Métodos Numéricos II

Laura Lázaro Soraluce

2022-2023

Tema 2

1. Se ha aplicado un proceso de integración Romberg basado en la fórmula del trapecio compuesta a una función $f(x)$ y ha resultado la siguiente tabla:

   $$\begin{array}{lllll} R(0,0) \\ R(1,0) & R(1,1) \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) \\ R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) \\ R(4,0) & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4) \end{array}$$

   Señale las afirmaciones correctas acerca del menor número posible de evaluaciones de f que se necesitan.

   - Para obtener $R(0,0)$ y $R(1,0)$ bastante tres evaluaciones de la función
   - Sólo es necesario hacer evaluaciones para calcular la primera columna
   - Para obtener $R(0,0)$, $R(1,0)$ y $R(2,0)$ bastan 5 evaluaciones de la función

2. Se ha aplicado un proceso de integración Romberg basado en la fórmula del trapecio compuesta a una función $f(x)$ y ha resultado la siguiente tabla:

   $$\begin{array}{llll} R(0,0) \\ R(1,0) & R(1,1) \\ R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) \\ R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) \end{array}$$

   ¿Cuál es el menor número posible de evaluaciones de f que se han necesitado?

   - 9

3. Fórmulas gaussianas

   - Para obtenerlas se calcula primero un polinomio cuyas raíces son los nodos de la fórmula

- Una desventaja que tienen frente a las fórmulas compuestas es su mayor complejidad y dificultad de obtención
- Para obtenerlas se calcula primero un polinomio cuyas raíces serán los nodos de la fórmula, y son todas reales y simples

4. El término error $R(f)$ de la fórmula simple del rectángulo derecha es...

   - $-\frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi)$

5. Se desea calcular el valor exacto de $\int_b^a p(x)dx$ siendo p un polinomio de grado 3. Señale las fórmulas de integración numérica que lo consiguen

   - La de Simpson simple
   - La de Newton-Cotes cerrada con tres nodos
   - La de Newton-Cotes cerrada de cuatro nodos
   - La Gaussiana con dos nodos
   - La Gaussiana con tres nodos

6. La fórmula simple de Newton-Cotes cerrada de 4 nodos requiere, obviamente, cuatro evaluaciones del integrando. ¿Cuántas evaluaciones necesita la correspondiente fórmula compuesta con 50 subintervalos?

   - 151

7. Grado de exactitud (tipo interpolatorio clásico)

   - No es posible obtener una fórmula de integración numérica con 7 nodos y grado de exactitud 15
   - Existe una sola fórmula de integración numérica con tres nodos, entre ellos los extremos, que tenga orden de exactitud 3

8. Señale las fórmulas de integración numérica que emplean punto medio

   - La fórmula simple del trapecio
   - La fórmula compuesta del rectángulo izquierda en dos subintervalos
   - La fórmula compuesta del punto medio en dos subintervalos
   - La fórmula compuesta del rectángulo derecha en dos subintervalos

9. ¿Cuántos nodos tiene una fórmula gaussiana exacta de grado 9?

   - 5

10. La fórmula simple de Simpson es exacta de grado 3, pero la compuesta con tres subintervalos es exacta de grado...

    - 3

11. Algunas fórmulas simples de integración numérica de tipo interpolatorio clásico se pueden obtener como combinación lineal de otras del mismo tipo. Señale las correctas. No se tienen en cuenta los restos $R(f)$. Emplearemos las siguientes abreviaturas naturales: R=rectángulo, P=punto medio, T=trapecio, S=Simpson, N=Newton-Cotes, c=cerrada, a=abierta, i=izquierda, d=derecha, x(número)=con x nodos.

