Lista 8 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de VA's independentes com $\mathbb{E}[X_n] = 0$, $\sigma_n^2 = Var(X_n) < +\infty$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma_n^2 < +\infty$

Defina $S_n = \sum_{n=1}^{+} \infty$.

Vamos usar o Teorema de Convergência Martingal em L^2 para provar que S_n converge quase certamente.

Então primeiro vamos mostrar que esse processo é de fato um Martingal:

- Adaptabilidade: considere $f_n(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, claramente $\mathcal{F}_n$-mensurável
- Integrabilidade: $\mathbb{E}[S_n] \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[|X_n|] = 0 < +\infty$
- Propriedade Martingal:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\sum_{n=1}^{+\infty} X_n | \mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}[\sum_{k=n}^{+\infty} X_k + \sum_{k=1}^{n-1} X_k | \mathcal{F}_{n-1}] \\
&= \cancelto{0\ (indep.)}{\sum_{k=n}^{+\infty} \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_{n-1}]} + \sum_{k=1}^{n-1} X_k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} X_k
\end{aligned}$$

Como S_n é Martingal, podemos usar o Teorema.

Primeiro note que, por definição:

$$Var(X_n) = \mathbb{E}[X_n^2] - \cancelto{0}{\mathbb{E}^2[X_n]} = \mathbb{E}[X_n^2] = \sigma_n^2 < +\infty$$

Então temos que:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_n^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{n=1}^{+\infty} X_n)^2] \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n^2] + 2\sum_{j>i}\sum_{i=1}^{+\infty} \cancelto{0}{\mathbb{E}[X_i X_j]} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}[X_n^2] \leq C < +\infty
\end{aligned}
$$

Em que: $\mathbb{E}[X_i X_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_i X_j|\mathcal{F}_{i-1}]] = \mathbb{E}[X_i \cancelto{0}{\mathbb{E}[X_j|\mathcal{F}_{i-1}]}] = 0$ para todo $j > i$.

Logo, pelo Teorema da Convergência Martingal, existe uma VA M_∞ com $E[M_\infty^2 \leq C$ tal que $M_n \to M_\infty$ quase certamente e em L^2.

Questão 2

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de VA's iid com $\mathbb{P}(X_n = 1/2) = \mathbb{P}(X_n = 3/2)$ e defina $S_n = \prod_{k=1}^n X_k$.

Primeiro vamos mostrar que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Martingal para poder usar o Teorema da Convergência Martingal em L^1 para mostrar a convergência quase certa:

$\mathbb{E}[X_n] = -\frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1/2) + \frac{3}{2}\mathbb{P}(X_n = 3/2) = 1$

- Adaptabilidade: considere $f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \cdot ... \cdot x_n$, claramente $\mathcal{F}_n$-mensurável
- Integrabilidade: $\mathbb{E}[|S_n|] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[|X_k|] = 1 < +\infty$
- Propriedade Martingal:

$$
\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^n X_k|\mathcal{F}_{n-1}\Big] = \mathbb{E}\Big[X_n|\mathcal{F}_{n-1}\Big]\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{n-1} X_k|\mathcal{F}_{n-1}\Big] = \mathbb{E}\Big[X_n\Big]\prod_{k=1}^n X_k = \prod_{k=1}^n X_k
$$

Assim, como a sequência (X_n) é iid, temos:

$$
\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^n X_k\Big] = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}[X_n] = 1 \leq C
$$

E portanto, pelo Teorema da Convergência Martingal em L^1, existe uma VA S_∞ com $\mathbb{E}[|S_\infty|] \leq C$ tal que S_n converge quase certamente para S_∞.

Agora vamos definir esse limite S_∞:

$$S_\infty = \lim_{n\to+\infty} X_n \prod_{k=1}^{n-1} X_k = \lim_{n\to+\infty} X_n S_\infty \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\Big(M_\infty = \frac{1}{2}M_\infty\Big) = \mathbb{P}\Big(M_\infty = \frac{3}{2}M_\infty\Big) = \frac{1}{2}$$

É fácil ver que as equações $M_\infty = \frac{1}{2}M_\infty$ e $M_\infty = \frac{3}{2}M_\infty$ só são possíveis se $M_\infty = 0$ ou $M_\infty = +\infty$. Mas $M_\infty = +\infty$ é absurdo, já que isso significaria que as realizações $1/2$ ocorressem um número finito de vezes. (falta formalizar melhor, mas não consegui ainda) Então, faz sentido que $M_\infty = 0$ quase certamente.

