Lista 2 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

Do enunciado: $(X_n)_{n\in N}$ é sequência de v.a. com média $\mu \neq 0$ e variância finita

Seja $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Como a variância é finita, pela Lei Fraca dos Grandes Números, temos $S_n \xrightarrow{p} n\mu$ e portanto:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} P(|S_n - n\mu| < \epsilon) = 1 \Rightarrow \\
\lim_{n\to\infty} P(S_n = 0) = 0 \Rightarrow \\
\lim_{n\to\infty} P(S_n = 0|S_0 = i) = 0 \Rightarrow \\
g_{i,0} = \sum_{i=1}^{+\infty} p_{i,0}^{(n)} < +\infty
\end{aligned}$$

Isto é, o estado 0 não é visitado infinitas vezes, e portanto não é recorrente. Logo, é transiente.

Questão 2

Do enunciado: $(X_n)_{n\in N}$ é Cadeia de Markov em {0,1,2,...} com probabilidades de transição: $p_{i,i+1} = \alpha_i$ e $p_{i,0} = 1 - \alpha_i$ para todo $i \geq 0$

(a) Queremos mostrar a equivalência ($\Longleftrightarrow$) das seguintes hipóteses:

  (i) 0 recorrente

  (ii) $\prod_{i=0}^{+\infty} \alpha_i = 0$

  (iii) $\sum_{i=0}^{+\infty} 1 - \alpha_i = +\infty$

  Vamos (tentar) mostrar (i) $\Leftrightarrow$ (ii) e (i) $\Leftrightarrow$ (iii).

  (ii) $\Rightarrow$ (i):

  Temos que $\prod_{i=0}^{+\infty} \alpha_i = 0$. Então:

$$\begin{aligned}
P(T_0 = +\infty|X_0 = 0) = \lim_{n\to\infty} \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot ...\alpha_n = 0 \Rightarrow \\
P(T_0 < +\infty|X_0 = 0) = 1 \Rightarrow \\
\rho_{00} = 1
\end{aligned}$$

  Logo, 0 é recorrente.

(i) $\Rightarrow$ (ii):

Temos que 0 é recorrente, ie. $\rho_{00} = 1$, então:

$$\begin{aligned}
\rho_{00} = P(T_0 < +\infty | X_0 = 0) = 1 \Rightarrow \\
1 - P(T_0 = +\infty | X_0 = 0) = 1 \Rightarrow \\
P(T_0 = +\infty | X_0 = 0) = 0 \Rightarrow \\
P(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, ... | X_0 = 0) = 0 \Rightarrow \\
\frac{P(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, ...)}{P(X_0 = 0)} = 0 \Rightarrow \\
\prod_{i=0}^{+\infty} p_{i,i+1} = 0 \Rightarrow \\
\prod_{i=0}^{+\infty} \alpha_i = 0
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

(i) $\Rightarrow$ (iii):

Temos que 0 é recorrente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} p_{00}^{(n)} = +\infty$, isto é:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{n} p_{00}^{(n)} = p_{00}^{(1)} + \sum_{n=2}^{n} p_{00}^{(n)} = +\infty \Leftrightarrow \\
(1 - \alpha_0) + \sum_{n=2}^{+\infty} (1 - \alpha_n) \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i = +\infty \Leftrightarrow \\
\sum_{n=2}^{+\infty} (1 - \alpha_n) \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i = +\infty \Leftrightarrow
\end{aligned}$$

Assumindo $a_i \in (0, 1)$, temos que:

$$0 < \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i < 1$$

para todo $n \in N$. Logo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \alpha_n) > \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \alpha_n) \prod_{i=0}^{n-1} \alpha_i = +\infty$$

E portanto:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (1 - \alpha_n) = +\infty$$

Como queríamos demonstrar.

