \gamma_p(1) = p, \gamma_p'(0) = \vec{v}$$

Supongamos que tenemos otra curva $\alpha : [a, b] \rightarrow V$ tal que $\alpha(a) = p_0$ y $\alpha(b) = p$.

$$L_a^b(\alpha) \geq L_0^1(\gamma_p) ?$$

Tenemos que:

$$L_0^1(\gamma_p) = \int_0^1 |\gamma_p'(t)| dt = \int_0^1 |\gamma_p'(0)| dt = \int_0^1 |\vec{v}| dt = |\vec{v}|$$

Tendremos entonces que ver... $L_a^b(\alpha) \geq |\vec{v}|$?

1. Si $p = p_0$: $\gamma_p \equiv p_0 \implies \vec{v} = \vec{0} \implies L_a^b(\alpha) \geq 0$ obviamente. ✓
2. Si $p \neq p_0$: Si la curva vuelve a pasar muchas veces por p_0 , todo ese trozo nos da igual, nos quedamos con el trozo que no vuelve a pasar.

Sea $t_0 \in (a, b)$ tal que $\forall t > t_0, \alpha(t) \neq p_0$ (y $\alpha(t_0) = p_0$). Bastaría entonces probar que: $L_{t_0}^b(\alpha) \geq |\vec{v}|$.

Reparametrizaremos α para que en vez de en $[t_0, b]$ esté en $[0, 1]$ para ahorrarnos términos. Es decir, α será tal que $\alpha : [0, 1] \rightarrow V$ y $\alpha(t) \neq p_0 \forall t > 0$. $L_0^1(\alpha) \geq |\vec{v}|$?

Paso a polares en el tangente: Observemos que $\tilde{\alpha}(t) \neq \vec{0} \forall t > 0$, porque (por reducción al absurdo) si $\exists t > 0 / \tilde{\alpha}(t) = \vec{0} \implies \alpha(t) = \exp_{p_0}(\tilde{\alpha}(t)) = p_0$ (hemos descartado este caso).

Definimos entonces:

$$r(t) := \begin{cases} |\tilde{\alpha}(t)| & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (\text{escalar})$$

$$V(t) := \frac{\tilde{\alpha}(t)}{|\tilde{\alpha}(t)|} = \frac{\tilde{\alpha}(t)}{r(t)}, \quad t > 0 \quad (\text{vectorial, } V(0) \text{ ni se define})$$

Intentemos expresar α tal que α' tenga una expresión algo más manejable para poder calcular la integral de $L_0^1(\alpha)$ y acotarla. Tenemos que $\alpha(t) = \exp_{p_0}(\tilde{\alpha}(t)) = \exp_{p_0}(r(t) \cdot V(t))$.

Como aquí el vector depende de t , no nos ayudaría expresarlo como $\gamma_{V(t)}(r(t))$ porque eso tampoco sabemos derivarlo, así que hagámoslo a pelo:

Aplicamos la regla de la cadena diferencial:

$$\alpha'(t) = d(\exp_{p_0})_{r \cdot V}(r'V + rV') = r' \cdot d(\exp_{p_0})_{r \cdot V}(V) + r \cdot d(\exp_{p_0})_{r \cdot V}(V')$$

Elevamos al cuadrado la norma para usar el Lema de Gauss:

$$|\alpha'(t)|^2 = (r')^2 |d(\exp_{p_0})_{rV}(V)|^2 + r^2 |d(\exp_{p_0})_{rV}(V')|^2 + \underbrace{2rr' \langle d(\exp_{p_0})_{rV}(V), d(\exp_{p_0})_{rV}(V') \rangle}_0$$

Justificación del 0: Como $\langle V, V \rangle = 1 \implies 2\langle V', V \rangle = 0 \implies V \perp V'$. Por el Lema de Gauss (versión geométrica/algebraica):

$$d(\exp_{p_0})_{rV}(V) \perp d(\exp_{p_0})_{rV}(V')$$

(no molesta que sea rV en vez de v , pq $V \perp V' \implies rV \perp rV'$)

Simplificación de la norma: Se tiene también: $|d(\exp_{p_0})_{rV}(V)|^2 = |V|^2 = 1$ (porque la exponencial preserva normas radiales / Lema de Gauss).

