Algebra lineal: Espais Vectorials

Laura Figueras

```latex
\subsection*{Exemples}
\begin{enumerate}[$\bullet$]
    \item $\reals^n = \{ (x_1, ..., x_n)| x_i \in \reals\}$ amb:
    \begin{enumerate}[-]
        \item $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n +
        y_n)$
        \item$\lambda (x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$
    \end{enumerate}
    \item $\racionals^n , \complexos^n$ de la mateixa manera.
    \item$\reals[x]$: polinomis en x (suma i producte per escalar).
    \item $\reals[x]_{\leq n}$: polinomis en x de grau més petit o
    igual que n (amb les mateixes operacions).
```

1 Cos

Definició. *Un cos K (o bé $\mathbb{K}$) és un conjunt amb dues operacions:*

Suma:

$$K \times K \longrightarrow K$$
$$(a,b) \longmapsto a+b$$

Producte:

$$K \times K \longrightarrow K$$
$$(a,b) \longmapsto a \cdot b$$

Complint que:

- Propietat associativa:
  $\forall\, a,b,c \in K$,
  $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Propietat commutativa:
  $\forall\, a,b \in K$,
  $a+b = b+a$
- Existeix un element neutre:
  $\exists\, 0 \in K$ tal que
  $a+0 = a,\ \forall\, a \in K$
- Existència de l'oposat:
  $\forall\, a \in K,\ \exists\, b$ tal que
  $a+b = 0$ ($-a$" oposat d'a)

- Propietat associativa:
  $\forall\, a,b,c \in K$,
  $(a \cdot b)\cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Propietat commutativa:
  $\forall\, a,b \in K$,
  $a \cdot b = b \cdot a$
- Existeix un element neutre:
  $\exists\, 1 \in K$, tal que
  $a \cdot 1 = a, \forall a \in K$
- Existència de l'invers:
  $\forall\, a \neq 0,\ a \in K,\ \exists\, b$ tal que
  $a \cdot b = 1$ ("a^{-1}" invers d'a)

- $0 \neq 1$
- Propietat distributiva:
  $\forall\, a,b,c \in K$,
  $a \cdot (b+c) = ab + ac$

Exemples

- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ són cossos amb la suma i el producte que coneixem.
- $\mathbb{Z}$ amb la suma i producte que coneixem, no és un cos, ja que no té existència d'invers:

$$2 \neq 0 \text{ i el 2 no té invers}$$

Com definir un cos nou:
$K = \{0,1\}\ +\ ,\ \cdot$
Definim la taula de la suma i la del producte:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Ara definim un cos amb tres elements, amb les seves taules corresponents:
$K = \{0,1,a\}\ +\ ,\ \cdot$

$+$	0	1	a
0	0	1	a
1	1	a	0
a	a	0	1

$\cdot$	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	1

2 Espais Vectorials

Definició. *Fixem $\mathbb{K}$ un cos. Diem que un conjunt E és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ (o un $\mathbb{K}$-espai vectorial) si hi ha definides dues operacions:*

Suma de vectors:

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow E \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \vec{u} + \vec{v} \end{aligned}$$

Multiplicació per escalar:

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times E &\longrightarrow E \\ (\lambda, \vec{v}) &\longmapsto \lambda \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

Complint que:

- Associativa:
  $\forall\, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in E$,
  $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- Commutativa:
  $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in E$,
  $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- Element neutre:
  vector zero $\vec{0}$
  $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u},\ \forall\, \vec{u} \in E$
- Element oposat:
  $\forall\, \vec{u} \in E,\ \exists\, \vec{v}$
  tal que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$
- Associativa mixta:
  $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{u} \in E$,
  $\lambda \cdot (\mu \cdot \vec{u}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \vec{u}$
- Distributiva (1)
  $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{u} \in E$,
  $(\lambda + \mu) \cdot \vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u}$
- Distributiva (2)
  $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in E$,
  $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
- Unitat:
  $\forall\, \vec{u} \in E$,
  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Anomenem vectors als elements de E i escalars als elements de $\mathbb{K}$.

Exemples

- $\mathbb{R}^n = \{(x_1, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ amb:
  - $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$
  - $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$
- $\mathbb{Q}^n, \mathbb{C}^n$ de la mateixa manera.
- $\mathbb{R}[x]$: polinomis en x (suma i producte per escalar).
- $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$: polinomis en x de grau més petit o igual que n (amb les mateixes operacions).

Observació. *A l'estructura d'espai vectorial no podem multiplicar polinomis.*

- $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, suma de matrius i multiplicació per un escalar, també és un espai vectorial.

Propietats. *E espai vectorial sobre $\mathbb{K}$:*

A) El vector $\vec{0}$ és únic.

B) $\forall\, \vec{u} \in$ E, el vector oposat és únic.

C) $0 \cdot \vec{u} = \vec{0},\ \forall\, \vec{u} \in E$

D) $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0},\ \forall\, \lambda \in \mathbb{K}$

E) $\lambda \cdot \vec{u} = \vec{0} \iff (\lambda = 0\ \cup\ \vec{u} = \vec{0})$

F) $-\vec{u} = (-1) \cdot \vec{u}$

Ara demostrarem algunes de les propietats[2] mencionades anteriorment.

