# Klasifikacija oblik kubičnih Bezierjevih krivulj

Jan Pristovnik in Laura Guzelj Blatnik

Fakulteta za matematiko in fiziko

4. januar 2021

# Parametrične kubične krivulje

Kubično parametrični krivuljo definiramo kot:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\
y(t) &= b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \\
&\text{za } -\infty < t < \infty,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

njeno ukrivljenost $K$ pa:

$$
K = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2\right)^{3/2}}.
$$

# Ukrivljenost

Imenovalec iz enačbe za $K$ lahko zapišemo sledeče:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2(At^2 + Bt + C) = 2F(t),$$

kjer velja

$$\begin{aligned} A &= 3(a_2 b_1 - a_1 b_2) \\ B &= 3(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ C &= a_3 b_2 - a_2 b_3. \end{aligned}$$

Označimo:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

# Oblike krivulj

**Trditev 1**

*Potreben in zadosten pogoj, da bo krivulja* (1) *imela špico, če je* $A \neq 0$, *je* $\Delta = 0$.

**Trditev 2**

*Če krivulja* (1) *ni premica, bo vsebovala največ eno špico.*

**Trditev 3**

*Potreben in zadosten pogoj, da bo krivulja* (1) *bo vsebovala loop (prevod??), je* $\Delta < 0$.

# Krivulje na intervalu

V nadaljevanju bomo obravnavali lastnosti krivulj na nekem intervalu $[t_2, t_3]$. Za $t_2 \leq t \leq t_3$ lahko enačbo (1) zapišemo sledeče:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1(t-t_2)^3 + a_2(t-t_2)^2 + a_3(t-t_2) + a_4 \\ y(t) &= b_1(t-t_2)^3 + b_2(t-t_2)^2 + b_3(t-t_2) + b_4 \end{aligned} \tag{2}$$

imenovalec v enačbi ukrivljenosti $K$ pa se izraža kot:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2(A(t-t_2)^2 + B_1(t-t_2) +_2 C_1) =$$
$$2(A(t-t_3)^2 + B_2(t-t_3) +_2 C_2) = 2F_1(t),$$

kjer velja

$$\begin{aligned} A &= 3(a_2 b_1 - a_1 b_2) \\ B_1 &= 3(a_3 b_1 - a_1 b_3) \qquad B_2 = B_1 + 2A(t_3 - t_2) \\ C_1 &= a_3 b_2 - a_2 b_3 \qquad C_2 = C_1 + A(t_3 - t_2)^2 + B_1(t_3 - t_2). \end{aligned}$$

Definiramo še $\Delta_1$ kot:

$$\Delta_1 = B_1 - 4AC_1$$

### Trditev 4

*Potrebni in zadostni pogoji, da bo krivulja (2) vsebovala loop so:*

- $\Delta_1 < 0$
- $B_1^2 \geq 3AC_1$ *in* $B_2^2 \geq 3AC_2$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) \leq 0.$

### Trditev 5

*Če je $A \neq 0$, sta naslednja pogoja potrebna in zadostna, da bo krivulja (2) vsebovala špico:*

- $\Delta_1 = 0$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) \leq 0.$

# Klasifikacija krivulj na intervalu

## Trditev 6

*Naslednji pogoji so potrebni in zadostni za različne vrste prevojev na krivulji* (2)*:*

- *Prevoj bo na intervalu* $(t_2, t_3)$*, če bo veljalo:* $F_1(t_2)F_1(t_3) < 0$.
- *Prevoj bo pri parametru* $t_2$ *(oziroma* $t_3$*), če bo* $\Delta_1 > 0$ *in* $F_1(t_2) = 0$ *(oziroma* $F_1(t_3) = 0$*).*
- *Interval* $(t_2, t_3)$ *bo vseboval dva prevoja, če bo* $\Delta_1 > 0$, $F_1(t_2)F_1'(t_2) < 0$, $F_1(t_3)F_1'(t_3) > 0$ *in* $F_1(t_2)F_1(t_3) > 0$.

## Trditev 7

*Potrebna in zadostna pogoja, da krivulja* (2) *ne bo imela prevojev, sta:*

- $\Delta_1 \leq 0$ *ali* $F_1(t_2)F_1(t_2) > 0$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) > 0$ *ali* $F_1(t_2)A \leq 0$.

# Hermitska interpolacija

# Klasifikacija

B-zlepki reda n so bazne funkcije za špline functions"istega reda, definirane na istih vozlih. Kar pomeni, da lahko vse špline functions"enolično predstavimo kot linearno kombinacijo B-zlepkov.

## Definicija 1

*Rekurzivna formula za B-zlepke:*

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x)$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ 0 & ;sicer \end{cases}$$

HVALA ZA POZORNOST!