    - $T = \alpha Ri + (1-\alpha)Rd$ para un cierto valor de $\alpha \in [0,1]$
    - $Nc4 = \alpha T + (1-\alpha)Na2$ para un cierto valor de $\alpha \in [0,1]$
    - $S = \alpha T + (1-\alpha)P$ para un cierto valor de $\alpha \in [0,1]$
    - $S = \alpha T + (1-\alpha)P$ para $\alpha = \frac{1}{3}$
    - $T = \alpha T + (1-\alpha)Rd$ para un cierto valor de $\alpha \in [0,1]$

12. Se ha aplicado un proceso de integración Romberg basado en la fórmula del trapecio compuesta a una función $f(x)$ y ha resultado la siguiente tabla:

    $$\begin{array}{llllll}
    R(0,0) & & & & & \\
    R(1,0) & R(1,1) & & & & \\
    R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & & \\
    R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & & \\
    R(4,0) & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4) & \\
    R(5,0) & R(5,1) & R(5,2) & R(5,3) & R(5,4) & R(5,5)
    \end{array}$$

    ¿Cuál es el menor número posible de evaluaciones de f que se han necesitado?

    - 33

13. La fórmula simple del trapecio es...

    - de Newton-Cotes cerrada
    - $\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

14. Se desea diseñar una fórmula de tipo interpolatorio

    $$y = \int_0^1 f(x)dx = \alpha_0 f(\frac{1}{2}) + \alpha_1 f(1) + R(f)$$

    pero imponiendo la restricción $\alpha_0 = \alpha_1$. Señale las afirmaciones correctas.

    - Coincide con la fórmula de tipo interpolatorio clásico que tiene como único dato la forma lineal $L_0(f) = f(\frac{1}{2}) + f(1)$
    - La media aritmética de la fórmula del punto medio y la del rectángulo derecha da el resultado pedido.
    - Sólo se puede imponer exactitud en $\mathbb{P}_0$, sale $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ y resulta ser exacta en $\mathbb{P}_0$

15. Se desea aproximar $\int_{-1}^{1} x^3 dx$

   - La integración adaptada a la variación de la función se detiene en la primera subdivisión del intervalo en dos subintervalos porque obtiene el mismo valor que usando el intervalo inicial $[-1, 1]$
   - Con cualquier fórmula de Gauss Legendre se aproxima por 0
   - Aplicando la fórmula simple de Simpson se obtiene el valor exacto. Una justificación es que en el error de Simpson aparece como factor la derivada cuarta de la función, $f^{(iv)}(\mu)$, y en este caso vale cero en todo punto μ del intervalo

16. Obtención de fórmulas

   - Los coeficientes o pesos de la fórmula coinciden con las integrales de los polinomios de Lagrange correspondientes
   - Es posible construir una fórmula de integración numérica con 8 nodos que tenga mayor grado de exactitud que otra con 13 nodos (ambas de tipo interpolatorio clásico)
   - Una fórmula de tipo interpolatorio clásico para la integración numérica puede obtenerse a partir del polinomio de interpolación escrito con la fórmula de Newton e integrándolo
   - Una fórmula de tipo interpolatorio clásico para la integración numérica, con nodos $x_0, ..., x_n$ puede obtenerse imponiendo exactitud para $1, x, ..., x^n$

17. Error en las fórmulas de integración de tipo interpolatorio clásico

   - es la integral del error de interpolación
   - es la integral de $f[x_0, ..., x_n, x](x - x_0)...(x - x_n)$
   - el teorema del valor medio permite sacar de la integral del error de interpolación un factor evaluado en un punto, siempre que sea una función continua y el factor que queda dentro de la integral sea integrable y no cambie de signo en el intervalo

18. Fórmulas compuestas

   - Las fórmulas compuestas permiten, teóricamente, obtener una integral con la precisión que se desee, aunque vayan asociadas a fórmulas simples con un sólo nodo
   - El grado de exactitud correspondiente a la fórmula del trapecio compuesta es el mismo que el de la fórmula del trapecio simple
   - Las fórmulas compuestas son convergentes, es decir, si el número de subintervalos tiende a infinito, el error de la fórmula tiende a cero
   - Al subdividir el intervalo de integración $[a, b]$ en nn intervalor de igual longitud, y aplicar en cada uno de ellos la fórmula del trapecio se obtiene la fórmula del trapecio compuesta