Luego:

$$|\alpha'(t)|^2 = (r')^2 + \underbrace{r^2 |d(\exp_{p_0})_{rV}(V')|^2}_{\geq 0} \geq (r')^2 \quad \textcircled{1}$$

Tomando raíz cuadrada:

$$|\alpha'(t)| \geq |r'| \geq r' \quad \textcircled{2}$$

Conclusión de la desigualdad: Se tiene:

$$L_0^1(\alpha) = \int_0^1 |\alpha'(t)| dt \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^1 r' dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} r(1) - r(\varepsilon) = r(1) - r(0) = |\tilde{\alpha}(1)| = |\exp_{p_0}^{-1}(\alpha(1))| = |\exp_{p_0}^{-1}(p)| = |\vec{v}|$$

Falta ver la igualdad: Supongamos que $L_0^1(\alpha) = |\vec{v}|$. Esto implica igualdad en $\textcircled{1}$ y en $\textcircled{2}$.

$$\textcircled{2} \quad |r'| = r' \iff r' > 0 \iff r \text{ es estrictamente creciente.}$$

$$\textcircled{3} \quad |d(\exp_{p_0})_{rV}(V')|^2 = 0 \iff d(\exp_{p_0})_{rV}(V') = 0 \iff V' = 0 \iff V = \text{cte} \implies V(t) = V(1) = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

En esta última cadena de igualdades estamos usando que $\alpha \subset V \implies \tilde{\alpha} \subset U \implies d(\exp_{p_0})_{rV}$ es un isomorfismo lineal.

Si $V(t)$ es constante, digamos V_0 , entonces:

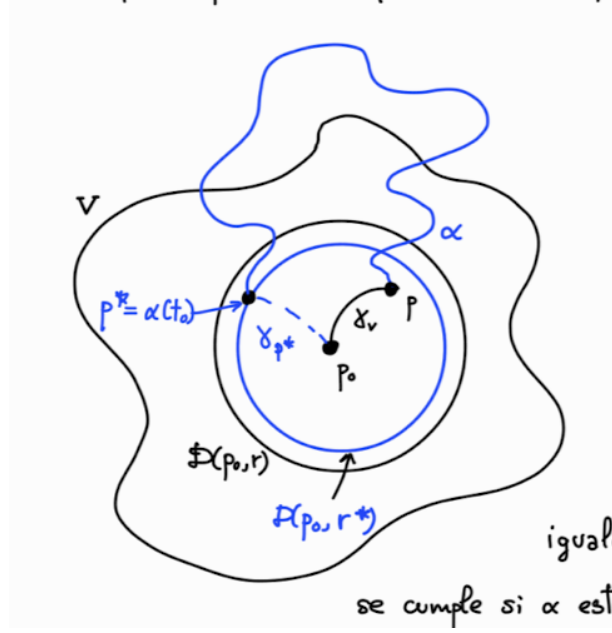
$$\alpha(t) = \exp_{p_0}(r(t)V(t)) = \exp_{p_0}\left(r(t)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) = \gamma_v\left(\frac{r(t)}{|\vec{v}|}\right) = \gamma_p\left(\frac{r(t)}{|\vec{v}|}\right)$$

Y esto es una **reparametrización de γ_p** . □ □

Demostración (Apartado ii). Sea $r > 0$ tal que $\mathcal{D}(p_0, r) \subset V$. Dado $p \in \mathcal{D}(p_0, r) \subset V \implies \exists! \vec{v} \in \mathcal{U} / \exp_{p_0}(\vec{v}) = p$.

Sea $\gamma_p : [0, 1] \rightarrow V$ la geodésica radial con $\gamma_p(0) = p_0$ y $\gamma_p(1) = p$. Tomamos α otra curva que los une y la reparametrizamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$. O sea, $\alpha(0) = p_0, \alpha(1) = p$.

Caso 1.- Si $\alpha|_{[0,1]} \subset \mathcal{D}(p_0, r) \subset V \implies$ Por (i) se tiene $L_0^1(\gamma_p) \leq L_0^1(\alpha)$, dándose la igualdad si α es una reparametrización de γ_p (en general se cumple si α está en V , pero nos interesa que esté o no en el disco).



Esquema: La curva α se sale del disco $\mathcal{D}(p_0, r)$ y corta a la frontera del disco más pequeño en p^* .

Caso 2.- Supongamos que $\alpha \not\subset \mathcal{D}(p_0, r)$.

