Ejercicio 2, Programación Lineal, Investigación Operativa

Laura Rodríguez Lardiés

Octubre 2023

Resumen

En este documento trabajaremos sobre el ejercicio 2 propuesto en la asignatura de Investigación Operativa. Veremos diferentes modelos del texto y trabajaremos sobre diferentes variantes.

Índice

1. Enunciado

Asier es un estudiante emprendedor de tercer año en la UAX. Tiene la teoría de que solo estudiar y nada de diversión acabarán por convertirlo en un trol. Para evitarlo quiere distribuir su tiempo disponible para ambas tareas, a lo sumo 10 horas al día en total, entre el estudio y la diversión. Calcula que divertirse es dos veces más interesante que estudiar, pero cree que para poder cumplir con las tareas diarias de la universidad la diferencia entre las horas que dedica a divertirse y las que dedica a estudiar debe ser a lo sumo de 1 hora. Además, debe tener en cuenta que sus padres le permiten dedicar como máximo 4 horas a actividades lúdicas. ¿Cómo debe distribuir Asier su tiempo para conseguir que sea lo más interesante posible?

- **Variante 1**: Supongamos ahora que Asier valora exactamente igual las horas dedicadas a estudiar que las dedicadas a divertirse. ¿Cuál sería ahora la solución óptima?
- **Variante 2**: Si ahora eliminamos la restricción de que el número máximo de horas disponibles es de 10 horas ¿cuál sería la solución óptima del problema?
- **Variante 3**: ¿Cuál sería la solución óptima del problema si el objetivo de Asier fuera convertirse en un trol?
- **Variante 4**: Olvidémonos de ser un trol, no era una buena idea ¿Cuál sería la solución óptima del problema si el objetivo de Asier fuera divertirse lo máximo posible?

2. Modelos

Los diferentes modelos que hemos obtenido han sido por diferentes intrepretaciones que le hemos dado al texto del enunciado.

Antes de modelizar nada, debemos analiar el enunciado que nos han dado:
Asier es un estudiante emprendedor de tercer año en la UAX. Tiene la teoría de que solo estudiar y nada de diversión acabarán por convertirlo en un trol. Para evitarlo quiere distribuir su tiempo disponible para ambas tareas, a lo sumo 10 horas al día en total, entre el estudio y la diversión. Calcula que divertirse es dos veces más interesante que estudiar, pero cree que para poder cumplir con las tareas diarias de la universidad la diferencia entre las horas que dedica a divertirse y las que dedica a estudiar debe ser a lo sumo de 1 hora. Además, debe tener en cuenta que sus padres le permiten dedicar como máximo 4 horas a actividades lúdicas. ¿Cómo debe distribuir Asier su tiempo para conseguir que sea lo más interesante posible?

Sabemos que tenemos que maximizar la función objetivo que tengamos, ya que al final del enunciado nos preguntan cómo maximizar el tiempo interesante de Asier. Por lo tanto, ya queda definida nuestra variable a maximizar Z, el tiempo interesante.

$$Z = tiempo\_interesante$$

A partir de las frases que hemos subrayado del texto, podemos obtener la función objetivo y las restricciones. Para determinar todas estas ecuaciones, primero debemos definir las variables presentes en dichas ecuaciones. Ya hemos visto cuál es la variable Z, pero nos queda ver qué es el estudio y qué es la diversión:

$$x_1 \rightarrow estudio$$

$$x_2 \rightarrow diversion$$

Una vez definidas todas las variables, podemos comenzar a modelizar el texto.

Para empezar, las soluciones siempre serán posiivas, ya que no podemos tener tiempo de estudio negativo ni horas de diversión negativas, por lo tanto, las primeras restricciones son

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

1. *a lo sumo 10 horas al día en total, entre el estudio y la diversión*:

   Esta frase nos indica que la suma entre la variable estudio (x_1) y la variable diversión (x_2) debe de ser menor o igual que 10 (a lo sumo 10, es decir, como máximo 10 horas).