19. El término error $R(f)$ de la fórmula simple del punto medio es...
    - $\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$
20. El término error $R(f)$ de la fórmula simple de Simpson es...
    - $-\frac{1}{2880}(b-a)^5 f^{(iv)}(\xi)$
21. Una fórmula gaussiana tiene 25 nodos. Su grado de exactitud es...
    - al menos 25
    - exactamente 49
    - al menos 24
    - al menos 49
22. El grado de exactitud de la fórmula simple...
    - del punto medio es 1 a pesar de que usa un nodo
    - del trapecio es 1
23. Se desea diseñar una fórmula de integración de tipo interpolatorio clásico con datos derivadas:

    $$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f'(x_i) + R(f)$$

    Señale las afirmaciones verdaderas
    - Podría obtenerse una fórmula como la indicada, de tipo interpolatorio en el espacio generado por las funciones $\{x, x^2, x^3, ..., x^{n+1}\}$
    - No se puede, al obligar exactitud en 1 sale un sistema incompatible
24. Se desea una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $\int_0^1 f(x)dx$ conociendo $f(0)$ y $f(\frac{1}{2})$
    - Es posible, con independencia de dónde están los datos con respecto al intervalo
    - Es pposible, pero la fórmula resultante sólo será exacta en $\mathbb{P}_1$
25. Grado de exactitud (se supone que el peso es 1). Sea $\Pi(x) = (x-x_0)(x-x_1)...(x-x_n)$
    - Si una fórmula de integración con nodos $x_0, ..., x_n$ tiene grado de exactitud $2n+1$, entonces ningún nodo puede coincidir con uno de los extremos del intervalo de integración.
    - Si una fórmula de integración con nodos $x_0, ..., x_n$ tiene grado de exactitud $n+1$, entonces la integral de $\Pi(x)$ vale cero

- Si una fórmula de integración con nodos $x_0, ..., x_n$ tiene grado de exactitud $2n+2$, entonces sería exacta para $\Pi^2(x)$, que tiene grado $2n+2$, y es positiva en $\mathbb{R}$, excepto en todos los nodos (que se anula)
- Si una fórmula de integración con nodos $x_0, ..., x_n$ tiene grado de exactitud $n+2$, entonces la integral de $(x-x_0)\Pi(x)$ vale cero

26. Se desea aproximar
$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{\sqrt{(x+2)}} dx$$
    - Si se aplica la fórmula simple del rectángulo derecha, vale $\frac{3}{2}$
    - Si se aplica la fórmula simple del rectángulo izquierda, vale 3
    - Si se aplica la fórmula simple del trapecio, vale $\frac{9}{4}$

27. La fórmula simple de Simpson requiere tres evaluaciones del integrando. ¿Cuántas evaluaciones necesita la fórmula compuesta de Simpson con 50 subintervalos?
    - 101

28. Fórmula simple
    - La fórmula del punto medio tiene grado de exactitud uno
    - La fórmula del trapecio tiene grado de exactitud uno

29. La fórmula simple del trapecio requiere dos evaluaciones del integrando. ¿Cuántas evaluaciones necesita la fórmula compuesta del trapecio con 50 subintervalos?
    - 51

30. Fórmulas gaussianas
    - La fórmula de Gauss Chebyshev tiene como intervalo el $[-1, 1]$
    - La fórmula de Gauss Legendre tiene como intervalo el $[-1, 1]$
    - La fórmula de Gauss Chebyshev tiene función peso $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

31. Si tiene total libertad para usar una fórmula de integración numérica, entre las conocidas, y la función a integrar es fácil de evaluar en todos los puntos de $[a, b]$, optará por usar:
    - La de Simpson

32. Supongamos que tenemos dos fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio clásico para la misma forma lineal:
$\int_a^b \omega(x)f(x)dx = F_1 + R_1(f)$ exacta de grado g_1
$\int_a^b \omega(x)f(x)dx = F_2 + R_2(f)$ exacta de grado g_2
La fórmula que se obtiene como media aritmética de ambas, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$, es siempre exacta de grado...

