Lista 7 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

(a) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Martingal e Cadeia de Markov

Seja a sequência de VA's iid $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) = 1/2$.

Então seja $X_n = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k$, tal que $\mathbb{E}[X_n] = 0$ e ε_n e X_n são independentes $\forall n$. Adicionalmente, $X_n \in \sigma(\varepsilon_0, ..., \varepsilon_n)$ e $\mathbb{E}[|X_n|] < +\infty$.

Reescrevendo como $X_n = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k + \varepsilon_n = X_{n-1} + \varepsilon_n$, podemos ver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- é Markov em $I = \{0, 1, 2, ...\}$ já que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) &= \mathbb{P}(X_n + \varepsilon_{n+1} = j | X_0 = i_0, ..., X_{n-1} = i_{n-1}, X_n = i) \\
&= \mathbb{P}(\varepsilon_1 = j - i) \\
&= p_{ij}
\end{aligned}$$

- e Martingale com relação a $\sigma(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n | \varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\varepsilon_k | \varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k + \mathbb{E}[\varepsilon_n | \varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \cancelto{0}{\mathbb{E}[\varepsilon_n]} \\
&= X_{n-1}
\end{aligned}$$

(usando as propriedades de independência e esperança zero de ε_n)

(b) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cadeia de Markov mas não é Martingal

Suponha agora a sequência de VA's do exemplo acima $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) = 1 - \mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) > 1/2$. Então $\mathbb{E}[\varepsilon_n] \neq 0$. $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainda é uma Cadeia de Markov, mas não um Martingale em relação a $\sigma(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n|\varepsilon_0, \varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}] &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[\varepsilon_k|\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1}] \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k + \mathbb{E}[\varepsilon_n|\varepsilon_0, ..., \varepsilon_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \mathbb{E}[\varepsilon_n] \neq X_{n-1}
\end{aligned}$$

(c) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um Martingal, mas não uma Cadeia de Markov

Seja o processo $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $X_n = X_{n-1} + \varepsilon_n X_0$, em que $X_0 = x_0$ dado e $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iid com $\mathbb{E}[\varepsilon_n] = 0$, independente de X_0. Já assumindo as condições de adaptabilidade e integrabilidade, é fácil ver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- é Martingale em relação a $(X_0, ..., X_{n-1})$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n|X_0, ...X_{n-1}] &= \mathbb{E}[X_{n-1} + \varepsilon_n X_0|X_0, ...X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \mathbb{E}[\varepsilon_n X_0|X_0, ...X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \mathbb{E}[\varepsilon_n|X_0, ...X_{n-1}]\mathbb{E}[X_0|X_0, ...X_{n-1}] \\
&= X_{n-1} + \mathbb{E}[\varepsilon_n]X_0 \\
&= X_{n-1}
\end{aligned}$$

- mas não é uma Cadeia de Markov já que todo o caminho desde X_0 até X_{n-1} é necessário para determinar X_n:

$$\mathbb{P}(X_n + \varepsilon_{n+1}X_0|X_0, ..., X_n) \neq \mathbb{P}(X_n + \varepsilon_{n+1}X_0|X_n)$$

(d) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é Cadeia de Markov nem Martingal

Basta tomar o exemplo do item anterior de forma que X_0 e ε_n não sejam independentes, então a condição de Martingale não vale.

Questão 2

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um passeio aleatório simples com $\mathbb{P}(S_n - S_{n-1} = 1) = p > 1/2$ e $S_0 = 0$.

Defina $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n)$ e $Y_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$.

