Métodos Numéricos II

Laura Lázaro Soraluce

2022-2023

Tema 1

1. Si s es una raíz de multiplicidad $m > 1$ del polinomio p, entonces también es raíz de p' pero con multiplicidad:
   - $m - 1$
2. Si g es derivable y aplica $[a, b]$ en $[a, b]$. Entonces:
   - Si existe la derivada segunda de g y se verifica que $g(s) = s$ y $g'(s) = g''(s) = 0$, la convergencia local del método de iteración funcional es al menos cúbica
   - Si $g(s) = s$ y $g'(s) = 0$, existe un entorno de s en cual la convergencia a s del método de iteración funcional asociado a g es al menos cuadrática
   - Si existe la derivada segunda de g y se verifica $g(s) = s$ y $g'(s) = g''(s) = 0$, la convergencia local del método de iteración funcional es al menos cuadrática
3. Sea f de clase 1. $s \in \mathbb{R}$ es una raíz simple de f si y solo si:
   - $f(s) = 0$ y $f'(0) \neq 0$
4. Sea g una función real continua en un intervalo $[a, b]$:
   - Si g toma valores en $[a, b]$ entonces tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$
   - Si g toma valores en $[a, b]$ y es contráctil, entonces tiene un único punto fijo en $[a, b]$
   - Si g toma valores en $[\frac{a+b}{2}, b]$
5. Un algoritmo eficiente y estable para la evaluación de polinomios es:
   - El de Horner
6. Si tiene que resolver un sistema no lineal de dos ecuaciones:

- Lo más recomendable sería intentar resolverlo por el método de Newton-Raphson para sistemas, pero también se puede intentar escribir el sistema como $X = G(X)$, que sea equivalente, y analizar si la correspondiente iteración funcional va a ser convergente
- Si existe la matriz Jacobiana de orden 2×2, asociada a F, con determinante no nulo, aplicaría Newton-Raphson para sistemas
- Necesitaría dos semillas, una para cada componente

7. Si la función $f(x)$ no es derivable, pero es continua y $f(a)f(b) < 0$, entonces puedo aplicar los métodos de:
   - Bisección, Secante y Regula Falsi
   - Bisección

8. Sea g una función real continua en un intervalo $[a, b]$:
   - Si g toma valores en $[a, b]$ y es contráctil, entonces tiene un único punto fijo en $[a, b]$.
   - Si g toma valores en $[a, b]$ entonces tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.
   - Si g toma valores en $[\frac{a+b}{2}, b]$ entonces tiene al menos un punto fijo en $[a, b]$.

9. Sobre la sucesión de Sturm:
   - En un cero de la primera función, la derivada de esa función es no nula.
   - En un cero de la primera función, la derivada de dicha función tiene el mismo signo que la siguiente función.
   - Si la sucesión consta de cuatro funciones y la tercera se anula en un punto r, la segunda no se anula y su signo es el contrario que el de la cuarta en r.
   - Permite separar las raíces reales de una ecuación polinómica en intervalos disjuntos.
   - Permite saber si una ecuación polinómica tiene raíces múltiples.
   - Para obtener la tercera función de una sucesión de Sturm correspondiente a un polinomio cuyos ceros reales sean simples debemos dividir el polinomio entre su derivada y quedarnos con el resto cambiado de signo.

10. Marque las afirmaciones que sean ciertas sobre el método de Bisección:
    - Permite calcular el número necesario de iteraciones para alcanzar una precisión dada, antes de realizarlas.
    - La sucesión de cotas de errores en el método de bisección es monótona decreciente.

11. Sobre la sucesión de Sturm:

    - Todas las funciones son continuas, al menos, y la primera debe ser como mínimo derivable.
    - Permite saber cuántas raíces complejas tiene una ecuación polinómica cuyas raíces reales son simples.
    - La última función no cambia de signo en el intervalo que estemos considerando.
    - La primera de las funciones debe ser derivable en todo el intervalo que estemos considerando.

12. Sobre las iteraciones:

    - Cuando las aproximaciones están ya muy próximas a la solución, el método de la Secante puede incurrir en división por cero al computar.
    - El método de la Secante obtiene cada aproximación a partir de las dos anteriores.
    - Si la raíz es simple, entonces el método de Newton-Raphson tiene una convergencia local al menos cuadrática.
    - El método de Newton-Raphson requiere una semilla.
    - El método de iteración funcional requiere una semilla.