- al menos $\min(g_1, g_2)$
- no inferior a g_1 o a g_2

33. Se desea aproximar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

    - La fórmula simple del punto medio da $\sqrt{2}$
    - La fórmula simple del rectángulo derecha da 1
    - No es posible obtener la aproximación con una fórmula de Newton-Cotes cerrada

34. Supongamos que tenemos dos fórmulas de integración numérica de tipo interpolatorio clásico para la misma forma lineal:
    $\int_a^b \omega(x) f(x) dx = F_1 + R_1(f)$ exacta de grado g_1
    $\int_a^b \omega(x) f(x) dx = F_2 + R_2(f)$ exacta de grado g_2
    Sean $\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \in [0.6, 1]$, $\beta, \beta_1, \beta_2 \in [0.7, 1]$, $\gamma, \gamma_1, \gamma_2 \in [0.8, 1]$. Señale, de entre las siguientes, las fórmulas que son exactas de grado por lo menos $\min(g_1, g_2)$

    - $F = \beta F_1 + (1 - \beta) F_2$
    - $F = \gamma F_1 + (1 - \gamma) F_2$
    - $F = \alpha F_1 + (1 - \alpha) F_2$

35. Las fórmulas gaussianas...

    - son fórmulas simples
    - tienen el máximo grado posible de exactitud

36. Se dispone de una serie de fórmulas simples F_i, $i = 1, ..., m$ de integración numérica de tipo interpolatorio clásico, y se desea obtener una fórmula simple F también de tipo interpolatorio clásico mediante una combinación lineal de todas ellas:
    $$F = \sum_{i=1}^{m} \beta_i F_i$$
    Teniendo en cuenta que cada F_i usa valores lagrangianos de f en $n_i + 1$ nodos y tiene grado $g_i \geq n_i$ de exactitud, señale las condiciones que son necesarias para que se cumpla lo pedido

    - Con las condiciones que he señalado como necesarias, no es suficiente
    - $\sum_{i=1}^{m} \beta_i = 1$

37. La fórmula compuesta del punto medio con dos subintervalos equivale a la simple de Newton-Cotes abierta de dos nodos

    - F

38. Función peso

- Da nombre a algunas fórmulas gaussianas.
- La función peso hay que incluirla en el integrando junto con los polinomios de Lagrange para calcular los coeficientes de la fórmula

39. El término error $R(f)$ de la fórmula simple del trapecio es...
    - $-\frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\xi)$
40. El término error $R(f)$ de la fórmula simple del rectángulo izquierda es...
    - $\frac{1}{2}(b-a)^2 f'(\xi)$
41. Señale las fórmulas de integración numérica que emplean dos puntos
    - La fórmula compuesta del rectángulo derecha en dos subintervalos
    - La fórmula compuesta del rectángulo izquierda en dos subintervalos
    - La fórmula simple del trapecio
    - La fórmula compuesta del punto medio en dos subintervalos
42. Se desea aproximar $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Se puede usar la fórmula simple...
    - del rectángulo derecha
    - del punto medio
    - de Newton-Cotes abierta con 2 nodos
    - de Newton-Cotes abierta con uno o 2 nodos
43. La fórmula compuesta en dos intervalos de Newton-Cotes abierta con dos nodos equivale a la simple abierta con cuatro nodos
    - F
44. La fórmula simple de Newton-Cotes abierta de 4 nodos requiere, obviamente, cuatro evaluaciones del integrando. ¿Cuántas evaluaciones necesita la correspondiente fórmula compuesta con 50 subintervalos?
    - 200
45. Se ha aplicado un proceso de integración Romberg basado en la fórmula del trapecio compuesta a una función $f(x)$ y ha resultado la siguiente tabla:

$$\begin{array}{lllll}
R(0,0) & & & & \\
R(1,0) & R(1,1) & & & \\
R(2,0) & R(2,1) & R(2,2) & & \\
R(3,0) & R(3,1) & R(3,2) & R(3,3) & \\
R(4,0) & R(4,1) & R(4,2) & R(4,3) & R(4,4)
\end{array}$$

¿Cuál es el menor número de evaluaciones de f que se han necesitado?

