



UNIVERSIDAD  
DE GRANADA

Facultad de Ciencias y Escuela Técnica Superior de Ingenierías  
Informática y de Telecomunicaciones

DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y  
MATEMÁTICAS

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Algoritmos para la  
aproximación de un conjunto  
a partir de otros.  
Caracterización matemática  
del problema y estudio  
experimental.

Presentado por:  
Laura Lázaro Soraluze

Curso académico 2024-2025





Algoritmos para la aproximación de un  
conjunto a partir de otros. Caracterización  
matemática del problema y estudio  
experimental.

Laura Lázaro Soraluze

Laura Lázaró Soraluze *Algoritmos para la aproximación de un conjunto a partir de otros. Caracterización matemática del problema y estudio experimental..*

Trabajo de fin de Grado. Curso académico 2024-2025.

**Responsable de  
tutorización**

Nicolás Marín Ruiz  
*Ciencias de la Computación e Inteligencia  
Artificial*

Daniel Sánchez Fernández  
*Ciencias de la Computación e Inteligencia  
Artificial*

Doble Grado en Ingeniería  
Informática y Matemáticas

Facultad de Ciencias y  
Escuela Técnica Superior  
de Ingenierías Informática  
y de Telecomunicaciones

Universidad de Granada

DECLARACIÓN DE ORIGINALIDAD

D./Dña. Laura Lázaro Soraluze

Declaro explícitamente que el trabajo presentado como Trabajo de Fin de Grado (TFG), correspondiente al curso académico 2024-2025, es original, entendido esto en el sentido de que no he utilizado para la elaboración del trabajo fuentes sin citarlas debidamente.

En Granada a 1 de octubre de 2025

Fdo: Laura Lázaro Soraluze



*Dedicatoria (opcional)*

*Ver archivo preliminares/dedicatoria.tex*





# Agradecimientos

Agradecimientos (opcional, ver archivo preliminares/agradecimiento.tex).



## Summary

An english summary of the project (around 800 and 1500 words are recommended).  
File: preliminares/summary.tex



## Resumen



# Índice general

Agradecimientos	V
Summary	VII
Resumen	IX
Introducción	XIII
<b>1. Introducción al problema</b>	<b>1</b>
1.1. Definición formal del problema	1
1.2. Objetivos del trabajo	3
1.3. Contexto y Motivación	4
1.4. Particularizaciones del problema	6
<b>2. Fundamentos matemáticos</b>	<b>11</b>
2.1. Estructuras algebraicas	11
2.1.1. Conjunto potencia	11
2.1.2. Retículo y álgebra de Boole	12
2.1.3. Relación con la lógica proposicional	14
2.1.4. Particiones y recubrimientos	15
2.1.5. Estructuras inducidas	16
2.2. Medidas	20
2.2.1. Medidas de asociación	21
2.2.2. Medidas direccionales	23
2.2.3. Otras medidas	25
2.2.4. Restricción vs. Optimización	27
2.3. Complejidad computacional	28
2.3.1. Complejidad temporal y notación asintótica	29
2.3.2. Clases de complejidad y <i>NP</i> -Complejidad	33
2.3.3. Complejidad teórica de nuestro problema	35
2.3.4. Complejidad espacial	36
2.3.5. Relación con SAT	37
<b>3. Implementación algorítmica</b>	<b>41</b>
3.1. Marco algorítmico	41
3.2. Aproximaciones algorítmicas	42
3.2.1. Búsqueda exhaustiva	42
3.2.2. Greedy	44
3.3. Algoritmos descartados	48
3.4. Implementación técnica	48
3.5. Análisis de resultados	49
3.6. Normativa de la comisión del Grado en Matemáticas	49
3.7. Formato de la memoria	50

## *Índice general*

3.8. Recomendaciones . . . . .	50
<b>4. Conclusiones y Perspectivas Futuras</b>	<b>53</b>
4.1. Conclusiones y trabajo futuro . . . . .	53
4.1.1. Resumen de los principales hallazgos . . . . .	53
4.1.2. Limitaciones del trabajo . . . . .	53
4.1.3. Posibles líneas de investigación futuras . . . . .	53
<b>A. Ejemplo de apéndice</b>	<b>55</b>
<b>Glosario</b>	<b>57</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>



## Introducción

De acuerdo con la comisión de grado, el TFG debe incluir una introducción en la que se describan claramente los objetivos previstos inicialmente en la propuesta de TFG, indicando si han sido o no alcanzados, los antecedentes importantes para el desarrollo, los resultados obtenidos, en su caso y las principales fuentes consultadas.

Ver archivo preliminares/introduccion.tex



# 1. Introducción al problema

En este trabajo abordamos el problema de aproximar un conjunto objetivo de elementos partiendo de una colección de subconjuntos suyos disponibles. La idea principal consiste utilizar algoritmos para seleccionar y combinar algunos de estos subconjuntos mediante operaciones sobre conjuntos, respetando una serie de restricciones impuestas por el usuario y optimizando ciertas medidas, para posteriormente evaluar la aproximación con métricas. Entre las restricciones podemos incluir, por ejemplo, un número máximo de operaciones utilizadas o un tamaño mínimo requerido para la solución. En cuanto a las medidas, estas pueden estar relacionadas con la sobrecobertura, la infracobertura o la redundancia entre conjuntos, entre otras.

No siempre nos interesa obtener una coincidencia exacta con el conjunto objetivo. En muchos casos puede ser suficiente, o incluso preferible, obtener una aproximación que cumpla con los requisitos. Por ello, formulamos el problema de forma flexible y general, y lo iremos particularizando a lo largo del trabajo, estudiando distintas variantes y aspectos concretos según el contexto.

## 1.1. Definición formal del problema

Una vez hemos mencionado de qué va nuestro problema de manera muy genérica, nos centramos en formularlo de forma general. Queremos definir un marco amplio que englobe todas las particularizaciones que analizaremos a lo largo del trabajo. Para ello, comenzamos enumerando los elementos principales de nuestro problema:

1. **Universo  $U$**  : conjunto finito de elementos. Convenimos sin pérdida de generalidad que  $U \neq \emptyset$ .
2. **Familia de subconjuntos  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$**  : subconjuntos de  $U$  que podemos usar para construir la aproximación. De nuevo,  $F \neq \emptyset$ .
3. **Conjunto objetivo  $G \subseteq U$**  : conjunto no vacío que queremos aproximar utilizando combinaciones de elementos de  $F$ .
4. **Operaciones permitidas**: operaciones de conjuntos correctamente definidas sobre los elementos de  $U$ , que se permiten para construir las expresiones.
5. **Espacio de expresiones  $\mathcal{E}$** : todas las expresiones formadas combinando elementos de  $F$  mediante las operaciones permitidas. Se permite anidar operaciones y repetir subconjuntos. La solución que buscamos será una de estas expresiones.
6. **Conjuntos resultantes  $\mathcal{R}$** : todos los conjuntos resultado que se obtienen de evaluar las expresiones del espacio  $\mathcal{E}$ . Estos conjuntos resultantes pueden verse como la imagen por una función  $eval : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{R}$  que a cada expresión le asigna su evaluación.

## 1. Introducción al problema

7. **Restricciones** : condiciones adicionales que podemos imponer sobre las expresiones, los subconjuntos de  $F$  o las operaciones permitidas. Estas definen qué expresiones de  $\mathcal{E}$  se consideran admisibles en cada particularización del problema. Pueden derivar de las necesidades o intereses del usuario, para modelar el problema de acuerdo con una aplicación práctica concreta; o pueden introducirse con el fin de adaptar la formulación del problema de manera que pueda resolverse posteriormente mediante un algoritmo específico. Por ejemplo, límite de subconjuntos utilizados, operaciones o tamaño máximo del conjunto aproximado.
8. **Medidas**: funciones que asignan un valor numérico a una expresión o a un conjunto. Son herramientas que pueden ayudarnos a imponer las restricciones nombradas en el punto anterior, o servir como medidas de calidad de las posibles soluciones. Las medidas se utilizarán durante la construcción de una solución, o después para comparar y seleccionar soluciones; pudiendo algunas utilizarse en ambas situaciones. Estos son algunos ejemplos de medidas, clasificadas según el tipo de propiedad que evalúan, que estudiaremos más adelante:
  - Medidas de asociación
  - Medidas direccionales
  - Medidas de cobertura
  - Medidas de redundancia
  - Medidas de ruido
  - Medidas de error global
  - Medidas de tamaño
  - Medidas ponderadas

Ahora que hemos nombrado los elementos principales de nuestro problema para poder verlo de una forma intuitiva, procedemos a hacer una definición formal:

**Definición 1.1.** Sea  $U$  un conjunto finito no vacío,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos de  $U$ ,  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo y  $\mathcal{O}$  un conjunto de operaciones de conjuntos definidas sobre  $\mathcal{P}(U)$ .

Definimos el espacio de expresiones  $\mathcal{E}(F, \mathcal{O})$  como el menor conjunto tal que:

$$F \subseteq \mathcal{E}(F, \mathcal{O}), \quad \text{y si } e_1, e_2 \in \mathcal{E}(F, \mathcal{O}) \text{ y } \circ \in \mathcal{O}, \text{ entonces } (e_1 \circ e_2) \in \mathcal{E}(F, \mathcal{O}).$$

Sea además la función de evaluación

$$eval : \mathcal{E}(F, \mathcal{O}) \rightarrow \mathcal{P}(U), \quad eval(e) \equiv \text{resultado de evaluar la expresion } e.$$

Definimos  $\mathcal{R} = eval(\mathcal{E}(F, \mathcal{O}))$  y el subconjunto de expresiones que cumplen las restricciones impuestas:  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(F, \mathcal{O})$ .

El problema general de aproximación de conjuntos consiste en encontrar una expresión  $e^* \in \mathcal{E}'$  que optimice (maximice o minimice según la medida) una medida  $M : \mathcal{E}(F, \mathcal{O}) \rightarrow \mathbb{R}$  con respecto a  $G$ . Es decir, buscamos

$$e^* = \arg \text{opt}_{e \in \mathcal{E}'} M(e, G),$$

donde  $M$  mide la calidad de la aproximación entre el conjunto objetivo  $G$  y el resultado  $eval(e)$ .

Para simplificar la notación, cuando no haya riesgo de confusión denotaremos por  $\mathcal{E}$  al espacio de expresiones  $\mathcal{E}(F, \mathcal{O})$ . Diremos que  $|U| = n$  y  $|F| = m$ , donde  $F_1, \dots, F_m$  son sus elementos, y cada  $F_i$  tiene  $m_i$  elementos. Llamaremos  $\tilde{G} = eval(e^*)$ . Como ya hemos definido, cada combinación de subconjuntos y operaciones nos da una expresión dentro del espacio de expresiones,  $\mathcal{E}$ , y al evaluarlas obtenemos el espacio de conjuntos resultantes,  $\mathcal{R}$ . Es importante tener en cuenta que, debido a propiedades del Álgebra de Boole, distintas expresiones pueden dar lugar al mismo resultado ( $eval(e_m) = eval(e_n) = r_i \in \mathcal{R}$ ;  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $e_m, e_n \in \mathcal{E}$ ;  $e_m \neq e_n$ ), por lo que no podemos asegurar que la aplicación  $eval$  sea inyectiva [Unia]. Además, llamaremos  $F' \subseteq F$  a la familia de subconjuntos de  $F$  utilizados en la expresión que genera la aproximación final  $\tilde{G}$ , de tamaño  $m' = |F'|$ .

Planteamos el siguiente ejemplo sencillo al que haremos referencia a lo largo del trabajo, para mostrar diferentes conceptos de forma intuitiva.

**Ejemplo 1.2.** Consideramos los siguientes elementos:

- $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- $F = \{\{1, 2\}, \{2, 3, 4\}, \{2, 5\}, \{4, 7\}, \{4, 5, 6\}, \{6, 7, 8\}, \{7, 10\}, \{8, 9\}, \{10\}\}$
- $G = \{2, 4, 5, 7, 10\}$
- $\mathcal{E}$ : es el conjunto de todas las expresiones válidas que se pueden formar combinando subconjuntos de  $F$  (con posible repetición) mediante operaciones permitidas como la unión, intersección, diferencia... Por ejemplo:  $\{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\}$  o  $\{2, 5\} \setminus \{8, 9\}$ . Nuestra solución será una de estas expresiones.
- $\mathcal{R}$ : es el conjunto de todos los subconjuntos de  $U$  que se pueden obtener evaluando las expresiones de  $\mathcal{E}$ . Por ejemplo, de las dos expresiones anteriores:  $eval(\{1, 2\} \cup \{2, 3, 4\}) = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $eval(\{2, 5\} \setminus \{8, 9\}) = \{2, 5\}$ .

### 1.2

Con este ejemplo vemos que, mientras que  $\mathcal{E}$  describe cómo se construyen combinaciones de los conjuntos de  $F$  y potenciales soluciones,  $\mathcal{R}$  describe los conjuntos finales que se obtienen al evaluarlas. Como no imponemos restricciones sobre la repetición de subconjuntos ni sobre el tipo de operaciones permitidas, el tamaño de  $\mathcal{E}$  es en general infinito. El tamaño de  $\mathcal{R}$ , sin embargo, está superiormente acotado por  $\mathcal{P}(U)$  como veremos en la sección de estructuras algebraicas al presentar el concepto de conjunto potencia.

## 1.2. Objetivos del trabajo

Este trabajo está dividido en dos bloques principales: uno más teórico, matemático; y otro más práctico, computacional. Aunque en cada sección profundizaremos más los objetivos específicos correspondientes, presentamos los objetivos generales:

## 1. Introducción al problema

En la primera parte, apoyándonos en la formalización matemática que hemos hecho del problema de aproximación de conjuntos y de todos sus elementos, haremos un estudio matemático exhaustivo del problema. Como hemos visto, nuestro problema es muy general, por lo que muchas veces recurriremos a particularizaciones suyas que nos permitirán estudiar distintos conceptos y estructuras interesantes de forma más clara.