13. Sea la ecuación $x = g(x)$. Entonces, si g aplica el intervalo $[a, b]$ en $[a, b]$:

    - Si g es derivable y su derivada es positiva pero menos que $\frac{1}{2}$, entonces el método de iteración funcional genera una sucesión de aproximaciones monótona hacia la raíz de la ecuación $x = g(x)$.
    - Si g es de clase 2 y en un punto fijo s verifica $g'(s) = 0$, entonces partiendo de un valor suficientemente próximo a s el método de iteración funcional converge con orden de convergencia al menos cuadrático.
    - Si g es derivable y su derivada está acotada en valor absoluto por $\frac{1}{2}$ en todo el intervalo, entonces el método de iteración funcional asociado comete tras n iteraciones un error menos que $\frac{b-a}{2^n}$.
    - El método de iteración funcional asociado es localmente convergente a toda raíz s de dicha ecuación que verifique $-1 < g'(s) < 1$.

14. La sucesión x_n converge a s linealmente con constante asintótica del error $L = \frac{1}{\sqrt{100000}}$. Entonces, a largo plazo...:

    - Se ganan al menos 10 dígitos de precisión cada 5 términos.
    - Se ganan 5 dígitos de precisión cada 2 términos.

15. Sea f una función continua en $[a, b]$ con valores en $\mathbb{R}$, tal que $f(a)f(b) < 0$:

    - La ecuación $f(x) = 0$ tiene al menos una raíz en el intervalo abierto $]a, b[$.

- El método de la secante es aplicable pero no tiene garantías de convergencia a ninguna de las posibles raíces de la ecuación $f(x) = 0$.
- Tanto el método de bisección como el de Regula Falsi son convergentes, pero pueden converger a dos raíces diferentes de la ecuación $f(x) = 0$.
- Si f es suficientemente diferenciable y en todo el intervalo abierto su primera derivada es negativa, entonces el método de NR converge a la única raíz de $f(x) = 0$, partiendo de cualquier punto de algún subintervalo que contiene a la raíz.
- Si la derivada de f existe y en todo el intervalo abierto es negativa, entonces hay solo una raíz de $f(x) = 0$ en el intervalo.

16. El método de bisección:
    - Exige las mismas condiciones que el teorema de Bolzano.
    - Tiene orden de convergencia lineal.
17. Toda función de iteración $g(x)$ definida en $[0, 10]$...:
    - Continua y con valores en el intervalo $[5, 7]$ tiene al menos un punto fijo.
    - Con valores en el intervalo $[5, 7]$ y derivada en el valor absoluto menor que 1 en $[0, 10]$ ha de tener un único punto fijo.
18. Para poder aplicar el método de Newton-Raphson, la función $f(x)$ tiene que ser:
    - Derivable
19. Para poder aplicar el método de la secante, la función $f(x)$ ha de ser necesariamente:
    - Continua
20. Ecuaciones polinómicas:
    - $7x^7 + 12x^5 + 3x^3 + 1 = 0$ no tiene raíces positivas.
    - $x^7 - 12x^5 + 3x^3 + 1 = 0$ no tiene raíces positivas.
    - La ecuación $7x^7 + 2x^5 - 3x^3 + 1 = 0$ no puede tener raíces con módulo mayor que 1.5.
    - La ecuación $6x^7 - 2x^5 - 3x^3 + 1 = 0$ tiene sus raíces reales en $[-1.5, 1.5]$.
    - $x^7 - 12x^5 + 3x^3 - 1 = 0$ tiene sus raíces reales en $[-13, 13]$.
21. Sea f una función real definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Entonces:

- No hay garantía de convergencia del método de la secante a una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, partiendo de las semillas a y b como valores iniciales.

22. Tiene orden de convergencia local al menos cuadrático...:
    - El método de Newton-Raphson cuando la raíz es simple.
    - La iteración funcional cuando $g \in C^2$ y $|g'(s)| = 0$