- 17

46. La integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2+9}$ no puede aproximarse con la fórmula de Simpson porque el intervalo de integración es no acotado. Sin embargo, con el cambio de variable $x = \frac{1}{t}$ sí que se puede, y el resultado es...

    - 0.388462...

47. Se desea aproximar $\int_{-1}^1 x^3 dx$

    - Con la fórmula de Simpson vale 0
    - Con la fórmula de punto medio vale 0
    - Todas las fórmulas de Gauss Legendre, cualquiera que sea el número de nodos, darán el valor exacto de esta integral

48. Integración Romberg

    - Se basa en combinar dos valores de la fórmula del trapecio compuesta cuyos subintervalos miden en un caso la mitad que en el otro y con esa combinación, se puede pasar de tener un error proporcional a h^2 a otro proporcional a h^4
    - Está relacionada con la fórmula del trapecio compuesta

49. Se desea aproximar

$$\int_{-1}^{1} |x| dx$$

    - Con la fórmula simple del rectángulo derecha, vale 2
    - Con la fórmula simple del rectángulo izquierda, vale 2
    - Para este problema son exactas todas las fórmulas compuestas con dos subintervalos correspondientes al rectángulo derecha, rectángulo izquierda, punto medio, trapecio y Simpson
    - Con la fórmula simple del trapecio, vale 2
    - Con la fórmula de Simpson compuesta con dos subintervalos, vale 1

50. Grado de exactitud

    - De la fórmula del trapecio es uno
    - De la fórmula de Simpson es tres
    - De la fórmula del punto medio es uno

Tema 3

1. La condición $|f(t,v) - f(t,w)| \leq L|v-w|$...

   - se llama condición de Lipschitz
   - se llama condición de contractibilidad cuando $L < 1$
   - implica que f es continua respecto de su segunda variable
   - junto con la continuidad de f en su primera variable, asegura la existencia de solución del PVI $x' = f(t,c)$, $x(t_0) = \mu$

2. Fórmula simple

   - La fórmula de Simpson aproxima la integral de f en $[0,6]$ por $f(0) + 4f(3) + f(6)$
   - La fórmula del punto medio aproxima la integral de f en $[a,b]$ por $f(\frac{a+b}{2})(b-a)$
   - La fórmula del rectángulo izquierda aproxima la integral de f en $[a,b]$ por $f(a)(b-a)$
   - La fórmula del trapecio aproxima la integral de f en $[0,1]$ por $\frac{f(0)+f(1)}{2}$

3. Cuando el error de truncatura local de un método cumple

   $$\lim_{h \to 0} \frac{R_n + 1}{h} = 0$$

   se dice que el método...

   - tiene orden $p \geq 1$
   - es consistente

4. El orden p de algunos métodos es:

   - Punto medio $p = 2$ y Runge Kutta clásico $p = 4$
   - Euler $p = 1$ y Euler mejorado $p = 2$
   - Euler implícito $p = 1$, Euler mejorado $p = 2$ y Runge Kutta clásico $p = 4$

5. Sea el PVI: $x' = f(t,x)$, $x(a) = v$, donde la variable t toma valores en el intervalo $[a,b]$

   - El valor $t(t_n, x_n)$ es una aproximación de $x'(t_n)$
   - Los valores $t_n = a + \frac{b-a}{N}n$, con $n = 0, 1, ..., N$, siendo N un número entero, son los nodos y $h = \frac{b-a}{N}$ es el paso o la longitud de paso

6. Sea el P.V.I $x' = -2t - x$, $x(0) = -1$. Se desea aproximar con el método del punto medio el valor de $x(0.5)$ cuyo valor con dos decimales, a partir de la solución exacta, es $x(0.5) \simeq -0.82$

- Si se hace en un sólo paso, la aproximación que se obtiene es: -0.875

7. Un método de un paso $x_0 = valorinicial$, $x_{n+1} = x_n + h\phi(x_{n+1}, x_n; t_n, h)$ es consistente si y sólo si...