Para este análisis, nos apoyamos en diferentes áreas de las matemáticas, empezando por el álgebra de conjuntos y las estructuras algebraicas del álgebra, al estudiar conceptos básicos que nos permitirán conocer y entender bien la base de nuestro problema, incidiendo especialmente en los elementos 1, 2, 4 y 6 de este. Analizaremos tanto las propiedades del universo, como las estructuras que induce la familia de conjuntos  $F$  en  $\mathcal{R}$ . Después, en relación con el Elemento 8, haremos uso de la teoría de la medida del análisis al explorar distintas medidas como herramientas para definir restricciones y medidas de calidad, entre las que aparecerán las medidas de asociación y tablas de contingencia de la estadística. Por último, para terminar el estudio teórico del problema, estudiaremos la NP-Complejidad y la teoría de la complejidad computacional, para poder clasificar nuestro problema y saber cómo abordarlo de la mejor manera en la práctica.

La idea es dar un contexto histórico y teórico general de todas estas áreas, profundizando sólo en los conceptos de cada una que son directamente relevantes en nuestro problema. En este sentido, nuestro trabajo se trata más bien de un estudio transversal por distintas ramas matemáticas, en lugar de un análisis en profundidad de una sola de ellas. Este enfoque nos permite conectar distintos conceptos trabajados a lo largo del Grado en Matemáticas, estudiando sus interconexiones e integrándolos en un sólo problema práctico.

En la segunda parte, vamos a abordar el problema desde un punto de vista práctico, en el que implementaremos y estudiaremos el comportamiento de varias aproximaciones algorítmicas sobre distintas particularizaciones ya definidas del problema. Utilizaremos en cada caso las medidas adecuadas correspondientes para guiar el proceso de construcción de la solución, y asegurar que se cumplen las restricciones teóricas impuestas. En particular, los algoritmos que incluiremos y que explicaremos en su correspondiente sección serán: búsqueda exhaustiva con profundidad limitada, que explora secuencialmente el espacio de soluciones completo; y Greedy, que construye una solución de forma iterativa tomando la mejor decisión basada en una medida evaluadora interna.

Finalmente, evaluaremos los resultados utilizando medidas para comparar de forma objetiva la calidad de las soluciones obtenidas, y analizar el rendimiento de cada algoritmo en este problema.

### 1.3. Contexto y Motivación

Una vez que hemos definido nuestro problema y los elementos que intervienen en él, así como los objetivos que nos hemos impuesto para este trabajo, resulta natural presentar la motivación para estudiarlo, así como el contexto histórico en el que surge y el de las áreas que incunbe.

Podemos decir que el marco para nuestro problema empieza a formularse con el desarrollo

del concepto de recubrimiento de conjuntos, que puede entenderse como una particularización de nuestro problema, y merece ser destacado por su antigua historia en las matemáticas y sus grandes aportaciones. Este surge en el siglo XIX, cuando se empieza a formalizar el concepto en teoría de conjuntos, incluyendo algunas nociones que hoy son de gran importancia como álgebra de conjuntos y anillos de conjuntos, en las que profundizaremos más adelante al analizar las estructuras que induce la familia de conjuntos  $F$  en el conjunto de expresiones evaluadas  $\mathcal{R}$ . Más tarde, en el siglo XX aparece también en el ámbito topológico, cuando se habla de recubrimientos abiertos de espacios topológicos. Aunque nuestro problema no se formula en ese ámbito, esta conexión nos permite reforzar la idea de la importancia del concepto de recubrimiento.

Otro objetivo fundamental de nuestro problema es el análisis de la complejidad del mismo, que haremos en la última sección de la parte matemática. Esto podemos hacerlo gracias a un salto decisivo para nuestro trabajo que se produce más recientemente, en la década de 1970, con el desarrollo de la teoría de la complejidad computacional, con el Teorema de Cook y el desarrollo del concepto NP-Completo. Estas nociones son las que nos permitirán clasificar nuestro problema según las distintas clases de complejidad existentes, para saber cómo abordar su resolución en la práctica, al relacionarlo con otros cuya clase de complejidad es conocida. Por ejemplo, la publicación de la lista de 21 problemas NP-Completo de Richard Karp, nos presenta el problema del conjunto de cobertura (Set Cover Problem), popularizando así en el ámbito de la informática el concepto de recubrimiento de conjuntos. Este consiste en: dado un conjunto de elementos,  $U$ , y una familia  $F$  de subconjuntos de  $U$ , ¿se puede encontrar un subconjunto  $F' \subseteq F$  de  $k$  o menos conjuntos con unión  $U$ ? Este problema de decisión también tiene una versión de optimización: en las mismas condiciones, minimizar el número de subconjuntos que usa  $F' \subseteq F$  [Mun06].

A partir del Set Cover Problem han surgido otras variantes como el Exact Cover, que consiste en: dado un conjunto  $U$  y una familia  $F$  de subconjuntos de  $U$ , encontrar un subconjunto  $F' \subseteq F$  donde cada elemento de  $U$  aparece en un y sólo un subconjuntos de  $F'$ . Otra variante es el Exact Cover By 3-Sets (X3C), que consiste en: dado un conjunto  $U$ , con cardinal múltiplo de tres, y una familia  $F$  de subconjuntos de  $U$  de tres elementos, encontrar un subconjunto  $F' \subseteq F$  donde cada elemento de  $U$  aparece en un y sólo un elemento de  $F'$  [LP14]. Todas estas variantes que pueden verse como particularizaciones de nuestro problema, han sido también objeto de amplios estudios, lo que demuestra que el marco en el que trabajamos es una de las líneas clásicas de estudio en matemáticas y ciencias de la computación.

Aunque el problema que abordamos en este trabajo está estrechamente relacionado con estas formulaciones clásicas, es importante recalcar que no se trata exactamente del mismo problema. Como ya hemos presentado, en nuestro caso somos más flexibles permitiendo también el uso de otras operaciones a parte de la unión, con el objetivo de aproximar  $G$  lo mejor posible según medidas específicas, que no siempre se traduce en hallar una partición suya o una cobertura exacta.

Por otro lado, además del interés teórico, nuestro problema tiene también muchas aplicaciones prácticas en distintas áreas, especialmente en la toma de decisiones y la optimización de recursos, aplicada también a recubrimiento de áreas físicas. Veamos algunos ejemplos relevantes:

## 1. Introducción al problema

- En marketing: colocar anuncios de forma que cubran un público objetivo, sin redundancias (sin que las personas lo vean varias veces) y sin desperdiciar recursos (sin que lo vean personas a las que no va dirigido).
- En logística: minimizar el número de camiones utilizados en la distribución de mercancías [MMW24]. Tendríamos un conjunto de todas las ubicaciones de entrega, un conjunto de ubicaciones que pueden ser cubiertas por cada camión y un conjunto de ubicaciones a cubrir. En este caso añadiríamos una restricción adicional de escoger el menor número posible de camiones, es decir, minimizar el número de subconjuntos escogidos para cubrir.
- En problemas de clasificación en informática: sacar un conjunto representativo de las características para construir un modelo eficiente en términos de predicción y de complejidad. Analizamos un caso concreto de una práctica de la asignatura de Inteligencia de Negocio del 4º curso del grado en Ingeniería Informática, que hemos cursado recientemente: predicción de aprobación de créditos. Tendríamos un conjunto de todas las instancias, todos los solicitantes de crédito con sus características; un subconjunto de características que los modelos usan para predecir la aprobación de crédito; y un conjunto de solicitantes con una etiqueta determinada (aprobado/rechazado).
- En redes de comunicación: colocar antenas o puntos de acceso para asegurar cobertura en todo el área [RTF76]. Tendríamos un conjunto con todos los posibles puntos de ubicación en un área determinada, un conjunto de áreas de cobertura de cada antena, y un conjunto de ubicaciones específicas que queremos cubrir con la red.
- En biología computacional: seleccionar un conjunto de genes que sea representativo de un grupo de pacientes específico (sano/enfermo). Tendríamos un conjunto con todos los genes presentes en el conjunto de muestras biológicas, un conjunto de genes que están activos cuando se tiene una cierta enfermedad, y un conjunto de genes esenciales para diferenciar entre grupos de interés.

Estas aplicaciones muestran la importancia del problema de aproximación de conjuntos y sus distintas particularizaciones, en la toma de decisiones eficientes y la optimización de recursos, lo que lo convierte en un problema de gran interés no sólo en el ámbito computacional.

### 1.4. Particularizaciones del problema

Hasta ahora, hemos presentado nuestro problema general de forma muy amplia, y hemos visto que se trata de una generalización de problemas ampliamente conocidos en las matemáticas, que llevan muchos años siendo estudiados por su gran complejidad. Es por ello que a lo largo de este trabajo, recurrimos a particularizaciones de nuestro problema general, que nos facilitarán su estudio y nos permitirán abordarlo de forma más intuitiva. Estas particularizaciones consisten en aplicar restricciones específicas (**Elemento 7** de nuestro problema) sobre algún otro elemento del problema, comúnmente el espacio de expresiones o las operaciones aplicables. Cada particularización define un subconjunto del espacio general de soluciones, y permite adaptar el problema a estrategias de resolución prácticas que no podríamos aplicar sobre el problema general.



A continuación presentamos algunos ejemplos de particularizaciones. Estas definiciones no corresponden exactamente a las formulaciones clásicas de la literatura, sino que son adaptaciones dentro de nuestro marco general que hacemos, con el fin de mostrar cómo dichos problemas pueden entenderse como casos particulares del nuestro.

**Definición 1.3** (Particularización sin repetición). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$ ,  $G \subseteq U$  y  $\mathcal{O}$  un conjunto de operaciones de conjuntos. Definimos el espacio de expresiones admisibles  $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}(F, \mathcal{O})$  como el subconjunto de expresiones en las que  $F_i \in F$  puede aparecer como mucho una vez. El problema sin repetición consiste en encontrar una expresión  $e^* \in \mathcal{E}'$  que optimice una media  $M$  con respecto a  $G$ .

**Definición 1.4** (Particularización de Recubrimiento de  $G$ ). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos,  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a la unión:

$$\mathcal{O} = \{\cup\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(F, \{\cup\}).$$

Imponemos como restricción la condición de recubrimiento de  $G$ , por lo que:

$$\mathcal{E}' = \{e \in \mathcal{E}; G \subseteq \text{eval}(e)\}.$$

El problema consiste en encontrar  $e^* \in \mathcal{E}'$  que optimice (minimice o maximice, según  $M$ ) una medida  $M$ .

**Definición 1.5** (Particularización al Set Cover Problem). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a la unión:

$$\mathcal{O} = \{\cup\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(F, \{\cup\}).$$

Imponemos como restricción la condición de recubrimiento exacto, obteniendo así:

$$\mathcal{E}' = \{e \in \mathcal{E} : \text{eval}(e) = G\}.$$

Definimos la medida evaluadora

$$M(e, G) = \# \text{ subconjuntos en } e.$$

El problema consiste en encontrar

$$e^* = \arg \min_{e \in \mathcal{E}'} M(e, G).$$

**Definición 1.6** (Particularización al Exact Cover). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a la unión:

$$\mathcal{O} = \{\cup\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(F, \{\cup\}).$$

## 1. Introducción al problema

Definimos el espacio de expresiones admisibles:

$$\mathcal{E}' = \{ e \in \mathcal{E} : eval(e) = G, \text{ y } \forall F_i, F_j \text{ en } e; \quad F_i \neq F_j, \quad F_i \cap F_j = \emptyset \}.$$

Esto último es que los subconjuntos de  $F$  utilizados en una expresión, sean disjuntos dos a dos.

Definimos la medida evaluadora

$$M(e, G) = \# \text{ subconjuntos en } e.$$

El problema consiste en encontrar

$$e^* = \arg \min_{e \in \mathcal{E}'} M(e, G),$$

es decir, sólo se añade una restricción adicional sobre la definición 1.5.

Con esta definición, conseguimos modelar el conocido problema del Exact Cover como una particularización del nuestro.

**Definición 1.7** (Particularización sin conjunto vacío en  $F$ ). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos la familia de subconjuntos eliminando el vacío. Definimos el espacio de expresiones como

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(F \setminus \{\emptyset\}, \mathcal{O}),$$

donde  $\mathcal{O}$  es el conjunto de operaciones de conjuntos permitidas. Esta particularización consiste en encontrar una expresión  $e^* \in \mathcal{E}$  que optimice una medida  $M$  con respecto a  $G$ .

Otro planteamiento equivalente, sería no imponer restricciones sobre  $F$ , sino hacerlo sobre las expresiones admisibles, de forma que  $\mathcal{E}' = \{e \in \mathcal{E}(F, \mathcal{O}); \emptyset \text{ no aparece en } e\}$ .

En el planteamiento general del problema permitimos que el conjunto vacío pertenezca a la familia  $F$ , lo cual es necesario para poder trabajar con determinadas estructuras algebraicas (como anillos o álgebras de conjuntos) como veremos en la [Sección 2.1](#) de este trabajo. Sin embargo, en un contexto práctico, puede ser útil excluir  $\emptyset$  de  $F$ , ya que no contribuye a mejorar la aproximación al conjunto objetivo  $G$  y puede generar soluciones triviales.

**Definición 1.8** (Particularización a semianillo). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a la intersección y la diferencia:

$$\mathcal{O} = \{\cap, \setminus\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(F, \{\cap, \setminus\}).$$

Esta particularización consiste en encontrar una expresión

$$e^* \in \mathcal{E}$$

que optimice una medida  $M$  con respecto a  $G$ .

**Definición 1.9** (Particularización a anillo). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a la unión y la diferencia:

$$\mathcal{O} = \{\cup, \setminus\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(F, \{\cup, \setminus\}).$$

Esta particularización consiste en encontrar una expresión

$$e^* \in \mathcal{E}$$

que optimice una medida  $M$  con respecto a  $G$ .