Tema 2

1. Toda fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar una derivada k-ésima en a...:
    - Tiene unos coeficientes que pueden obtenerse resolviendo un sistema lineal del mismo orden que el número de nodos
    - Tiene al menos un coeficiente positivo y al menos otro negativo
    - Tiene unos coeficientes que son las derivadas k-ésimas, en a, de los polinomios de Lagrange correspondientes a los nodos
    - Tiene unos coeficientes que suman cero
2. La fórmula $f'(0) \approx 0$:
    - Es exacta para las funciones: $1, cos(x)$
    - Es exacta para $1, x^2, x^3, x^4$
    - Es una fórmula de tipo interpolatorio con un solo nodo que puede ser el que se quiera
    - Es exacta para todo polinomio que sea una función par
3. Sobre el error:
    - El error de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico, para aproximar $f'(a)$, puede obtenerse desarrollado por Taylor el valor de f en los diferentes nodos en torno al nodo a
    - El error de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio, para aproximar $f''(a)$, es la derivada segunda del error de interpolación correspondiente, evaluada en a
    - El error de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio, para aproximar $f''(a)$, es la derivada del error de interpolación correspondiente, evaluada en a
    - El error de una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico, para aproximar $f'(a)$, puede obtenerse derivando $f[x_0, x_1, ..., x_n, x](x-x_0) \cdots (x - x_n)$ y evaluando en a
    - La derivada de $f[x_0, x_1, ..., x_n, x]$ es $f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x]$ y la derivada segunda es $2f[x_0, x_1, ..., x_n, x, x, x]$

4. La fórmula $\frac{1}{5}(3\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+2\frac{f(a)-f(a-h)}{h})$ para aproximar $f'(a)$:

   - Es una combinación de una fórmula progresiva y otra regresiva para aproximar $f'(a)$
   - No es una de las fórmulas habituales usadas en la derivación numérica
   - Puede tener un error de truncatura tan pequeño como se desee, si f es de clase 2

5. Sobre las funciones lineales:

   - Las fórmulas de derivación numérica sirven para aproximar el valor de un funcional lineal, tales como: $L(f) = f'(a)$, $L(f) = f''(a)$, $L(f) = f'''(a)$, etc.
   - El funcional $L(f) = f'(a) + 2''f(a)$ es lineal.
   - Si $a > 0$, el funcional $L(f) = f(\sqrt{a})$ es lineal.

6. Sobre las fórmulas de derivación numérica de tipo interpolatorio:

   - Una de las fórmulas de derivación numérica para aproximar $f'(a)$ es $\frac{(f(a+h)-f(a-h))}{(2h)}$.
   - Una de las fórmulas de derivación numérica para aproximar $f'(a)$ es $\frac{(f(a)-f(a+h))}{(-h)}$.
   - Al aplicar una fórmula de derivación numérica, basada en los valores de la función en los puntos a y $a+h$, el valor de h no puede ser nulo.

7. La fórmula $f'(3) \approx f'(-1) + f(0) + f(2)$:

   - No es de tipo interpolatorio clásico.
   - Tiene por término de error $R(f) = f'(3) - f(-1) - f(0) - f(2)$.

8. Las fórmulas de tipo interpolatorio...:

   - Algunas de ellas sirven para aproximar la integral definida de una función en un intervalo.
   - Algunas de ellas sirven para aproximar la derivada de una función en un punto.
   - Sirven para aproximar un funcional lineal, como cierta derivada de una función en un punto, o el valor de la integral definida de una función en un intervalo.
   - Son exactas en un cierto espacio de funciones.

9. Una función periódica de periodo 2π, se aproxima interpolando con funciones de espacios trigonométricas, es decir, generados por: $1, sin(x), cos(x), sin(2x), cos(2x), sin(3x), ...$ Se quiere aprovechar esos interpolantes para obtener una fórmula de derivación numérica, efectuando la derivada correspondiente del interolante. En tal caso:

- Para obtener la fórmula que aproxime $f'(\frac{\pi}{2})$ usando como nodos: $0, \frac{\pi}{2}, \pi$, se puede exigir exactitud en $1, sin(x), cos(x)$ y resolvver el sistema correspondiente.

10. Una fórmula de tipo interpolatorio clásico para aproximar la derivada k-ésima de f en un punto a...:

    - Que use n nodos, puede tener como máximo orden de exactitud $k + n - 1$.
    - Debe tener al menos $k + 1$ nodos, para que tenga algún interés.
    - No tiene interés si el número de nodos es menor o igual que k.

11. El funcional lineal $f'(a)$ puede aproximarse por la fórmula $P(h) = \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ de tal forma que si f es suficientemente regular, desarrollando por Taylor se tiene $f'(a) = P(h) + c_2h^2 + c_4h^4 + ...$ que escrita para $\frac{h}{2}$ es $f'(a) = P(\frac{h}{2}) + c_2\frac{h^2}{4} + c_4\frac{h^4}{16} + ...$ Este proceso es el de extrapolación de Richardson aplicado a una fórmula de derivación numérica. Entonces:

    - $\frac{1}{1}(4P(\frac{h}{2}) - P(h))$ aumenta la exactitud con respecto a $P(h)$ al menos en una unidad.
    - $P(h)$ es la aproximación $f'(a)$ con la fórmula centrada.

