Problema de Space Ray y Zapper

Laura Rodríguez Lardiés

Octubre 2023

Resumen

Your abstract.

Índice

1. Enunciado

La industria de juguetes "Galaxia" produce dos tipos de juguetes:

- Space Ray.
- Zapper.

Los recursos están limitados a:

- 1200 kg de plástico por semana.
- 40 horas de producción semanal.

Los requerimientos de Marketing son:

- La producción total no puede exceder de 800 docenas.
- El número de docenas de Space Rays no puede exceder al número de docenas de Zappers por más de 450.

Los requerimientos Tecnológicos son:

- Space Rays requiere 2 kg de plástico y 3 minutos de producción por docena.
- Zappers requiere 1 kg de plástico y 4 minutos de producción por docena.

El plan de producción actual se establece mediante los siguientes criterios:

- Fabricar la mayor cantidad del producto que deje más beneficios, el cual corresponde a Space Ray (8 €de utilidad por docena).
- Usar la menor cantidad de recursos para producir Zappers, porque estos dejan una menor utilidad (5 €de utilidad por docena).

El plan de producción actual es, por tanto:

- Space Rays = 550 docenas.
- Zappers = 100 docenas.

Obteniéndose una utilidad Z de 4.900 €por semana.
Las variables de decisión son:

$$x_1 = Produccion\_Space\_Rays\_(en\_docenas\_por\_semana).$$

$$x_2 = Produccion\_Zappers\_(en\_docenas\_por\_semana).$$

Se pide:

1. Emplear el método gráfico para visualizar las restricciones. Calcular Z, x_1 y x_2 para el plan de producción actual. (3 puntos)
2. ¿Se puede hacer mejor? ¿Cómo? (4 puntos)
3. Calcular Z, x_1 y x_2 para el mejor plan de producción sin Zapper. (1 punto)
4. Calcular Z, x_1 y x_2 para el mejor plan de producción sin Space Ray. (1 punto)
5. ¿$x_1 = 100$; $x_2 = 150$ es una solución factible? ¿Por qué? (0,5 puntos)
6. ¿$x_1 = 500$; $x_2 = 150$ es una solución factible? ¿Por qué? (0,5 puntos)

2. Modelización

Como viene enunciado en el apartado anterior, las variables que veremos en nuestro modelo serán Z el beneficio, x_1 la produción de Space Rays (en docenas por semana) y x_2 la produción de Zappers (en docenas por semana).

Obtenemos la función objetivo a partir de los puntos que nos dan tras la frase '*El plan de producción actual se establece mediante los siguientes criterios*'. Como queremos maximizar el beneficio, lo que nos importa son las ganancias que obtenemos por cada producto. Sabemos que una docena de Space Rays nos da 8 €y una docena de Zappers 5 €. Por lo tanto, la función objetivo que buscamos tiene la siguiente forma:

$$Max(Z) = 8x_1 + 5x_2$$

Lo siguiente que tenemos que buscar son las restricciones que nos impone la industria durante la producción de dichos productos. Aunque no esté enunciado en el texto, no es posible hacer producciones negativas, por lo tanto:

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

- Restricción 1:

  El número de docenas de Space Rays no puede exceder al número de docenas de Zappers por más de 450. Que matemáticamente se representa de la siguiente manera:

  $$x_1 \leq x_2 + 450$$

  Esta restricción se grafica de la siguiente manera:

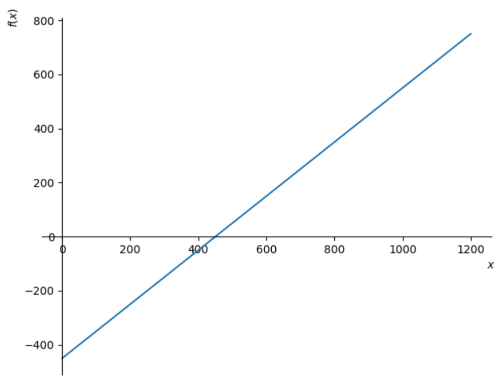

Figura 1: Restricción 1

De momento, las soluciones factibles deben estar por encima de esta función y en el primer cuadrante.