**Definición 1.10** (Particularización a álgebra de conjuntos). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a la unión y el complemento con respecto a  $U$ :

$$\mathcal{O} = \{\cup, ^c\}, \quad \mathcal{E} = \mathcal{E}(F, \{\cup, ^c\}),$$

donde  $A^c = U \setminus A$  denota el complemento de  $A \subseteq U$  en  $U$ . Esta particularización consiste en encontrar una expresión

$$e^* \in \mathcal{E}$$

que optimice una medida  $M$  con respecto a  $G$ .



## 2. Fundamentos matemáticos

### 2.1. Estructuras algebraicas

Nuestro problema puede abordarse desde distintas áreas de las matemáticas, cada una aportando perspectivas e información diferente. Empezar por entender las estructuras de los conjuntos básicos que aparecen en nuestro problema puede ser lo más natural, para posteriormente, poder comenzar a medirlos, compararlos o estudiar la complejidad del problema en conjunto. Por ello, en primer lugar, nos enfocamos en el álgebra y en las estructuras algebraicas que intervienen, analizando tanto sus propiedades como la interacción entre ellas y las posibles estructuras derivadas. Esta sección se centrará principalmente en los elementos 1, 2, 4 y 6 del problema. Más adelante introduciremos medidas que nos permitirán comparar subconjuntos y asignarles valores en función de ciertas propiedades. Por último, una vez entendido y formalizado el marco del problema que nos ocupa, estudiaremos su complejidad teórica.

Históricamente, la teoría de conjuntos comienza a desarrollarse a finales del siglo XIX con los trabajos de George Cantor en la rama del análisis, donde introdujo los cardinales infinitos entre otros conceptos. En esos momentos existían muchas paradojas alrededor de dicha teoría, como la de Russell, que motivaron la búsqueda de axiomas más rigurosos. Gottlob Frege propuso una primera formalización en 1903, pero Russell evidenció sus inconsistencias. En 1908, Ernst Zermelo propone una axiomatización que termina Abraham Fraenkel en 1922, dando lugar a la teoría de conjuntos moderna. Además, a Zermelo se le atribuye el conocido axioma de elección. Hoy en día, la mayor parte del álgebra se sigue basando dicha teoría de conjuntos. Aunque no se puede demostrar si la teoría de conjuntos moderna es consistente de acuerdo con el segundo teorema de incompletitud de Gödel, no se han encontrado contradicciones en el último siglo, y por tanto se sigue basando la mayor parte de álgebra en ella [Set20].

#### 2.1.1. Conjunto potencia

Esta teoría de conjuntos moderna y su formulación axiomática, nos da el marco formal que necesitamos para trabajar con estructuras y operaciones que conocemos hoy en día sobre bases sólidas. Cuando trabajamos con subconjuntos en el contexto de estructuras algebraicas aparecen conceptos básicos que es fundamental introducir. Es el caso del conjunto potencia, que en nuestro problema es especialmente relevante por distintas razones.

**Definición 2.1** (Conjunto Potencia [Cru22]). El conjunto potencia de  $U$ , denotado  $\mathcal{P}(U)$ , es el conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de  $U$ . Se escribe

$$\mathcal{P}(U) = \{X \mid X \subseteq U\}$$

Es interesante conocer este concepto fundamental, pues para cualquier conjunto  $F$  que consideremos, siempre se va a dar  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$ , al estar los subconjuntos de  $F$  formados por elementos de  $U$ . Esto nos dice que el tamaño de  $F$  está limitado superiormente por el de  $\mathcal{P}(U)$ . De la misma manera, también limita el tamaño de  $\mathcal{R}$ . Esto se debe a que cualquier operación entre subconjuntos de  $U$  siempre produce otro subconjunto de  $U$ . Es decir, no se generan elementos ajenos a  $U$ , y por tanto, ningún conjunto fuera de  $\mathcal{P}(U)$ .

El conjunto potencia de un conjunto de cardinal  $n$  contiene  $2^n$  conjuntos [Lip98]. Utilizando el ejemplo 1.2, el conjunto potencia de  $U$ ,  $\mathcal{P}(U)$ , está formado por los  $2^{10} = 1024$  subconjuntos posibles de  $U$ , entre los que están:

- el conjunto vacío:  $\emptyset$
- todos los conjuntos unitarios:  $\{1\}, \dots, \{10\}$
- todas las combinaciones de entre 2 y 9 elementos:  $\{1, 2\}, \{2, 5, 7\}, \dots$
- el conjunto total:  $U$

En este caso, la familia de conjuntos resultantes  $\mathcal{R}$  tendrá a lo sumo 1024 elementos. Esto implica que, por muchas expresiones distintas que se construyan en  $\mathcal{E}$ , al evaluarlas nunca obtendremos más de 1024 conjuntos diferentes. Esto es de gran utilidad en nuestro problema, pues nos permite detener el proceso de construcción de expresiones una vez alcanzado el número máximo de conjuntos resultantes posibles.

Además de aportarnos información sobre los elementos 2 y 6 de nuestro problema, el conjunto potencia es la base de estructuras matemáticas más complejas que nos permiten añadir propiedades a nuestro problema, así como enriquecer su análisis.

### 2.1.2. Retículo y álgebra de Boole

Una de las estructuras que se construyen a partir del conjunto potencia es el retículo, que estudiamos para posteriormente presentar el concepto de álgebra de Boole. Antes de presentarlo, recordamos algunos conceptos subyacentes como el conjunto ordenado:

**Definición 2.2** (Relación de orden [Mir]). Una operación binaria  $\leq$  es una relación de orden si es asociativa, antisimétrica y transitiva.

En nuestro caso,  $\subseteq$  es una relación de orden sobre  $\mathcal{P}(U)$ , pues cumple:

- Reflexividad: para todo  $A \in \mathcal{P}(U)$  se tiene  $A \subseteq A$ .
- Antisimetría: si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq A$ , entonces  $A = B$ .
- Transitividad: si  $A \subseteq B$  y  $B \subseteq C$ , entonces  $A \subseteq C$ .

Como tenemos una relación de orden sobre  $\mathcal{P}(U)$ , decimos que  $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$  es un conjunto ordenado. Además, como la inclusión sólo puede ir en un sentido, estamos ante un conjunto totalmente ordenado.

Para representar cualquier conjunto ordenado, se puede utilizar un diagrama de Hasse. En nuestro caso, como en el ejemplo base 1.2,  $\mathcal{P}(U)$  tiene demasiados elementos lo que dificulta la visualización, lo mostramos para un nuevo ejemplo aún más sencillo:

**Ejemplo 2.3.**  $U = \{1, 2, 3, 4\}$

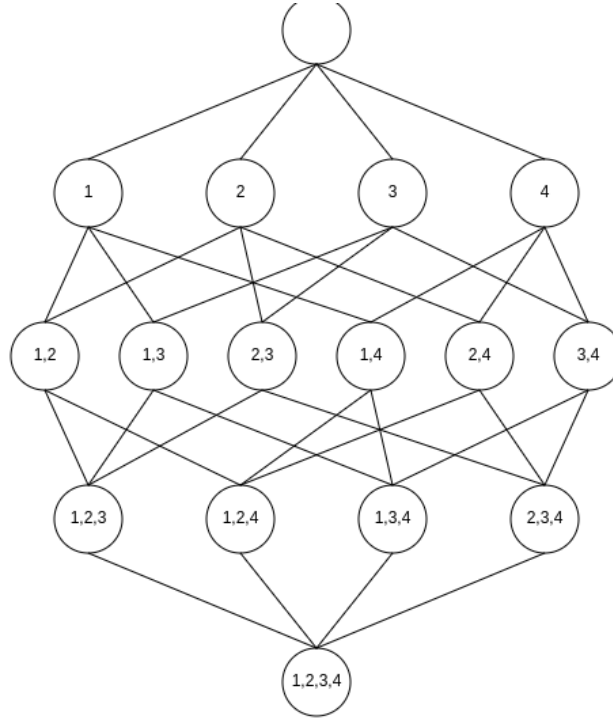


Figura 2.1.: Diagrama de Hasse del conjunto potencia de  $U = \{1, 2, 3, 4\}$

El último paso antes de poder dar la definición formal de retículo, es recordar el concepto de cotas superiores e inferiores de un subconjunto  $X \subseteq \mathcal{P}(U)$ , utilizando la relación de inclusión  $\subseteq$  en lugar de la relación usual  $\leq$  en  $\mathcal{P}(U)$  [Mir].

Un elemento  $A \in \mathcal{P}(U)$  es cota superior de  $X$  si

$$\forall X_i \in X, \quad X_i \subseteq A.$$

El supremo de  $X$  es la menor de dichas cotas superiores. De manera análoga, una cota inferior de  $X \subseteq \mathcal{P}(U)$  es un

$$B \in \mathcal{P}(U); \quad B \subseteq X_i, \forall X_i \in X$$

y el ínfimo es la mayor de ellas.

**Definición 2.4** (Retículo [Mir]). Un retículo es un conjunto ordenado,  $(\mathcal{P}(U), \subseteq)$  en el que cualquier familia finita de subconjuntos tiene supremo e ínfimo.

## 2. Fundamentos matemáticos

En nuestro caso, para cualquier familia finita de subconjuntos de  $\mathcal{P}(U)$ ,  $\mathcal{X}$ , se cumple que:

$$\sup(\mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X, \quad \inf(\mathcal{X}) = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X.$$

Es decir, la unión actúa como supremo y la intersección como ínfimo en  $\mathcal{P}(U)$ . Esto es fácil de ver en un diagrama de Hasse. Para encontrar el supremo de una familia de conjuntos basta con bajar en el diagrama hasta encontrar el menor conjunto que contiene a todos ellos. De la misma manera, para determinar el ínfimo, ascendemos en el diagrama hasta encontrar el mayor conjunto que está contenido en todos los considerados. Siguiendo con nuestro ejemplo 2.3 y utilizando nuestra Figura 2.1, si consideramos  $\mathcal{X} = \{\{3\}, \{1, 2\}\}$ , siguiendo hacia abajo, encontramos el conjunto  $\{1, 2, 3\}$ , que es el menor conjunto que contiene a todos los de  $\mathcal{X}$ . Este será el supremo. Para el ínfimo, vemos que el único conjunto contenido en ambos de  $\mathcal{X}$  es  $\emptyset$ .

Por lo tanto, concluimos que cualquier familia de subconjuntos de  $\mathcal{P}(U)$  siempre va a tener ínfimo y supremo, que como mucho serán el conjunto vacío y el total respectivamente, probando así que  $\mathcal{P}(U)$  es un retículo.

Si además un retículo es distributivo y todos sus elementos tienen complemento, decimos que se trata de un álgebra de Boole [Mir]. Este es justo el caso de  $\mathcal{P}(U)$ , pues la unión y la intersección son distributivas la una con respecto de la otra; y para todo  $A \in \mathcal{P}(U)$ , se cumple que  $A \cup U \setminus A = U$  y  $A \cap (U \setminus A) = \emptyset$ .

### 2.1.3. Relación con la lógica proposicional

El hecho de que  $\mathcal{P}(U)$  sea álgebra de Boole, nos permite conectar directamente con la lógica proposicional, lo cual relaciona nuestro problema estrechamente con la lógica matemática y la teoría de la computación. A cada elemento de  $\mathcal{P}(U)$ , es decir, a cada subconjunto de  $U$ , se le puede asociar una proposición lógica. Además, las operaciones de unión, intersección y complemento corresponden a la disyunción, la conjunción y la negación, respectivamente [Unic].

En la siguiente tabla mostramos a qué operación lógica corresponde cada operación de conjuntos:

Operación en conjuntos	Símbolo	Operación lógica
Unión	$A \cup B$	Disyunción ( $p \vee q$ )
Intersección	$A \cap B$	Conjunción ( $p \wedge q$ )
Complemento	$U \setminus A$	Negación ( $\neg p$ )
Conjunto vacío	$\emptyset$	Falso ( $\perp$ )
Conjunto total	$U$	Verdadero ( $\top$ )

Tabla 2.1.: Correspondencia entre álgebra de Boole y lógica proposicional.

Por ejemplo, cada subconjunto de  $U$  corresponde a una proposición lógica  $p_A$  que indica si un elemento  $u$  pertenece o no a  $A$ . Para el ejemplo 2.3, el subconjunto  $A = \{1, 3\}$ , se asocia



con la proposición  $p_A$ , que vale 0 si  $u \notin \{1, 3\}$  y 1 en caso contrario. Sea  $B = \{2, 3\}$  otro subconjunto de  $U$ , tenemos que

$$A \cup B = \{1, 2, 3\}, \quad p_{A \cup B}(u) = p_A(u) \vee p_B(u).$$

Con la intersección:

$$A \cap B = \{3\}, \quad p_{A \cap B}(u) = p_A(u) \wedge p_B(u).$$

Y con el complemento:

$$U \setminus A = \{2, 4\}, \quad p_{U \setminus A}(u) = \neg p_A(u).$$

Así, tenemos un marco equivalente a la lógica proposicional, de manera que trabajar con familias de subconjuntos equivale a razonar con fórmulas proposicionales. Esto nos será de utilidad más adelante, en la [Subsección 2.3.5](#) para plantear nuestro problema como en términos del problema de satisfacción booleana, un problema ampliamente reconocido y estudiado.

#### 2.1.4. Particiones y recubrimientos

Sobre este marco algebraico, podemos definir objetivos concretos de algunas particularizaciones de nuestro problema como la de Recubrimiento de  $G$ , la de Set Cover, y la de Exact Cover, en las que intervienen varios conceptos matemáticos no mencionados hasta ahora. En la variante de Exact Cover en concreto, recordamos que ser una partición del conjunto objetivo es un requisito para ser solución. Hasta ahora no lo habíamos expresado en estos términos, pero ya podemos presentar la definición formal:

**Definición 2.5** (Partición [[Lip98](#)]). Dada una familia  $F' = F'_1, \dots, F'_{m'}$  de subconjuntos de  $F$ ,  $F'$  es una partición de  $G$  si:

- $\bigcup_{i \in \{1, \dots, m'\}} F'_i = G$ ,
- $\forall F'_i, F'_j$ , o bien  $F'_i = F'_j$ , o bien  $F'_i \cap F'_j = \emptyset$

O, dicho de la forma en que lo habíamos planteado en la [Sección 1.4](#), una partición descompone  $G$  en subconjuntos disjuntos que lo recubren completamente, sin que haya elementos sin cubrir.

