Lista 1 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

Do enunciado:

- 5 bolas brancas e 5 bolas pretas estão distribuídas em duas urnas tal que cada uma contém 5 bolas
- No estado i: urna 1 contém i bolas brancas
- A cada passo n uma bola é retirada de cada urna e colocada na outra
- X_n: estado do sistema depois do n-ésimo passo

Seja X_0 o estado inicial da urna 1, contendo i bolas brancas de acordo com uma distribuição inicial, ie: $P(X_0 = i) = \lambda_i$, para todo i $\in$ I. No estado X_1, sabemos que a urna pode continuar contendo i bolas brancas, $i-1$ ou $i+1$. A cada estado j o número de bolas brancas na urna depende apenas deste número no estado anterior. Logo, o processo pode ser descrito como uma Cadeia de Markov. Podemos construir a matriz de transição como:

- $p_{0j} = \begin{cases} 1, & j = 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$ já que não tem como diminuir o número de bolas brancas na urna 1
- $p_{5j} = \begin{cases} 1, & j = 4 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$ já que não tem como aumentar o número de bolas brancas na urna 1
- Se j=i+1: o número de bolas brancas na urna 1 aumentou, ie, retiramos uma bola preta da urna 1 e uma branca da urna 2, então: $p_{ij} = \frac{5-i}{5}\frac{5-i}{5} = \frac{(5-i)^2}{25}$
- Se j=i: o número de bolas brancas na urna 1 se mantém, ie, retiramos bolas de cores iguais das duas urnas, então: $p_{ij} = \frac{i}{5}\frac{5-i}{5}\frac{5-i}{5}\frac{i}{5} = \frac{2i(5-i)}{25}$
- Se j=i-1: o número de bolas brancas na urna 1 diminuiu, ie, retiramos uma bola branca da urna 1 e uma preta da urna 2, então: $p_{ij} = \frac{i}{5}\frac{i}{5} = \frac{i^2}{25}$

Substituindo, temos:

$$P = \begin{array}{c c} \text{estado} & \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{25} & \frac{8}{25} & \frac{16}{25} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{25} & \frac{12}{25} & \frac{9}{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{9}{25} & \frac{12}{25} & \frac{4}{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{16}{25} & \frac{8}{25} & \frac{1}{25} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Questão 2

Do enunciado: ocorrência de chuva ou não depende das condições climáticas dos últimos três dias

Vamos definir que, em cada dia as condições climáticas possíveis são: sol (S) ou chuva (R)

Para interpretar este problema como uma Cadeia de Markov, podemos definir o estado em t como a combinação das condições climáticas em t, $t-1$ e $t-2$. Então são possíveis 2^3 estados: RRR, RRS, RSS, RSR, SRS, SRR, SSR, SSS.

Dessa maneira, o estado em $t+1$ depende apenas do estado em t. De fato, para o período $t+1$, o período $t-2$ deixa de importar e o estado depende apenas do que ocorreu em t e $t-1$.

A matriz de transição é dada por:

Substituindo, temos:

$$P = \begin{array}{c} \text{estado} \\ RRR \\ RRS \\ RSS \\ RSR \\ SRS \\ SRR \\ SSR \\ SSS \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} RRR & RRS & RSS & RSR & SRS & SRR & SSR & SSS \end{array} \\ \begin{pmatrix} \text{p}_1 & (1\text{-p}_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{p}_2 & (1\text{-p}_2) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{p}_3 & (1\text{-p}_3) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{p}_4 & (1\text{-p}_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{p}_5 & (1\text{-p}_5) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{p}_6 & (1\text{-p}_6) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \text{p}_7 & (1\text{-p}_7) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \text{p}_8 & (1\text{-p}_8) \end{pmatrix} \end{array}$$

Questão 3

Do enunciado: O tempo no dia n é caracterizado por um dos três estados e pode ser descrito como uma Cadeia de Markov com probabilidades de transição $p_{ij}(i, j = R, C, S)$ positivas e conhecidas.

