Lista 5 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

O conjunto $\mathcal{F} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$, em que cada $\mathcal{F}_i$é uma σ-álgebra, é uma σ-álgebra já que satisfaz as três propriedades necessárias:

1. Contém o conjunto vazio: $\emptyset \in \mathcal{F}_i \ \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \emptyset \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i$, por definição

2. É fechada sob a união de subconjuntos finitos:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathcal{A}_n \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \\ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_n \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i \end{aligned}$$

3. É fechada sob os complementares:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i \Rightarrow \mathcal{A} \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \\ \mathcal{A}^C \in \mathcal{F}_i \quad \forall i \in \mathcal{I} \Rightarrow \\ \mathcal{A}^C \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i \end{aligned}$$

Já a união de duas σ-álgebras nem sempre satisfaz essas três propriedades. Seja $\Omega = \{a, b, c\}$, então $\mathcal{F}_1 = \{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$ e $\mathcal{F}_2 = \{\{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$ são σ-álgebras, e a união das duas é o conjunto:

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$$

Como $\{a, b\} \notin \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$, esta união não satisfaz a propriedade 2 e portanto não é uma σ-álgebra.

Questão 2

Queremos mostrar que $\sigma(\mathcal{I}) = \bigcap_{\mathcal{A}\supset\mathcal{I}} \mathcal{A}$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{I}$.

Vamos supor, por contradição, que existe uma σ-álgebra σ^* menor contendo $\mathcal{I}$ tal que:

$$\mathcal{I} \subset \sigma^* \subset \sigma(\mathcal{I})$$

Logo, por definição:

$$\sigma(\mathcal{I}) = \sigma^* \cap \Big(\bigcap_{\mathcal{A}\supset\mathcal{I}, \mathcal{A}\neq\sigma^*} \mathcal{A}\Big) \Rightarrow \sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma^*$$

O que só é possível se $\sigma(\mathcal{I}) \subset \sigma^*$, logo $\sigma(\mathcal{I})$ é de fato a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{I}$.

Questão 3

$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ e $\mathcal{I} = \{\{1\}, \{2\}\}$

$\sigma(\mathcal{I})$ é a menor σ-álgebra contendo $\mathcal{I}$ e deve satisfazer as propriedades de uma σ-álgebra, como visto nos exercícios anteriores (conter $\emptyset$, ser fechada sob a união sob os complementares dos subconjuntos):

$$\sigma(\mathcal{I}) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \emptyset\}$$

Questão 4

Seja $\mathbb{P}$ uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$ e $B \in \mathcal{F}$.

Seja $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{P(B)}$. Vamos mostrar que $\mathbb{P}(\cdot|B)$ satisfaz as propriedades necessárias para ser probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$:

(i)

$$\mathbb{P}\big(\emptyset|B\big) = \frac{\mathbb{P}(\emptyset \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(\emptyset)}{\mathbb{P}(B)} = 0$$

(ii)

$$\mathbb{P}\big(\Omega|B\big) = \frac{\mathbb{P}(\Omega \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$$

(iii) Aditividade finita: Se $A \cap C \cap B = \emptyset$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A \cup C|B) &= \frac{\mathbb{P}((A \cup C) \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B \cap C)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B) - \frac{\mathbb{P}(A \cap C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \mathbb{P}(A|B) + \mathbb{P}(C|B)
\end{aligned}$$

(iv) Aditividade enumerável: Se $A_i \cap A_j \cap B = \emptyset, \forall i \neq j$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i|B\Big) &= \frac{\mathbb{P}\Big(\big(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i\big) \cap B\Big)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B) - \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i|B) - \frac{\sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1, j \neq i}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_i|B)
\end{aligned}$$

Questão 5

Definição: X é V.A. $\Rightarrow \{\omega : X(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}, \forall t \in \mathbb{R}$

Dadas X e Y variáveis aleatórias, queremos mostrar que $\max\{X, Y\}$ e $\min\{X, Y\}$ também são, ie:

$\{\omega : \max\{X, Y\}(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$ e $\{\omega : \min\{X, Y\}(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}$.

$$\{\omega : \max\{X, Y\}(\omega) \leq t\} = \{\omega : \max\{X(\omega), Y(\omega)\} \leq t\} = \{\omega : X(\omega) \leq t\} \cap \{\omega : Y(\omega) \leq t\}$$
$$\{\omega : \min\{X, Y\}(\omega) \leq t\} = \{\omega : \min\{X(\omega), Y(\omega)\} \leq t\} = \{\omega : X(\omega) \leq t\} \cup \{\omega : Y(\omega) \leq t\}$$

É fácil ver que a união e interseção de dois conjuntos mensuráveis também é mensurável:

- $X \in \mathcal{F}\ ,\ Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{F}$
- $X \in \mathcal{F}\ ,\ Y \in \mathcal{F} \Rightarrow X^C \in \mathcal{F}\ ,\ Y^C \in \mathcal{F} \Rightarrow X^C \cup Y^C \in \mathcal{F} \Rightarrow (X^C \cup Y^C)^C \in \mathcal{F} \Rightarrow X \cap Y \in \mathcal{F}$

Logo $\max\{X, Y\}$ e $\min\{X, Y\}$ também são variáveis aleatórias.

Questão 6

Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ e $\mathbb{E}[X_n^2] = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Queremos mostrar que $\mathbb{P}(X_n \geq n \ io.\ ) = 0$.