   Por lo tanto, queda definida nuestra primera restricción:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

2. *divertirse es dos veces más interesante que estudiar*:

   Esta frase se trata de una afirmación, por lo tanto de aquí no sacamos ninguna restricción, pero sí que sacamos nuestra función objetivo. Queremos maximizar Z, el interés, y el interés es la suma de el estudio y la diversión, la cual es dos veces más interesante que estudiar. Por lo tanto, nuestra función objetivo tendrá la siguiente forma:

   $$Max(Z) = x_1 + 2x_2$$

3. *la diferencia entre las horas que dedica a divertirse y las que dedica a estudiar debe ser a lo sumo de 1 hora*:

   En este segmento de texto podemos entender que la resta entre una variable y otra debe de ser menor o igual que 1 (a lo sumo 1, es decir, como máximo 1 hora). De esta restricción podemos sacar varias interpretaciones diferentes:

   a) $x_2 - x_1 \leq 1$. En esta interpretación consideramos que la diversión menos el estudio debe de ser menor que 1 hora. Esta interpretación es la que usaremos en el Modelo 1.

   b) $x_1 - x_2 \leq 1$. En esta interpretación consideramos que el estudio menos la diversión debe de ser menor que 1 hora. Esta interpretación es la que usaremos en el Modelo 2.

   c) $|x_2 - x_1| \leq 1$. En esta interpretación tomamos tanto la interpretación a) como b) en consideración. Creemos que la diversión menos el estudio debe de ser menor que 1 hora y también que el estudio menos la diversión debe de ser menor que 1 hora. De esta inerpretación, por lo tanto, sacamos dos restricciones cuando aplicamos el valor absoluto: $x_2 - x_1 \leq 1$ y $x_1 - x_2 \leq 1$. Esta interpretación es la que usaremos en el Modelo 3.

4. *dedicar como máximo 4 horas a actividades lúdicas*:

   Las actividades lúdicas, es decir, la diversión (x_2) no pueden superar las 4 horas. Por lo tanto la variable diversión debe de ser menor o igual que 4. Nuestra última restricción sería:

   $$x_2 \leq 4$$

2.1. Modelo 1

En el primer modelo hemos sacado que la función objetivo es:

$$Max(Z) = x_1 + 2x_2$$

Y las restricciones:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \leq 4$$

Si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

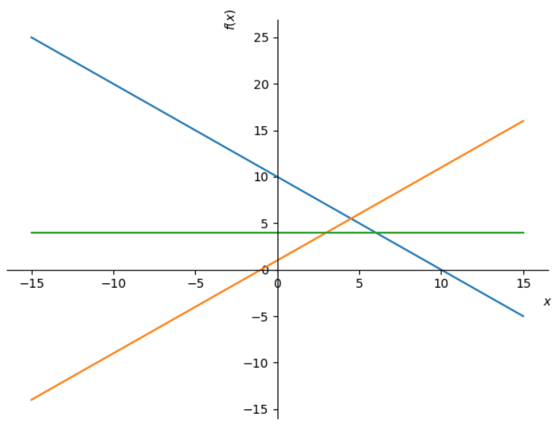

Figura 1: Restricciones Modelo 1

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

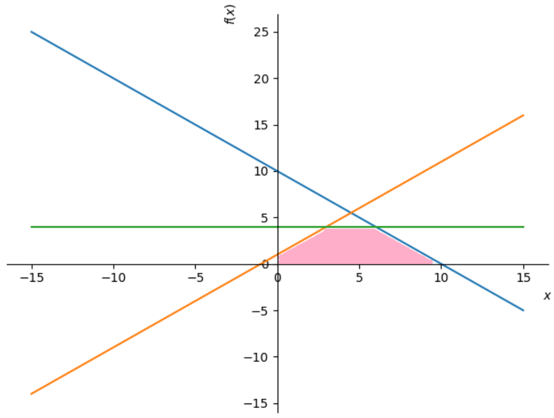

Figura 2: Área Factible Modelo 1

A partir de la función objetivo, graficamos varias rectas dándole diferentes valores a Z y así podemos obtener la solución de este modelo.