   - su primer polinómio característico $p(\lambda)$ verifica

   $$\begin{cases} p(1) = 0 \\ \phi(x(t_n), x(t_n); t_n, 0) = p'(1) f(t_n, x(t_n)) \end{cases}$$

   - $$lim_{h\to 0} \frac{R_{n+1}}{h} = 0$$

   - $$lim_{N\to\infty} \max_{0\le n\le N} |x_n - x(t_n)| = 0$$

8. El método $x_{n+1} = x_n + \frac{h}{4}(f(t_n, x_n) + 3f(t_n + \frac{2h}{3}, x_n + \frac{2h}{3} f(t_n, x_n)))$

   - Es un método de tipo Runge Kutta de 2 evaluaciones
   - Su orden es $p = 2$
   - Aplicado para aproximar de un solo paso el valor de la solución que verifica el PVI: $x' = -2t - x$, $x(0) = -1$ en el punto $t = 0.6$ se obtiene $x_1 = -0.94$

9. El método de Euler para un PVI

   - Es un método de Taylor de orden 1
   - Es un método explícito
   - Es un método cuyo error de truncatura local acumula un error global proporcional a h

10. El método de Euler para PVI

    - Puede obtener la aproximación de x_{n+1} a través de la tangente a la solución que pasa por (t_n, x_n) evaluada en t_{n+1}
    - El método de Euler modificado (Heun) presenta una mejora del método de Euler, cara al error de truncatura local, similar a la mejora que representa la fórmula del trapecio con respecto a la del rectángulo izquierda, en la integración numérica de funciones
    - Es lento, de hecho el efecto de su error local acumulado al final del intervalo hace que la cota de su error global sea proporcional a h
    - Su error de truncatura local es del orden de $O(h^2)$

11. Sea el P.V.I $x' = -2t - x$, $x(0) = -1$. Se desea aproximar con varios métodos el valor de $x(0.5)$ cuyo valor con dos decimales, a partir de la solución exacta, es $x(0.5) \simeq -0.82$

- Si aplicamos el método de Euler con $h = 0.5$ obtenemos $x(0.5) \simeq x_1 = -0.5$
- El error de truncatura local R_{n+1} para los métodos de Euler y Euler implícito contiene la misma potencia de h en el término principal
- Si aplicamos el método de Euler implícito con $h = 0.5$ obtenemos $x(0.5) \simeq x_1 = -1$

12. Resolvemos aproximadamente un PVI con un método de discretización. Señale las afirmaciones correctas

    - Si es un método de Runge-Kutta explícito con dos evaluaciones evaluamos en cada paso una función en dos puntos diferentes
    - El método de Euler implícito es un método de Runge-Kutta con una evaluación
    - El método del punto medio es un método Runge-Kutta con 2 evaluaciones
    - Si es un método de Taylor de orden 2, en cada paso necesitamos calcular dos derivadas y evaluarlas en un mismo punto

13. Se pretende usar el método de Taylor de orden $p = 2$ para el PVI $x' = 2x^2t + x$, $x(0) = 1$ en el intervalo $[0, 0.5]$. Todos los resultados se muestran redondeados a tres cifras decimales

    - Si $h = 0.3$, entonces $x_1 = 1.435$
    - $x_1 = 1 + h + \frac{3}{2}h^2$
    - Si $h = 0.1$, entonces $x_2 = 1.274$

14. Si el error global de un método cumple

    $$\lim_{h \to 0} e_n = 0$$

    entonces el método es convergente

    - V

15. La diferencia $e_n = x(t_n) - x_n$ entre la solución exacta a un PVI y la aproximada por algún método de discretización se denomina