(iii) $\Rightarrow$ (i):
Temos que $\sum_{i=0}^{+\infty} 1 - \alpha_i = +\infty$. Assumindo $0 < 1 - \alpha_i < 1$, o estado 0 é visitado com probabilidade positiva a partir de qualquer estado. De fato, a cadeia é irredutível e o estado 0 é recorrente.

(b) Temos agora que $\alpha_i = 1 - \frac{1}{2(i+1)^2}$, ie: $p_{i,0} = 1 - \alpha_i = \frac{1}{2(i+1)^2}$
É fácil ver que esta cadeia é irredutível, já que todos os estados se comunicam: a partir de um estado i é possível alcançar todos os estados a direita ($i \to i+1$) e todos à esquerda voltando pra 0 e recomeçando a trajetória ($i \to 0$). Então basta mostrar que um estado é transiente para mostrar que a cadeia também é.

Olhando para o estado 0, temos que, quando i $\to \infty$, a probabilidade de retornar ao estado 0 é nula:

$$\lim_{i\to\infty} p_{i,0} = \lim_{i\to\infty} \frac{1}{2(i+1)^2} = 0$$

Logo o estado 0 é transiente, e portanto a cadeia também é, como queríamos demonstrar.

(c) Temos agora que $\alpha_i = \alpha$, ie: $\prod_{i=0}^{+\infty} \alpha_i = \alpha^n$.
Assumindo $\alpha \in (0, 1)$, sabemos que $a^n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Tal como no item anterior, basta mostrar que um estado é recorrente para mostrar que toda a cadeia também é.
Do item (a), temos que $\prod_{i=0}^{+\infty} \alpha_i = 0$ implica 0 recorrente, logo toda a cadeia é recorrente.

Questão 3
Do enunciado: $(X_n)_{n\in N}$ é Cadeia de Markov em {0,1,2,...} com probabilidades de transição: $p_{i,i+1} = \lambda/(i + \nu + 1)$ e $p_{i,0} = 1 - p_{i,i+1}$, com $\lambda > 0$ e $\nu \geq 0$.

Além das condições já existentes sobre λ e ν é necessário supor que: $\lambda \leq i + \nu + 1$, para todo $i \in N$.

Como essa cadeia é irredutível (similar ao exercício anterior), basta olhar para um estado para mostrar que é recorrente.
Seja $p_{i,0} = 1 - \frac{\lambda}{i+\nu+1}$. Tomando o limite, temos:

$$\lim_{i\to\infty} p_{i,0} = \lim_{i\to\infty} 1 - \frac{\lambda}{i + \nu + 1} = 1$$

Como a probabilidade de retornar ao estado 0 quando $i \to +\infty$ é 1, o estado 0 é recorrente. Logo, a cadeia também é, como queríamos demonstrar.

Questão 4
Do enunciado: $(X_n)_{n\in N}$ e $(Y_n)_{n\in N}$ são duas cadeias de Markov independentes.
Vamos mostrar por contraexemplo que $(X_n + Y_n)$ não será necessariamente uma cadeia de Markov.
Seja X um v.a. tal que $\lambda = P(X = 0) = P(X = 1) = 1/2$ e $X_n = X$ $\forall n \in N$
Seja $(Y_n)_{n\in N}$, onde $Y_0 = 0$, espaço de estados $I = \{-1, 0, 1\}$ e matriz de transição de probabilidades dada por:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{estado} & -1 & 0 \quad 1 \end{array} \\
P = & \begin{array}{c} -1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \begin{pmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 3/4 & 1/4 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Defina $Z_n = X_n + Y_n$. Por independência de X e Y temos que:

$$
\begin{aligned}
P(Z_2 = 0 \mid Z_1 = 1, Z_0 = 1) &= \frac{P(Z_2 = 0, Z_1 = 1, Z_0 = 1)}{P(Z_1 = 1, Z_0 = 1)} \\
&= \frac{P(Y_2 = -1, Y_1 = 0, X_0 = 1)}{P(Y_1 = 1, X_0 = 1)} \\
&= \frac{P(Y_2 = -1, Y_1 = 0)}{P(Y_1 = 1)} \frac{P(X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)} \\
&= P(Y_2 = -1 \mid Y_1 = 0) \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(Z_2 = 0 \mid Z_1 = 1) &= \frac{P(Y_2 = -1, Y_1 = 0)P(X_0 = 1) + P(Y_2 = 0, Y_1 = 1)P(X_0 = 0)}{P(Y_1 = 0)P(X_0 = 1) + P(Y_1 = 1)P(X_0 = 0)} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

Como

$$
P(Z_2 = 0 \mid Z_1 = 1) = \frac{5}{12} \neq \frac{1}{4} = P(Z_2 = 0 \mid Z_1 = 1, Z_0 = 1)
$$

$X_n + Y_n$ não é uma cadeia de Markov.

O processo bi-dimensional $((X_n, Y_n))_{n \in N}$ é uma cadeia de Markov, já que as as probabilidades de transição entre estados no mesmo eixo não dependem do estado atual no outro eixo.

Questão 5

Do enunciado: $(X_n)_{n\in N}$ e $(Y_n)_{n\in N}$ são duas cadeias de Markov independentes e $(Z_n)_{n\in N}$ uma sequência que assume valores em {0,1}

Seja $W_n = X_n 1_{\{Z_n=0\}} + Y_n 1_{\{Z_n=1\}}$. Vamos mostrar que W_n não é uma Cadeia de Markov usando um exemplo em que $P(W_2 = 1|W_1 = 1) \neq \frac{P(W_2=1, W_1=1|W_0=1)}{P(W_1=1|W_0=0)}$

Não sei se conseguimos definir o problema de forma correta, mas a ideia é mostrar que é necessário usar informação de mais do que o estado exatamente anterior para definir possíveis trajetórias.

Vamos assumir que X_n e Y_n são cadeias de Markov com o mesmo espaço de estados I={0,1}. Seja $\lambda = P(Z_n = 0) = P(Z_n = 1) = \frac{1}{2}$ a distribuição inicial de Z_n e as matrizes de transição de probabilidade de X_n e Y_n dadas respectivamente por:

$$P = \begin{array}{lc} \text{estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$Q = \begin{array}{lc} \text{estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Temos que:
$P(W_1 = 1|W_0 = 1) = \frac{1}{2}P(X_1 = 1|W_0 = 1) + \frac{1}{2}P(Y_1 = 1|W_0 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

Analogamente: $P(W_2 = 1|W_1 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$

Sabemos que as combinações possíveis de Z_n para esses estados são equiprováveis:
$P(Z_2 = 0, Z_1 = 0) = P(Z_2 = 1, Z_1 = 0) = P(Z_2 = 0, Z_1 = 1) = P(Z_2 = 1, Z_1 = 1) = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} P(W_2 = 1, W_1 = 1|W_0 = 1) &= \frac{1}{4}P(Y_2 = 1, Y_1 = 1|W_0 = 1) \\ &+ P(Y_2 = 1, X_1 = 1|W_0 = 1) + P(X_2 = 1, Y_1 = 1|W_0 = 1) + P(X_2 = 1, X_1 = 1|W_0 = 1) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{9} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big(\frac{4}{9} + \frac{1}{9}\Big) + \frac{1}{3}\frac{1}{2}\Big) \\ &= \frac{29}{4 \cdot 36} \end{aligned}$$

Assim:

$$P(W_2 = 1|W_1 = 1) = \frac{15}{36} \neq \frac{29}{60} = \frac{P(W_2 = 1, W_1 = 1|W_0 = 1)}{P(W_1 = 1|W_0 = 0)}$$

Logo, W_n não é uma Cadeia de Markov.
(Yuri, a essa hora já não acho que conseguimos organizar as ideias direito, desculpa...)