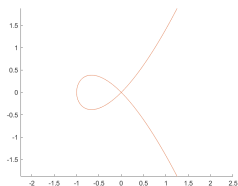


KLASIFIKACIJA OBLIK KUBIČNIH BEZIERJEVIH KRIVULJ

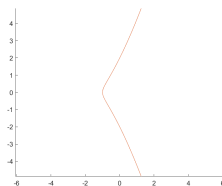
Jan Pristovnik in Laura Guzelj Blatnik

Fakulteta za matematiko in fiziko

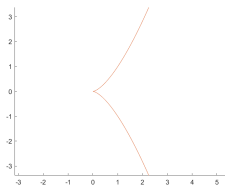
4. januar 2021



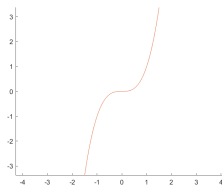
SLIKA 1: Zanka



SLIKA 3: Dva prevoja



SLIKA 2: Špica



SLIKA 4: Brez prevojev

Kubično parametrični krivuljo definiramo kot:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\y(t) &= b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \\ \text{za } -\infty < t < \infty,\end{aligned}\tag{1}$$

njeno ukrivljenost K pa:

$$K = \frac{\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)^{3/2}}.$$

Imenovalec iz enačbe za K lahko zapišemo sledeče:

$$\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} = 2(At^2 + Bt + C) = 2F(t),$$

kjer velja

$$A = 3(a_2b_1 - a_1b_2)$$

$$B = 3(a_3b_1 - a_1b_3)$$

$$C = a_3b_2 - a_2b_3.$$

Označimo:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

TRDITEV 1

Potreben in zadosten pogoj, da bo krivulja (1) imela špico, če je $A \neq 0$, je $\Delta = 0$.

TRDITEV 2

Če krivulja (1) ni premica, bo vsebovala največ eno špico.

TRDITEV 3

Potreben in zadosten pogoj, da bo krivulja (1) bo vsebovala loop (prevod??), je $\Delta < 0$.

KRIVULJE NA INTERVALU

V nadaljevanju bomo obravnavali lastnosti krivulj na nekem intervalu $[t_2, t_3]$. Za $t_2 \leq t \leq t_3$ lahko enačbo (1) zapišemo sledeče:

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1(t - t_2)^3 + a_2(t - t_2)^2 + a_3(t - t_2) + a_4 \\y(t) &= b_1(t - t_2)^3 + b_2(t - t_2)^2 + b_3(t - t_2) + b_4\end{aligned}\tag{2}$$

imenovalec v enačbi ukrivljenosti K pa se izraža kot:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2(A(t - t_2)^2 + B_1(t - t_2) + C_1) = \\2(A(t - t_3)^2 + B_2(t - t_3) + C_2) &= 2F_1(t),\end{aligned}$$

kjer velja

$$\begin{aligned}A &= 3(a_2b_1 - a_1b_2) \\B_1 &= 3(a_3b_1 - a_1b_3) \quad B_2 = B_1 + 2A(t_3 - t_2) \\C_1 &= a_3b_2 - a_2b_3 \quad C_2 = C_1 + A(t_3 - t_2)^2 + B_1(t_3 - t_2).\end{aligned}$$

KLASIFIKACIJA KRIVULJ NA INTERVALU

Definiramo še Δ_1 kot:

$$\Delta_1 = B_1 - 4AC_1$$

TRDITEV 4

Potrebni in zadostni pogoji, da bo krivulja (2) vsebovala loop so:

- $\Delta_1 < 0$
- $B_1^2 \geq 3AC_1$ in $B_2^2 \geq 3AC_2$
- $F'_1(t_2)F'_1(t_3) \leq 0$.

TRDITEV 5

Če je $A \neq 0$, sta naslednja pogoja potrebna in zadostna, da bo krivulja (2) vsebovala špico:

- $\Delta_1 = 0$
- $F'_1(t_2)F'_1(t_3) \leq 0$.

TRDITEV 6

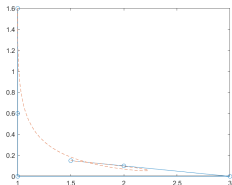
Naslednji pogoji so potrebni in zadostni za različne vrste prevojev na krivulji (2):

- *Prevoj bo na intervalu (t_2, t_3) , če bo veljalo: $F_1(t_2)F_1(t_3) < 0$.*
- *Prevoj bo pri parametru t_2 (oziroma t_3), če bo $\Delta_1 > 0$ in $F_1(t_2) = 0$ (oziroma $F_1(t_3) = 0$).*
- *Interval (t_2, t_3) bo vseboval dva prevoja, če bo $\Delta_1 > 0$, $F_1(t_2)F_1'(t_2) < 0$, $F_1(t_3)F_1'(t_3) > 0$ in $F_1(t_2)F_1(t_3) > 0$.*

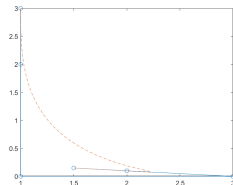
TRDITEV 7

Potrebna in zadostna pogoja, da krivulja (2) ne bo imela prevojev, sta:

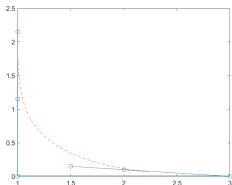
- $\Delta_1 \leq 0$ ali $F_1(t_2)F_1(t_2) > 0$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) > 0$ ali $F_1(t_2)A \leq 0$.



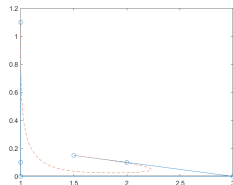
SLIKA 5: Zanka



SLIKA 7: Dva prevoja



SLIKA 6: Špica



SLIKA 8: Brez prevojev

B-zlepki reda n so bazne funkcije za špline functions"istega reda, definirane na istih vozlih. Kar pomeni, da lahko vse špline functions"enolično predstavimo kot linearno kombinacijo B-zlepkov.

DEFINICIJA 1

Rekurzivna formula za B-zlepke:

$$B_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x)$$

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & ; t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ 0 & ; \text{sicer} \end{cases}$$

HVALA ZA POZORNOST!