12. Si se calcula el polinomio $p(x)$ de grado 2 que interpola a una función f en a, $a + h$ y $a + 2h$...:

    - $p'(a)$ es una aproximación de $f'(a)$, exacta para $1, x, x^2$.
    - A partir de $p(x)$ se puede obtener una fórmula para aproximar $f'(a)$ y otra para obtener $f''(a)$ y ambas son exactas para $1, x, x^2$.
    - A partir de $p(x)$ se puede obtener una fórmula para aproximar $f'(1)$ a partir de $f(1), f(0.9)$ y $f(0.8)$.

13. Para obtener tres fórmulas para aproximar respectivamente $f'(a), f''(a)$ y $f'''(a)$ se han elegido cinco abscisas diferentes, se ha calculado el polinomio $p(x)$ de grado cuatro que interpola en ellas los valores de la función f, y se han derivado sucesivamente $p(x)$ para obtenerlas:

    - Las tres fórmulas de derivación numérica obtenidas son exactas para las funciones x^3, x^4.
    - Si las abscisas de interpolación están igualmente espaciadas con un paso h y uno de los cinco nodos es a, la fórmula que aproxima $f'(a)$ tendrá h en el denominador, la que aproxima $f''(a)$ tendrá h^2 y la tercera tendrá h^3.
    - Las tres fórmulas de derivación numérica obtenidas tienen unos pesos que suman cero.

14. El funcional lineal $f'(a)$ puede aproximarse por la fórmula progresiva $P(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ de tal forma que si f es suficientemente regular, desarrollando por Taylor se tiene $f'(a) = P(h) - \frac{h}{2}f''(a) - \frac{h^2}{6}f'''(a) - ...$ $= P(h) + c_1 h + c_2 h^2 + ...$ Si ahora se escribe para $\frac{h}{2}$ resulta $f'(a) = P(\frac{h}{2}) + c_1\frac{h}{2} + c_2\frac{h^2}{4} + ...$ Entonces:

   - La combinación $2P(\frac{h}{2}) - P(h)$ aumenta en una unidad el orden de exactitud.
   - La combinación $\frac{1}{3}(2P(\frac{h}{2})+P(h))$ no aumenta en una unidad el orden de exactitud, pero es convergente a $f'(a)$ cuando $h \to 0$.
   - No es posible establecer una combinación de $P(h)$ y $P(\frac{h}{2})$ que aumente la exactitud en 2 unidades.

15. Una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico (en los polinomios), para aproximar $f'(a)$, que tenga dos nodos...:

   - Es exacta en $\mathbb{P}_1$.

16. Una fórmula de derivación numérica de tipo interpolatorio clásico para aproximar $f'(a)$...:

   - Con n nodos, podría ser exacta en $\mathbb{P}_n$.
   - Con dos nodos, puede obtenerse imponiendo exactitud para las funciones $1, x$.
   - Con dos nodos, podría ser exacta en $\mathbb{P}_2$.

17. La fórmula $\frac{1}{5}(3\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + 2\frac{f(a)-f(a-h)}{h})$ para aproximar $f'(a)$...:

   - Puede tener un error de truncatura tan pequeño como se desee, si f es de clase 2.
   - No es una de las fórmulas habituales usadas en la derivación numérica.
   - Es una combinación de una fórmula progresiva y otra regresiva para aproximar $f'(a)$.

18. Sobre las fórmulas:

   - Si la función f es suficientemente regular, siempre es posible aproximar el valor $f'(a)$ con un error $|R(f) < 0.1$, tomando un valor de h suficientemente pequeño en una fórmula de tipo interpolatorio clásico que use dos nodos.
   - Para aplicar una fórmula de derivación numérica para aproximar $f'(a)$ se necesita poder obtener los valores de f en puntos cercanos al a.

19. Se desea aproximar $f'''(0)$ mediante una fórmula de tipo interpolatorio clásico que use $f'(-1), f(0), f(1)$:

- El término de error será $R(f) = f'''(0)$.
- La fórmula será $f'''(0) \approx 0$.

20. Sobre los grados de exactitud...:

    - El grado de exactitud de una fórmula de tipo interpolatorio clásico depende exclusivamente de quiénes sean sus nodos.
    - Dos fórmulas de derivación numérica, para aproximar $f''(a)$, con igual número de nodos, pueden tener diferentes pesos.
    - Dos fórmulas de derivación numérica, para aproximar $f''(a)$, con diferente número de nodos, pueden tener el mismo grado de exactitud.