Se tiene $p = \exp_{p_0}(\vec{v}) \in \mathcal{D}(p_0, r) = \exp_{p_0}(D(\vec{0}, r))$ y como \exp_{p_0} es un difeomorfismo:

$$\implies \vec{v} \in D(\vec{0}, r) \implies |\vec{v}| < r \quad (\text{podemos entonces encontrar un número en medio})$$

Sea $r^* > 0$ tal que $|\vec{v}| < r^* < r$, i.e., $\vec{v} \in D(\vec{0}, r^*) \subsetneq D(\vec{0}, r)$.

$$\xrightarrow{\exp_{p_0}} p \in \mathcal{D}(p_0, r^*) \subset \mathcal{D}(p_0, r)$$

Sea $t_0 = \inf\{t \in [0, 1] : \alpha(t) \notin \mathcal{D}(p_0, r^*)\}$ (el primer valor para el que α se "sale" del disco pequeño). Luego $\alpha([0, t_0)) \subset \mathcal{D}(p_0, r^*)$ y trabajando ahí tenemos:

Llamando $p^* = \alpha(t_0) \in \mathcal{S}(p_0, r^*) \subset \mathcal{D}(p_0, r) \subset V$ (está en la frontera). (Recordemos que denotamos a \mathcal{S} como la frontera).

Sea γ_{p^*} la geodésica radial que une $\gamma_{p^*}(0) = p_0$ con $\gamma_{p^*}(1) = p^*$, entonces por (i) se tiene:

$$L_0^1(\alpha) \geq \underbrace{L_0^{t_0}(\alpha)}_{\text{es un trozo de } \alpha} \geq L_0^1(\gamma_{p^*}) = \int_0^1 |\gamma'_{p^*}(t)| dt = \int_0^1 |\gamma'_{p^*}(0)| dt = |\gamma'_{p^*}(0)| = *$$

Definimos $\vec{w} := \gamma'_{p^*}(0)$ (esto no lo conocemos, pero $\gamma'_{p^*}(0) = \gamma'_w(0) = \vec{w}$). Sabemos que $p^* = \exp_{p_0}(\vec{w}) \in \exp_{p_0}(\mathcal{S}(\vec{0}, r^*)) \implies |\vec{w}| = r^*$.

Entonces retomando \circledast :

$$\circledast = r^* > |\vec{v}| = L_0^1(\gamma_p) \implies L_0^1(\alpha) \geq L_0^1(\gamma_p)$$

□

1.8. Coordenadas normales y geodésicas polares

1.8.1. Sistema de coordenadas Normales

Sean $p_0 \in S$ un punto de una superficie regular S y V un entorno normal de p_0 . Sea \mathcal{U} el abierto estrellado para el cual $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

¿Cómo podemos dar una parametrización para V ?

- Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal de $T_{p_0}S$.
- Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T_{p_0}S$ dada por $\phi(u, v) = u \cdot \vec{e}_1 + v \cdot \vec{e}_2$, para la cual $\phi(0, 0) = \vec{0} \in \mathcal{U}$. (Nota: esto identifica \mathbb{R}^2 con $T_{p_0}S$).
- Existe un entorno $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^2$ del $(0, 0)$ tal que $\phi : \mathcal{U}_0 \longrightarrow \mathcal{U}$ es un difeomorfismo (podemos identificar $\mathcal{U}_0 \equiv \mathcal{U}$).

Definición 1.8.1: Sistema de coordenadas normales

La aplicación $X : \mathcal{U} \equiv \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \subset S$, dada por:

$$X(u, v) = \exp_{p_0}(\phi(u, v)) = \exp_{p_0}(u \cdot \vec{e}_1 + v \cdot \vec{e}_2)$$

es una parametrización de V , llamada sistema de coordenadas normales en p_0 .

Si $p \in V$, sea $\vec{v} \in T_{p_0}S$ el único vector tal que $\exp_{p_0}(\vec{v}) = p$. Entonces $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2$. El par (v_1, v_2) recibe el nombre de coordenadas normales del punto p .

Propiedades de la métrica en coordenadas normales: En el punto p_0 (el origen de coordenadas $u = v = 0$):

- $E(0, 0) = 1, \quad F(0, 0) = 0, \quad G(0, 0) = 1$ (la métrica es la identidad).
- Las derivadas primeras de los coeficientes métricos se anulan: $E_u = E_v = F_u = F_v = G_u = G_v = 0$.

1.8.2. Coordenadas geodésicas polares

Sean $p_0 \in S$ un punto de una superficie regular S y V un entorno normal de p_0 . Sea \mathcal{U} el abierto estrellado para el cual $\exp_{p_0} : \mathcal{U} \longrightarrow V$ es un difeomorfismo.