Queremos que los  $F'_1, \dots, F'_{m'}$  cumplan las siguientes condiciones:

- Forman un recubrimiento exacto de  $G$ :

$$G = \bigcup_{i=1}^{m'} F'_i$$

- Son disjuntos dos a dos:

$$F'_i \cap F'_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

## 2. Fundamentos matemáticos

- No hay redundancia, es decir, no podemos eliminar ningún  $F'_i$  sin dejar de cubrir  $G$ .

El concepto de recubrimiento exacto de  $G$  que vemos en esta definición de partición, aparece también en la variante del Set Cove, donde es un requisito para constituir una solución.

Sin embargo, esto no siempre va a ser de interés, necesario o incluso posible, pues puede que haya elementos de  $G$  que no quedan cubiertos por ningún elemento de  $F$ , que algunos de los subconjuntos de  $F$  escogidos se solapen entre sí, o bien que se tengan en cuenta elementos que se salen del conjunto  $G$ .

Además, el número de particiones posibles para un conjunto finito depende de su cardinal,  $n$ , y viene dado por el número de Bell [Alo]:

- $B(0) = 1$
- $B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B(k)$

Es claro que este número crece rápidamente con  $n$ , lo cuál nos da una idea de la complejidad del problema de trabajar con particiones incluso en casos sencillos, y justifica la utilidad y necesidad de otras variantes y criterios. Por ello, en este trabajo nos centramos en encontrar la mejor aproximación posible priorizando diferentes objetivos en lugar de limitándonos a sólo uno.

En muchos casos, como en la variante de Recubrimiento de  $G$ , puede ser más útil y eficiente encontrar un recubrimiento de  $G$  aunque haya solapamientos, condición más relajada que la partición.

**Definición 2.6** (Recubrimiento [Llu16]). La familia  $F' \neq \{\emptyset\}$  es un recubrimiento del conjunto  $G$  si su unión contiene a  $G$ , es decir, si  $G \subset \bigcup_{i \in \{1, \dots, m'\}} F'_i$ .

Volviendo a nuestro Ejemplo 1.2, donde  $G = \{2, 4, 5, 7, 10\}$ , podemos encontrar:

- Recubrimiento de  $G$ :  $F'_1 = \{\{2, 3, 4\}, \{4, 5, 6\}, \{6, 7, 8\}, \{10\}\}$
- Recubrimiento exacto de  $G$ :  $F'_2 = \{\{2, 5\}, \{4, 7\}, \{7, 10\}\}$
- Partición exacta de  $G$ :  $F'_3 = \{\{2, 5\}, \{4, 7\}, \{10\}\}$

### 2.1.5. Estructuras inducidas

En el ámbito del álgebra, una estructura surge cuando dotamos a los conjuntos de ciertas leyes de composición [Pal], y por lo tanto se definen por:

- Un conjunto subyacente.
- Una o varias leyes de composición definidas sobre el conjunto.
- Unos axiomas que deben verificar dichas leyes y explican cómo se comportan los elementos entre ellos.

En nuestro caso, a partir de  $F$ , podemos considerar varias estructuras algebraicas de conjuntos que surgen de cerrar  $F$  bajo distintas operaciones. Estas estructuras generadas por  $F$  definen subconjuntos de  $\mathcal{P}(U)$ , y por tanto también subconjuntos de  $\mathcal{R}$ , la familia de conjuntos resultantes de evaluar las expresiones en  $\mathcal{E}$ . Para la construcción de estas estructuras, hacemos todas las posibles combinaciones de elementos de  $F$  mediante las operaciones permitidas en cada caso, incluyendo también combinaciones previas.

Si consideramos la variante en la que sólo permitimos las operaciones de unión y diferencia entre subconjuntos de  $F$ , llegamos naturalmente a la estructura algebraica conocida como anillo de conjuntos:

**Definición 2.7** (Anillo [Hal74]). Un anillo de conjuntos es una colección no vacía  $\mathcal{R}$  de conjuntos, tal que si  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  para  $i, j \in I = \{1, \dots, \#\mathcal{R}\}$ , entonces  $R_i \cup R_j \in \mathcal{R}$  y  $R_i \setminus R_j \in \mathcal{R}$ .

En particular, como en nuestro caso  $\mathcal{R}$  es finito, deducimos que si  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$ , entonces  $\bigcup_{i \in I} R_i \in \mathcal{R}$  y  $\bigcap_{i \in I} R_i \in \mathcal{R}$ .

Teniendo esto en cuenta, el conjunto vacío y el conjunto  $\mathcal{P}(U)$  también son ejemplos de anillos de conjuntos.

Ejemplo sencillo:

- $U = \{1, 2, 3, 4\}$
- $F = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$
- Operaciones permitidas: unión y diferencia

El espacio  $\mathcal{E}$  de expresiones que se genera es:  $\mathcal{E} = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1\} \cup \{1, 2\}, \{1\} \cup \{3, 4\}, \{1, 2\} \cup \{3, 4\}, \{1\} \setminus \{3, 4\}, \{1\} \setminus \{1, 2\}, \{1, 2\} \setminus \{3, 4\}, \dots\}$

En este caso,  $\mathcal{E}$  tiene infinitos elementos, pues no hemos impuesto restricciones sobre el número máximo de operaciones o elementos de  $F$  que podemos utilizar.

La familia de conjuntos resultantes que se genera es:

$$\mathcal{R} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Esto es, el anillo de conjuntos generado por  $F$ .

Si consideramos ahora la variante en la que sólo permitimos las operaciones de intersección y diferencia entre subconjuntos de  $F$ , llegamos naturalmente a la estructura algebraica conocida como subanillo de conjuntos:

**Definición 2.8** (Semianillo [Hal74]). Un semianillo es una colección no vacía  $\mathcal{R}$  de conjuntos tal que:

- si  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  entonces  $R_i \cap R_j \in \mathcal{R}$
- si  $R_i, R_j \in \mathcal{R}$  y  $R_i \subset R_j$ , entonces  $\exists \{C_0, \dots, C_n\}$  una colección finita de conjuntos de  $\mathcal{R}$ , tal que  $R_i = C_0 \subset C_1 \subset \dots \subset C_n = R_j$  y  $D_i = C_i \setminus C_{i-1} \in \mathcal{R} \quad \forall i \in I = \#\mathcal{R}$ .

## 2. Fundamentos matemáticos

De nuevo, todos los semianillos siempre contienen al conjunto vacío.

Ejemplo sencillo:

- $U = \{1, 2, 3, 4\}$
- $F = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$
- Operaciones permitidas: intersección y diferencia.

La familia de conjuntos resultantes que se genera es:

$$\mathcal{R} = \{\emptyset, \{1\}, \{2, 3\}\}$$

Esto es, el subanillo generado por  $F$ .

Si pasamos a considerar la variante en la que permitimos las operaciones de unión, y complemento con respecto a  $U$ , llegamos al concepto de álgebra de conjuntos:

**Definición 2.9** (Álgebra de conjuntos [Hal74]). Un álgebra de conjuntos (también a veces conocido como campo de conjuntos) es una colección no vacía  $\mathcal{R}$  de conjuntos tal que:

- si  $R_i \in \mathcal{R}$  y  $R_j \in \mathcal{R}$ , entonces  $R_i \cup R_j \in \mathcal{R}$
- si  $R_i \in \mathcal{R}$ , entonces  $\overline{R_i} \in \mathcal{R}$ .

Ejemplo sencillo:

- $U = \{1, 2, 3, 4\}$
- $F = \{\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, U\}$
- Operaciones permitidas: complemento y unión.

La familia de conjuntos resultantes que se genera es:

$$\mathcal{R} = \{\emptyset, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Esto es, el álgebra de conjuntos generado por  $F$ .

La siguiente proposición es un resultado clásico en teoría de conjuntos:

**Teorema 2.10** (Relación álgebra de conjuntos y anillo [Lip98]). *Toda álgebra de conjuntos es también un anillo de conjuntos, pero el recíproco no es cierto.*

*Demostración.* Sea  $F$  un álgebra de conjuntos sobre  $U$ . Por definición,  $F$  está cerrada bajo complemento y unión finita, y contiene al conjunto vacío. Se tiene también que  $F$  es cerrada bajo intersección y diferencia, ya que:

$$A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}, \quad A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Por tanto, toda álgebra es también un anillo, ya que cumple las propiedades necesarias.

Sin embargo, no todo anillo de conjuntos es un álgebra, ya que un anillo no exige que  $U \in F$ . Por ejemplo, sea:

$$F = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} \subseteq \mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$$

Esta familia es un anillo (cerrada bajo diferencia y unión), pero no es un álgebra, ya que  $\{1, 2, 3\} \notin F$ . Por tanto, la implicación contraria no se cumple.  $\square$

Analizamos también el concepto de  $\sigma$ -álgebra, que va a ser esencial cuando queramos aplicar el concepto de medida clásico.

**Definición 2.11** ( $\sigma$ -álgebra [Pal99]). Una  $\sigma$ -álgebra es un álgebra  $F \subset \mathcal{P}(U)$  que además verifica:

$$F_i \in F \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_i \in F$$

Es decir, esta estructura es cerrada bajo uniones numerables. Además, tenemos en cuenta el siguiente teorema:

**Teorema 2.12** (Relación  $\sigma$ -álgebra de conjuntos y anillo [Lip98]). *Todo  $\sigma$ -álgebra de conjuntos es también un anillo, pero el recíproco no es cierto.*

*Demostración.* Sea  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una  $\sigma$ -álgebra. Por definición, cumple:

- $U \in F$
- Si  $A \in F$ , entonces  $\overline{A} \in F$
- Si  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq F$ , entonces  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$

Como  $F$  está cerrada bajo complementos y uniones numerables, también lo está bajo intersecciones numerables (por las leyes de De Morgan), y en particular bajo intersección finita y unión finita (son un caso particular de las numerables). Además, está cerrada bajo diferencia, ya que:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

Por tanto,  $F$  cumple las propiedades necesarias para ser un anillo de conjuntos.

Para demostrar que el recíproco no es cierto, consideramos el siguiente contraejemplo. Sea  $U = \mathbb{N}$ , definimos:

$$F = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid A \text{ es finito o } \overline{A} \text{ es finito}\}$$

Esta familia es un anillo, ya que está cerrada bajo diferencia y unión finita:

- La unión de dos conjuntos finitos es finita.
- La diferencia de un conjunto finito y otro finito es finita.
- La diferencia de un conjunto cofinito (su complemento es un conjunto finito) y otro cualquiera sigue siendo finita o cofinita.

## 2. Fundamentos matemáticos

Sin embargo,  $F$  no es una  $\sigma$ -álgebra, ya que no está cerrada bajo uniones numerables. Por ejemplo, sea  $A_n = \{2n\}$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Entonces  $A_n \in F$  porque cada conjunto es finito, pero:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

es un conjunto infinito con complemento también infinito, por tanto:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \notin F$$

Queda demostrado que  $F$  no es una  $\sigma$ -álgebra.

□

En particular, tenemos la relación:  $\sigma$ -álgebra  $\subset$  Álgebra  $\subset$  Anillo  $\subset$  Semianillo. [Nie] [Zum]

## 2.2. Medidas

Una vez que hemos analizado las estructuras algebraicas de los distintos conjuntos presentes en la definición de nuestro problema, introducimos el **Elemento 8**: las medidas. Tal y como mencionamos en la definición de nuestro problema, estas son herramientas que nos permiten imponer restricciones (**Elemento 7** de nuestro problema), así como medir la calidad de nuestras soluciones. Esto último, nos permite por un lado ver cómo de buena es una aproximación y por otro, comparar entre varias potenciales soluciones y escoger una en base a un criterio determinado.

Adelantamos que en la parte informática de este trabajo, veremos otro uso adicional de las medidas: su incorporación dentro de los propios algoritmos. Sin embargo, para ello es necesario anticipar algunos aspectos computacionales, por lo que por el momento nos centramos únicamente en su papel matemático.

Las medidas que vamos a estudiar no pretenden ser una clasificación exhaustiva, sino una selección representativa de las más empleadas en el análisis de conjuntos. Estas se pueden dividir en tres categorías principales: medidas de asociación, direccionales, y otras; y las analizamos en función de los subconjuntos sobre los que están definidas.

Si bien las medidas también tiene una utilidad dentro de los algoritmos concretos para guiar el proceso de construcción de las soluciones candidatas, como veremos más adelante en la parte informática de nuestro trabajo, en esta sección nos limitamos su uso como criterio externo. Finalmente, distinguimos entre medidas de calidad o de optimización, cuyo valor buscamos maximizar o minimizar según el objetivo concreto; y medidas de restricción, que nos permiten imponer restricciones en nuestro problema, estableciendo un valor umbral que ha de cumplirse para constituir una solución válida.

### 2.2.1. Medidas de asociación

Las medidas de asociación son ampliamente utilizadas en el ámbito de la estadística y el análisis de datos para cuantificar la relación entre variables categóricas. Cuando tenemos una población clasificada según dos o más variables, es decir, clasificación cruzada, surgen preguntas sobre el grado de asociación o dependencia que hay entre ellas, y en qué grado conocer el valor de una variable nos da información sobre la otra. La elección de la medida de asociación debe hacerse en función del contexto y de los objetivos específicos del problema y no de manera generalizada [BL21]. De hecho, no siempre es posible definir un único objetivo para una investigación. Muchas veces buscamos simplemente resumir de forma compacta una gran cantidad de datos o identificar patrones.