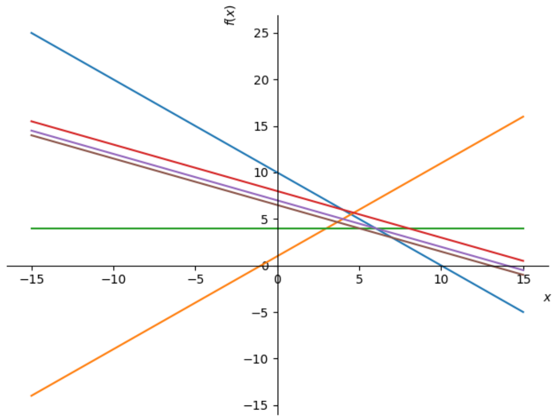

Figura 3: Modelo 1

Observamos que la recta roja (Z=16) queda fuera de nuestra región factible y por lo tanto dicho valor de Z no puede ser solución. Por otro lado, la recta marrón (Z=13), a pesar de estar dentro de la región factible, no es el máximo valor que le podemos dar a Z que esté dentro de dicha región. La recta morada (Z=14) es la que queda dentro de la región factible y que le da el máximo valor posible a Z, así que ya podemos decir que hemos maximizado el tiempo interesante de Asier, con el valor de Z=14. Esto quiere decir que la diversión, x_2, vale 4 y el estudio, x_1, es 6.

2.2. Modelo 2

En este modelo la función objetivo es

$$Max(Z) = x_1 + 2x_2$$

Y las restricciones:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \leq 4$$

Si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

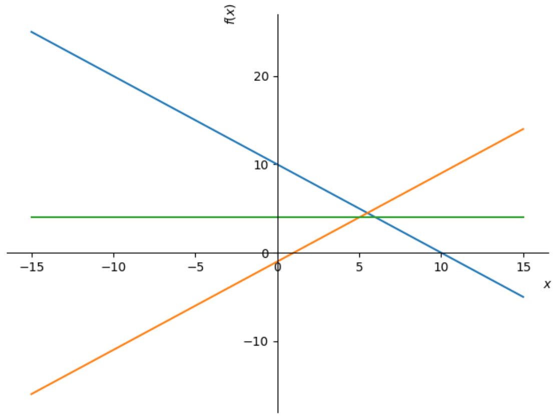

Figura 4: Restricciones Modelo 2

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

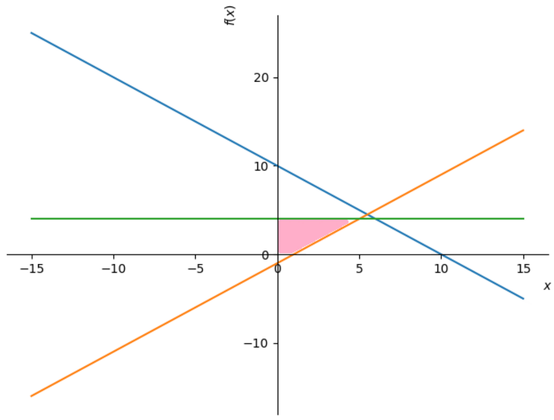

Figura 5: Área Factible Modelo 2

A partir de la función objetivo, graficamos varias rectas dándole diferentes valores a Z y así podemos obtener la solución de este modelo.

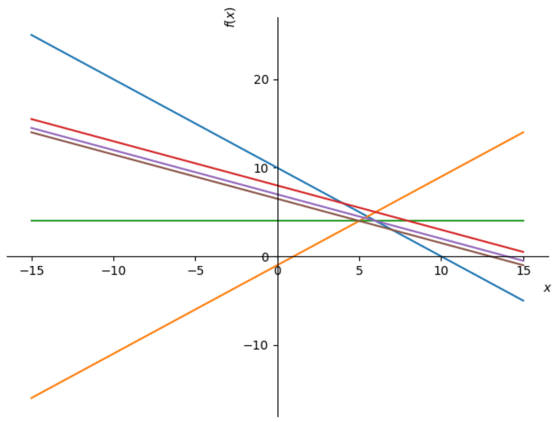

Figura 6: Modelo 2

Observamos que tanto la recta roja (Z=16) como la morada (Z=14) quedan fuera de la región factible, por lo que nunca pueden ser solución. Por otro lado, la recta marrón (Z=13) nos da el máximo valor posible de Z dentro de la región factible, así que ya hemos maximizado nuestra función objetivo. Esto quiere decir que la diversión, x_2, vale 4 y el estudio, x_1, es 5.