(a) A probabilidade de que o tempo nos próximos 7 dias seja "S S R R S C S" dado que $t_0 = S$ é:
$P(t_1 = S, t_2 = S, t_3 = R, t_4 = R, t_5 = S, t_6 = C, t_7 = S|t_0 = S) = P(S|S) \cdot P(S|S) \cdot P(R|S) \cdot P(R|R) \cdot P(S|R) \cdot P(C|S) \cdot P(S|C) = p_{SS}^2 \cdot p_{SR} \cdot p_{RR} \cdot p_{RS} \cdot p_{SC} \cdot p_{CS}$

(b) A probabilidade de que durante d dias o tempo seja ensolarado dado que $t_0 = S$ é:
$P(t_1 = S, \cdots, t_d = S, t_{d+1} \neq S|t_0 = S) = (p_{SS})^{d-1} \cdot (1 - p_{SS})$

Questão 4

Do enunciado: $(Z_n)_{n \in Z}$ é sequência de VA's iid com $P(Z_0 = 0) = P(Z_0 = 1) = \frac{1}{2}$ (como Z_n é iid $P(Z_n = 0) = P(Z_n = 1) = \frac{1}{2}$ vale para todo $n \in Z$)

$(X_n)_{n \in N}$ é um processo estocástico com espaço de estados $I = \{0, \cdots, 6\}$ definido por:

$$X_n = Z_{n-1} + 2Z_n + Z_{n+1}$$

(a) Podemos observar que:

$$X_0 = 1 \quad \leftrightarrow \quad Z_{-1} = 1, \quad Z_0 = 0, \quad Z_1 = 0$$

$$X_1 = 3 \quad \leftrightarrow \begin{cases} Z_0 = 1, \quad Z_1 = 1, \quad Z_2 = 0 \quad \text{ou} \\ Z_0 = 0, \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 1 \end{cases}$$

$$X_2 = 2 \quad \leftrightarrow \quad Z_1 = 0, \quad Z_2 = 1, \quad Z_3 = 0$$

- $P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2)$
  Como Z_n é iid, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2) &= P(Z_{-1} = 1, Z_0 = 0, Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0) \\ &= P(Z_{-1} = 1)P(Z_0 = 0)P(Z_1 = 0)P(Z_2 = 1)P(Z_3 = 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \end{aligned}$$

- $P(X_1 = 3, X_2 = 2)$
  Como Z_n é iid, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 3, X_2 = 2) &= P(Z_0 = 0, Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = 0) \\ &= P(Z_0 = 0)P(Z_1 = 0)P(Z_2 = 1)P(Z_3 = 0) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

- $P(X_0 = 1, X_1 = 3)$
  Como Z_n é iid, temos que:

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1, X_1 = 3) &= P(Z_{-1} = 1, Z_0 = 0, Z_1 = 0, Z_2 = 1) \\ &= P(Z_{-1} = 1)P(Z_0 = 0)P(Z_1 = 0)P(Z_2 = 1) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^4 \end{aligned}$$

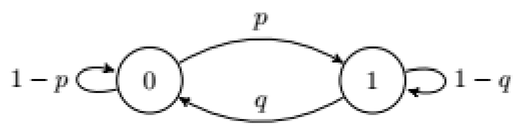
(b) $(X_n)_{n \in N}$ é Markov $\Longleftrightarrow P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2) = P(X_0 = 1)P(X_1 = 3|X_0 = 1)P(X_2 = 2|X_1 = 3)$

$$\begin{aligned} P(X_0 = 1)P(X_1 = 3|X_0 = 1)P(X_2 = 2|X_1 = 3) &= P(X_0 = 1)\frac{P(X_1 = 3, X_0 = 1)}{P(X_0 = 1)}\frac{P(X_2 = 2, X_1 = 3)}{P(X_1 = 3)} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4}{\frac{2}{8}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^6 \neq \left(\frac{1}{2}\right)^5 = P(X_0 = 1, X_1 = 3, X_2 = 2) \end{aligned}$$

Logo, $(X_n)_{n \in N}$ não é Markov.

Questão 5

Do enunciado: Cadeia de Markov de 2 estados conforme o diagrama



(a) $P(X_1 = 0|X_0 = 0, X_2 = 0)$ Duas combinações em que $X_0 = 0$ e $X_2 = 0$: $0 \to 1 \to 0$ e $0 \to 0 \to 0$

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = 0|X_0 = 0, X_2 = 0) &= \frac{P(X_1 = 0, X_0 = 0, X_2 = 0)}{P(X_0 = 0, X_2 = 0)} \\
&= \frac{(1-p)^2}{pq + (1-p)^2}
\end{aligned}
$$

