Lista 9 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Seja $(B_t)_{t\geq 0}$ é um movimento Browniano.

Questão 1

Vamos verificar as quatro propriedades necessárias para que $X_t = \frac{1}{c}B_{c^2t}$ também seja um movimento Browniano $\forall c \neq 0$:

(i) $B_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_0 = \frac{1}{c}B_0 = 0$

(ii) Para cada constante c, existe um mapeamento único da partição inicial $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$ a uma nova partição $0 < c^2t_1 < c^2t_2 < \cdot < c^2t_n = c^2T$.

Então definindo um novo movimento Browniano em $[0, c^2T]$, os incrementos $B_{c^2t_{i+1}} - B_{c^2t_i}, \quad i \in \{1, \cdots, n-1\}$ são independentes por definição e o termo constante $\frac{1}{c}$ não tem influência.

(iii) Considerando o movimento Browniano definido no intervalo construído acima, sabemos que:

$$\forall \;\; 0 \leq s \leq t \leq c^2T, \quad B_{c^2t_{i+1}} - B_{c^2t_i} \sim \mathcal{N}(0, c^2(t-s))$$

Logo:

$$\frac{1}{c}(B_{c^2t_{i+1}} - B_{c^2t_i}) \sim \mathcal{N}\Big(0, \frac{c^2}{c^2}(t-s)\Big)$$

E portanto:

$$X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

(iv) X_t é uma função contínua do movimento Browniano B_{c^2t}, logo também é um mapeamento contínuo de t.

Portanto, o processo definido por X_t também é um movimento Browniano.

Questão 2

Seja $(W_t)_{t\geq 0}$ outro movimento Browniano independente de B.

Vamos verificar que $\forall \rho \in [-1,1]$, o processo $Z_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2} W_t$ também é um movimento Browniano:

(i) $Z_0 = \rho B_0 + \sqrt{1-\rho^2} W_0 = 0$

(ii) Podemos escrever os incrementos de Z_t como: $Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i} = \rho(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sqrt{1-\rho^2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$

Então, para $i \neq j$, temos:

$$\mathbb{E}[(Z_{t_{i+1}} - Z_{t_i})(Z_{t_{j+1}} - Z_{j_i})] = \mathbb{E}[Z_{t_{i+1}} Z_{t_{j+1}}] + \mathbb{E}[Z_{t_{i+1}} Z_{t_j}] + \mathbb{E}[Z_{t_i} Z_{t_{j+1}}] + \mathbb{E}[Z_{t_i} Z_{t_j}]$$

É fácil ver que os quatro termos são nulos, já que por definição, os processos definidos por B_t e W_t são independentes, e por serem movimentos Brownianos, seus incrementos são independentes $\forall i \neq j$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_{t_{i+1}} Z_{t_{j+1}}] &= \mathbb{E}[(\rho(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \sqrt{1-\rho^2}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}))(\rho(B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) + \sqrt{1-\rho^2}(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \\
&= \rho^2 \cancelto{0}{\mathbb{E}}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})] \\
&\quad + (\rho\sqrt{1-\rho^2}) \cancelto{0}{\mathbb{E}}[(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})] \\
&\quad + (\rho\sqrt{1-\rho^2}) \cancelto{0}{\mathbb{E}}[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})] \\
&\quad + (1-\rho^2) \cancelto{0}{\mathbb{E}}[(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})(W_{t_{j+1}} - W_{t_j})]
\end{aligned}$$

Portanto os incrementos de Z_t também são independentes.

(iii)

$$\begin{aligned}
\rho(B_t - B_s) + \sqrt{1-\rho^2}(W_t - W_s) &\sim \rho\mathcal{N}(0, t-s) + \sqrt{1-\rho^2}\mathcal{N}(0, t-s) \\
&= \mathcal{N}(0, \rho^2(t-s)) + \mathcal{N}(0, (1-\rho^2)(t-s)) \\
&= \mathcal{N}(0, t-s)
\end{aligned}$$

(iv) Para cada realização ω, cada um dos movimentos B_t e W_t gera caminhos contínuos. Como Z_t é uma combinação linear de dois caminhos contínuos, também é um mapeamento contínuo de t.