En términos de probabilidad, si  $X$  e  $Y$  son variables categóricas, una medida de asociación suele expresar cuanto se desvía la distribución conjuntos  $P(X, Y)$  del producto de las marginales  $P(X)P(Y)$ , lo cual equivale a la independencia. Una opción común es construir modelos probabilísticos de actividad predictiva, y definir la medida de asociación como una probabilidad derivada de dicho modelo [GK79]. Esto mide la reducción relativa en la probabilidad de error al predecir una variable conociendo la otra.

Trasladando esto a nuestro problema de aproximación de conjuntos, las clasificaciones se corresponden con la pertenencia de los elementos al conjunto objetivo  $G$  y a la aproximación final  $\tilde{G}$ . Es decir, medir hasta qué punto ambas clasificaciones están asociadas, sin asumir prioridad de una sobre la otra. Para ello, no necesitamos construir explícitamente los modelos probabilísticos que hemos mencionado, sino que nos centraremos en métricas más sencillas que pueden interpretarse como medidas de asociación derivadas de las tablas de contingencia  $2 \times 2$  entre el conjunto objetivo  $G$  y la aproximación  $\tilde{G}$ :

	En $G$	No en $G$	Total
En $\tilde{G}$	Verdaderos Positivos (TP)	Falsos Positivos (FP)	$ \tilde{G} $
No en $\tilde{G}$	Falsos Negativos (FN)	Verdaderos Negativos (TN)	$ U \setminus \tilde{G} $
Total	$ G $	$ U \setminus G $	$ U $

Tabla 2.2.: Tabla de contingencia  $2 \times 2$  entre el conjunto objetivo  $G$  y la aproximación  $\tilde{G}$ .

Hemos tomado como clase “positiva” la pertenencia a  $G$ , pues es nuestra realidad. Por lo tanto, los Verdaderos Positivos (o True Positives) son los elementos que están tanto en la aproximación como en el conjunto objetivo; los Falsos Positivos (o False Positives) son los elementos que están en la aproximación pero no en  $G$ ; los Falsos Negativos (o False Negatives) son los elementos de  $G$  que no están en la aproximación; y por último, los Verdaderos Negativos (o True Negatives) son los elementos que no están ni en  $\tilde{G}$  ni en  $G$ .

De esta tabla, podemos sacar algunas de las medidas de asociación más comunes:

- Índice de Jaccard [RV96]: mide la proporción de elementos que pertenecen tanto a  $G$  y  $\tilde{G}$ , sobre los que pertenecen al menos a uno de los dos. Es una de las más utilizadas en

el ámbito de cobertura de conjuntos y del análisis de datos. Su fórmula es:

$$\mathcal{J}(G, \tilde{G}) = \frac{|G \cap \tilde{G}|}{|G \cup \tilde{G}|} = \frac{TP}{TP + FN + FP}$$

- Coeficiente de Sørensen-Dice: es muy similar al índice de Jaccard pero pondera más los valores TP. Su fórmula es:

$$D(G, \tilde{G}) = \frac{2|G \cap \tilde{G}|}{|G| + |\tilde{G}|} = \frac{2TP}{2TP + FP + FN}$$

- Coeficiente de correlación  $\phi$  [BB01]: mide la calidad de clasificaciones binarias. Es muy utilizado en el ámbito de la bioinformática y del Machine Learning, donde es más conocido como MCC (Matthews correlation coefficient). Utiliza toda la tabla, ya que también considera los TN. Toma el valor +1 cuando la predicción es perfecta, 0 cuando es una predicción aleatoria, y -1 cuando es una predicción inversa. Es especialmente útil cuando existe un desbalanceo de clases. En nuestro problema, puede servir como medida asociativa más robusta cuando  $G$  es mucho más pequeño que  $U$ . Su fórmula es la siguiente:

$$MCC = \frac{TP \times TN - FP \times FN}{\sqrt{(TP + FP)(TP + FN)(TN + FP)(TN + FN)}}$$

- Test  $\chi^2$  de independencia [Urdo5]: permite determinar si los elementos de una muestra caen en las categorías de forma aleatoria, es decir, si la división en categorías de una de las variables es independiente de la otra variable categórica. A pesar de ser de los tests de independencia más conocidos en la estadística, no lo utilizaremos en nuestro problema, pues nos centramos en métricas cuantitativas, más que en contrastes de hipótesis.

En la práctica se ha prestado mucha atención al equilibrio entre la precisión y el recall, especialmente en conjuntos de datos desbalanceados y en problemas como la detección de fraude [Rob21]. Aunque este análisis es más común en machine learning, donde se usan curvas precisión-recall para ajustar el threshold en cada iteración de entrenamiento, nos muestra su importancia en nuestro problema. No conviene despreciar una de estas dos medidas por completo y sólo focalizarnos en la otra. Si tenemos una precisión alta con un recall bajo, los elementos incluidos en la aproximación realmente pertenecen a  $G$ , pero se pueden estar ignorando muchos otros elementos de  $G$ . Por el contrario, si tenemos un recall alto con una precisión baja, aproximamos la mayoría de elementos de  $G$ , pero estamos incluyendo también muchos elementos de fuera de  $G$ . Esto nos muestra lo necesario que es considerar ambas medidas conjuntamente, según nuestro objetivo.

Todas estas medidas asociativas únicamente utilizan el conjunto objetivo y las potenciales soluciones, sin importar cómo se construyeron estas [HM15]. Por ello, nos dicen cómo de buenas son estas soluciones respecto a  $G$ , y nos permiten usarlas como criterio discriminador para seleccionar la solución óptima de entre todas las candidatas.

- Convención con signo: La medida toma valores entre -1 y +1, alcanzando estos extremos en caso de asociación completa, y siendo el 0 el caso de independencia. Es el caso



del coeficiente de correlación  $\phi$ . Esta convención es útil cuando existe un orden natural en las categorías que nos permita asignar un sentido a la relación.

- Convención sin signo: La medida toma valores entre 0 y +1, alcanzando el +1 en caso de asociación completa, y el 0 en caso de independencia. Es el caso de índice de Jaccard. Esta convención se utiliza cuando no hay un orden natural entre las categorías y no tiene sentido hablar de direcciones positivas o negativas.

Es importante destacar que la idea de “asociación completa” puede ser ambigua en contextos complejos. En cambio, el concepto de independencia sí es claro: por ejemplo, si la inclusión de un elemento en  $G$  es estadísticamente independiente de su aparición en  $\tilde{G}$ .

Finalmente, conviene y es interesante recordar que una vez definida una medida de asociación dentro de uno de estos rangos, es posible generar otras medidas cumpliendo la misma convención mediante transformaciones (como elevarla a una potencia o aplicarle funciones monótonas), sin perder su interpretación general.

### 2.2.2. Medidas direccionales

A diferencia de las medidas de asociación, las medidas direccionales no son simétricas, sino que evalúan una variable respecto de otra. Toman una como “realidad” y otra como su “predicción”, por lo que son especialmente útiles cuando existe un criterio de referencia, como es nuestro caso, donde queremos aproximar  $G$ .

De la [Tabla 2.2](#), podemos extraer algunas de las medidas direccionales más utilizadas:

- Precisión [[SFMK24](#)]: es la proporción de elementos predichos que son correctos. En nuestro problema, es la proporción de elementos de  $\tilde{G}$  que pertenecen efectivamente a  $G$ . Su fórmula es:

$$\text{Precision} = \frac{TP}{TP + FP}$$

Está directamente relacionada con la sobrecobertura, pues cuanto mayor es la precisión, menor es la sobrecobertura de  $G$ , es decir, el número de elementos de  $U \setminus G$  incluidos en la aproximación. La diferencia es que la sobrecobertura se expresa en términos absolutos ( $|\tilde{G} \setminus G| = FP$ ), mientras que la precisión es relativa, pues normaliza respecto al tamaño de  $\tilde{G}$ :

$$1 - \text{Precision} = \frac{FP}{TP + FP} = \frac{|\tilde{G} \setminus G|}{|\tilde{G}|}$$

- Recall o Sensibilidad [[SFMK24](#)]: es la proporción de elementos reales que han sido correctamente predichos. En nuestro problema, cuántos de los elementos de  $G$  han sido cubiertos en  $\tilde{G}$ . Su fórmula es:

$$\text{Recall} = \frac{TP}{TP + FN}$$

Está directamente relacionada con la infracobertura, pues cuanto mayor es el recall, menor es la infracobertura de  $G$ , es decir, el número de elementos de  $G$  que quedan

## 2. Fundamentos matemáticos

sin cubrir por la aproximación. Al igual que en el caso anterior, la infracobertura es absoluta ( $|G \setminus \tilde{G}| = FN$ ), mientras que el recall es relativo, al normalizar respecto al tamaño de  $G$ :

$$1 - \text{Recall} = \frac{FN}{TP + FN} = \frac{|G \setminus \tilde{G}|}{|G|}$$

- Especificidad [SFMK24]: es la proporción de negativos correctamente identificados. En nuestro problema, cuántos de los elementos de  $U \setminus G$  están en  $U \setminus \tilde{G}$ . Su fórmula es:

$$\text{Specificity} = \frac{TN}{TN + FP}$$

Esta medida se centra únicamente en la calidad de la clasificación de los elementos negativos. Por ello, no siempre resulta de interés por sí sola, ya que ignora lo que ocurre con los elementos positivos. En muchos casos es preferible combinarla con otras métricas que reflejen tanto aciertos como errores en el conjunto completo.

- F1-Score [SFMK24]: es la media armónica de precisión y recall. Equivale al coeficiente de Dice en clasificación binaria.

$$\text{F1-Score} = \frac{2TP}{2TP + FP + FN} = 2 \cdot \frac{\text{Precision} \cdot \text{Recall}}{\text{Precision} + \text{Recall}}$$

Merece la pena incidir en el caso del F1-Score y analizarlo con mayor detalle. Esta medida aparece por primera vez en el libro *Information Retrieval* de Van Rijsbergen, en 1979 [CHK23]. En él se evidencia el interés en combinar precisión y recall, dos medidas muy útiles en la recuperación de información que, como ya hemos mencionado, resultan especialmente valiosas cuando se consideran conjuntamente. Antes de llegar a la fórmula definitiva del F-Score, se plantean distintas alternativas, aunque esta medida pronto se consolidó y empezó a utilizarse también en otros ámbitos de la informática, como la extracción de información y la clasificación de textos, convirtiéndose en una de las más conocidas y utilizadas. En cuanto a su naturaleza, el F1-Score ha generado cierto debate sobre si debe considerarse de asociación (simétrica) o direccional. En la mayoría de estudios se presenta como una medida direccional [HST<sup>+</sup>22], pues es la media armónica de precisión y recall, ambas medidas direccionales. Ahora bien, se trata de una medida simétrica, cuyo resultado no cambia dependiendo de qué clase se defina como positiva y negativa. Es decir, es invariante a intercambiar el conjunto objetivo  $G$  con la aproximación  $\tilde{G}$ . Además, no depende de  $TN$ , sino que mide el parecido que hay entre  $G$  y  $\tilde{G}$  sin tener en cuenta el resto del universo. De ahí su paralelismo con el coeficiente Dice, y su posible interpretación como medida asociativa.

En cuanto al carácter de estas medidas direccionales, al igual que las medidas asociativas, comparan el conjunto objetivo con las potenciales soluciones [HM15].

Cabe destacar que tanto la exactitud como la especificidad dependen de los verdaderos negativos ( $TN$ ), es decir, los elementos que no pertenecen ni a  $G$  ni a su aproximación,  $\tilde{G}$ . En campos como el diagnóstico médico, donde los negativos son tan relevantes como los positivos, este tipo de medidas son cruciales. En nuestro problema, sin embargo, los  $TN$  son los elementos de  $(U \setminus G) \cap (U \setminus \tilde{G})$ , que suelen ser muy numerosos y aportan poca información sobre la aproximación. Por ello, muchas métricas (como el F1-Score o Jaccard) los ignoran

por completo.

Todas estas medidas direccionales pueden expresarse de forma natural como probabilidades condicionadas calculadas a partir de la [Tabla 2.2](#). Por ejemplo, la precisión corresponde a  $P(G|\tilde{G})$ , mientras que la sensibilidad es  $P(\tilde{G}|G)$ . Esto conecta directamente con la literatura de clasificación binaria y de tests diagnósticos, donde las medidas que hemos mencionado se definen en los mismos términos. En los campos como la medicina y epidemiología, se utilizan al definir la calidad de un test diagnóstico en los que se clasifican pacientes sanos y enfermos, de ahí la gran relación de nuestro problema con la biología computacional, como ya mencionamos en el apartado de aplicaciones e impacto.

### 2.2.3. Otras medidas

Dentro de esta sección incluimos algunas medidas que no son ni asociativas ni direccionales. No se trata de métricas estandarizadas en la literatura como lo son las mencionadas hasta ahora, sino que las definimos a partir de propiedades observables en nuestro problema. Estas evalúan diferentes criterios:

- Medidas de redundancia:

$$\mu_n(F_i) = |F_i \cap \tilde{G}_n|$$

Miden la intersección entre un conjunto candidato  $F_i$  y la solución parcial en el paso  $n$ ,  $\tilde{G}_n$ . Esto permite priorizar soluciones donde los conjuntos seleccionados tienen poca intersección entre sí, lo cual favorece la diversidad. Es útil en contextos donde la redundancia es costosa o no deseable, como en casos de segmentación o clasificación. Sin embargo, puede llevar a descartar conjuntos útiles que, aunque se solapen, aportan una mejor cobertura sobre  $G$ .

Al aplicarse sobre elementos de  $F$  y la aproximación parcial en cada paso, se trata de una medida de carácter interno, pues no depende de la aproximación final.