$(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $\mathcal{F}_n$-martingale já que satisfaz as três condições:

(i) Adaptabilidade: $f(S_n) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}$ é claramente mensurável em $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, ..., S_n)$

(ii) Integrabilidade: $\mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}\Big[|\left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_n}|\Big] < \mathbb{E}[1^{S_n}] = 1 < +\infty$ (já que $(1-p) < 1/2$ e $p > 1/2$

(iii) Propriedade martingal:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] &= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{S_n}|S_0, S_1, ..., S_{n-1}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{S_{n-1}+\varepsilon_n}|S_0, S_1, ..., S_{n-1}\Big] \\
&= \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{S_{n-1}}\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{\varepsilon_n}|S_0, S_1, ..., S_{n-1}\Big] \\
&= \Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{S_{n-1}}\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{1-p}{p}\Big)^{\varepsilon_n}\Big]
\end{aligned}$$

Já que o primeiro termo é $\mathcal{F}_{n-1}$-mensurável e o segundo é independente de $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$

Assim nos resta mostrar que o segundo termo é igual a 1. Defina $\alpha = \frac{1-p}{p} < 1$, então:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\alpha^{\varepsilon_n}] &= \alpha^{-1}\mathbb{P}(\varepsilon_n = -1) + \alpha^1\mathbb{P}(\varepsilon_n = 1) \\
&= \Big(\frac{p}{1-p}\Big)(1-p) + \Big(\frac{p}{1-p}\Big)p = 1
\end{aligned}$$

Logo: $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{S_{n-1}} = Y_{n-1}$

Questão 3

$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um Martingale em $\mathcal{F}_n$ tal que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é adaptado à sub-filtração $\mathcal{G}_n$ (M_n é $\mathcal{G}_n$-mensurável e $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}_n$

- Usando a Tower property podemos mostrar que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um Martingale com respeito a $\mathcal{G}_n$:

  $$\mathbb{E}[M_n|\mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}]|\mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[M_{n-1}|\mathcal{G}_{n-1}] = M_{n-1}$$

  Já que $\mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_{n-1}] = M_{n-1}$ e M_{n-1} é $\mathcal{G}_{n-1}$-mensurável.

- Podemos ver que todo Martingale é de fato um Martingale com respeito à sua filtração natural:

  Seja $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ um Martingale com respeito a $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, então cada variável X_n é mensurável com respeito à σ-álgebra $\mathcal{B}_n = \sigma(B_0, B_1, ..., B_n)$, já que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{B}_n] = X_n$. Logo $\mathcal{F}_n^x = \sigma(X_0, X_1, ..., X_n)$ é tal que $\mathcal{F}_n^x \subseteq \mathcal{B}_n$.

  Então, usando a Tower Property, temos que:

  $$\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}^x] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_n|\mathbb{B}_{n-1}]|\mathcal{F}_{n-1}^x] = \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}^x] = X_{n-1}$$

  Já que $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{B}_{n-1}] = X_n$ e X_{n-1} é $\mathcal{F}_{n-1}^x$-mensurável.

Questão 4

Seja $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ um Martingale tal que $\mathbb{E}[M_n^2] < +\infty$ (square-integrable martingale) e assuma $M_0 = 0$.

Vamos mostrar que $\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[(M_j - M_{j-1})^2]$:

Defina $D_i = M_i - M_{i-1}$, então:

$$M_n = M_0 + (M_1 - M_0) + (M_2 - M_1) + ... + (M_n - M_{n-1}) = D_1 + D_2 + ... + D_n$$

Como M_n é Martingale, temos que $\mathbb{E}[D_n] = 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Assim:

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \mathbb{E}[(D_1 + D_2 + ... + D_n)^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[D_j^2] + 2 \sum_{i=1, j \neq i}^{n} \mathbb{E}[D_i D_j]$$

Então precisamos mostrar que $\mathbb{E}[D_i D_j] = 0, \forall i \neq j$: Suponha $i < j$, então usando a Tower Property:

$$\mathbb{E}[D_i D_j] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[D_i D_j | \mathcal{F}_i]] = \mathbb{E}[D_i \mathbb{E}[D_j | \mathcal{F}_i]]$$

Como $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}_{j-1}$, D_j é independente de $\mathcal{F}_i$:

$$\mathbb{E}[D_i D_j] = \mathbb{E}[D_i \cancelto{0}{\mathbb{E}[D_j]}] = 0$$

Analogamente, para $i > j$, podemos usar a Tower Property com relação a $\mathcal{F}_j$.

Logo:

$$\mathbb{E}[M_n^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[D_j^2] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[(M_j - M_{j-1})^2]$$