Neste caso, teríamos:

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{k=1}^{n} X_k\Big] = 0 \neq 1 = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_n]$$

Isso porque a sequência (S_n) não é monotóna crescente, logo não podemos garantir essa igualdade usando o Teorema da Convergência Dominada.

Questão 3

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um passeio aleatório começando em 0 e incrementos X_n tais que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ e $\mathbb{P}(X_n \neq 0) > 0$.

Defina $\tau = min\{n \geq 1; S_n > 0\}$. Vamos mostrar que $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$:

Suponha por contradição que $\mathbb{E}[\tau] < +\infty$. Neste caso, τ é uma VA limitada e portanto pelo Teorema de parada opcional de Doob $\mathbb{E}[S_\tau] = \mathbb{E}[S_0]$.

Como o passeio aleatório começa em zero, basta mostrar que $\mathbb{E}[S_\tau] \neq 0$ para provar que $\mathbb{E}[\tau] = +\infty$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_\tau] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{+\infty} S_k 1_{\tau=k}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{+\infty} S_k 1_{S_k>0}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{k} j\mathbb{P}(S_k = j) \geq 0
\end{aligned}$$

Sendo que, $\mathbb{E}[S_\tau] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad j\mathbb{P}(S_k = j) = 0 \ \ \forall k, j \in \mathbb{N}$. Então basta mostrar que $\mathbb{P}(S_k = j) > 0$ para algum $k, j \in \mathbb{N}$.

Vamos tomar k=j=1, então:

$$\mathbb{P}(S_1 = 1) = \mathbb{P}(S_1 = 1|S_0 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \neq 0)}{2} > 0$$

Isso porque $\mathbb{E}[X_1] = 0\mathbb{P}(X_1 = 0) + 1\mathbb{P}(X_1 = 1) - 1\mathbb{P}(X_1 = -1) = 0$.

Logo $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1)$ e portanto $\mathbb{P}(X_1 = 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \neq 0)}{2}$.

Como $\mathbb{E}[S_n] > 0$, temos que $E[\tau] = +\infty$.

Questão 4

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é sequência de VA's com $\mathbb{P}(X_n = +1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$

Defina $M_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{k}$ (série harmônica aleatória).

Vamos mostrar que M converge quase certamente usando o Teorema de Convergência Martingal em L^2.

Então primeiro vamos mostrar que esse processo é um Martingal:

É fácil ver que $\mathbb{E}[X_n] = 0$.

- Adaptabilidade: Considere $f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 + \frac{x_2}{2} + ... + \frac{x_n}{n}$, claramente $\mathcal{F}_n$-mensurável
- Integrabilidade: $\mathbb{E}[|M_n|] \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[|\frac{X_k}{k}|\right] = k\mathbb{E}[X_1] = 0$
- Propriedade Martingal:

$$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1} + \cancelto{0 \quad (indep.)}{\mathbb{E}\left[\frac{X_n}{n}|\mathcal{F}_{n-1}\right]} = M_{n-1}$$

Como M é de fato um Martingal, podemos usar o Teorema para verificar que:

$$\mathbb{E}[M_n^2] = Var(M_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < C < +\infty$$

Logo, existe uma VA m_∞ com $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < C$ tao que M_n converge quase certamente para M_∞ e em L^2.

Questão 5

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um passeio aleatório começando em 0 com incrementos satisfazendo $\mathbb{E}[e^{\xi X_n}] = 1$.

