Lista 6 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

$(X_t)_{t\geq 0}$ é Cadeia de Markov em tempo contínuo com matriz geradora:

$$G = \begin{pmatrix} -\mu & \mu \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

(a) As forward equations são dadas por $p'_{ij}(t) = \sum_{k=0}^{1} p_{ik}(t)g_{kj}$, i,j = 0, 1:

$$\begin{cases} p'_{00}(t) = -\mu p_{00}(t) + \lambda p_{01}(t) \\ p'_{01}(t) = \mu p_{00}(t) - \lambda p_{01}(t) \\ p'_{10}(t) = -\mu p_{10}(t) - \lambda p_{11}(t) \\ p'_{11}(t) = \mu p_{10}(t) - \lambda p_{11}(t) \end{cases}$$

Como as últimas duas equações têm forma similar às duas primeiras, é suficiente resolver para as primeiras. É fácil ver que:

$p'_{00}(t) = -p'_{01}(t) + C$

$p_{00}(0) = 1$ e $p_{01}(0) = 0 \Rightarrow C = 1$

Então a primeira EDO é dada por:

$p'_{00}(t) = -(\lambda + \mu)p_{00}(t) + \lambda$

Usando uma solução da forma $p_{00}(t) = C_1 \exp^{-(\mu+\lambda)t} - C_2$, encontramos:

$p'_{00}(t) = -(\mu + \lambda)C_1 \exp^{-(\mu+\lambda)t} = -(\mu + \lambda)p_{00}(t) + C_2(\lambda + \mu) \Rightarrow C_2 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \quad C_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

Então as probabilidades de transição $p_{ij}(t)$ são dadas por:

$$\begin{cases} p_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ p_{01}(t) = -\frac{\mu}{\lambda+\mu}\exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ p_{10}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu} \\ p_{11}(t) = -\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{cases}$$

(b) Defina $G^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ Temos que $G^{n+1} = G\cdot^n$, isto é:

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\mu a_n + \mu c_n \\ c_{n+1} = -\lambda a_n + \lambda c_n \\ b_{n+1} = -\mu b_n + \mu d_n \\ d_{n+1} = -\lambda b_n + \lambda d_n \end{cases}$$

O que nos dá: $a_{n+1} = \frac{-\mu}{\lambda} c_{n+1}$ e $b_{n+1} = \frac{-\mu}{\lambda} d_{n+1}$

Então podemos escrever a primeira equação em diferença:

$a_{n+1} = -(\mu+\lambda)a_n, \quad n \geq 1$

Sabemos que $a_1 = -\mu$, então por indução $\forall n \geq 1$:

$$\begin{cases} a_n = (-1)^n \mu(\mu+\lambda)^{n-1} \\ c_n = (-1)^{n+1} \lambda(\mu+\lambda)^{n-1} \end{cases}$$

Analogamente, sabemos que $b_n = \mu$, então:

$$\begin{cases} b_n = (-1)^{n+1} \mu(\mu+\lambda)^{n-1} \\ d_n = (-1)^n \lambda(\mu+\lambda)^{n-1} \end{cases}$$

Isto é:

$$G^n = \frac{1}{\mu+\lambda}\begin{pmatrix} (-1)^n \mu(\mu+\lambda) & (-1)^{n+1}\mu(\mu+\lambda) \\ (-1)^{n+1}\lambda(\mu+\lambda) & (-1)^n \lambda(\mu+\lambda) \end{pmatrix}$$

Fazendo $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} G^n$ para cada termo de G^n encontramos as mesmas probabilidades de transição encontradas no item anterior:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a_n = a_0 + \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a_n - \frac{\mu}{\mu+\lambda} \Big) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} \exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} b_n = -\frac{\mu}{\lambda+\mu} \exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} c_n = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} d_n == -\frac{\lambda}{\lambda+\mu} \exp^{-(\mu+\lambda)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

(c) Usando a definição de processo de Markov e a propriedade de homogeneidade da cadeia, temos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_t = 1 | X_0 = 0, X_{3t} = 0) &= \frac{\mathbb{P}(X_t = 1, X_{3t} = 0 | X_0 = 0)}{\mathbb{P}(X_{3t} = 0 | X_0 = 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{3t} = 0 | X_t = 1, X_0 = 0) \cdot \mathbb{P}(X_t = 1 | X0 = 0)}{\mathbb{P}(X_{3t} = 0 | X_0 = 0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_{3t} = 0 | X_t = 0) \cdot \mathbb{P}(X_t = 1 | X_0 = 0)}{\mathbb{P}(X_{3t} = 0 | X_0 = 0)} \\
&= \frac{p_{10}(2t) \cdot p_{01}(t)}{p_{00}(3t)}
\end{aligned}$$

(d) $\pi G = 0$ nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -\mu\pi_0 + \lambda\pi_1 = 0 \\ \mu\pi_0 - \lambda\pi_1 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 = 1 \end{cases}$$

Logo: $\pi_0 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ e $\pi_1 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

De fato:

$p_{00}(t) \to \frac{\lambda}{\mu+\lambda} = \pi_0$

$p_{01}(t) \to \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \pi_1$

$p_{10}(t) \to \frac{\lambda}{\mu+\lambda} = \pi_0$

$p_{11}(t) \to \frac{\mu}{\mu+\lambda} = \pi_1$

Questão 2

- Clientes chegam de acordo com um Processo de Poisson com parâmetro λ
- Cada cliente i fica conectado por um tempo $S_i \sim$ Exponencial(μ)
- Servidor tem capacidade infinita