(b) $P(X_1 \neq X_2)$

Duas possibilidades de $X_1 \neq X_2$: $0 \to 1$ e $1 \to 0$

Assumindo uma distribuição inicial tal que $P(X_0 = 0) = \lambda$ e $P(X_0 = 1) = 1 - \lambda$, temos que:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 \neq X_2) &= P(X_2 = 0|X_1 = 1)P(X_1 = 1) + P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0) \\
&= qP(X_1 = 1) + pP(X_1 = 0) \\
&= q\big[P(X_1 = 1|X_0 = 0)P(X_0 = 0) + P(X_1 = 1|X_0 = 1)P(X_0 = 1)\big] \\
&+ p\big[P(X_1 = 0|X_0 = 0)P(X_0 = 0) + P(X_1 = 0|X_0 = 1)P(X_0 = 1)\big] \\
&= q\big[p\lambda + (1-q)(1-\lambda)\big] + p\big[(1-p)\lambda + q(1-\lambda)\big] \\
&= pq + q(1-q)(1-\lambda) + p(1-p)\lambda
\end{aligned}
$$

(c) Queremos mostrar por indução que: $p_{00} = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n$

Para n=1 vale a hipótese:

$$p_{00} = 1 - p$$

e

$$f(1) = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q) = 1 - p$$

Vamos assumir que $p_{00}^{(k)} = f(k)$ e mostrar que vale para $n = k+1$:

$$
\begin{aligned}
p_{00}^{(k+1)} &= p_{00}f(k) + p_{10}(1 - f(k)) \\
&= f(k)(p_{00} - p_{10}) + p_{10} \\
&= f(k)(1-p-q) + q \\
&= \frac{p}{p+q}(1-p-q)^{(k+1)} + \frac{q(1-p-q)}{p+q} + \frac{q(p+q)}{p+q} \\
&= \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^{(k+1)} = f(k+1)
\end{aligned}
$$

Como queríamos demonstrar.

Quando n $\to \infty$:

$$
\lim_{n\to\infty} p_{00}^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}(1-p-q)^n = \frac{q}{p+q}
$$

Questão 6

Do enunciado: $(X_n)_{n\in N}$ é uma Cadeia de Ehrenfest, ie: $P_{ij} = \begin{cases} \frac{i}{d} & se\ æ = i-1 \\ \frac{d-i}{d} & se\ æ = i+1 \end{cases}$

$X_0 \sim Bin\big(d, \frac{1}{2}\big)$, ie: $P(X_0 = x) = \binom{d}{x}\big(\frac{1}{2}\big)^d$

Queremos saber $P(X_1 = k)$. Como o processo é uma Cadeia de Ehrenfest, sabemos que, se $X_1 = k$, $X_0 = k-1$ ou $X_0 = k+1$, então pela Lei da Probabilidade Total:

$$
\begin{aligned}
P(X_1 = k) &= P(X_1 = k|X_0 = k-1)P(X_0 = k-1) + P(X_1 = k|X_0 = k+1)P(X_0 = k+1) \\
&= \frac{d-k+1}{d}\binom{d}{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^d + \frac{k+1}{d}\binom{d}{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^d \\
&= \frac{d-k+1}{d}\frac{d!}{(k-1)!(d-k+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^d + \frac{k+1}{d}\frac{d!}{(k+1)!(d-k-1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^d \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^d\left[\binom{d-1}{k-1} + \binom{d-1}{k}\right] \\
&= \binom{d}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^d
\end{aligned}
$$

Logo, $X_1 \sim Bin\big(d, \frac{1}{2}\big)$.

Questão 7

Do enunciado: $(Z_n)_{n \in N}$ iid: resultados de sucessivas rodadas de dados
$(X_n) = max(Z+1, \cdots, Z_n)$

Como cada etapa (X_n) é o máximo entre n sucessivas rodadas, podemos definir que (X_n) é uma Cadeia de Markov, já que a cada rodada t um novo máximo é definido comparando-se somente o resultado da rodada atual com o máximo definido até a rodada t-1, ie, se $Z_t > X_{t-1}$, temos $X_t = Z_t$, caso contrário, $X_t = X_{t-1}$
Quando ocorrer o maior resultado possível nos dados (6), nenhuma outra jogada importará, (X_n) será permanentemente 6 e portanto este é um estado recorrente. Todos os outros possíveis resultados (1, 2, 3, 4, 5) são transientes.

A matriz de transição é dada por:

$$P = \begin{array}{cc} \text{estado} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$