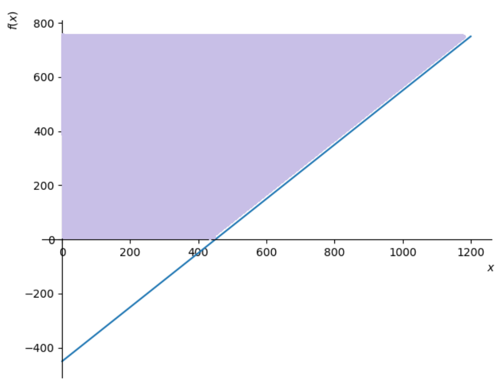

Figura 2: Área factible Restricción 1

- Restricción 2:

  La producción total no puede exceder de 800 docenas. Básicamente nos dice que la suma de las producciones en docenas de los Space Rays y los Zappers debe de ser menor o igual que 800.

$$x_1 + x_2 \leq 800$$

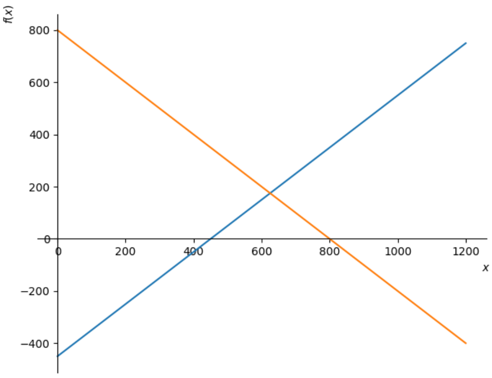

Figura 3: Restricciones 1 y 2

Ahora se reduce el área factible:

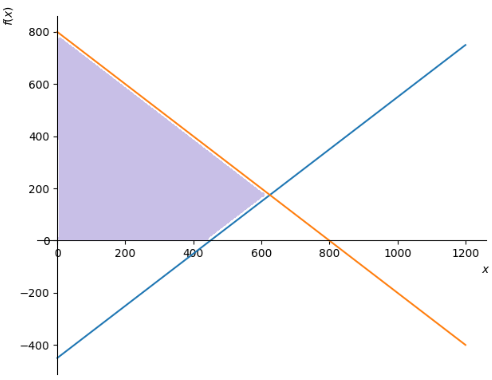

Figura 4: Área factible Restricciones 1 y 2

- Restricción 3:

  El texto nos indica que tan sólo se pueden usar 1200 kg de plástico por semana. Pero además, sabemos que los Space Rays requieren 2kg de plástico y los Zappers 1kg. Por lo tanto, nuestra restricción sería:

$$2x_1 + x_2 \leq 1200$$

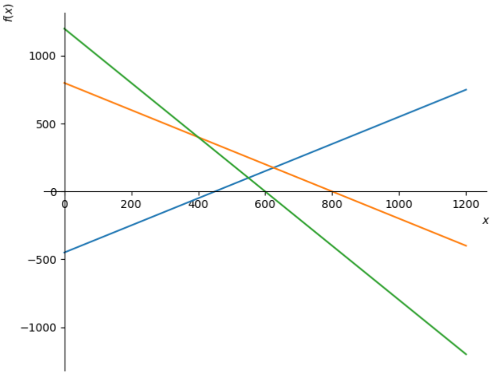

Figura 5: Restricciones 1, 2 y 3

Y de nuevo, tenemos un área factible más reducida

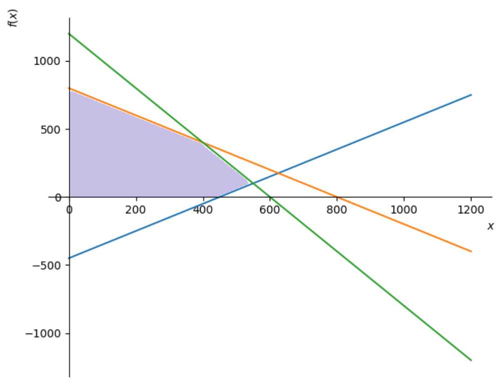

Figura 6: Área factible Restricciones 1, 2 y 3

- Restricción 4:

