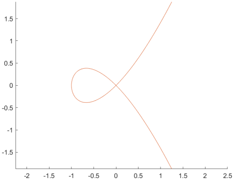
Klasifikacija oblik kubičnih Bezierjevih krivulj

Jan Pristovnik in Laura Guzelj Blatnik

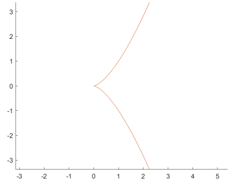
Fakulteta za matematiko in fiziko

4. januar 2021

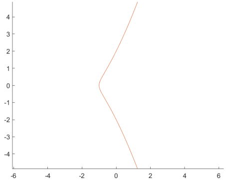
Motivacija



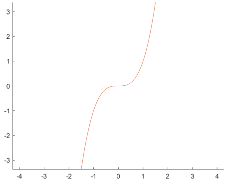
Slika 1: Zanka



Slika 2: Špica



Slika 3: Dva prevoja



Slika 4: Brez prevojev

Parametrične kubične krivulje

Kubično parametrični krivuljo definiramo kot:

$$
\begin{gathered}
x(t) = a_1 t^3 + a_2 t^2 + a_3 t + a_4 \\
y(t) = b_1 t^3 + b_2 t^2 + b_3 t + b_4 \\
\text{za } -\infty < t < \infty,
\end{gathered} \tag{1}
$$

njeno ukrivljenost K pa:

$$
K = \frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left((\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2\right)^{3/2}}.
$$

Imenovalec iz enačbe za K lahko zapišemo sledeče:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2(At^2 + Bt + C) = 2F(t),$$

kjer velja

$$\begin{aligned} A &= 3(a_2 b_1 - a_1 b_2) \\ B &= 3(a_3 b_1 - a_1 b_3) \\ C &= a_3 b_2 - a_2 b_3. \end{aligned}$$

Označimo:

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

Oblike krivulj

Trditev 1

Potreben in zadosten pogoj, da bo krivulja (1) *imela špico, če je* $A \neq 0$, *je* $\Delta = 0$.

Trditev 2

Če krivulja (1) *ni premica, bo vsebovala največ eno špico.*

Trditev 3

Potreben in zadosten pogoj, da bo krivulja (1) *bo vsebovala zanko, je* $\Delta < 0$.

Krivulje na intervalu

V nadaljevanju bomo obravnavali lastnosti krivulj na nekem intervalu $[t_2, t_3]$. Za $t_2 \leq t \leq t_3$ lahko enačbo (1) zapišemo sledeče:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1(t-t_2)^3 + a_2(t-t_2)^2 + a_3(t-t_2) + a_4 \\ y(t) &= b_1(t-t_2)^3 + b_2(t-t_2)^2 + b_3(t-t_2) + b_4 \end{aligned} \tag{2}$$

imenovalec v enačbi ukrivljenosti K pa se izraža kot:

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = 2(A(t-t_2)^2 + B_1(t-t_2) +_2 C_1) =$$
$$2(A(t-t_3)^2 + B_2(t-t_3) +_2 C_2) = 2F_1(t),$$

kjer velja

$$\begin{aligned} A &= 3(a_2b_1 - a_1b_2) \\ B_1 &= 3(a_3b_1 - a_1b_3) \qquad B_2 = B_1 + 2A(t_3 - t_2) \\ C_1 &= a_3b_2 - a_2b_3 \qquad C_2 = C_1 + A(t_3-t_2)^2 + B_1(t_3 - t_2). \end{aligned}$$

Definiramo še Δ_1 kot:

$$\Delta_1 = B_1 - 4AC_1$$

Trditev 4

Potrebni in zadostni pogoji, da bo krivulja (2) vsebovala zanko so:

- $\Delta_1 < 0$
- $B_1^2 \geq 3AC_1$ *in* $B_2^2 \geq 3AC_2$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) \leq 0.$

Trditev 5

Če je $A \neq 0$, sta naslednja pogoja potrebna in zadostna, da bo krivulja (2) vsebovala špico:

- $\Delta_1 = 0$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) \leq 0.$

Klasifikacija krivulj na intervalu

Trditev 6

Naslednji pogoji so potrebni in zadostni za različne vrste prevojev na krivulji (2):

- *Prevoj bo na intervalu* (t_2, t_3)*, če bo veljalo:* $F_1(t_2)F_1(t_3) < 0$.
- *Prevoj bo pri parametru* t_2 *(oziroma* t_3*), če bo* $\Delta_1 > 0$ *in* $F_1(t_2) = 0$ *(oziroma* $F_1(t_3) = 0$*).*
- *Interval* (t_2, t_3) *bo vseboval dva prevoja, če bo* $\Delta_1 > 0$, $F_1(t_2)F_1'(t_2) < 0$, $F_1(t_3)F_1'(t_3) > 0$ *in* $F_1(t_2)F_1(t_3) > 0$.

Trditev 7

Potrebna in zadostna pogoja, da krivulja (2) ne bo imela prevojev, sta:

- $\Delta_1 \leq 0$ *ali* $F_1(t_2)F_1(t_2) > 0$
- $F_1'(t_2)F_1'(t_3) > 0$ *ali* $F_1(t_2)A \leq 0$.