¿Cómo podemos dar una parametrización para V ? (Versión polar)

- Sea $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ una base ortonormal de $T_{p_0}S$.
- Dado $\vec{v} \in T_{p_0}S$, existe un par (r, θ) tal que $\vec{v} = r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2$ (coordenadas polares).
- Sea $L = \{\lambda \cdot \vec{e}_1 : \lambda \geq 0\}$ (semirrecta) y sea $\phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \longrightarrow T_{p_0}S \setminus L$ dada por:

$$\phi(r, \theta) = r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2, \quad \text{que es un difeomorfismo.}$$

- Esto es una parametrización del entorno V pero no me cubre el punto p_0

Definición 1.8.2: Sistema de coordenadas geodésicas polares

La aplicación $X : \mathcal{U}_0 := \phi^{-1}(\mathcal{U} \setminus L) \longrightarrow V_0 := \exp_{p_0}(\mathcal{U} \setminus L) \subset V$, dada por:

$$X(r, \theta) = \exp_{p_0}(\phi(r, \theta)) = \exp_{p_0}(r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2)$$

es una parametrización de V_0 , que se denomina **sistema de coordenadas geodésicas polares** centradas en p_0 .

Si $p \in V$, sea $\vec{v} \in T_{p_0}S$ el único vector tal que $\exp_{p_0}(\vec{v}) = p$. El par (r, θ) tal que $\vec{v} = r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2$ recibe el nombre de **coordenadas geodésicas polares del punto p** centradas en p_0 .

Observación 1.8.1: Nota sobre el dominio

El problema de las coordenadas polares es que se dejan sin cubrir una recta del plano por ser el dominio de ϕ un abierto, que sería un radio geodésico en S . Además, la parametrización es en un entorno de un punto el cual no cubre a ese punto (el origen), pero esto lo resuelven las propiedades.

Resumen escueto

- **Coords. normales:** $X(u, v) = \exp_{p_0}(u \cdot \vec{e}_1 + v \cdot \vec{e}_2)$
- **Coords. polares:** $X(r, \theta) = \exp_{p_0}(r \cos \theta \cdot \vec{e}_1 + r \sin \theta \cdot \vec{e}_2)$

(donde $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es una base ortonormal de $T_{p_0}S$)

Proposición 1.8.1: Propiedades de las coordenadas normales

- (1) Se pueden definir para “superficies” de dimensión $n \geq 2$.
- (2) $X(0, 0) = \exp_{p_0}(\vec{0}) = p_0$.
- (3) $X_u(0, 0) = \vec{e}_1$ y $X_v(0, 0) = \vec{e}_2$.
- (4) $E(u, 0) = 1$, $F(0, 0) = 0$, $G(0, v) = 1$.
- (5) En el $(0, 0)$: $E_u = E_v = F_u = F_v = G_u = G_v = 0$.

Demostración de (3), (4) y (5). (la (2) está ahí mismo).

1. Para las propiedades (3) y (4):

$$X(u, 0) = \exp_{p_0}(u \cdot \vec{e}_1) = \gamma_{e_1}(u) \implies X_u(u, 0) = \gamma'_{e_1}(u)$$

$$X(0, v) = \gamma_{e_2}(v) \implies X_v(0, v) = \gamma'_{e_2}(v)$$

Entonces, evaluando en el origen:

$$X_u(0, 0) = \gamma'_{e_1}(0) = \vec{e}_1 \quad \text{y} \quad X_v(0, 0) = \gamma'_{e_2}(0) = \vec{e}_2$$

Luego calculamos los coeficientes métricos:

$$\begin{aligned} E(u, 0) &= \langle X_u(u, 0), X_u(u, 0) \rangle = |\gamma'_{e_1}(u)|^2 = |\gamma'_{e_1}(0)|^2 = |\vec{e}_1|^2 = 1 \\ G(0, v) &= \langle X_v, X_v \rangle(0, v) = |\vec{e}_2|^2 = 1 \\ F(0, 0) &= \langle X_u, X_v \rangle(0, 0) = \langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle = 0 \quad (\text{ortonormal}) \end{aligned}$$

(donde coinciden $X(u, 0)$ y $X(0, v)$ es el $(0, 0)$).

2. Para la propiedad (5): Si $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 \implies X(v_1, v_2) = \exp_{p_0}(v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2) = \gamma_v(1)$.

Consideramos la geodésica reescalada:

$$\gamma_v(t) = \gamma_{tv}(1) = \exp_{p_0}(t\vec{v}) = \exp_{p_0}(tv_1 \vec{e}_1 + tv_2 \vec{e}_2) = X(tv_1, tv_2)$$

En general, tenemos la curva en coordenadas: $\alpha(t) = X(\tilde{\alpha}(t)) = X(u(t), v(t)) \implies \begin{cases} u(t) = t \cdot v_1 \\ v(t) = t \cdot v_2 \end{cases}$.