  La última restricción de nuestro problema es sobre el tiempo de producción. Los Space Rays tardan 3 minutos en producirse y los Zappers 4 minutos. Por otro lado, la producción semanal no puede superar las 40 horas, que en minutos serían 2400.

$$3x_1 + 4x_2 \leq 2400$$

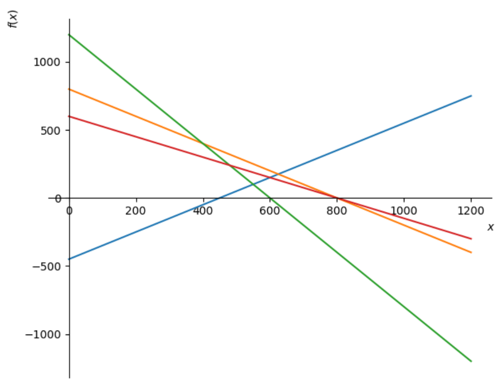

Figura 7: Restricciones

Finalmente, el área factible, donde encontraremos todas nuestras posibles soluciones, tiene la siguiente forma:

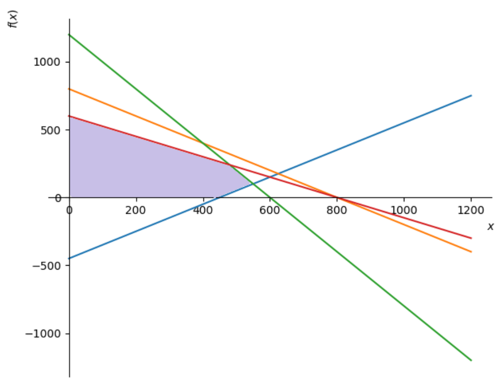

Figura 8: Área factible

3. Cuestiones

3.1. Cuestión 1

Emplear el método gráfico para visualizar las restricciones. Calcular Z, x_1 y x_2 para el plan de producción actual.

Como ya hemos visto anteriormente, las restricciones gráficamente se ven así:

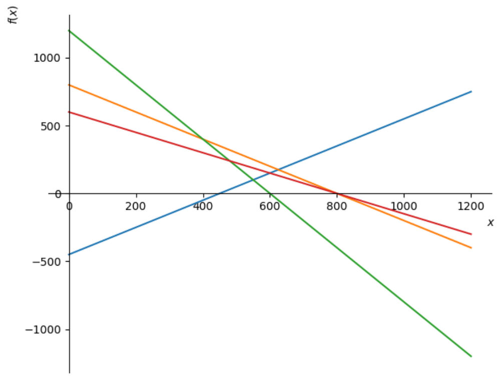

Figura 9: Restricciones

Para el plan de producción actual, el enunciado nos aporta las soluciones:

$$x_1 = 550$$

$$x_2 = 100$$

$$Z = 4900$$

Visualmente, dicha maximización equivale al punto de intersección entre las rectas azul y verde de nuestra gráfica.

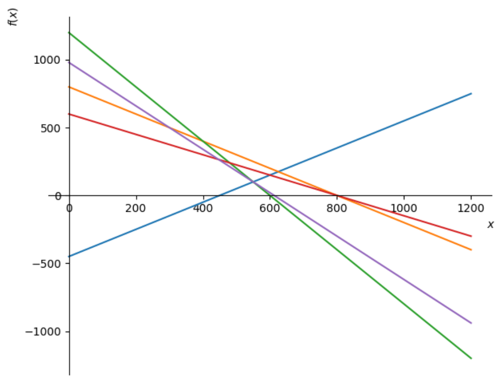

Figura 10: Solución $Z = 4900$

3.2. Cuestión 2

¿Se puede hacer mejor? ¿Cómo?