Queremos mostrar que $\mathbb{P}(S_n \geq a$ for some k$) \leq e^{-a\xi}$:

Note que, como a função exponencial é monótona crescente, temos:

$$e^{\xi S_n} \geq e^{\xi a} \Leftrightarrow S_n \geq a$$

E portanto:

$$\mathbb{P}(e^{\xi S_n} \geq e^{\xi a}) = \mathbb{P}(S_n \geq a)$$

Como sabemos que $e^{\xi S_n}$ é um Martingale, podemos escrever a Desigualdade de Doob como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_n \geq a) = \mathbb{P}(e^{\xi S_n} \geq e^{\xi a}) &\leq \frac{\mathbb{E}[e^{\xi S_n}]}{e^{\xi a}} \\
&= \frac{\mathbb{E}[e^{\xi \sum_{k=0}^{n} X_n}]}{e^{\xi a}} \\
&= \frac{\prod_{k=0}^{n} \cancelto{1}{\mathbb{E}[e^{\xi X_n}]}}{e^{\xi a}} \\
&= e^{-\xi a}
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar.

Questão 6

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um passeio aleatório simples começando em a.

Defina $M_n = \frac{-1}{3}S_n^3 + \sum_{k=0}^{n} S_k$ e $\tau = min\{n \geq 1 : S_n = 0 \ ou \ S_n = N\}$.

Vamos mostrar que M_n é um Martingal:

- Adaptabilidade: basta definir $f_n(S_1, ..., S_n) = -\frac{1}{3}S_n^3 + \sum_{k=0}^{n} S_k$, $\mathcal{F}_n$-mensurável
- Integrabilidade: $\mathbb{E}[|M_n|] \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\Big[| -\frac{1}{3}S_n^3 + \sum_{k=0}^{n} S_k|\Big] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\mathbb{E}\Big[|S_n^3|\Big] + \mathbb{E}\Big[|\sum_{k=0}^{n} S_k|\Big] < +\infty$
- Propriedade Martingal:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\Big[-\frac{1}{3}S_n^3 + \sum_{k=0}^{n} S_k|\mathcal{F}_{n-1}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[-\frac{1}{3}S_n^3 + S_n|\mathcal{F}_{n-1}\Big] + \sum_{k=0}^{n-1} S_k \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1}+1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1}-1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1}+1)^3 + \frac{1}{2}\mathbb{P}(S_{n-1}-1)^3 + \sum_{k=0}^{n-1} S_k \\
&= -\frac{1}{3}S_{n-1}^3 + \sum_{k=0}^{n-1} S_k = M_{n-1}
\end{aligned}$$

Agora vamos mostrar que:

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\tau} S_k\Big] = a + \frac{1}{3}(aN^2 - a^3)$$

Queremos encontrar condições para usar o Teorema de Parada Opcional de Doob:

Primeiro note que, pelo Teorema 3.1.10 das notas de aula, sabemos que o processo definido por M_τ também é um Martingal. Além disso, sabemos que o passeio aleatório $S_{n\wedge\tau}$ é uma Cadeia de Markov em que os estados 0 e N são absorventes e os demais são transientes. Então o primeiro tempo de parada saindo de a para 0 ou N é finito, logo a esperança de τ também é finita.

Assim, pelo Teorema, temos que:

$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_0] \Rightarrow$$
$$\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}\Big[-\frac{1}{3}S_\tau^3 + \sum_{k=0}^{\tau} S_k\Big] = \mathbb{E}\Big[-\frac{1}{3}S_0^3 + S_0\Big] = \mathbb{E}[M_0] \Rightarrow$$
$$-\frac{1}{3}(0 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = 0) + N^3 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = N)) + \mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\tau} S_k\Big] = a - \frac{1}{3}a^3 \Rightarrow$$
$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\tau} S_k\Big] = a - \frac{1}{3}(N^3 \cdot \mathbb{P}(S_\tau = N) - a^3)$$

Substituindo a distribuição estacionária dessa Cadeia de Markov, ie $\pi_{aN} = \frac{a}{N}$, encontramos de fato:

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{k=0}^{\tau} S_k\Big] = a + \frac{1}{3}(aN^2 - a^3)$$

Questão 7

Sejam τ e σ tempos de parada com respeito a uma filtração comum $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Vamos provar que:

(a) Se $\tau = m$, com $m \in \mathbb{N}$ fixado, então $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_m$

Definição da σ-álgebra referente a um tempo de parada τ:

$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

Então tomando $\tau = m$ fixo, temos:

$\mathcal{F}_m = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{m \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$

Assim, basta provar que $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_m$.

