Lista 3 de Processos Estocásticos

Laura Sant'Anna

Questão 1

Do enunciado: $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é Cadeia de Markov em {0,1,2,...} com probabilidades de transição: $p_{i,i+1} = \alpha_i$ e $p_{i,0} = 1 - \alpha_i$ para todo $i \geq 0$

(a) Temos que 0 é recorrente positivo $\Leftrightarrow m_0 < +\infty$, ie:

$$m_0 = \mathbb{E}[T_0 | X_0 = 0] < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot P(T_0 = n | X_0 = 0) < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot P(X_1 \neq 0, X_2 \neq 0, \cdots, X_n = 0 | X_0 = 0) < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} \cdot (1 - \alpha_n) < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdots \alpha_n < +\infty \Leftrightarrow$$

Defina $\prod_{i=0}^{n} \alpha_i = A_n$, então:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \cdot A_n - \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot A_n < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n < +\infty \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} \alpha_i < +\infty$$

Como queríamos demonstrar.

(b) Seja $\alpha_i = \alpha \in (0,1)$, então:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} \alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha} < +\infty$$

Logo, pelo item (a), sabemos que 0 é recorrente positivo. Como a cadeia é irredutível, se um estado é recorrente positivo, toda a cadeia também é.

Questão 2

Do enunciado: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é Cadeia de Markov em {0,1,2,...} com probabilidades de transição: $p_{i,i+1} = \lambda/(i+\nu+1)$ e $p_{i,0} = 1 - p_{i,i+1}$, com $\lambda > 0$ e $\nu \geq 0$.

Além das condições já existentes sobre λ e ν, para garantir $p_{i,i+1} < 1$ é necessário supor que: $\lambda < i + \nu + 1$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Como $i \geq 0$, temos: $\lambda < \nu + 1$.

(a) A cadeia é irredutível, já que:

- De 0 para qualquer i: $p_{0,i} = \prod_{k=0}^{i-1} \frac{\lambda}{k+v+1} > 0$, logo $0 \to i$
- Se $i < j$: $p_{i,j} = \prod_{k=i}^{j-1} \frac{\lambda}{k+v+1} > 0$, logo $i \to j$
- De qualquer j para 0: $p_{j,0} = 1 - \frac{\lambda}{j+v+1} > 0$, logo $j \to 0$
- Por transiência: $j \to 0 \to i$ e $i \to j \to 0$

(b) Como a cadeia é irredutível, todos os estados pertencem à mesma classe e portanto têm o mesmo período, então vamos olhar apenas para o estado 0:

$p_{0,0}^{(1)} = 1 - \frac{\lambda}{v+1} > 0$

Logo, 0 é é aperiódico e portanto toda a cadeia também é.

(c) Como a cadeia é irredutível, todos os estados são recorrentes positivos, recorrentes nulos ou transientes, então vamos olhar apenas para o estado 0. Usando a equivalência demonstrada na questão 1, vamos mostrar que:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} p_{i,i+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} \frac{\lambda}{i+v+1} < +\infty$$

Como $\frac{\lambda}{i+v+1} < 1$, então:

$$\lim_{i\to\infty} \frac{\lambda}{i+v+1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=0}^{n} \frac{\lambda}{i+v+1} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \prod_{i=0}^{k} \frac{\lambda}{i+v+1} < +\infty \Leftrightarrow$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \prod_{i=0}^{n} \frac{\lambda}{i+v+1} < +\infty$$

Logo, 0 é recorrente positivo e portanto toda a cadeia também é.

Distribuição Estacionária: uma Cadeia de Markov irredutível e aperiódica tem distribuição estacionária única dada por $\pi_j = \frac{1}{m_j}$ para todo $j \in I$, então:
Para j=0, podemos usar alguns resultados da questão 1:

$$\begin{aligned}
m_0 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot \frac{\lambda}{v+1} \frac{\lambda}{v+2} \cdot \frac{\lambda}{v+3} \cdots (1 - \frac{\lambda}{v+n}) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda}{v+1} \frac{\lambda}{v+2} \cdot \frac{\lambda}{v+n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{v+n!}
\end{aligned}$$

- Para v=0: $m_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$ e portanto $\pi_0 = e^{-\lambda}$
- Para v=1: $m_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n+1!}$ e $\pi_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n+1!}}$

(fiquei com dúvida se esse era o melhor caminho pra fazer, ficou faltando continuar...)