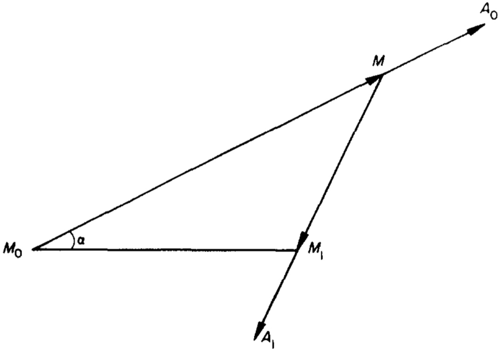
Hermitska interpolacija

Ideja: Dani imamo točki $M_0(0,0)$ in $M_1(1,0)$ ter tangentna vektorja M_0A_0 ij M_1A_1. Iščemo parametrično krivuljo, ki bo zadostila naslednjima pogojema:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0 \quad y(0) = 0 \\ x(1) &= 1 \quad y(1) = 0 \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=0} &= M_0A_0 \\ \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=1} &= M_1A_1 \end{aligned}$$



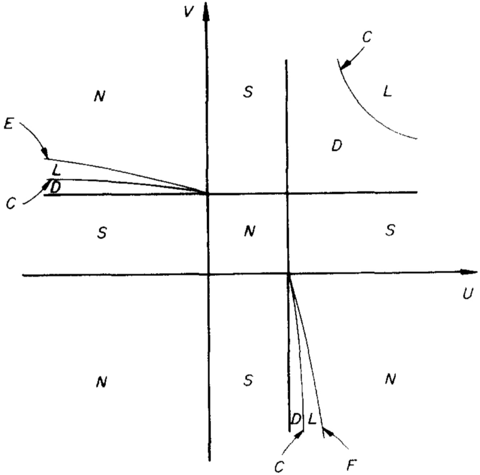
Slika 5: Hermitska interpolacija

Označimo:

- $M_0A_0 = UM_0M$ in $M_1A_1 = VM_1M$, kjer je M presečišče vektorjev M_0A_0 in M_1A_1
- Kot $\alpha = \angle M_1M_0M$
- $L = |M_0M|$.

Nadalje lahko zaišemo:

$$F_1(t) = L\sin\alpha(3(UV - U - V)t^2 + 3U(2 - V)t + U(V - 3))$$



SLIKA 6: Klasifikacija kubičih parametričnih krivulj, glede na vrednosti U, V

Zlepki

- Motivacija: natančnost nočemo zvišati preko višanja stopnje temveč preko zlepkov - celotno območje razdelimo na več območji

Definicija 1

Zlepek reda n je sestavljen iz polinomov stopnje n-1 v spremenljivki x. Vrednosti x, kjer se polinomi srečajo imenujemo vozli, označimo jih z $t_0, t_1, t_2, ..., t_n$ *in uredimo v nepadajočem vrstnem redu.*
Če so vsi vozli različni imamo zvezne odvode n-2 reda med vsemi polinomi. V kolikor je r vozlov enakih imamo zagotovljeno le n-r-1 zvezno odvedljivost.

B-zlepki reda n so bazne funkcije za zlepke istega reda, definirane na istih vozlih.

Trditev 8

Rekurzivna formula za B-zlepke:

$$B_{i,0}(x) = \begin{cases} 1 & ;\ t_i \leq x \leq t_{i+1} \\ 0 & ;sicer \end{cases}$$

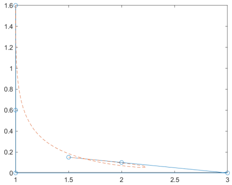
$$B_{i,k}(x) = \frac{x-t_i}{t_{i+k}-t_i} B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1}-x}{t_{i+k+1}-t_{i+1}} B_{i+1,k-1}(x)$$

Naj bo $P_i(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, ..., n$ sekvenca točk s parametrom t. Parametrična aproksimacija preko B-zlepkov:

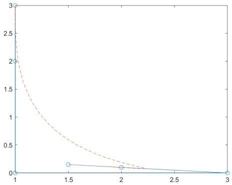
$$R(t) = (x(t), y(t)) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i-2,3}(t)$$

Poligonu $P_0, P_1, ..., P_n$ pravimo kontrolni poligon.

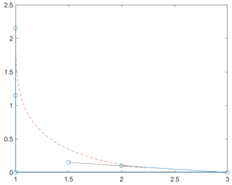
Primer



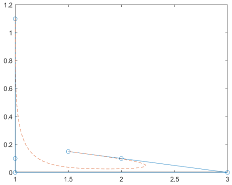
Slika 7: Zanka



Slika 9: Dva prevoja



Slika 8: Špica



Slika 10: Brez prevojev

Klasifikacija na B-zlepkih

Koncept: Gledati podintervale
Izkaže se, v kolikor kontrolni poligon ustreza določenim omejitvam, da se obliko krivulje uspe prebrati iz kar iz kontrolnega poligona.

HVALA ZA POZORNOST!