2.3. Modelo 3

En este modelo la función objetivo es

$$Max(Z) = x_1 + 2x_2$$

Y las restricciones:

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \leq 4$$

Si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

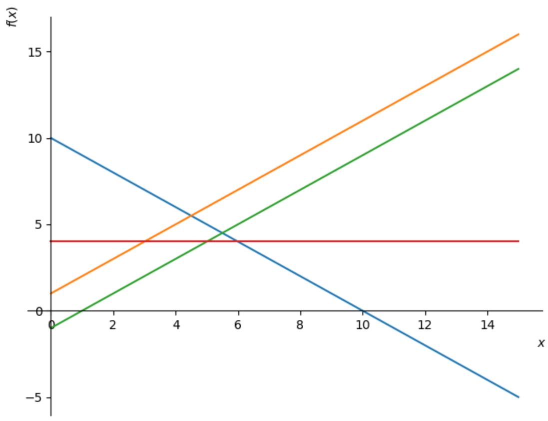

Figura 7: Restricciones Modelo 3

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

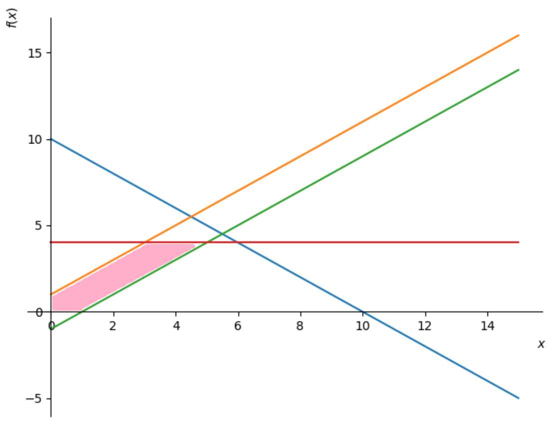

Figura 8: Área Factible Modelo 3

A partir de la función objetivo, graficamos varias rectas dándole diferentes valores a Z y así podemos obtener la solución de este modelo.

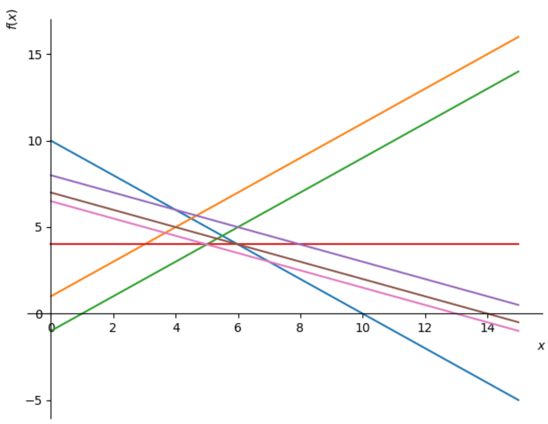

Figura 9: Modelo 3

Observamos que tanto la recta morada (Z=16) como la marrón (Z=14) quedan fuera de la región factible, por lo que nunca pueden ser solución. Por otro lado, la recta rosa (Z=13) nos da el máximo valor posible de Z dentro de la región factible, así que ya hemos maximizado nuestra función objetivo. Esto quiere decir que la diversión, x_2, vale 4 y el estudio, x_1, es 5.

3. Variantes

Todas las variantes se han trabajado sobre el **Modelo 1** que ya hemos visto, debido a que consideramos que es el más apropiado de todos los modelos propuestos.

3.1. Variante 1

Supongamos ahora que Asier valora exactamente igual las horas dedicadas a estudiar que las dedicadas a divertirse. ¿Cuál sería ahora la solución óptima?

En esta variante ya no se valora más la diversión que el estudio, por lo que obtenemos una nueva función objetivo

$$Max(Z) = x_1 + x_2$$

Y las restricciones del Modelo 1

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \leq 4$$

Al igual que en el Modelo 1, si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