Considere $A \in \mathcal{F}_\tau$. Note que, como $\tau = m$, $\{\tau \leq n\} = \{m \leq n\}$, então:

$$A \cap \{m \leq n\} = A \cap \{\tau \leq n\} \cap \{m \leq n\} = A \cap \{m \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

Portanto $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_m$

(b) $min\{\tau,\sigma\}$ é um tempo de parada

É fácil ver que $\{\tau \le n\}$ e $\{\sigma \le n\}$ são $\mathcal{F}_n$-mensuráveis, logo $\{min\{\tau,\sigma\} \le n\} = \{\tau \le n\} \cup \{\sigma \le n\}$ também é $\mathcal{F}_n$-mensurável, pelo fechamento de uniões contáveis

(c) $max\{\tau,\sigma\}$ é um tempo de parada

É fácil ver que $\{\tau \le n\}$ e $\{\sigma \le n\}$ são $\mathcal{F}_n$-mensuráveis, logo $\{max\{\tau,\sigma\} \le n\} = \{\tau \le n\} \cap \{\sigma \le n\}$ também é $\mathcal{F}_n$-mensurável, pelo fechamento de interseções contáveis

(d) τ é mensurável com respeito a $\mathcal{F}_\tau$

τ é $\mathcal{F}_\tau$-mensurável $\Leftrightarrow \quad \forall t \in \mathbb{N}, \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_\tau$

Defina $A_t = \{\tau \le t\}, \quad \forall t\ in \mathbb{N}$, então:

$$\begin{aligned} A_t \in \mathcal{F}_\tau &\Leftrightarrow \{\tau \le t\} \cap \{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n \\ &\Leftrightarrow \{\tau \le min\{t,n\}\} \in \mathcal{F}_n \end{aligned}$$

Isto é:

Se $t \le n$, $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_n$

Se $t > n$, $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_n$

(e) $\{\sigma < \tau\}$, $\{\sigma \le \tau\}$ e $\{\sigma = \tau\}$ estão todos em $\mathcal{F}_\sigma \cap \mathcal{F}$

- $\{\sigma < \tau\}$

  Tome $A = \{\sigma < \tau\}$, então queremos mostrar que, $\forall n \in \mathbb{N}\ \ \{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \le \tau\} \in \mathcal{F}_n$

  $$\left.\begin{aligned} \{\sigma < \tau\} = \{j \in \mathbb{N} : j = \sigma < \tau\} \\ \{\sigma \le \tau\} = \{k \in \mathbb{N} : k = \sigma \le \tau\} \end{aligned}\right\} \{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \le \tau\} = \{k \in \mathbb{N} : k < n\} \in \mathcal{F}_n$$

  Da mesma forma, verificamos que $\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_\sigma$:

  $$\{\sigma < \tau\} \cap \{\sigma \le n\} = \{k \in \mathbb{N} : k < minn, \tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$$

- $\{\sigma = \tau\}$

  $\{\tau = \sigma\} \Rightarrow \{\tau \le n\} \subseteq \{\sigma \le n\} \Rightarrow \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\tau \Rightarrow \{\tau = \sigma\} \in \mathcal{F}_\sigma$

  Logo: $\forall n \in \mathbb{N} : \bigcup_{k=1}^{n} \{\tau = k, \sigma = k\} \in \mathcal{F}_n$

- $\{\sigma \leq \tau\}$

  Dos itens anteriores:

  $$\{\sigma < \tau\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma \ e \ \{\sigma = \tau\} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$$

  Logo:

  $$\underbrace{\{\sigma < \tau\} \cup \{\sigma = \tau\}}_{\{\sigma \leq \tau\}} \in \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_\sigma$$

(f) Se $\sigma \leq$, então $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}$

Para um conjunto $A \in \mathcal{F}_\sigma$ temos que: $\forall n \in \mathbb{N} \ \ A \cap \{\sigma \leq n\} \ in \mathcal{F}_n$

Mas se $\sigma \leq \tau$, então o conjunto $\{\tau \leq n\}$ é mais restritivo que $\{\sigma \leq n\}$, ie: $\{\tau \leq n\} \subseteq \{\sigma \leq n\}$. Então:

$$A \cap \{\tau \leq n\} = \underbrace{A \cap \{\sigma \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \Rightarrow \quad A \in \mathcal{F}_\tau$$

Logo: $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$