Pelo Lemma I de Borel-Cantelli, temos que:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X_n \geq n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(X_n \geq n \ io.\ ) = 0$$

Então, usando a desigualdade de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq n) \leq \frac{\mathbb{E}[X_n^2]}{n^2} = \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(|X_n| \geq n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < +\infty \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}(X_n \geq n \ io.\ ) = 0$$

Questão 7

$X \geq 0$ é V.A. tal que $\mathbb{E}[X] < +\infty$. Queremos mostrar que $\mathbb{P}(X = +\infty) = 0$.

Vamos assumir por contradição que $\mathbb{P}(X = +\infty) > 0$, então:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{P}(X = x_i) = +\infty$$

(já que algum termo x_i poderia assumir o valor $+\infty$ e faria a esperança explodir)

O que é absurdo. Logo $\mathbb{P}(X = +\infty = 0)$.

Questão 8

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de V.A.'s tal que $X_n \geq -Y, \forall n \geq 0$, onde Y é V.A. positiva com $E[Y] < +\infty$

Lemma de Fatou: Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de **V.A's positivas**, então:

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf X_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(X_n)$$

Vamos definir $Z_n = X_n + Y \geq 0$, então podemos usar o Lemma:

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf Z_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(Z_n)$$

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf (X_n + Y)) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(X_n + Y)$$

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf X_n) + \mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf Y) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(X_n) + \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(Y)$$

Como Y não depende de n, $\mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf Y) = \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(Y)$, então temos:

$$\mathbb{E}(\lim_{n\to+\infty} \inf X_n) \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \mathbb{E}(X_n)$$

Estendendo o Lemma de Fatou para a sequência $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de V.A.'s não necessariamente positivas.

Questão 9

Seja o evento B tal que $0 < \mathbb{P}(B) < 1$

(a) $\mathcal{G} = \sigma(\{B\}) = \{\{B\}, \{B^C\}, \{\Omega\}, \emptyset\}$

(b) Usando a definição de probabilidade condicional a uma σ-álgebra, temos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A|\mathcal{G}] &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B_i}]}{\mathbb{P}(B_i)} \mathbb{1}_{B_i} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B]}{\mathbb{P}(B)} \mathbb{1}_B + \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{B^C}]}{\mathbb{P}(B^C)} \mathbb{1}_{B^C} \\
&= \mathbb{P}(A|B)\mathbb{1}_B + \mathbb{P}(A|B^C)\mathbb{1}_{B^C}
\end{aligned}$$

(c) $\mathbb{P}(A|\mathcal{G})$ é uma variável aleatória e pode assumir o valor $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}(A|B^C)$ dependendo se $A \in B$ ou $A \in B^C$, equivalente à definição elementar de probabilidade condicional.

Se $A \in B^C$, por exemplo, $\mathbb{P}(A|\mathcal{G}) = \mathbb{P}(A|B^C)$ e $\mathbb{P}(A|B) = 0$

Questão 10

Sejam X e Y V.A's discretas e defina. Queremos mostrar que:

$$\mathbb{E}[Y|X] = \frac{\sum_j j \cdot q(X, j)}{\sum_k q(X, k)}$$

em que $q_{ij} = \mathbb{P}(X = i, Y = j)$.

Neste caso, vamos definir a esperança condicional de Y em relação a $\sigma(X)$, em que X é V.A. discreta assumindo os valores $x_1, ..., x_n$.

Pela definição de esperança condicional, temos:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y|X] = \mathbb{E}[Y|\sigma(X)] &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[Y\mathbb{1}_{X=x_i}]}{\mathbb{P}(X=x_i)}\mathbb{1}_{X=x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{Y=j}\mathbb{1}_{X=x_i}]}{\mathbb{P}(X=x_i)}\mathbb{1}_{X=x_i} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum_j j \cdot \mathbb{P}(Y=j, X=x_i)}{\sum_k \mathbb{P}(Y=k, X)}\mathbb{1}_{X=x_i}(*) \\
&= \frac{\sum_j j \cdot \mathbb{P}(Y=j, X)}{\sum_k \mathbb{P}(Y=k, X)} \\
&= \frac{\sum_j j \cdot q(X,j)}{\sum_k q(X,k)}
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar.

(*) A indicadora zera todos os valores de x_n exceto o que representa de fato o evento X.

Questão 11

Temos que: $\Omega = \{1,2,3\}$, $X(1) = X(2) = 5$, $X(3) = 6$ e $Y(\omega) = \omega$. $Z = \mathbb{E}[Y|X]$

(a) $X(\Omega) = \{5,6\}$

$\sigma(X) = \{\{1,2\},\{3\},\{1,2,3\},\emptyset\}$

(b) Usando o resultado provado no exercício anterior temos:

$$Z(1) = \mathbb{E}[Y=1|X=5] = \frac{1 \cdot \mathbb{P}(Y=1|X=5) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y=2|X=5)}{\mathbb{P}(Y=2, X=5) + \mathbb{P}(Y=2, X=5)}$$

$$Z(2) = \mathbb{E}[Y=2|X=5] = \frac{1 \cdot \mathbb{P}(Y=1|X=5) + 2 \cdot \mathbb{P}(Y=2|X=5)}{\mathbb{P}(Y=2, X=5) + \mathbb{P}(Y=2, X=5)}$$

$$Z(3) = \mathbb{E}[Y=3|X=6] = \frac{3 \cdot \mathbb{P}(YY=3|X=6)}{\mathbb{P}(Y=3, X=6)} = 3$$