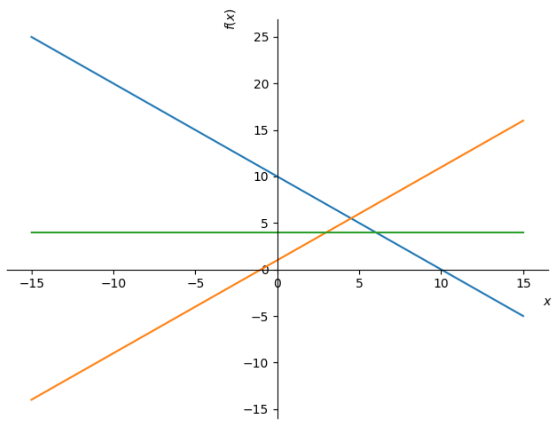

Figura 10: Restricciones Modelo 1 Variante 1

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

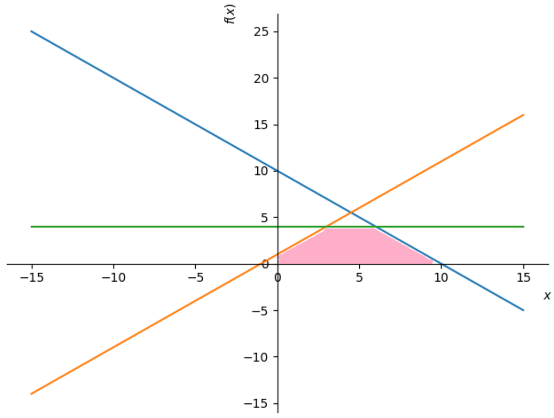

Figura 11: Área Factible Modelo 1 Variante 1

A partir de la nueva función objetivo, graficamos varias rectas dándole diferentes valores a Z y así podemos obtener la solución de esta variante.

Figura 12: Modelo 1 Variante 1

Podemos observar que las rectas de la función objetivo son paralelas a la de la restrticción $x_1 + x_2 \leq 10$. Por lo tanto, obtendremos un conjunto de soluciones, una solución múltiple, como solución de la optimización de esta variante.

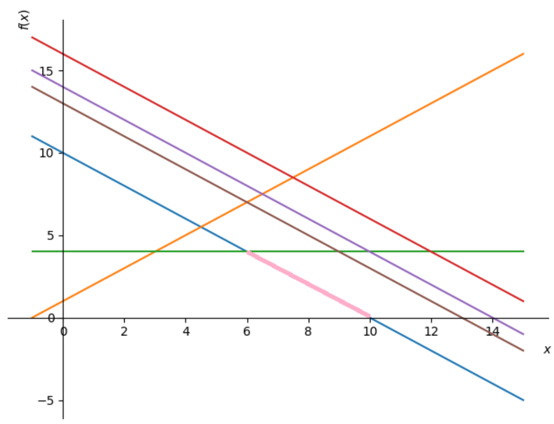

Figura 13: Solución Modelo 1 Variante 1

3.2. Variante 2

Si ahora eliminamos la restricción de que el número máximo de horas disponibles es de 10 horas ¿cuál sería la solución óptima del problema?

En esta variante la función objetivo es la misma que la del Modelo 1

$$Max(Z) = x_1 + 2x_2$$

Sin embargo, la Variante 2 tiene una restricción menos que el Modelo 1

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \leq 4$$

Si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

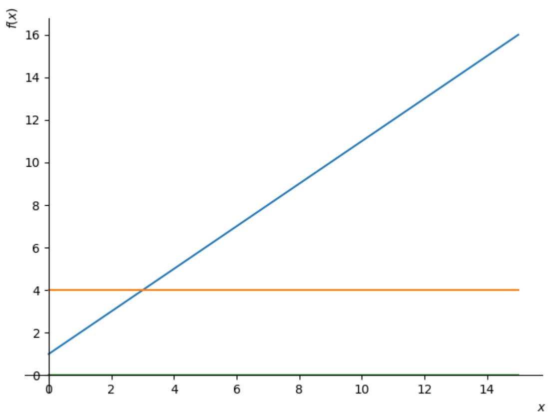

Figura 14: Restricciones Modelo 1 Variante 2

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

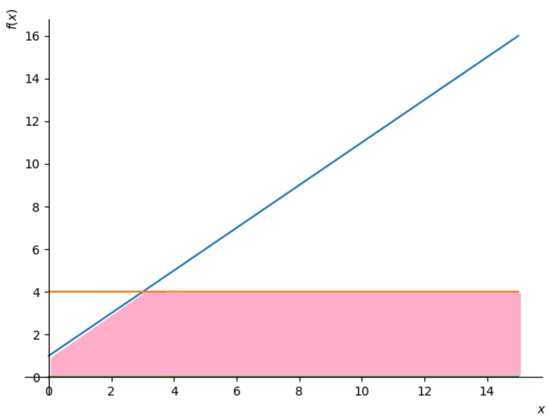

Figura 15: Área Factible Modelo 1 Variante 2

A partir de la función objetivo, graficamos varias rectas dándole diferentes valores a Z y así podemos obtener la solución de esta variante.

