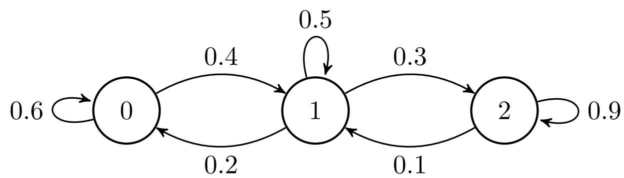
Lista 4 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1



A matriz de transição é dada por:

$$P = \begin{array}{c c} \text{estado} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) Probabilidade de que $X_2 = 1$ dado que $X_0 = 0$:

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1|X_0 = 0) &= P(X_1 = 0, X_2 = 1|X_0 = 0) + P(X_1 = 1, X_2 = 1|X_0 = 0) \\ &= P(X_2 = 1|X_1 = 0)P(X_1 = 0|X_0 = 0) + P(X_2 = 1|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0) \\ &= p_{01}p_{00} + p_{11}p_{01} \\ &= 0.44 \end{aligned}$$

(b) Precisamos resolver o sistema $\pi P = \pi$ com $\sum_{i=0}^{2} \pi_i = 1$ para encontrar a distribuição estacionária:

$$\begin{cases} 0.6\pi_0 + 0.2\pi_1 = \pi_0 \\ 0.4\pi_0 + 0.5\pi_1 + 0.1\pi_2 = \pi_1 \\ 0.3\pi_1 + 0.5\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Resolvendo encontramos o vetor $\pi = (1/9 \;\; 2/9 \;\; 6/9)$.

(c) Seja $Y_n = X_n - X_{n-1}$, então temos que:

$$\begin{aligned} P(Y_n = 1) &= P(X_n - X_{n-1} = 1) \\ &= P(X_n = 2, X_{n-1} = 1) + P(X_n = 1, X_{n-1} = 0) \\ &= P(X_n = 2|X_{n-1} = 1)P(X_{n-1} = 1) + P(X_n = 1|X_{n-1} = 0)P(X_{n-1} = 0) \\ &= p_{12}P(X_{n-1} = 1) + p_{01}P(X_{n-1} = 0) \end{aligned}$$

Quando n $\to \infty$, $P(X_{n-1}) = 1 \to \pi_1$ e $P(X_{n-1}) = 0 \to \pi_0$, logo:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} P(Y_n = 1) &= p_{12}\pi_1 + p_{01}\pi_0 \\ &= 0.3 \cdot \frac{2}{9} + 0.4 \cdot \frac{1}{9} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(d) $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Markov se vale que $P(Y_n = j|Y_{n-1} = i) = P(Y_n = j|Y_{n-1} = i, Y_{n-2} = k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e j, i, k pertencentes ao espaço de estados.

Sabemos que: $Y_n = 1 \Leftrightarrow X_n - X_{n-1} = 1 \Leftrightarrow X_n = 2$ e $X_{n-1} = 1$ ou $X_n = 1$ e $X_{n-1} = 0$

Então vamos verificar se vale $P(Y_n = 1|Y_{n-1} = 1) = P(Y_n = 1|Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 1)$.

Temos que:

$$P(Y_n = 1|Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 1) = \frac{P(Y_n = 1, Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 1)}{P(Y_{n-2} = 1) \cdot P(Y_{n-1} = 1|Y_{n-2} = 2)} = 0$$

Já que é impossível ocorrer a interseção $Y_n = 1, Y_{n-1} = 1, Y_{n-2} = 1$, pois precisaríamos ter $X_n = 2, X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0$, mas não existe X_{n-3} tal que $X_{n-2} - X_{n-3} = 1$

Por outro lado:

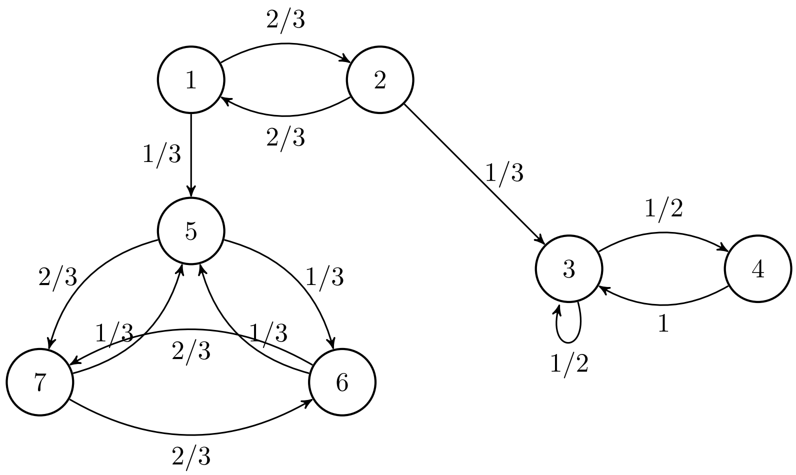
$$\begin{aligned}
P(Y_n = 1|Y_{n-1} = 1) &= \frac{P(X_n = 2, X_{n-1} = 1, X_{n-2} = 0)}{P(Y_{n-1} = 1)} \\
&= \frac{P(X_n = 2|X_{n-1} = 1) \cdot P(X_{n-1} = 1|X_{n-2} = 0) \cdot P(X_{n-2} = 0)}{P(Y_{n-1} = 1)} \\
&= \frac{p_{12} \cdot p_{01}\pi_0}{P(Y_{n-1} = 1)} \\
&= \frac{0.3 \cdot 0.4 \cdot 1/9}{1/9} \\
&= 0.12
\end{aligned}$$

Como a probabilidade condicionada a mais um período passado muda, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma cadeia de Markov.

(e) Sabemos que o n-ésimo passo da cadeia foi para a direita, então temos duas opções: $0 \to 1$ e $1 \to 2$, que correspondem exatamente a $Y_n = 1$. Vamos verificar a probabilidade de que $X_{n-1} = 0$ dado que $Y_n = 1$:

$$\begin{aligned}
P(X_{n-1} = 0|Y_n = 1) &= \frac{X_{n-1} = 0, X_n = 1)}{P(Y_n = 1)} \\
&= \frac{P(X_n = 1|X_{n-1} = 0) \cdot P(X_{n-1} = 0}{P(Y_n = 1)} \\
&= \frac{p_{01}\pi_0}{P(Y_n = 1)} \\
&= \frac{0.4 \cdot 1/9}{1/9} \\
&= 0.4
\end{aligned}$$

Questão 2



(a) Podemos identificar três classes:

- {1,2}: não fechada, portanto não é recorrente, logo é transiente, período=2
- {3,4}: finita, irredutível e fechada, portanto é recorrente, período=1
- {5,6,7}: finita, irredutível e fechada, portanto é recorrente, período=3

(b) Como a cadeia tem três classes comunicantes, não tem distirbuição estacionária única. Podemos encontrar uma se a cadeia entrar na classe {1,2} e outra se entrar em {5,6,7}, já que ambas são absorventes.

Então vamos tratar cada classe como uma cadeia separadamente para encontrar as distribuições estacionárias correspondentes:

- Classe {3,4}:

$$P = \begin{array}{cc} \text{estado} & \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} 1/2 \cdot \pi_3 + \pi_4 = \pi_3 \\ 1/2 \cdot \pi_3 = \pi_4 \\ \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

Encontramos o vetor $\pi^* = (2/3 \quad 1/3)$.

- Classe $\{5{,}6{,}7\}$:

$$P = \begin{array}{c} \text{estado} \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} \pi_6 + \pi_7 = 3 \cdot \pi_5 \\ \pi_5 + 2 \cdot \pi_7 = 3 \cdot \pi_6 \\ 2 \cdot (\pi_5 + \cdot \pi_6) = 3 \cdot \pi_7 \\ \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1 \end{cases}$$

Encontramos o vetor $\pi^{**} = (5/20 \quad 7/20 \quad 8/20)$.

Isto é, os vetores $\pi = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 5/20 \quad 7/20 \quad 8/20)$ e $\pi = (0 \quad 0 \quad 2/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$ são distribuições estacionárias dessa cadeia. Agora podemos calcular $\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{(n)} = \pi_j$, para todo $i, j \in I$:

- $\lim_{n\to\infty} p_{1,6}^{(n)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{2j} \frac{7}{20} = \frac{7}{20}\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{2}{3}^{2j} = \frac{7}{20} \cdot \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{21}{100}$

  Analogamente:

- $\lim_{n\to\infty} p_{1,4}^{(n)} = \frac{2}{15}$
- $\lim_{n\to\infty} p_{1,2}^{(n)} = 0$
- $\lim_{n\to\infty} p_{6,7}^{(n)} = \frac{8}{20}$