Questão 3

Seja $X_t = B_t - tB_1, \quad 0 \leq t \leq 1$ (Brownian Bridge)

Sabemos que $B_t \sim \mathcal{N}(0,t) \forall t \in [0,T]$, então a média, covariância e variância são dadas por:

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[B_t - tB_1] = \cancelto{0}{\mathbb{E}[B_t]} - t\cancelto{0}{\mathbb{E}[B_1]} = 0$$

$$\begin{aligned}
Cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}[X_t X_s] &= \mathbb{E}[(B_t - tB_1)(B_s - sB_1)] \\
&= \mathbb{E}[B_t B_s] - t\mathbb{E}[B_1 B_s] - s\mathbb{E}[B_1 B_t] + st\cancelto{1}{\mathbb{E}[B_1^2]} \\
&= s \wedge t - t(s \wedge 1) - s(t \wedge 1) + st \\
&= s \wedge t - 2ts + st \\
&= s \wedge t - st
\end{aligned}$$

$$Var(X_t) = t - t^2$$

Então:

$$X_t \sim \mathcal{N}(0, t(1-t))$$

Questão 4

Note que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_r \leq B_s \leq B_t) &= \mathbb{P}(B_r - B_s \leq 0 \leq B_t - B_S) \\
&= \mathbb{P}(\{B_r - B_s \leq 0\} \cap \{B_t - B_s \geq 0\})
\end{aligned}$$

Como B_t é um movimento Browniano, os incrementos $B_t - B_s$ são independentes e seguem distribuição Normal com média zero, então:

$$\mathbb{P}(B_r \leq B_s \leq B_t) = \mathbb{P}(B_s - B_r \geq 0)\mathbb{P}(B_t - B_s \geq 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Questão 5

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[B_r B_s B_t] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[B_r B_s B_t|\mathcal{F}_s]] \\
&= \mathbb{E}[B_r Bs \underbrace{\mathbb{E}[B_t|\mathcal{F}_s]]}_{=B_s \text{ (Martingal)}} \\
&= \mathbb{E}[B_r B_s^2] \\
&= \mathbb{E}[B_r(B_s^2 - s + s)] \\
&= \cancelto{0}{\mathbb{E}[B_r s]} + \mathbb{E}[B_r(B_s^2 - s)] \\
&= \mathbb{E}[B_r \underbrace{\mathbb{E}[B_s^2 - s|\mathcal{F}_r]}_{=B_r^2 - r \text{ (Martingal)}}] \\
&= \mathbb{E}[B_r^3 - rB_r] \\
&= \cancelto{0}{\mathbb{E}[B_r^3]*} - r\cancelto{0}{\mathbb{E}[B_r]} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

*já que $B_r \sim \mathcal{N}(0, r)$, logo todos os momentos ímpares de B_r são nulos

Questão 6

Sabemos que $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ e $\tau \sim Exp(\lambda)$, independente de B. B_τ é V.A. dada pelas realizações de B nos momentos τ.

Queremos calcular $E[e^{i\omega B_\tau}]$, mas pela Tower Property, temos que:

$$
\mathbb{E}[e^{i\omega B_\tau}] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[e^{i\omega B_\tau}|\tau = t]}_{\mathbb{E}[e^{i\omega B_t}]}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\omega B_t}]]
$$

Então a função característica é dada pelo produto das pdf's:

$$
\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t} \cdot e^{i\omega x} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{(2i\omega x t - x^2/2t)} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{(2i\omega x t - x^2/2t)} dx \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-(\omega t)^2/2t} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-((x - i\omega t)^2/2t)} dx
\end{aligned}
$$

Mas sabemos que a integral gaussiana do segundo termo é dada por:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-((x-i\omega t)^2/2t)} dx = \sqrt{2t}\sqrt{\pi}$$

Então:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-((x-i\omega t)^2/2t)} dx = 1$$

Por fim, temos:

$$\begin{aligned}
\Phi(\omega) &= \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-(\omega t)^2/2t} dt \\
&= \lambda \cdot \Big(- \frac{2}{2\lambda + \omega^2} \Big) \cdot e^{-\left(\frac{2\lambda+\omega^2}{2}\right)} \Big]_{t=0}^{+\infty} \\
&= 0 - \Big(- \frac{2\lambda}{2\lambda + \omega^2} \Big) \\
&= \frac{2\lambda}{2\lambda + \omega^2}
\end{aligned}$$