Si escribimos el sistema de ecuaciones diferenciales que cumplen las geodésicas (G) y se simplifica (teniendo en cuenta que $u' = v_1, v' = v_2$ y $u'' = v'' = 0$):

$$\begin{cases} u'' + (u')^2 \Gamma_{11}^1 + 2u'v' \Gamma_{12}^1 + (v')^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v'' + (u')^2 \Gamma_{11}^2 + 2u'v' \Gamma_{12}^2 + (v')^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} v_1^2 \Gamma_{11}^1 + 2v_1 v_2 \Gamma_{12}^1 + v_2^2 \Gamma_{22}^1 = 0 \\ v_1^2 \Gamma_{11}^2 + 2v_1 v_2 \Gamma_{12}^2 + v_2^2 \Gamma_{22}^2 = 0 \end{cases}$$

Como el sistema vale para **cualquier** $\vec{v} = (v_1, v_2)$, probamos con vectores específicos:

- Si $\vec{v} = (1, 0) \implies 1^2 \cdot \Gamma_{11}^k + 0 + 0 = 0 \implies \Gamma_{11}^1(0, 0) = 0, \Gamma_{11}^2(0, 0) = 0$.
- Si $\vec{v} = (0, 1) \implies 0 + 0 + 1^2 \cdot \Gamma_{22}^k = 0 \implies \Gamma_{22}^1(0, 0) = 0, \Gamma_{22}^2(0, 0) = 0$.
- Si $\vec{v} = (1, 1) \implies \Gamma_{11}^k + 2\Gamma_{12}^k + \Gamma_{22}^k = 0$. Como los extremos son 0, queda $2\Gamma_{12}^k = 0 \implies \Gamma_{12}^1 = 0, \Gamma_{12}^2 = 0$.

Como todos los $\Gamma_{ij}^k(0, 0) = 0$, esto implica que todas las derivadas primeras de los coeficientes métricos se anulan:

$$E_u = E_v = F_u = F_v = G_u = G_v = 0 \quad (\text{en el } (0, 0)) \quad \square$$

□

Proposición 1.8.2: Propiedades de las coordenadas polares

- (1) Solo pueden definirse para superficies 2-dimensionales.
- (2) No cubre el propio punto p_0 , pero...

Teorema 1.8.1: Propiedades métricas de las coordenadas polares

Sea $X(r, \theta)$ el sistema de coordenadas geodésicas polares centradas en p_0 . Entonces se verifica:

- $E(r, \theta) = 1$, $F(r, \theta) = 0$, $G(r, \theta) > 0$ (para $r > 0$).
- $\lim_{r \rightarrow 0} G(r, \theta) = 0$, $\lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r(r, \theta) = 1$.

Notación: $\vec{v}_{r\theta} := r \cdot \vec{v}_\theta := r \cdot \cos \theta \cdot \vec{e}_1 + r \cdot \sin \theta \cdot \vec{e}_2$.

Demostración. Se tiene por definición: $X(r, \theta) = \exp_{p_0}(r \cdot \vec{v}_\theta)$. Luego, derivando:

$$\begin{cases} X_r(r, \theta) = d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta) \\ X_\theta(r, \theta) = d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(r \cdot \vec{v}'_\theta) \end{cases}$$

Entonces se tiene:

1. Cálculo de E:

$$E = |X_r|^2 = |d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta)|^2 \underset{\text{Lema de Gauss}}{=} |\vec{v}_\theta|^2 = 1$$

(vectores proporcionales / radiales se conservan)

2. Cálculo de F:

$$F = \langle X_r, X_\theta \rangle = \langle d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}_\theta), d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(r \cdot \vec{v}'_\theta) \rangle = 0$$

(Por Lema de Gauss, ya que $\vec{v}'_\theta = -\sin \theta \vec{e}_1 + \cos \theta \vec{e}_2 \implies \langle \vec{v}_\theta, \vec{v}'_\theta \rangle = 0$)

3. Cálculo de G y sus límites:

$$\begin{aligned} G = \langle X_\theta, X_\theta \rangle &= |d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(r \cdot \vec{v}'_\theta)|^2 = r^2 |d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}'_\theta)|^2 > 0 \\ \implies \lim_{r \rightarrow 0} G &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \cdot \underbrace{|\dots|^2}_{\text{acotado}} = 0 \end{aligned}$$

(esto tiene que ser acotado, pero tiende a $|\vec{v}'_\theta|^2 = 1$)

Esta demostración Maria Ángeles no lo demuestra en clase pero está bien saberlo
Para $\lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r$: Sabemos que $\sqrt{G} = r |d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}'_\theta)|$. Derivando respecto a r :

$$(\sqrt{G})_r = |d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}'_\theta)| + r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (|d(\exp_{p_0})_{r\vec{v}_\theta}(\vec{v}'_\theta)|)$$