    - Error de truncatura global
    - Error global

16. Se considera el PVI siguiente: $x' = |x| - t$, $x(0) = 2$, con $t \in [0, 1]$

    - Tiene solución y es única porque $f(t, x)$ es lipschitziana
    - Con $h = 0.1$ la primera aproximación que se obtiene con el método de Euler vale $x_1 = 2.2$

17. Dado un método de un paso $x_{n+1} = x_n + h\phi(x_n; t_n, h)$ en el que ϕ es Lipschitziana, podemos asegurar que

    - Siempre es estable
    - Si es convergente entonces es consistente
    - Si se cumple $\lim_{h\to 0} \frac{R_{n+1}}{h} = 0$, entonces es convergente

18. Si el error global de un método cumple

$$\lim_{h\to 0} e_n = 0$$

    entonces el método es consistente

    - V

19. Métodos numéricos de discretización para PVI

    - Todo método consistente y estable es convergente
    - Todo método convergente es consistente
    - Todo método convergente es estable
    - Para que un método numérico sea consistente su error de truncatura local tiene que tender a cero más rápido que la longitud de paso

20. Si diseñamos un método Runge-Kutta del tipo
    $x_{n+1} = x_n + h(\alpha K_1 + \beta K_2)$
    donde
    $K_1 = f(t_n, x_n)$
    $K_2 = f(t_n + 2h, x_n + 2hK_1)$
    Entonces:

    - Si $\alpha + \beta = 1$, el método es de orden 2 cuando $\beta = \frac{1}{4}$
    - Si $\alpha + \beta \neq 1$ el método no es consistente
    - Si $\alpha + \beta \neq 1$ el método no es convergente

21. Sea el PVI $x' = f(t, x) = tx$, $x(0) = 0$. Se desea aproximar con el método de Runge Kutta clásico el valor de $x(0.5)$ realizando solo un paso

    - Primero se obtienen los valores de las K_i, cuya expresión de alguno de ellos es $K_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_1)$
    - Primero se obtienen los valores de las K_i, cuya expresión de alguno de ellos es $K_4 = f(t_n + h, x_n + hK_3)$
    - En este caso $x_1 = 0$
    - Primero se obtienen los valores de las K_i, cuya expresión de alguno de ellos es $K_3 = f(t_n + \frac{h}{2}, x_n + \frac{h}{2}K_2)$

22. Sea el P.V.I $x' = -2t - x$, $x(0) = -1$. Se desea aproximar con varios métodos el valor de $x(0.5)$ cuyo valor con dos decimales, a partir de la solución exacta, es $x(0.5) \simeq -0.82$

    - Si aplicamos el método del trapecio o de Heun con $h = 0.5$ se obtiene $x(0.5) \approx x_1 = -0.875$
    - Si aplicamos el método de Euler implícito con $h = 0.5$ obtenemos $x(0.5) \approx x_1 = -1$

23. Sea el PVI $x' = f(t, x) = tx + 1$, $x(0) = 0$. Se desea aproximar con el método de RUnge Kutta clásico el valor de $x(1)$, realizando solo un paso

    - $x_1 = \frac{45}{32}$
    - $K_3 = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}K_2) = \frac{21}{16}$
    - $K_2 = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}K_1) = \frac{5}{4}$
    - $K_4 = f(1, K_3) = \frac{37}{16}$
    - $\frac{(K_1+2K_2+2K_3+K_4)}{6} = \frac{45}{32}$

24. Dado el PVI $x' = 2x^2t + x$, $x(0) = 1$, se pretende aproximar el valor de $x(0.3)$ con un método numérico en un paso

    - El método del punto medio siempre tienne mayor orden que Euler y Euler implícito
    - Si usamos el método de Euler implícito la ecuación que hay que resolver para calcular x_1 no tiene solución real
    - Usando el método de Euler se obtiene $x(0.3) \simeq x_1 = 1.3$