Lista 10

Laura Sant'Anna

(1) Contraexemplo para mostrar que a Integral de Itô não tem a propriedade de monotonicidade: $X_t \leq Y_t$ q.c. $\not\Rightarrow \int_0^T X_t\,dB_t \leq \int_0^T Y_t\,dB_t$

Tome $Y_t = 1$ e $X_t = 0$, então:

$\int_0^1 1\,dB_t = B_1 \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow$ ie, menor que zero com prob. $1/2$

$\int_0^1 0\,dB_t = c$

Tomando $c = 0$, temos que $\int_0^1 X_t\,dB_t > \int_0^1 Y_t\,dB_t$ com prob. $1/2$, logo a propriedade é violada.

(2) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ limitada, vamos mostrar que $Z_t = \int_0^t f(B_s)\,dB_s$ é um Martingal contínuo, com média zero e pertence a L^2:

<u>Teo:</u> Para $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$, existe um Martingal contínuo, $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ tal que:

$\mathbb{P}\left(\{\omega : X_t(\omega) = \int_0^t f(\omega,s)\,dB_s\right) = 1$

Então vamos começar provando que $E\left[\int_0^T f^2\,dt\right] < +\infty$ (ie, $f \in \mathcal{H}^2[0,T]$):

f limitada $\Rightarrow f \leq M$, logo:

$$E\left[\int_0^T f^2\,dt\right] \leq E\left[\int_0^T M^2\,dt\right] = M^2 T < +\infty$$

Assim, temos que o processo definido por Z_t é um Martingal contínuo e portanto (podemos assumir que) $E[Z_t] = E[Z_0] = 0$

Usando a Isometria de Itô temos que:

$$E\left[\left(\int_0^T f(B_s)\,dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^T f^2(B_s)\,ds\right] \leq M^2 T$$

Logo, f é 'square-integrable' ($\in L^2$).
(segundo momento limitado)

(3) $\int_0^t B_s^2 \, dB_s = \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s \, ds$

• Provando pela definição de Integral de Itô:

$$\int_0^t B_s^2 \, dB_s = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

Tomando um termo i qualquer dessa soma, usando expansão de Taylor

para $f(x) = \frac{x^3}{3}$, temos:

$$\frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} y^3 + y^2 (x - y) + \frac{1}{2} 2y (x-y)^2 + \frac{2}{3} (x-y)^3$$

Tome $x = B_{t_{i+1}}$ e $y = B_{t_i}$, então queremos:

$$y^2 (x-y) = \frac{1}{3} (x^3 - y^3) - y (x-y)^2 - \frac{1}{3} (x-y)^3$$

Isto é:

$$B_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{1}{3} (B_{t_{i+1}}^3 - B_{t_i}^3) - B_{t_i} \underbrace{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2}_{dt} + \frac{1}{3} \cancelto{0}{(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^3}$$

Quando tomamos o limite $n \to \infty$, temos que:

$B_{t_{i+1}} - B_{t_i} \to dB$, $dB\,dB = dt$, $dt\,dB = 0$

(soma telescópica) $(B_{t_1} - B_{t_0}) + (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$

Assim, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i}^2 (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}}^3 - B_{t_i}^3) - \underbrace{\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{t_i} \Delta t_i}_{\text{Integral de Riemann}}$$

$$= \frac{1}{3} (B_t^3 - \cancelto{0}{B_0^3}) - \int_0^t B_s \, ds$$

$$= \frac{1}{3} B_t^3 - \int_0^t B_s \, ds$$

• Usando a Fórmula de Itô:

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s) \, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s) \, ds$$

Usando novamente $f(x) = \frac{x^3}{3}$, temos:

$$\frac{B_t^3}{3} = \cancelto{0}{\frac{B_0^3}{3}} + \cancelto{0}{\int_0^t 0 \, ds} + \int_0^t B_s^2 \, dB_s + \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^t B_s \, ds \Rightarrow$$

$$\int_0^t B_s^2 \, dB_s = \frac{B_t^3}{3} - \int_0^t B_s \, ds$$

4 $Y_t = \exp(\alpha B_t + ct)$, α, c constantes

Vamos mostrar que Y resolve a SDE $dY_t = \left(c + \frac{\alpha^2}{2}\right) Y_t\, dt + \alpha Y_t\, dB_t$

Considere a notação diferencial para a fórmula de Itô.

$$dY_t = \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t)\,dt$$

Então comparando com a SDE dada no enunciado, temos:

$$\frac{\partial Y_t}{\partial B_t} = \frac{\partial f}{\partial x}(t,B_t) = \alpha Y_t \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}(t,B_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,B_t) = \left(c + \frac{\alpha^2}{2}\right) Y_t \qquad (2)$$