Tomando el límite cuando $r \rightarrow 0$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r = \underbrace{|d(\exp_{p_0})_{\vec{0}}(\vec{v}'_\theta)|}_{|\vec{v}'_\theta|=1} + \underbrace{0 \cdot (\dots)}_{\rightarrow 0} = 1 \quad \square$$

(el término de la derivada debe ser acotado, y lo es) □

Observación 1.8.2: Interpretación geométrica de las variables polares

¿Qué ocurre si fijamos alguna de las variables en las coordenadas polares?

$$X(r, \theta) = \exp_{p_0}(r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2) = \exp_{p_0}(r \underbrace{(\cos \theta \vec{e}_1 + \sin \theta \vec{e}_2)}_{\vec{V}_\theta})$$

Fijo θ_0 :

$$X(r, \theta_0) = \exp_{p_0}(r \cdot \vec{V}_{\theta_0}) = \text{radio geodésico}$$

Fijo r_0 :

$$X(r_0, \theta) = \exp_{p_0}(\underbrace{r_0 \cos \theta \vec{e}_1 + r_0 \sin \theta \vec{e}_2}_{\partial D(\vec{0}, r_0)}) = \text{circunferencia geodésica}$$

Observación 1.8.3: Curvatura de Gauss en coordenadas polares

Las coordenadas geodésicas polares tienen $E = 1, F = 0$, i.e., son parametrizaciones ortogonales. Entonces se puede calcular la curvatura de Gauss como:

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left[\left(\frac{E_\theta}{\sqrt{EG}} \right)_\theta + \left(\frac{G_r}{\sqrt{EG}} \right)_r \right]$$

Como $E = 1 \implies E_\theta = 0$ y $\sqrt{EG} = \sqrt{G}$:

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{G}} \left(\frac{G_r}{\sqrt{G}} \right)_r = \frac{-1}{\sqrt{G}} \left(\frac{G_r}{2\sqrt{G}} \right)_r = \frac{-1}{\sqrt{G}} (\sqrt{G})_{rr}$$

(usando que $(\sqrt{G})_r = \frac{G_r}{2\sqrt{G}}$)

Es decir, en una parametrización por coordenadas geodésicas polares, la curvatura de Gauss cumple la relación con G :

$$\boxed{\sqrt{G} \cdot K + (\sqrt{G})_{rr} = 0}$$

Esto se suele utilizar para calcular G cuando esta es difícil y K es “sencillo”. De hecho, si $K \equiv \text{cte}$, se resuelve la EDP y sale:

$$G = \begin{cases} r^2 & \text{si } K = 0 \\ \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K} \cdot r) & \text{si } K > 0 \\ \frac{-1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K} \cdot r) & \text{si } K < 0 \end{cases}$$

Resolución de la ecuación de Jacobi para K cte. Consideramos la relación fundamental que liga la curvatura de Gauss con el coeficiente métrico G en coordenadas geodésicas polares:

$$\sqrt{G} \cdot K + (\sqrt{G})_{rr} = 0$$

Definimos la función $f(r) = \sqrt{G}(r, \theta)$. La ecuación se reescribe como una EDO lineal de segundo orden con coeficientes constantes:

$$f''(r) + Kf(r) = 0$$

Para resolver este problema de valores iniciales, utilizamos las propiedades métricas en el origen ($r \rightarrow 0$):

- $f(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0.$
- $f'(0) = \lim_{r \rightarrow 0} (\sqrt{G})_r = 1.$

Analizamos la solución según el signo de la curvatura K :

Caso 1: $K = 0$ (Plano) La ecuación es $f''(r) = 0$. Integrando dos veces obtenemos $f(r) = Ar + B$. Imponiendo las condiciones iniciales:

$$f(0) = 0 \implies B = 0; \quad f'(0) = 1 \implies A = 1$$

Por tanto, $f(r) = r \implies \boxed{G(r, \theta) = r^2}.$

Caso 2: $K > 0$ (Esfera) La solución general de $f''(r) + Kf(r) = 0$ es $f(r) = A \cos(\sqrt{K}r) + B \sin(\sqrt{K}r)$. Imponiendo las condiciones iniciales:

$$f(0) = 0 \implies A = 0; \quad f'(r) = B\sqrt{K} \cos(\sqrt{K}r) \implies f'(0) = B\sqrt{K} = 1 \implies B = \frac{1}{\sqrt{K}}$$

Por tanto, $f(r) = \frac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r) \implies \boxed{G(r, \theta) = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K}r)}.$

Caso 3: $K < 0$ (Plano hiperbólico) La solución general de $f''(r) - |K|f(r) = 0$ es $f(r) = A \cosh(\sqrt{-K}r) + B \sinh(\sqrt{-K}r)$. Imponiendo las condiciones iniciales:

$$f(0) = 0 \implies A = 0; \quad f'(0) = B\sqrt{-K} = 1 \implies B = \frac{1}{\sqrt{-K}}$$