Demostració. Començarem per l'apartat A):
Suposem $\vec{0}$ i $\vec{0}'$ dos elements neutres per la suma i veiem que, al sumar-los, passa el següent:

$$\vec{0} = \vec{0} + \vec{0}' = \vec{0}'$$

Per una banda, si considerem $\vec{0}'$ l'element neutre, el resultat seria el vector $\vec{0}$. Per altra banda, si el que considerem neutre és el $\vec{0}$, el resultat seria el vector $\vec{0}'$. Per tant queda que:

$$\vec{0} = \vec{0}'$$

□

Demostració. Ara demostrarem l'apartat C):
Sigui $\vec{u}$ un vector i -$\vec{u}$ el seu oposat:

$$0 \cdot \vec{u} + \vec{u} = (0 + 1) \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

Ens queda que $0 \cdot \vec{u} + \vec{u} = \vec{u}$, llavors si sumem el vector oposat de $\vec{u}$, ens queda que:

$$0 \cdot \vec{u} + \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} + (-\vec{u})$$
$$0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

□

Exemples d'espais vectorials

A conjunt i E un $\mathbb{K}$-espai vectorial:

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto f(a) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : A &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto g(a) \end{aligned}$$

Tenim que:

$$\begin{aligned} (f+g) : A &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto f(a) + g(a) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} (\lambda f) : A &\longrightarrow E \\ a &\longmapsto \lambda f(a) \end{aligned}$$

D'aquesta manera, les aplicacions d'A en E, tenen estructura d'espai vectorial.

Un cas particular: $\begin{cases} A = \mathbb{R} \\ E = \mathbb{R} \text{ com } \mathbb{R}\text{-espai vectorial} \end{cases}$

$$\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\} \tag{1}$$

$$\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{f és contínua}\} \tag{2}$$

$$\{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \mid \text{f és derivable}\} \tag{3}$$

3 Subespais vectorials

Definició. *Si E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial, diem que $F \subseteq E$ un subconjunt no buit és un subespai si es compleix:*

(i) $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in F,\ \vec{u} + \vec{v} \in F$

(ii) $\forall\, \vec{u} \in F$ i $\forall\, \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda\vec{u} \in F$

Observació. *Si $F \subseteq E$ és un subespai, $\vec{0} \in F$:*

$$F \neq \varnothing \iff \begin{cases} \exists\, \vec{u} \in F \\ 0 \in \mathbb{K} \end{cases} \overset{(ii)}{\iff} \begin{cases} 0 \cdot \vec{u} \in F \\ 0 \cdot \vec{u} = \vec{0} \end{cases}$$

Proposició. *Si E és un $\mathbb{K}$-espai vectorial i $F \subseteq E$ és un conjunt no buit, llavors F és un subespai si i només si:*

(a) $\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in F$ i $\forall\, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, tenim que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$

Demostració. Demostrem que $(i) + (ii) \iff (a)$:

$\Rightarrow$ Siguin:

$$\begin{cases} \vec{u}, \vec{v} \in F \\ \lambda, \mu \in \mathbb{K} \end{cases}$$

Per la segona propietat de la definició de subespais vectorials[3], sabem que:

$$\begin{cases} \lambda\vec{u} \in F \\ \mu\vec{v} \in F \end{cases} \overset{(i)}{\Longrightarrow} \lambda\vec{u} + \mu\vec{v} \in F$$

$\Leftarrow$ Sigui $\vec{u}, \vec{v} \in F$, per la propietat de la proposició[3], sabem que $\vec{u} + \vec{v} \in F$ quan $\lambda = \mu = 0$.

Ara, veiem la segona propietat. Sigui $\vec{u} \in F,\ \lambda \in \mathbb{K}$. Per la propietat de la proposició, sabem que $\lambda\vec{u} \in F$ quan $\mu = 0$.

$\square$

Exemples

- E qualsevol, F=$\{\vec{0}\}$
- Si $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}\} \subset$ E, considerem:

$$\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n} \rangle = \{\lambda_1 \cdot \vec{v_1} + \lambda_2 \cdot \vec{v_2} + ... + \lambda_n \cdot \vec{v_n} \mid \lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 1...n\}$$

Vegem que és un subespai:

(i) $\vec{u} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + ... + \lambda_n\vec{v_n} \quad \in \quad \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n} \rangle$
$\vec{v} = \mu_1\vec{v_1} + \mu_2\vec{v_2} + ... + \mu_n\vec{v_n} \quad \in \quad \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n} \rangle$

$\vec{u} + \vec{v} = (\lambda_1 + \mu_1)\vec{v_1} + (\lambda_2\mu_2)\vec{v_2} + ... + (\lambda_n\mu_n)\vec{v_n} \quad \in \quad \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n} \rangle$

(ii) $\vec{u} = \lambda_1\vec{v_1} + \lambda_2\vec{v_2} + ... + \lambda_n\vec{v_n}, \qquad \mu \in \mathbb{K}$
$\mu\vec{u} = (\mu\lambda_1)\vec{v_1} + (\mu\lambda_2)\vec{v_2} + ... + (\mu\lambda_n)\vec{v_n} \ \in \langle \vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n} \rangle$

◇ $E = M_2(\mathbb{R}),\ F = \langle \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \rangle$

$F = \{\lambda_1 \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_2 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) + \lambda_3 \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$

$= \{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_3 \\ \lambda_3 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\} =$ matrius simètriques 2×2

$F = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid b - c = 0\}$

◇ Solucions d'equacions lineals homogenies:

Suposem A una matriu m×n i $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ incògnites.

$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sistema d'equacions homogenia.

Observació. *Les solucions d'aquest sistema són subespais de* $\mathbb{K}^n$

Demostració. Hi ha tres casos:

· $X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ és una solució, solucions $\neq \varnothing$

· $\begin{cases} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{solució} & A(X+Y) \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{solució} & AX + AY = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

· $\begin{cases} X\text{solució} & A(\lambda X) \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \\ \lambda \in \mathbb{K} & \lambda(AX) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

□