A solução para (1) deve ser do tipo $Y_t = K e^{\alpha B_t}$, e olhando para (2), é fácil ver que $K = e^{ct}$. De fato, a solução para a SDE é dada por:

$$Y_t = e^{\alpha B_t + ct}$$

Quando $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, Y_t é um Martingal, ie: $c = -\frac{\alpha^2}{2}$

Scanned by CamScanner

5) a) $X_t = B_t + 4t$

Aplicando a fórmula de Itô na notação diferencial, temos:

$dX_t = 4\,dt + dB_t$

Como $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, temos que $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4 \neq 0$. Logo, X_t não é um Martingal.

b) $X_t = B_t^2$

$dX_t = 2B_t\,dB_t + dt$

Como $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 1 \neq 0$, X_t não é Martingal.

c) $X_t = B_t^2 - t$

$dX_t = -dt + 2B_t\,dB_t + \frac{1}{2}\cdot 2\,dt = 2B_t\,dB_t$

Como $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ e $2B_t \in \mathcal{H}^2[0,T]$, X_t é um Martingal em $[0,T]$

d) $X_t = t^2 B_t - 2\int_0^t s B_s\,ds$

Tome $f(t, B_t) = t^2 B_t$, então:

$t^2 B_t = \int_0^t 2s B_s\,ds + \int_0^t s^2\,dB_s$

Logo: $X_t = \underbrace{\int_0^t s^2\,dB_s}_{\text{Integral de Itô}}$

Como $\frac{\partial f}{\partial x} = t^2$ é contínua e pertence a $\mathcal{H}^2$, X_t é um Martingal.

e) $X_t = B_1(t)B_2(t)$, B_1 e B_2 são movimentos Brownianos independentes

Aplicando a fórmula de Itô multivariada: $B_t = (B_1, B_2)$

$df(t, B_1, B_2) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, B_t)\,dt + \nabla f(t, B_t)\,dB_t + \frac{1}{2}\nabla^2 f(t, B_t)\,dt$

$dX_t = B_1(t)\,dB_2 + B_2(t)\,dB_1$

Como $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\nabla^2 f(t,x) = 0$, X_t é um Martingal

7.) $X_t = B_t^3 - 3tB_t$

$$dX_t = -3B_t\,dt + (3B_t^2 - 3t)\,dB_t + \frac{1}{2}\cdot 6\,B_t\,dt = (3B_t^2 - 3t)\,dB_t$$

Como $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$, X_t é um Martingal.

6) Seja $\beta_k(t) = E[B_t^k]$. Vamos usar a fórmula de Itô para encontrar:

$$\beta_k(t) = \frac{1}{2}k(k-1)\int_0^t \beta_{k-2}(s)\,ds \quad , \quad k \geq 2$$

Tome $f(t, B_t) = B_t^k$, então:

$$B_t^k = \int_0^t k\,B_s^{(k-1)}\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t k(k-1)\,B_s^{(k-2)}\,ds$$

$$= k\int_0^t B_s^{(k-1)}\,dB_s + \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t B_s^{(k-2)}\,ds$$

Tomando a esperança:

$$\beta_k(t) = E[B_t^k] = k\cdot \underbrace{E\left[\int_0^t B_s^{(k-1)}\,dB_s\right]}_{=0 \text{ (Prop. Martingal)}} + \frac{k(k-1)}{2}\underbrace{E\left[\int_0^t B_s^{(k-2)}\,ds\right]}_{\int_0^t E[B_s^{(k-2)}]\,ds}$$

$$= \frac{k(k-1)}{2}\int_0^t \beta_{k-2}(t)\,ds$$

- Agora vamos mostrar que $E[B_t^4] = 3t^2$:

$$E[B_t^4] = \frac{4\cdot 3}{2}\int_0^t \underbrace{E[B_s^2]}_{s\ (N(0,s))}\,ds = 6\int_0^t s\,ds = 6\,\frac{t^2}{2} = 3t^2$$

- Por fim, queremos calcular $E[B_t^6]$:

$$E[B_t^6] = 15\int_0^t E[B_s^4]\,ds = 15\int_0^t 3s^2\,ds = 15\,t^3$$

(7) Seja $g \in C^1$. Vamos usar a Fórmula de Itô para concluir que

$$\int_0^T g(t)\,dB_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T g^2(t)dt\right)$$

Primeiro vamos aplicar a fórmula de Itô a função $f(t,x) = g(t)\,x$:

$$g(t)B_t = \int_0^T g(t)dB_t + \int_0^T g'(t)B_t\,dt \Rightarrow$$

$$\int_0^T g(t)dB_t = g(t)B_t - \int_0^T g'(t)B_t\,dt$$

Como $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, temos que $g(t)B_t \sim \mathcal{N}(0, g^2(t)\cdot t)$.