- Medidas de tamaño: devuelven el tamaño de un conjunto. Aunque no es una métrica en sentido estricto, sí es un concepto fundamental y ampliamente utilizado.
  - Tamaño local:

$$\mu(F_i) = |F_i|, \quad \mu(\tilde{G}_i) = |\tilde{G}_i|$$

Esta medida nos da el cardinal de un conjunto  $F_i$  o de una aproximación parcial. Puede usarse para penalizar o priorizar conjuntos según su tamaño. Es útil si queremos incluir en nuestra aproximación conjuntos muy grandes, que cubren más elementos aunque quizás incluyan muchos ajenos a  $G$ . Podemos utilizarla cuando buscamos cubrir  $G$  usando el menor número posible de subconjuntos. Por ejemplo, en casos prácticos en los que todos los subconjuntos tengan el mismo coste asociado, y queramos minimizar el coste total.

De nuevo, al aplicarse sobre elementos de  $F$  o sobre las aproximaciones parciales, se trata de una medida de carácter interno, que no depende de la aproximación final.

- Tamaño de la aproximación:

$$\mu(\tilde{G}) = |\tilde{G}|, \quad \mu(F') = |F'|$$

Esta medida nos da el cardinal de la aproximación final, o bien el número de subconjuntos utilizados. Es útil en casos en los que cada elemento o cada nuevo subconjunto aumente el coste total, y queramos minimizarlo.

En este caso, medimos el tamaño de la aproximación final o el número de subconjuntos de  $F$  utilizados en ella, por lo que necesitamos que el algoritmo haya concluido, y por tanto se trata de una medida externa.

- Medidas ponderadas:

$$\mu(F_i) = w_i, \quad w_i \in \mathbb{R}_0^+$$

Esta medida asigna un peso o coste a cada subconjunto. Nos permite modelar situaciones específicas más complejas y realistas en las que el uso de algunos conjuntos puede tener un coste o un riesgo mayor que otros. Por ejemplo, aplicándolo al caso ya mencionado de publicidad, esta medida podría utilizarse cuando el coste del anuncio depende de la localización o zona. En este caso, la medida ponderada prioriza subconjuntos más baratos, aunque estos no garanticen la mejor cobertura.

Como el coste está asociado a cada  $F_i \in F$ , se trata de una medida que guía la construcción de la aproximación final, y por tanto es de carácter interno.

- Medidas globales: son medidas que, si bien no se ven afectadas por cuál se toma como clase de referencia, no entran dentro de la categoría de medidas asociativas porque no miden directamente el grado de parecido entre los dos conjuntos, sino si coinciden o discrepan respecto a todo el universo. Se trata, por tanto, de medidas simétricas de carácter externo, porque trabajan sobre los conjuntos finales completos, no sobre construcciones intermedias.

- Error rate [ST24]: mide la proporción de elementos mal clasificados sobre el total. En nuestro problema, mide los elementos que están o bien en  $G$  o bien en  $\tilde{G}$  pero no en ambos ni en ninguno. Es una medida muy conocida y extendida en estadística y en el ámbito de machine learning. Su fórmula es:

$$\text{Error rate} = \frac{FP + FN}{TP + FP + FN + TN} = \frac{FP + FN}{|U|}$$

- Exactitud o Accuracy [SFMK24]: es la proporción de elementos clasificados correctamente. En nuestro problema, cuántos de los elementos de todo el universo (ya sean de dentro de  $G$  o de  $U \setminus G$ ) han sido correctamente aproximados. Su fórmula es:

$$\text{Accuracy} = \frac{TP + TN}{TP + FP + FN + TN} = \frac{TP + TN}{|U|} = 1 - \text{Error rate}$$

- Números de operaciones: esta medida cuantifica la complejidad de una aproximación en términos del número de operaciones entre conjuntos que han sido necesarias para construirla. No evalúa similitud ni relación direccional entre  $G$  y  $\tilde{G}$ , sino la simplicidad

de la expresión que genera la aproximación. Puede usarse tanto de forma interna como de forma externa. Su fórmula es:

$$\mu(e) = \#\{\text{operaciones en la expresión } e\}.$$

Habiendo visto diferentes ejemplos de medidas, señalamos que siempre existe la posibilidad de definir nuevas medidas según nuestros intereses particulares. Una forma natural consiste en combinar varias de las medidas mencionadas aplicadas a un mismo subconjunto  $X$  de interés en nuestro problema:

$$\mu(X) = \mu_1(X) + \mu_2(X) + \cdots + \mu_n(X)$$

En este caso, basta con que todas las medidas se puedan aplicar sobre el mismo subconjunto.

En situaciones más complejas en las que nos interesa medir propiedades de distintos subconjuntos, podemos recurrir a una medida multidimensional. Por ejemplo, para dos subconjuntos relevantes  $X$  e  $Y$ :

$$\mu(X, Y) = \gamma_1(X) + \delta_1(Y) + \dots,$$

donde las  $\gamma_i$  son medidas sobre  $X$  y las  $\delta_i$  son medidas sobre  $Y$ . Esta idea es extrapolable a dimensiones superiores, permitiendo construir medidas más flexibles.

#### 2.2.4. Restricción vs. Optimización

En la teoría de nuestro problema de aproximación de conjuntos, las medidas pueden desempeñar dos papeles fundamentales. Por un lado, pueden actuar como restricción: fijamos un umbral (mínimo o máximo aceptable) y descartamos todas las soluciones que no lo respeten. Por otro lado, pueden servir como objetivo de optimización, es decir, buscamos maximizar o minimizar su valor dentro del espacio de soluciones. Esta dualidad es muy común en problemas de optimización combinatoria, donde se busca hallar la mejor solución posible en un espacio discreto.

Sin embargo, algunas medidas se utilizan preferentemente en una de estas dos modalidades. Algunas tienen un significado natural como restricción, como por ejemplo, el número de operaciones utilizadas. Resulta más adecuado fijar un máximo de operaciones permitidas, para evitar que se dispare la complejidad computacional y el tiempo de ejecución, como veremos en la próxima subsección. Así, las aproximaciones que excedan dicho umbral pueden ser automáticamente descartadas. En cambio, no resulta tan útil como criterio de optimización, pues si buscamos el menor número de operaciones posibles, obtendríamos trivialmente el valor cero; mientras que si buscamos el mayor, obtendríamos soluciones más largas y complejas, sin aportar un beneficio real en términos de la calidad de la aproximación.

Otro ejemplo de medida esencialmente restrictiva es el test  $\chi^2$  de independencia, que en inferencia estadística se aplica siempre fijando un nivel de significación  $\alpha$ . Dicho nivel actúa como umbral: si el valor calculado de  $\chi^2$  supera el valor crítico correspondiente, se rechaza la hipótesis nula de independencia [Mol24]. De la misma manera, la medida de tamaño local puede utilizarse en sentido restrictivo, estableciendo un límite máximo para los subconjuntos

$F_i$ , de manera que aquellos de tamaño superior no se utilizan en la aproximación.

Las medidas restrictivas juegan un papel crucial en nuestro problema, pues permiten implementar las restricciones propias de cada particularización con la que tratamos. Por ejemplo, limitar las operaciones que se pueden utilizar en las particularizaciones de semianillo o de anillo. Dentro de este grupo podríamos diferenciar entre “hard” y “soft” constraints, tal y como es muy habitual en programación lineal [Ken75]. Las “hard” constraints son las restricciones estructurales del problema, que han de cumplirse necesariamente, mientras que las “soft” constraints son restricciones deseables pero no completamente obligatorias. Con estas últimas somos un poco más permisivos, pudiendo relajarse si el coste de no hacerlo es demasiado grande.

En cambio, el resto de medidas que hemos presentado tienen más sentido como criterios de optimización. Por ejemplo, buscamos maximizar el índice de Jaccard, el coeficiente de Dice, la precisión o el recall; o minimizar la redundancia y el error rate. Algunas, no obstante, se adaptan a ambas interpretaciones: por ejemplo, el tamaño de la aproximación final puede imponerse como restricción o minimizarse como objetivo, y lo mismo ocurre con el peso total de los conjuntos utilizados, que podemos fijar en caso de un presupuesto estricto o reducir para optimizar recursos.

De cualquier manera, es importante tener en cuenta que la elección de considerar una medida como restricción o como medida de calidad a optimizar influye directamente en el espacio de soluciones aceptables,  $\mathcal{E}'$ .

### 2.3. Complejidad computacional

Una vez que hemos definido las medidas, sus distintos tipos e interpretaciones, y hemos presentado diferentes ejemplos y aplicaciones, terminamos la parte matemática de nuestro trabajo focalizándonos en analizar el coste de calcularlas y en la complejidad de nuestro problema en conjunto.

La teoría de la computación surge en el siglo XX a partir de cuestiones fundamentales sobre los límites del cálculo y las matemáticas. En los años veinte, Hilbert planteó su programa de formalización matemática, que fue posteriormente limitado por los teoremas de incompletitud de Gödel. Estos resultados llevaron a investigadores como Turing y Church a preguntarse qué problemas podían resolverse de forma algorítmica.

En este contexto, Alan Turing introdujo el concepto de Máquina de Turing, un modelo teórico que formaliza la noción de cálculo. Se trata de un autómata con una cinta infinita y un cabezal de lectura/escritura que, siguiendo un conjunto finito de reglas, permite describir cualquier procedimiento computacional. Este modelo sentó las bases de la computabilidad moderna y sigue siendo la referencia fundamental para definir qué significa que un problema sea resoluble mediante un algoritmo.

Con el desarrollo de los ordenadores, la atención se trasladó hacia la eficiencia en la resolución de problemas [FH03]. Esto dio lugar a la teoría de la complejidad computacional,

donde se definieron clases como  $P$  y  $NP$ , para clasificar problemas en función de los recursos necesarios para resolverlos.

Por un lado tenemos la complejidad espacial que se refiere a la cantidad de memoria que requiere un algoritmo. Por otro tenemos la complejidad temporal, que es el tiempo de ejecución necesario de dicho algoritmo. Sin embargo, veremos que ambas están estrechamente relacionadas.

### 2.3.1. Complejidad temporal y notación asintótica

Aún cuando un problema sea resoluble computacionalmente en la teoría, puede no serlo en la práctica si el tiempo o la memoria requeridos resultan excesivos. Muchas veces es difícil calcular el tiempo exacto que tarda un algoritmo en ejecutarse, por lo que normalmente se recurre a estimaciones asintóticas [Sip12]. En particular, nos interesa el crecimiento de la función de tiempo de ejecución en el peor caso, es decir, el término de mayor orden cuando el tamaño de la entrada tiende a infinito. Para expresarlo, utilizamos la notación conocida como “big-O”.

**Definición 2.13** (Big-O [Sip12]). Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Decimos que  $f(n) = O(g(n))$  si existen constantes positivas  $c, n_0$  tales que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , con  $n \geq n_0$ ,  $f(n) \leq cg(n)$ . En ese caso,  $g(n)$  actúa como cota superior asintótica para  $f(n)$ .

Mientras que  $O(g(n))$  indica que una función  $f(n)$  no crece más rápido que  $g(n)$  salvo constantes, existe una notación más restrictiva que expresa que  $f(n)$  crece estrictamente más despacio que  $g(n)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ :

**Definición 2.14** (Small-o [Sip12]). Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$ . Decimos que  $f(n) = o(g(n))$  si para todo  $c \in \mathbb{R}^+$ , existe un  $n_0$ , tal que  $f(n) < cg(n) \quad \forall n \geq n_0$ . En este caso,  $g(n)$  es una cota estricta para  $f(n)$ .

Veamos los órdenes de algunas de las medidas que mencionamos en la sección anterior, así como de algunas operaciones necesarias en nuestro problema:

La medida de tamaño local es un gran ejemplo de orden constante,  $O(1)$ , pues basta con leer el contador de elementos  $|F_i|$ , independientemente del tamaño de la entrada. Ahora bien, si tenemos una solución  $\tilde{G}$  y el conjunto objetivo  $G$ , y queremos comprobar si un elementlogno de la solución está en el objetivo, podemos usar dos estrategias distintas: una búsqueda binaria en una estructura ordenada, con coste logarítmico,  $O(\log(|G|))$ ; o recorrer todos los elementos de  $G$ , con orden lineal,  $O(|G|)$ . Si repetimos este procedimiento para cada elemento de  $\tilde{G}$ , el coste asciende a  $O(|\tilde{G}| \cdot \log|G|)$  y  $O(|\tilde{G}| \cdot |G|) \approx O(|G|^2)$  respectivamente. Finalmente, para un orden exponencial,  $O(2^n)$ , basta con calcular todas las posibles combinaciones de subconjuntos de  $F$  y ver si cubren  $G$ . Esto corresponde a una búsqueda exhaustiva, que veremos en la parte informática.

Es claro en estos ejemplos abstractos la importancia de estudiar y comparar en detalle las estructuras de datos que podemos utilizar en nuestro problema, así como las operaciones

## 2. Fundamentos matemáticos

asociadas. La elección adecuada puede marcar la diferencia entre una solución ineficiente, y otra mucho más rápida. Más adelante, en la parte informática, se analizará la complejidad concreta de los algoritmos que implementaremos para resolver el problema.

Utilizamos los siguientes cuatro gráficos para presentar todo esto de forma más visual. En ellos analizamos cómo cambia el tiempo de ejecución de un algoritmo/programa/instrucciones de distintos órdenes, según el tamaño de entrada. Lo hacemos para distintos tamaños de  $n$  en cada gráfico.