Si observas atentamente, puedes ver que hay solución más óptima, la cual coincide con la intersección de las funciones verde y roja que corresponden respectivamente con las restricciones 3 y 4. Calculamos la intersección mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1200 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2400 \end{cases}$$

Y obtenemos como solución:

$$x_1 = 480, x_2 = 240$$

Por último, calculamos Z sustituyendo los valores de las variables de decisión en nuestra función objetivo.

$$Z = 8 \times 480 + 5 \times 240$$

$$Z = 5040$$

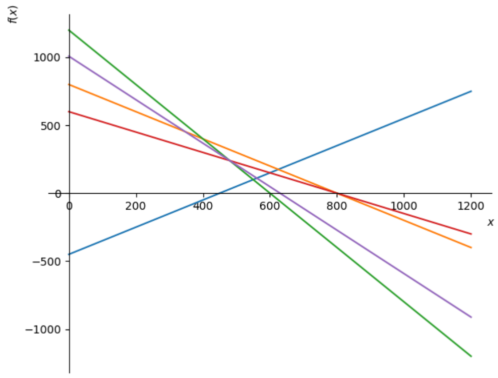

Figura 11: Solución $Z = 5040$

3.3. Cuestión 3

Calcular Z, x_1 y x_2 para el mejor plan de producción sin Zapper.

Al no contar con la variable x_2, sabemos que nuestra nueva solución se va a mover a lo largo del eje X. Si observamos nuestra gráfica de restricciones podemos ver que, dentro del área factible, la función que se cruza con el eje X es la recta azul, que corresponde con la primera restricción. Para calcular los valores x_1 y x_2 resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 + 450 \end{cases}$$

Como soluciones del sistema obtenemos que:

$$x_1 = 450, x_2 = 0$$

De nuevo, sustituyendo en la función objetivo calculamos Z.

$$Z = 8 \times 400 + 5 \times 0$$

$$Z = 3600$$

3.4. Cuestión 4

Calcular Z, x_1 y x_2 para el mejor plan de producción sin Space Ray.

Al no contar con la variable x_1, sabemos que nuestra nueva solución se va a mover a lo largo del eje Y ($f(x)$). Si observamos nuestra gráfica de restricciones podemos ver que, dentro del área factible, la función que se cruza con el eje Y es la recta roja, que corresponde con la cuarta restricción. Para calcular los valores x_1 y x_2 resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ 3x_1 + 4x_2 = 2400 \end{cases}$$

Como soluciones del sistema obtenemos que:

$$x_1 = 0, x_2 = 600$$

De nuevo, sustituyendo en la función objetivo calculamos Z.

$$Z = 8 \times 0 + 5 \times 600$$

$$Z = 3000$$

3.5. Cuestión 5

¿x_1 = 100; x_2 = 150 es una solución factible? ¿Por qué?

Sí, se trata de una solución factible ya que este punto está dentro de la región factible que definimos en la segunda sección del documento. A pesar de no ser una solución óptima, es una de las posibles soluciones que se pueden tomar para la producción de los Space Rays y los Zappers.

3.6. Cuestión 6

¿x_1 = 500; x_2 = 150 es una solución factible? ¿Por qué?

Al igual que en la cuestión 5, el punto dado es una solución factible ya que también se encuentra dentro de la región factible.

4. GitHub

Se ha añadido un código de Python a un repositorio de GitHub al cual pueden acceder pinchando **aquí**. Este código es el que hemos usado para representar las gráficas que hemos visto a lo largo de todo este documento.