Podemos escrever a matriz geradora desse Processo de Poisson como:

$$G = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -(\lambda+3\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Então a distribuição estacionária deve satisfazer $\Pi G = 0$ e $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$, ie:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\lambda+\mu)\pi_1 + 2\mu\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_1 - (\lambda+2\mu)\pi_2 + 3\mu\pi_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda\pi_{j-1} - (\lambda+j\mu)\pi_j + (j+1)\mu\pi_{j+1} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Resolvendo recursivamente encontramos:

$$\pi_n = \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \pi_0$$

Logo:

$$\pi_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\right]^{-1} = \exp^{-\lambda/\mu}$$

$$\pi_n = \frac{\exp^{-\lambda/\mu}}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \quad n = 0, 1, 2, ...$$

Defina $\rho = \lambda/\mu > 0$, então $\pi_n \sim$ Poisson(ρ). Assim, sabemos que a média de clientes sendo atendidos é dada por $\frac{\lambda}{\mu}$.

Questão 3

- Clientes chegam de acordo com um Processo de Poisson com parâmetro λ
- Se n clientes já estão sendo atendidos, o cliente entra no sistema com probabilidade α_n
- $S_i \sim$ Exponencial(μ)

(a) Podemos escrever a matriz geradora desse processo como:

$$G = \begin{pmatrix} -\alpha_0\lambda & \alpha_0\lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\alpha_1\lambda+\mu) & \alpha_1\lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\alpha_2\lambda+\mu) & \alpha_2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \mu & -(\alpha_3\lambda+\mu) & \alpha_3\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

(b) Seja $\alpha_0 = 1$, $\alpha_n = \alpha$ e $\lambda < \mu$.

A distribuição estacionária deve satisfazer $\Pi G = 0$ e $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$, ie:

$$\begin{cases} -\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0 \\ \lambda\pi_0 - (\alpha\lambda+\mu)\pi_1 + \mu\pi_2 = 0 \\ \lambda\pi_1 - (\alpha\lambda+\mu)\pi_2 + \mu\pi_3 = 0 \\ \vdots \\ \lambda\pi_{j-1} - (\alpha\lambda+\mu)\pi_j\pi_{j+1} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Resolvendo recursivamente encontramos:

$$\pi_{n+1} = \frac{\alpha\lambda}{\mu}\pi_n = \Big(\frac{\alpha\lambda}{\mu}\Big)^n \frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$

Logo:

$$\pi_0 = \Big[\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{\alpha\lambda}{\mu}\Big)^k \frac{\lambda}{\mu}\Big]^{-1} = \frac{\mu}{\lambda} - \alpha$$

$$\pi_{n+1} = \Big(\frac{\alpha\lambda}{\mu}\Big)^n\Big(1 - \frac{\alpha\lambda}{\mu}\Big), \quad n = 1, 2, 3, ...$$

Para garantir que que $\pi_n \in [0,1]$, precisamos assumir adicionalmente que $\alpha, \lambda, \mu > 0$ e $\alpha < \frac{\mu}{\lambda}$, em que $\lambda < \mu$.

Questão 4

- Cada indivíduo tem filhos de acordo com um Processo de Poisson com parâmetro λ enquanto vive
- Expectativa de vida segue dist. Exponencial com parâmetro μ
- Independente do tamanho da população, todos os indivíduos morrem no tempo t quando $X_0 = n$

(a) Podemos escrever a matriz geradora desse processo como:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2\mu & -2(\lambda+\mu) & 2\lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 3\mu & -3(\lambda+\mu) & 3\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

As forward equations são dadas por $P'_t = P_t G$:

$$\begin{cases} p'_{ij}(t) = \mu p_{01}(t), \quad j = 0 \\ p'_{ij}(t) = (j-i)\lambda p_{ij-1}(t) - j(\mu+\lambda)p_{ij}(t) + (j+1)_{ij+1}(t), \quad j > 0 \end{cases}$$

(b) As probabilidades no estado estacionário devem satisfazer $\Pi G = 0$ e $\sum_{i=0}^{n} \pi_i = 1$. O que, neste caso nos dá:

$$\pi_1 = 0, \pi_2 = 0 \ldots \pi_n = 0$$

Logo, existe distribuição estacionária se $\pi_0 = 1$, caso em que a população da espécia é extinta. Se $\pi_0 < 1$, não existe distribuição estacionária, a população cresce infinitamente.

(c) $\mathbb{E}[X_{t+h}|X_t = i] = \sum_{n=0}^{+\infty} np_{in}(t)$

Para h suficientemente pequeno, temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{t+h}|X_t = i] &= (i-1)p_{ii-1} + ip_{ii} + (i+1)p_{ii+1} + o(h) \\ &= (i-1)i + i(1 - i(\lambda+\mu)h) + (i+1)i\lambda + o(h) \end{aligned}$$

Então pela Tower property:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{t+h}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_{t+h}|X_t = i]] \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{E}[X_{t+h}|X_t = i]\mathbb{P}(X_t = i) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (i-1)i\mu h p_i + ip_i - i^2(\lambda+\mu)hp_i + (i+1)ih\lambda p_i + o(h)p_i
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathbb{E}[X_{t+h}] - \mathbb{E}[X_t]}{h} &= \frac{M_{t+h} - M_t}{h} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (i-1)i\mu p_i - \frac{ip_i}{h} - i^2(\lambda+\mu)p_i + (i+1)i\lambda p_i + \frac{o(h)}{h}p_i \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} -(\lambda+\mu)ip_i + \frac{o(h)}{h}p_i
\end{aligned}
$$

Tomando o limite:

$$
M_t' = -(\lambda+\mu)M_t \quad \Rightarrow \quad M_t = k_0 \exp^{-(\mu-\lambda)t}
$$