Por tanto, $f(r) = \frac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r) \implies \boxed{G(r, \theta) = -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K}r)}.$ □

1.9. Teorema de Minding

Lema 1.9.1: Isometrías locales y coeficientes métricos

Sea $\phi : S_1 \rightarrow S_2$ una isometría local entre superficies regulares. Entonces, para todo $p \in S_1$, existen parametrizaciones $X : U \rightarrow S_1$ (cubriendo p) y $\bar{X} : U \rightarrow S_2$ (cubriendo $\phi(p)$) definidas sobre el **mismo abierto** $U \subset \mathbb{R}^2$ tales que los coeficientes de sus primeras formas fundamentales coinciden:

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}.$$

Lema 1.9.2: Recíproco del lema anterior

Sean $X : U \rightarrow S_1$ y $\bar{X} : U \rightarrow S_2$ parametrizaciones tales que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ y $G = \bar{G}$ en todo U . Entonces, la aplicación composición:

$$\phi = \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \bar{X}(U)$$

es una isometría (global) entre los abiertos $X(U)$ y $\bar{X}(U)$.

Teorema 1.9.1: Teorema de Minding

(Recíproco del Teorema Egregium de Gauss para cuando $K \equiv \text{cte}$).

Sean S y \bar{S} dos superficies regulares con igual curvatura de Gauss **CONSTANTE**. Entonces, S y \bar{S} son localmente isométricas.

Demostración. Tenemos S y \bar{S} con $K = \bar{K}$ constante. Queremos ver que son isométricas. Sean $p \in S, \bar{p} \in \bar{S}$, $\exists V(p), \bar{V}(\bar{p})$ y $\varphi : V \rightarrow \bar{V}$ isometría? Para ello, fijamos bases ortonormales $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de $T_p S$ y $\{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$ de $T_{\bar{p}} \bar{S}$, y definimos la isometría lineal entre los planos tangentes:

$$\tilde{\varphi} : T_p S \rightarrow T_{\bar{p}} \bar{S} \quad / \quad \tilde{\varphi}(u\vec{e}_1 + v\vec{e}_2) = u\vec{f}_1 + v\vec{f}_2$$

Definimos entonces la aplicación:

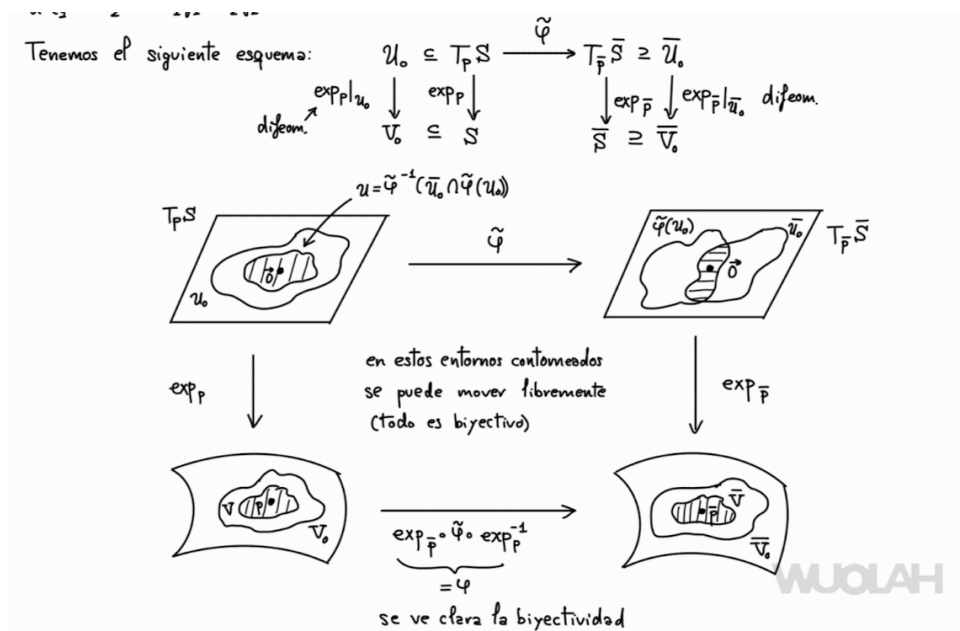
$$\varphi = \exp_{\bar{p}} \circ \tilde{\varphi} \circ \exp_p^{-1}$$

Para facilitarlo, hagamos todo con $T_p S, T_{\bar{p}} \bar{S}$ y luego “pasemos” todo usando la exponencial. Construyamos la siguiente isometría lineal:

$$\tilde{\varphi} : T_p S \rightarrow T_{\bar{p}} \bar{S}, \quad \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\} \text{ base ortonormal de } T_p S \text{ y } \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\} \text{ base ortonormal de } T_{\bar{p}} \bar{S}.$$

$$u \cdot \vec{e}_1 + v \cdot \vec{e}_2 \mapsto u \cdot \vec{f}_1 + v \cdot \vec{f}_2$$

Tenemos el siguiente esquema:



Esquema de la construcción: Paso de los entornos en los planos tangentes (donde $\tilde{\varphi}$ es isometría) a las superficies mediante la exponencial.