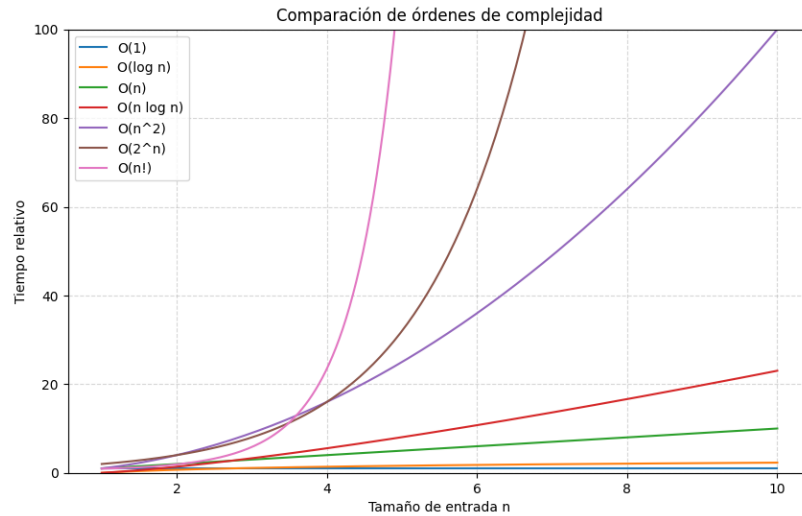


Figura 2.2.: Comparación de órdenes de complejidad para  $n$  hasta 10 (escala lineal).

En este primer gráfico, centrado en tamaños muy pequeños de entrada, vemos que incluso con  $n$  tan reducidos, los órdenes factorial y exponencial empiezan a crecer rápidamente. A partir de  $n = 4$ ,  $O(n!)$  supera drásticamente al resto, y a partir de  $n = 6$ , el orden  $O(2^n)$  también se dispara. Los órdenes polinomiales como  $O(n^2)$ , resultan mejorables en este rango, en comparación con los lineales y logarítmicos, que prácticamente no se distinguen entre sí. Con este gráfico vemos que, aún para entradas pequeñas, los algoritmos de complejidad exponencial o factorial dejan de ser prácticos.

Rescatamos nuestro ejemplo base 1.2 donde teníamos  $|F| = 9$ ,  $|G| = 5$ ,  $|U| = 10$ . Si quisieramos comprobar si un elemento de  $\tilde{G}$  está en el objetivo, utilizando una estructura ordenada, que conlleva un orden  $O(\log|G|) = O(\log(5))$ , vemos en el gráfico que el tiempo es prácticamente el mismo que en el caso constante. Por su lado, si recorremos los 5 elementos de  $G$ , con orden  $O(5)$ , vemos que el tiempo crece, separandose del orden logarítmico, aún siendo un ejemplo con conjuntos muy pequeños.



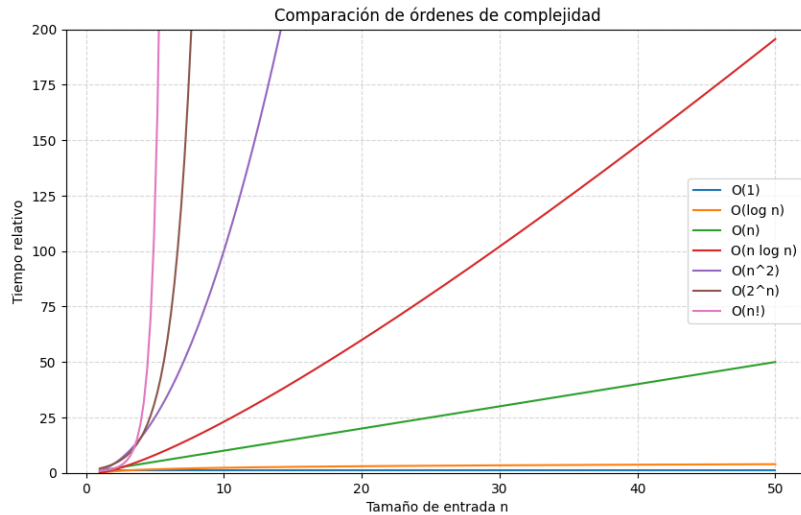


Figura 2.3.: Comparación de órdenes de complejidad para  $n$  hasta 50 (escala lineal).

Si ampliamos el rango hasta  $n = 50$ , observamos cómo los órdenes cuadráticos se evidencian como poco eficientes en comparación con los lineales y logarítmicos. El orden  $O(n \log n)$  comienza a separarse de manera clara, poniéndose en una posición intermedia: más costoso que los lineales, pero aún muy inferior a los exponenciales. Este gráfico muestra cómo, a medida que aumenta el tamaño de entrada, incluso órdenes considerados razonables, pueden llegar a ser limitantes.

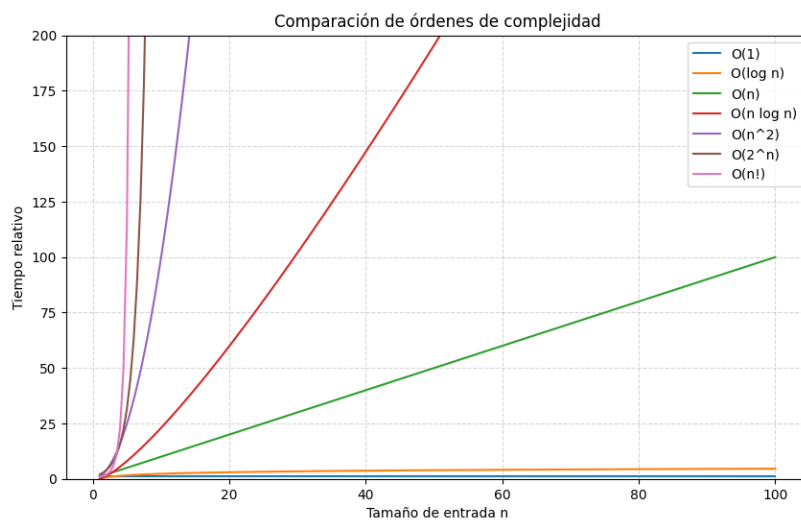


Figura 2.4.: Comparación de órdenes de complejidad para  $n$  hasta 100 (escala lineal).

Si analizamos tamaños hasta  $n = 100$ , la diferencia entre los órdenes es aún más evidente. Los factoriales, exponenciales y cuadráticos crecen tanto que dejan de ser representativos en la escala lineal, lo cual confirma su inviabilidad en la práctica. El orden  $O(n \log n)$ , aunque también se dispara, todavía se mantiene en un rango más asumible. Los órdenes lineal y

## 2. Fundamentos matemáticos

logarítmico continúan siendo los únicos realmente escalables. En este gráfico vemos por qué los algoritmos cuadráticos, aunque más realistas que los exponenciales, pueden convertirse en un cuello de botella con entradas de tamaño medio.

Dado que nuestro problema surge de un caso real en el que se analizan coberturas de conjuntos de tamaño muy grande (miles o incluso millones de elementos), nos interesa estudiar qué ocurre en dichos casos. Para ello, en este último gráfico utilizamos una escala logarítmica que nos permite representar valores de  $n$  mucho mayores. Omitimos los órdenes factorial y exponencial, por su desproporción:

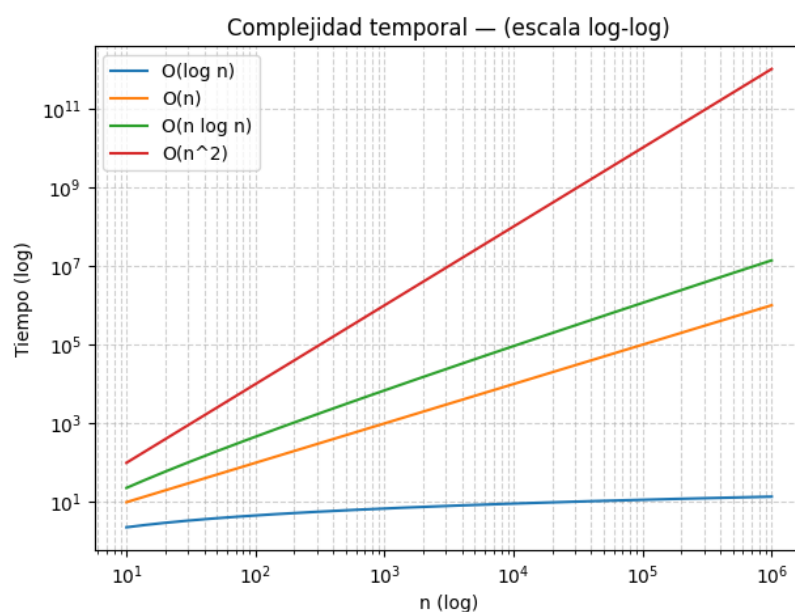


Figura 2.5.: Comparación de órdenes polinomiales en rango grande de  $n$  (escala log-log).

La escala logarítmica nos permite apreciar cómo los órdenes polinomiales se convierten en rectas con distinta pendiente. Aunque al principio parecen próximos, a medida que  $n$  crece la distancia entre ellos aumenta. Por ejemplo, para  $n = 1000$ , un algoritmo lineal puede requerir en torno a  $10^3$  pasos, uno  $O(n \log n)$  en torno a  $10^4$ , y uno cuadrático alrededor de  $10^6$ . El orden  $O(\log n)$  se mantiene alrededor de 10 pasos para entradas de tamaño hasta  $n = 10^5$ , resultando mucho inferior que los otros órdenes.

A parte de los distintos órdenes temporales que hemos analizado y ejemplificado, de forma más en general se define la clase de complejidad temporal  $TIME(t(n))$  como el conjunto de todos los problemas decidibles en tiempo  $O(t(n))$  por una máquina de Turing. A partir de aquí se derivan las conocidas clases de complejidad  $P$  y  $NP$ .

### 2.3.2. Clases de complejidad y NP-Complejidad

**Definición 2.15** (Clase P [Sip12]). Es la clase de todos los problemas de decisión resolubles por máquinas de Turing deterministas que trabajan en un tiempo polinomial. Siguiendo con la notación que veníamos usando:

$$P = \bigcup_k TIME(n^k)$$

De forma más intuitiva, son todos los problemas cuya solución se puede encontrar rápidamente. Un ejemplo es la multiplicación de matrices, de orden  $O(n^3)$ , o buscar un elemento en un array, de orden  $O(n)$ .

Antes de presentar la siguiente clase recordamos que, mientras que una Máquina de Turing determinista sólo tiene una trayectoria posible en cada paso de la ejecución, una Máquina no determinista, es aquella que puede tener varias transiciones posibles.

**Definición 2.16** (Clase NP [Sip12]). Es la clase de todos los problemas de decisión resolubles por máquinas de Turing no deterministas que trabajan en un tiempo polinomial.

De forma más intuitiva, son todos los problemas cuya solución se puede verificar en tiempo polinómico. Uno de los ejemplos más conocidos es el problema del viajante de comercio. En su versión de optimización: dado un conjunto de ciudades y las distancias entre ellas, encontrar el camino que visite cada ciudad una, y sólo una, vez, regrese al origen y minimice el coste total. La versión de decisión pregunta si existe un camino de coste  $\leq k$  constante. En la Figura 2.6 vemos un ejemplo de grafo asociado a este problema:

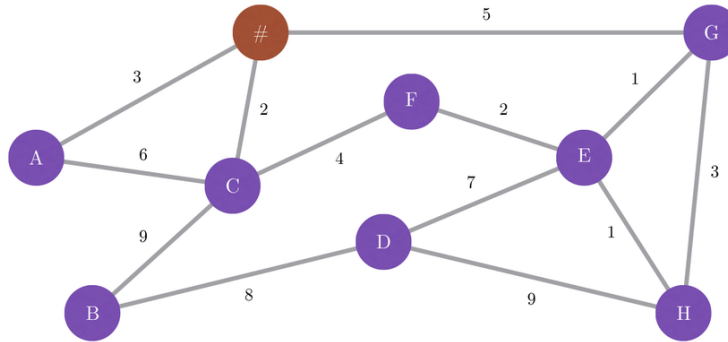


Figura 2.6.: Ejemplo de grafo de TSP. Fuente: [Bre13].

De forma intuitiva, decimos que un problema  $A$  se reduce a otro problema  $B$  cuando una solución para  $B$  puede ser utilizada para obtener una solución para  $A$  [Sip12]. Para ello se utiliza una función de reducción intermedia que convierte las instancias de  $A$  en instancias de

$B$ , de forma que resolver  $B$  implica automáticamente haber resuelto  $A$ . Se dice que un problema es  $NP$ -Hard, o  $NP$ -Duro, si todo problema de  $NP$  se reduce polinómicamente a él [Unid].

Con esto podemos presentar el concepto de  $NP$ -Compleitud:

**Definición 2.17** ( $NP$ -Completo [Sip12]). Un problema es  $NP$ -Completo si pertenece a la clase  $NP$  y además todos los otros problemas de  $NP$  son reducibles a él. Es decir, pertenece a  $NP$  y es  $NP$ -Hard.

En 1971, Stephen Cook demostró con el Teorema de Cook, que ciertos problemas, como el de satisfacibilidad booleana (SAT), son  $NP$ -completos, introduciendo la noción de reducibilidad polinómica. Un año después, el informático Richard Karp, publicó un paper que contenía un con otros 21 problemas que también son  $NP$ -Completos. Esto supuso un gran avance, demostrando que eran equivalentes entre ellos y que lo que Cook había encontrado no era un problema puntual, sino parte de una clase mayor que permitiría resolver muchos otros problemas relevantes [Kar72]. Este marco constituye la base del análisis moderno de complejidad y motiva el estudio de problemas como la cobertura de conjuntos, aunque no fue reconocido inmediatamente tras su publicación. Además, ayudó a plantear el famoso problema  $P$  vs  $NP$ . Este, aún sin resolver, es uno de los grandes desafíos de la teoría de la complejidad y ha sido reconocido como uno de los Problemas del Milenio por el Clay Mathematics Institute.

La cuestión tiene distintas interpretaciones, asociadas a las diferentes definiciones de ambas clases, que son equivalentes: desde el punto de vista teórico, se trata de comparar lo que una Máquina de Turing no determinista puede resolver rápidamente con lo que una determinista puede hacer; desde el punto de vista práctico, se quiere comprobar si la capacidad de verificar soluciones rápidamente implica también la capacidad de encontrarlas con la misma eficiencia [Chaz5].