$\int_0^T g'(t)B_t\,dt$ é o limite de uma soma infinita de distribuições Gaussianas, então também segue uma distribuição Normal (não sei se precisava provar isso aqui). Assim, falta conhecer os parâmetros dessa distribuição:

- $\mathbb{E}\left[\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right] = 0$, já que cada parte da soma tem média zero
- $$\mathrm{Var}\left(\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right)\left(\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)B_tB_s\,dt\,ds\right] = \int_0^T\int_0^T \mathbb{E}[g'(t)g'(s)B_tB_s]\,dt\,ds$$

$$= \int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)\,\mathbb{E}[B_tB_s]\,dt\,ds = \int_0^T\int_0^T g'(t)g'(s)\min(s,t)\,dt\,ds$$

Como a integral é simétrica em relação ao eixo $s=t$, vamos calcular apenas para $s \leq t$ spg:

$$= 2\int_0^T g'(s)\cdot s\,ds \int_0^s g'(t)dt = 2\int_0^T g'(s)g(s)\cdot s\,ds$$

Então a variância de $\int_0^T g(t)dB_t$ é dada por:

$$\mathrm{Var}\left(\int_0^T g(t)dB_t\right) = \mathrm{Var}(g(t)B_t) + \mathrm{Var}\left(\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right) - 2\,\mathbb{E}\left[(g(t)B_t)\left(\int_0^T g'(t)B_t\,dt\right)\right]$$

$$= g^2(t)\cdot t + 2\int_0^T g'(t)g(t)\,t\,dt - 2\,\mathbb{E}\left[\int_0^T g'(t)g(t)B_t^2\,dt\right]$$

$$\int_0^T g'(t)g(t)\,\mathbb{E}[B_t^2]\,dt$$

$$= \int_0^T g^2(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad \int_0^T g(t)dB_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^T g^2(t)dt\right)$$

(8) $X_t = e^{-\alpha t}\left(x_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s\right)$, α constante

Vamos provar que $dX_t = -\alpha X_t \, dt + \sigma \, dB_t$.

Usando o caso geral da fórmula de Itô, podemos escrever um processo de Itô X_t com drift μ e volatilidade σ como:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\mu(w,s)\, ds$$

$$+ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)\,\sigma(w,s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)\, b^2(w,s)\, ds$$

Podemos reescrever X_t como:

$$e^{\alpha t} X_t = X_0 + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s \qquad (1)$$

Então tome $Y_t = f(t, X_t) = e^{\alpha t} X_t$. Aplicando a fórmula de Itô:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \alpha e^{\alpha s} X_s\, ds + \int_0^t e^{\alpha s}\mu(w,s)\, ds + \int_0^t e^{\alpha s}\sigma(w,s)\, dB_s \qquad (2)$$

Igualando as equações (1) e (2), temos:

$$f(0, X_0) = X_0$$

$$\sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB_s = \int_0^t e^{\alpha s}\sigma(w,s)\, dB_s \Rightarrow \sigma(w,s) = \sigma$$

$$\int_0^t e^{\alpha s}\left(\alpha X_s + \mu(w,s)\right) ds = 0 \Rightarrow \mu(w,s) = -\alpha X_t$$

Substituindo na definição de processo de Itô na notação diferencial, temos:

$$dX_t = \mu(w,t)\, dt + \sigma(w,t)\, dB_t \Rightarrow dX_t = \underbrace{-\alpha X_t}_{\text{termo de arrasto}} dt + \underbrace{\sigma}_{\text{volatilidade}} dB_t$$

Scanned by CamScanner

9 Seja $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua não decrescente

Queremos encontrar um Martingal $(M_t)_{t\geq 0}$ tal que $\langle M_t \rangle = f(t)$

Define a integral de Itô $Z_t = \int_0^t g(s)dB_s$

Então: $\langle Z_t \rangle_t = \int_0^t g^2(s)ds = f(t) \rightarrow g(t) = \sqrt{df(t)}$

$g^2(t) = f'(t)$

* Teo. representação Martingal: Seja M_t um Martingal com respeito a filtração $\mathcal{F}_t$ e $M_t \in L^2$. Então existe um processo estocástico único $g(s)$ tal que:

$$M_t = \underset{c}{E}[M_0] + \int_0^t g(s)dB_s \quad \forall t \geq 0$$

Falta argumentar que f é diferenciável: como f é contínua e não decrescente definida em $I = \mathbb{R}^+$, é diferenciável em quase todo ponto de I

Então podemos definir $g(t) = \sqrt{f'(t)}$ de forma que:

$M_t = \int_0^t \sqrt{f'(s)}\, dB_s$ e $\langle M_t \rangle = \int_0^t f'(s) ds = f(t)$