Definimos la aplicación $\varphi = \exp_{\bar{p}} \circ \tilde{\varphi} \circ \exp_p^{-1}$. En los entornos contorneados se puede mover libremente (todo es biyectivo), por lo que se ve clara la biyectividad.

1. Relación con las coordenadas geodésicas polares: Consideremos las parametrizaciones $X(r, \theta) = \exp_p(\phi(r, \theta))$ y $\bar{X}(r, \theta) = \exp_{\bar{p}}(\bar{\phi}(r, \theta))$. Verifiquemos que el diagrama conmuta, es decir, $(\varphi \circ X)(r, \theta) = \bar{X}(r, \theta)$:

$$\begin{aligned} (\varphi \circ X)(r, \theta) &= (\varphi \circ \exp_p \circ \phi)(r, \theta) \\ &= (\exp_{\bar{p}} \circ \tilde{\varphi} \circ \underbrace{\exp_p^{-1} \circ \exp_p}_{Id} \circ \phi)(r, \theta) \\ &= (\exp_{\bar{p}} \circ \tilde{\varphi})(r \cos \theta \vec{e}_1 + r \sin \theta \vec{e}_2) \\ &= \exp_{\bar{p}}(r \cos \theta \vec{f}_1 + r \sin \theta \vec{f}_2) \\ &= \exp_{\bar{p}}(\bar{\phi}(r, \theta)) = \bar{X}(r, \theta) \quad \checkmark \end{aligned}$$

2. Verificación de la isometría vía coeficientes métricos: Como el diagrama conmuta ($\bar{X} = \varphi \circ X$), basta ver que $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$ y $G = \bar{G}$:

- Por ser coordenadas geodésicas polares: $E = \bar{E} = 1$ y $F = \bar{F} = 0$.
- Como $K = \bar{K}$ es constante, la resolución de la EDP $\sqrt{G}_{rr} + K\sqrt{G} = 0$ con las condiciones iniciales en el origen nos da la misma función $G(r, \theta) = \bar{G}(r, \theta)$ para ambos casos (según el signo de K).

Al coincidir los coeficientes métricos, φ es una isometría.

3. Cálculo de la diferencial en el origen: Probemos que $d\varphi_p = \tilde{\varphi}$. Usando la regla de la cadena:

$$d\varphi_p = d(\exp_{\bar{p}} \circ \tilde{\varphi} \circ \exp_p^{-1})_p = d(\exp_{\bar{p}})_{\tilde{\varphi}(\exp_p^{-1}(p))} \circ d(\tilde{\varphi})_{\exp_p^{-1}(p)} \circ d(\exp_p^{-1})_p$$

Como $\exp_p^{-1}(p) = \vec{0}$ y $\tilde{\varphi}(\vec{0}) = \vec{0}$, y sabiendo que $d(\exp)_{\vec{0}} = Id$ y $d(\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}$ por ser lineal:

$$d\varphi_p = d(\exp_{\bar{p}})_{\vec{0}} \circ \tilde{\varphi} \circ (d\exp_p)_{\vec{0}}^{-1} = Id \circ \tilde{\varphi} \circ Id = \tilde{\varphi} \quad \checkmark$$

4. Conclusión: Para nuestro caso, cogemos X y \bar{X} como las **coordenadas geodésicas polares** de cada superficie.

- Se ve que conmutan (por construcción de φ a través de las exponenciales y la isometría lineal).
- Se sabe que $E = \bar{E} = 1$ y $F = \bar{F} = 0$.
- Para ver que $G = \bar{G}$, se distinguen los 3 casos de la observación anterior para $K \equiv \text{cte}$. Como $K = \bar{K}$, las fórmulas darán el mismo resultado para G y \bar{G} .

Sale todo y se tiene que φ es isometría.

□

Capítulo 2

Curvas Regulares a trozos y Variaciones

Capítulo 3

Teorema de Gauss Bonett

Capítulo 4

Complejidad y Teorema de Hopf-Rinow

Capítulo 5

Superficies Abstractas