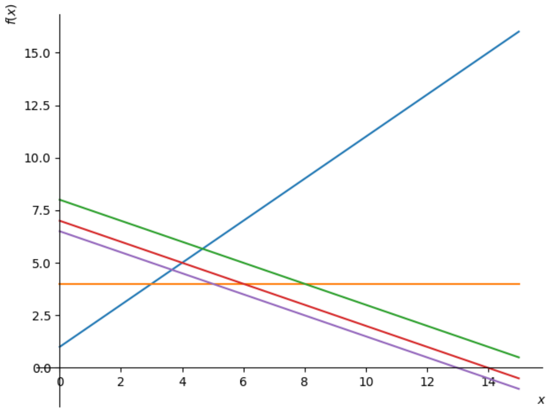

Figura 16: Modelo 1 Variante 2

Podemos observar que las rectas de la función objetivo pueden seguir infinitamente, ya que hacia la derecha no hay ninguna función que las restrinja. Por lo tanto, nuestra solución es no acotada.

3.3. Variante 3

¿Cuál sería la solución óptima del problema si el objetivo de Asier fuera convertirse en un trol?

Haciendo referencia a una frase del enunciado que dice '*solo estudiar y nada de diversión acabarán por convertirlo en un trol*'. Podemos concluir que para que Asier se convierta en un trol, se debe de añadir la restricción de que la diversión debe de ser 0. Si la diversión es 0, eso implica que dicha variable desaparece de nuestra función objetivo.

En esta variante ya no se valora la diversión, por lo que obtenemos una nueva función objetivo

$$Max(Z) = x_1$$

Y las restricciones del Modelo 1

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 = 0; x_2 \leq 4$$

Al igual que en el Modelo 1, si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

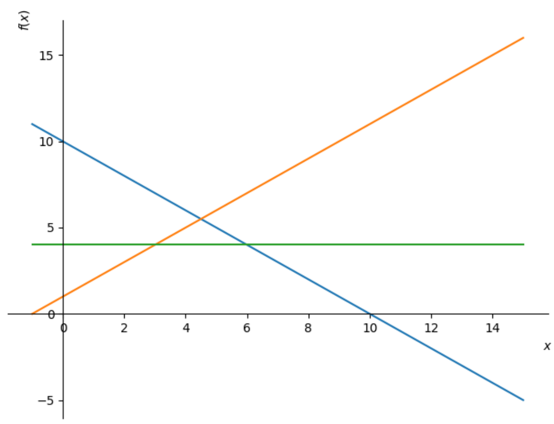

Figura 17: Restricciones Modelo 1 Variante 3

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

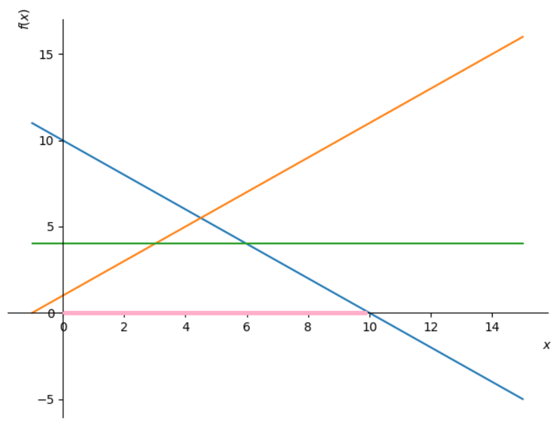

Figura 18: Área Factible Modelo 1 Variante 3

Debido a que la diversión es 0 ($x_2 = 0$), sabemos que nuestra región factible se apoya sobre el eje X. Al graficar nuestra nueva función objetivo, obetenemos un conjunto de lineas paralelas al eje Y. Por lo tanto, la que mayor valor le da a Z dentro de la región factible es Z=10. De esta manera, el estudio, x_1 vale 10 y la diversión, x_2 vale 0.

3.4. Variante 4

Olvidémonos de ser un trol, no era una buena idea ¿Cuál sería la solución óptima del problema si el objetivo de Asier fuera divertirse lo máximo posible?

En esta variante ya no se valora el estudio, queremos maximizar la diversión, por lo que obtenemos una nueva función objetivo

$$Max(Z) = x_2$$

Y las restricciones del Modelo 1

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$x_2 - x_1 \leq 1$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_2 \leq 4$$

Al igual que en el Modelo 1, si dibujamos las restricciones nos queda una gráfica tal que así, donde $x_1 = x$ y $x_2 = f(x)$.