Questão 3
Exemplo de uma Cadeia de Markov irredutível com distribuição estacionária π, mas $p_{ij}^{(n)} \not\to \pi_j$:

O exemplo mais simples que podemos pensar é a Cadeia de Markov periódica com dois estados $I = \{0, 1\}$ e probabilidades de transição dadas por:

$$P = \begin{array}{ll} \text{estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A cadeia tem distribuição estacionária dada por: $\pi = (1/2 \;\; 1/2)$, mas:

$$P^{2m} = \begin{array}{ll} \text{estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

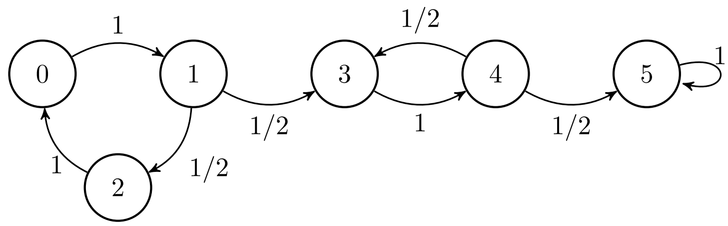
$$P^{2m+1} = \begin{array}{ll} \text{estado} & \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Então, embora a cadeia tenha distribuição estacionária, ela não tem distribuição convergente, já que o retorno aos estados 0 ou 1 fica condicionado ao número de passos ser par ou ímpar.

Questão 4

(a) Exemplo de Cadeia de Markov no espaço de estados finito S tal que três ou mais estados têm diferentes períodos.

Para qualquer Cadeia de Markov (finita ou infinita), todos os estados na mesma classe têm o mesmo período, então basta tomar como exemplo uma cadeira com pelo menos três classes. Seja a cadeia dada pelo seguinte diagrama de transição:

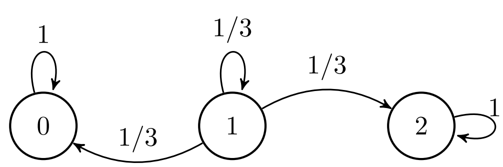


Podemos ver que:

- Estados 0, 1 e 2 têm período 3
- Estados 3 e 4 têm período 2
- Estado 5 tem período 1 (aperiódico)

(b) Exemplo de Cadeia de Markov em um espaço de estados finito que tenha duas ou mais distribuições estacionárias.

Cadeis de Markov irredutíveis têm apenas uma distribuição estacionária, então basta tomar como exemplo uma cadeia com duas ou mais classes comunicantes. Seja a cadeia dada pelo seguinte diagrama de transição:



A matriz de transição é dada por:

$$P = \begin{array}{c c} \text{estado} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Podemos ver que $\pi_1 = (3/4 \;\; 0 \;\; 1/4)$ e $\pi_2 = (1/3 \;\; 0 \;\; 2/3)$ são distribuições estacionárias dessa cadeia.

(c) $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é um passeio aleatório nos inteiros não negativos com probabilidades de transição: $p_{i,i+1} = \frac{1}{2}, i \geq 0$, $p_{i,i-1} = \frac{1}{2}, i \geq 1$ e $p_{0,0} = \frac{1}{2}, i \geq 0$.

Podemos definir $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como uma Cadeia de nascimento e morte com $p_i = q_i = \frac{1}{2}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. A cadeia é irredutível já que tem apenas uma classe comunicante. Então, usando as conclusões do exemplo 1.4.30 das notas de aula, sabemos que:

$$(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é recorrente nula} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p_0 \cdots q_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} = +\infty \text{ e } \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} = +\infty$$

Neste caso, como $p_i = q_i = \frac{1}{2}$ temos:

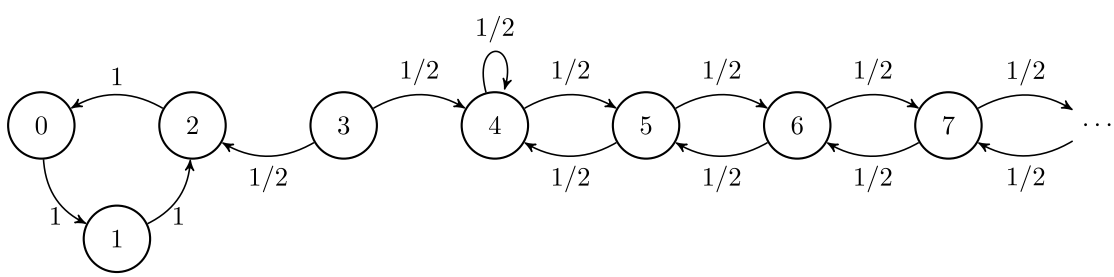
$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{p_0 \cdots q_{i-1}}{q_1 \cdots q_i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1/2 \cdots 1/2}{1/2 \cdots 1/2} = +\infty$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{q_1 \cdots q_i}{p_1 \cdots p_i} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1/2 \cdots 1/2}{1/2 \cdots 1/2} = +\infty$$

Logo, a cadeia é recorrente nula.

(d) Exemplo de uma Cadeia de Markov tal que alguns estados sejam recorrentes não nulos, outros sejam recorrentes nulos e outros sejam transientes.

Podemos tomar como exemplo a Cadeia de Markov definida em $\mathbb{N}$ com o seguinte diagrama de transição:



Podemos ver que:

- Estados 0, 1 e 2 são recorrentes positivos (e portanto não recorrentes nultos)
- Estado 3 é transiente
- Estados 4, 5, 6, $\cdots$ são um passeio aleatório tal como o do item anterior, e portanto são recorrentes nulos