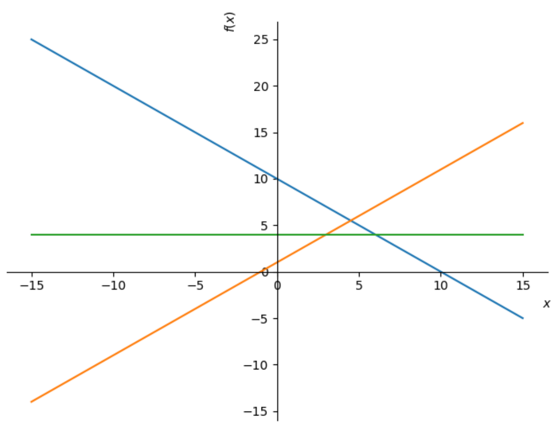

Figura 19: Restricciones Modelo 1 Variante 4

Teniendo en cuenta las desigualdades de las restricciones, nos queda este área factible, de la cual debemos sacar la solución óptima.

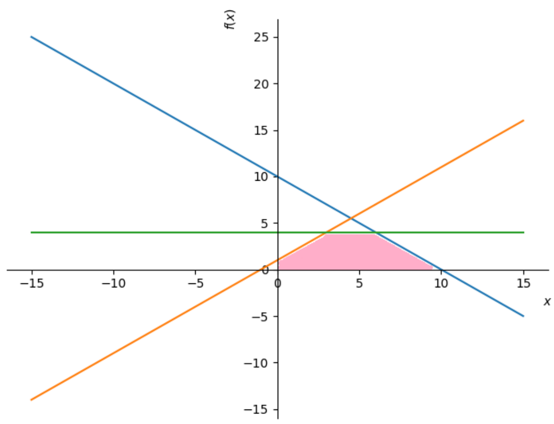

Figura 20: Área Factible Modelo 1 Variante 4

A partir de la nueva función objetivo, graficamos varias rectas dándole diferentes valores a Z y así podemos obtener la solución de esta variante.

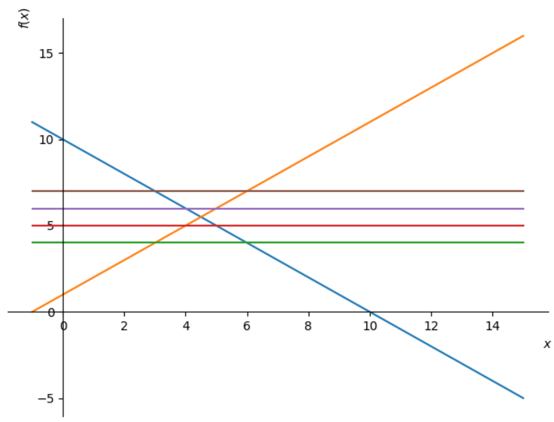

Figura 21: Modelo 1 Variante 4

Podemos observar que las rectas de la función objetivo son paralelas a la de la restrticción $x_2 \leq 4$. Por lo tanto, obtendremos un conjunto de soluciones, una solución múltiple, como solución de la optimización de esta variante.

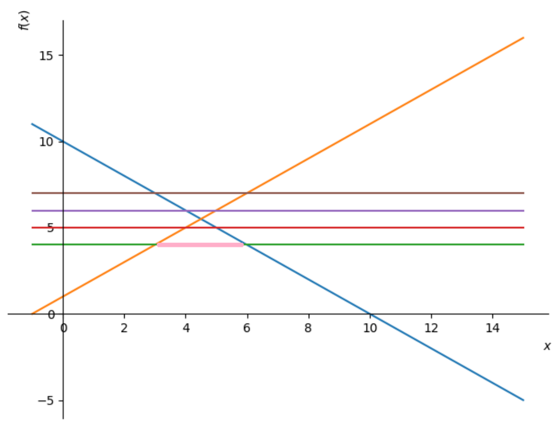

Figura 22: Solución Modelo 1 Variante 4

4. GitHub

Hemos incluido todo el código en un repositorio de GitHub al que puedes acceder haciendo click **aquí**. En este repositorio explicamos todo de nuevo en el archivo README.md e incluimos archivos de Python en los que se encuentra el código que grafica las restricciones y funciones objetivo que hemos comentado y visto a lo largo del documento.