Es bien conocido, y no nos detendremos en su demostración (pues no es directamente útil a nuestro problema), que  $P \subseteq NP$ , pues toda máquina determinista es también no determinista, siendo la inclusión trivial. Sin embargo, a lo que aún no hay respuesta es a si dicha inclusión es estricta, cosa que tendría consecuencias profundas en múltiples campos. Si  $P = NP$ , muchos problemas considerados intratables podrían resolverse de manera eficiente, lo que transformaría áreas como la inteligencia artificial, la optimización de recursos o la biología computacional. Un ejemplo más concreto e interesante, son los sistemas como RSA, que se considera  $NP$ -Completo y se basa en la dificultad de ciertos problemas, como la factorización de enteros grandes, que se consideran intratables en la práctica [Abd19]. Si se demostrase que  $P = NP$ , se pondría en riesgo la seguridad de estos sistemas, al hacerlos resolubles de forma eficiente.

Además, la frontera entre las clases  $P$  y  $NP$ , no está del todo clara y hay problemas que han pasado de una clase a otra cuando se ha descubierto un algoritmo que lo resolvía eficientemente. Es el caso del problema de demostrar si un número es primo. Hasta 2002, se consideraba que este problema pertenecía a la clase  $NP$ , pero tres científicos indios desarrollaron un algoritmo que demostró que el problema también pertenece a la clase  $P$ . Este cambio evidencia la importancia de encontrar algoritmos más eficientes, incluso para problemas que parecen intratables.

### 2.3.3. Complejidad teórica de nuestro problema

Nuestro problema es muy general y flexible, por lo que no resulta adecuado analizar su complejidad directamente, sino que conviene hacerlo sobre sus distintas variantes, donde podemos hablar en términos de medidas y objetivos concretos. No obstante, haremos un razonamiento general, que abarque todas sus variantes, sin entrar a analizar en detalle cada una de ellas, sobreajustando el análisis.

Para estudiar nuestro problema en términos de las clases  $P$  y  $NP$ , hace falta convertirlo en uno de decisión que tenga el mismo grado de dificultad, cosa que siempre es posible [Unib]. Esto ocurre de forma natural cuando la formulación incluye un umbral sobre una medida con carácter restrictivo. Por ejemplo, en la variante de Recubrimiento de  $G$ , la cuestión es: ¿es posible encontrar una familia de subconjuntos  $F' \subseteq F$  cuya unión forme un recubrimiento de  $G$ ? Cuando por el contrario se trate de optimizar una medida, la transformación en problema de decisión la conseguimos imponiendo también un umbral  $k$  sobre la medida en cuestión. Por ejemplo, la variante sin repetición: ¿es posible encontrar una aproximación de  $G$ , sin repetir subconjuntos de  $F$ , cuya precisión sea al menos 0.8?

Recordamos el problema del Set Cover que ya mencionamos en la introducción. En su versión de decisión consiste en responder a lo siguiente: dado un conjunto universo  $U$ , una colección de  $m$  subconjuntos  $S_i \subseteq U$ , y un entero  $k$ , ¿es posible encontrar una familia  $C$  de como máximo  $k$  de estos subconjuntos  $S_i$ , tal que al hacer su unión, cubran todo  $U$ ? [Cor]. Actualmente se considera un problema  $NP$ -Completo, por lo que no se conoce un algoritmo polinómico que lo resuelva en todos los casos. Es por esto que en la práctica, se emplean algoritmos aproximados y heurísticos para su resolución. Pasa igual con el Exact Cover Problem, que también se ha demostrado como  $NP$ -Completo.

Nuestro problema puede entenderse como una generalización de ambos. A diferencia de Set Cover o Exact Cover, no buscamos exclusivamente una partición ni un recubrimiento exacto, sino que definimos el objetivo en términos de una medida de aproximación más flexible. En algunas de nuestras variantes, sin embargo, sí que es posible formular de manera explícita estas condiciones, de tal manera que tanto el Exact Cover Problem como el Set Cover Problem se pueden formular como variantes concretas de nuestro problema.

Como estas dos variantes son  $NP$ -Completas, es claro que nuestro problema es  $NP$ -Duro, pues cualquier generalización de un problema  $NP$ -Duro hereda su complejidad. En particular, Set Cover se reduce trivialmente a nuestro problema, ya que basta con permitir sólo la unión, y definir la medida de evaluación como la cobertura exacta, con carácter restrictivo. Por tanto, si nuestro problema pudiese resolverse en tiempo polinómico, también se podría hacer con el Set Cover, lo cual contradice su pertenencia a  $NP$ .

Queda ahora por analizar si nuestro problema además pertenece a la clase  $NP$ , para determinar si puede considerarse  $NP$ -Completo. De manera intuitiva, queremos ver si es posible comprobar una solución candidata en tiempo polinómico. En nuestro caso, esto implica evaluar una medida concreta con respecto al conjunto objetivo  $\tilde{G}$ . Es importante atender a que las medidas utilizadas para comprobar la pertenencia a  $NP$  de cualquier variante de nuestro problema, han de ser medidas externas, definidas sobre la aproximación obtenida, y no medidas internas que dependan del proceso de resolución o del algoritmo.

Todas las medidas externas de asociación y direccionales que hemos explicado en la sección anterior, dependen de la tabla de contingencia  $2 \times 2$  que presentamos con anterioridad. Construir esta tabla requiere, en el peor de los casos, recorrer todos los elementos de  $G$  para cada elemento de  $\tilde{G}$ . Esto da lugar a una complejidad es  $O(|\tilde{G}| \cdot |G|) = O(\tilde{g} \cdot g) \approx O(n^2)$ , es decir, polinómica.

En cuanto a otras medidas externas, su complejidad es la siguiente:

- Tamaño de la aproximación: una única consulta al número de elementos de la estructura de datos correspondiente, con coste  $O(1)$ . Si la estructura no almacena directamente el tamaño, habría que recorrer el conjunto, lo que supondría un coste lineal.
- Error global y exactitud: se definen igualmente a partir de la tabla de contingencia, siendo como mucho un cálculo polinómico.

Visto todo esto, podemos concluir que la versión de decisión de cualquier variante presentada de nuestro problema, utilizando las medidas que consideramos, puede comprobarse en tiempo polinómico y, por tanto, pertenece a  $NP$ . Dado que además hemos demostrado su  $NP$ -dureza, afirmamos que nuestro problema es  $NP$ -Completo. Esto implica que, si nuestro problema tuviera un algoritmo que lo decidiese en tiempo polinómico en todos los casos, también lo tendrían otros como el Set Cover o el Exact Cover, lo cual equivaldría a demostrar que  $P = NP$ .

Al ser  $NP$ -Completo nuestro problema, surge la necesidad de recurrir a algoritmos aproximados y heurísticos para resolverlos, pues salvo que se demostrase que  $P = NP$ , no esperamos encontrar un algoritmo exacto en tiempo polinómico que lo resuelva en todos los casos. Por ello, en la práctica resulta más realista desarrollar métodos que aporten soluciones suficientemente buenas en un tiempo razonable, aunque no siempre sean óptimas.

### 2.3.4. Complejidad espacial

Aunque en nuestro problema nuestro foco principal es la complejidad temporal, es también conveniente entender como afecta a la memoria necesaria en escenarios especialmente grandes, para poder estudiar aproximaciones viables. Como ya anticipamos, hay una estrecha relación entre las clases de complejidad espacial y temporal que veremos a continuación.

Se define  $SPACE(t(n))$  como el conjunto de problemas que pueden resolverse en espacio  $O(t(n))$  por una Máquina de Turing determinista [ABog]. Más concretamente, para cada entrada  $x$ , el número total de celdas de la cinta que en algún momento han tenido algún símbolo durante la ejecución, es como mucho  $c \cdot t(|x|)$ , con  $c > 0$  constante. De la misma manera, existe una clase  $PSPACE$  definida como el conjunto de problemas que pueden resolverse utilizando espacio polinómico:

$$PSPACE = \bigcup_k SPACE(n^k)$$

En cuanto a su relación con las clases temporales, se tiene la siguiente cadena de inclusiones, que no nos detendremos a demostrar [AB09]:

$$P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME = \bigcup_k TIME(2^{n^k}).$$

Estas inclusiones implican que, como en la sección anterior vimos que nuestro problema pertenece a la clase  $NP$ , también pertenece a la clase  $PSPACE$ . Esto significa que puede resolverse utilizando, en el peor de los casos, un espacio polinómico en el tamaño de la entrada, lo cual es perfectamente asumible desde el punto de vista práctico.

### 2.3.5. Relación con SAT

A parte de los ya mencionados como Set Cover o Exact Cover, otro problema en que merece la pena reparar es el conocido como SAT o Problema de satisfacibilidad booleana. Este fue el primer problema demostrado como  $NP$ -Completo por el propio Stephen Cook en su famoso teorema. Esto significa que fue el primer problema conocido al que se pueden reducir todos los demás problemas de la clase  $NP$ , lo cual le aporta un papel central en el ámbito de la teoría de la computación.

Este problema de decisión consiste en lo siguiente [Gup23]: dada una fórmula de lógica booleana, ¿es posible encontrar una asignación de variables de manera que la fórmula se cumpla sin inconsistencias? Es decir, para  $n$  variables, hay  $2^n$  posibilidades que hace falta comprobar.

Si bien nuestro problema no es exactamente SAT, y a priori puede no parecer similar, sí que existen paralelismos. Como mencionamos en la sección de estructuras algebraicas, en nuestro problema,  $\mathcal{P}(U)$  es un álgebra de Boole y podemos traducir subconjuntos a proposiciones y operadores a conectores lógicos. Esto supone que alguna variante de nuestro problema, podría formularse como una instancia de SAT. Cada subconjunto de  $F$  sería una variable proposicional, y buscamos asignaciones que satisfagan las restricciones lógicas que equivalen a cubrir  $G$ .

Añadimos  $F$  y  $G$  para seguir con el ejemplo 2.3:

$$U = \{1, 2, 3, 4\}, \quad G = \{1, 3\}, \quad F = \{\{1\}, \{2, 3\}, \{3\}\}$$

Como habíamos dicho, a cada subconjunto de  $\mathcal{P}(U)$  le asignamos una proposición, excepto al vacío y al total. Enumeramos:

$$\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$$

como  $x_1, \dots, x_{14}$ , respectivamente. En particular, nos interesa que  $x_1$  corresponde a  $\{1\}$ ,  $x_3$  a  $\{3\}$  y  $x_8$  a  $\{2, 3\}$ .

Otra opción viable es asignar proposiciones únicamente a los subconjuntos de  $F$ . Esto podemos hacerlo gracias a que todas las variantes de nuestro problema comparten la condición de que sólo podemos utilizar los subconjuntos de  $F$  en la aproximación de  $G$ . Plantearlo de

## 2. Fundamentos matemáticos

esta manera reduce el número de proposiciones con el que trabajamos y el número de restricciones al formular el problema SAT, pues no hemos de prohibir utilizar los subconjuntos de  $\mathcal{P}(U)$ . Sin embargo, para seguir con la idea de que  $\mathcal{P}(U)$  es un álgebra de Boole, planteada con anterioridad, y aprovecharnos de la utilidad que ello conlleva, trabajaremos sobre  $\mathcal{P}(U)$ .

Para formular la variante Exact Cover de  $G$  en SAT, imponemos:

1. Sólo se pueden utilizar subconjuntos de  $F$ , por lo que prohibimos todos los subconjuntos que no pertenecen a  $F$ :

$$\bigwedge_{x_A \in \mathcal{P}(U) \setminus F} \neg x_A$$

2. El elemento 1 debe aparecer una y sólo una vez. Cómo sólo aparece en un elemento de  $F$ :  $\{1\} = x_1$ , forzamos su elección.
3. El elemento 3 debe aparecer una y sólo una vez. Cómo aparece en dos elementos de  $F$ :  $\{3\} = x_3$  y  $\{2, 3\} = x_8$ , exigimos incluir exactamente uno de los dos:

$$(x_3 \vee x_8) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_8).$$

4. Hay que asegurarse de no incluir elementos de  $F$  que estén fuera de  $G$ . En particular, de no incluir el 2:

$$(\neg x_8).$$

Agrupando todas estas condiciones, obtenemos la siguiente fórmula proposicional para SAT:

$$x_1 \wedge (x_3 \vee x_8) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x_8) \wedge (\neg x_8) \wedge \bigwedge_{x_i \in \mathcal{P}(U) \setminus F} x_i$$

Simplificando, esto sería equivalente a decir:

$$x_1 \wedge x_3 \wedge (\neg x_8) \wedge \bigwedge_{x_i \in \mathcal{P}(U) \setminus F} x_i$$

que corresponde a seleccionar exactamente  $\{1\}$  y  $\{3\}$ , cuya unión es  $G$  y sin cubrir nada fuera de  $G$ .

En este caso, resolver esta instancia de SAT que hemos construido equivale a decidir la existencia de una solución de Exact Cover para  $G$  con los subconjuntos de  $F$ . Además, los subconjuntos utilizados en la cobertura son precisamente aquellos cuyas proposiciones toman el valor de verdad.

De forma análoga, podemos formular la variante Set Cover reformulando sin exigir que los elementos estén presentes en un único subconjunto. En el ejemplo anterior, la condición del punto 3 pasaría a ser la siguiente:

$$(x_3 \vee x_8)$$

Por la simplicidad de este ejemplo, la fórmula proposicional final es la misma, pero no siempre tiene por qué serlo.



Comparar SAT con nuestras variantes es especialmente interesante por dos razones. Primero, refuerza la utilidad de las condiciones estructurales que habíamos visto en la sección de estructuras algebraicas: como  $\mathcal{P}(U)$  es álgebra de Boole, se puede conmutar fácilmente entre operaciones de conjuntos y operaciones lógicas. Por otro lado, esta equivalencia nos ayuda a demostrar que nuestro problema es *NP-Completo*, a través de reducciones, como lo hicimos a partir del Exact Cover o Set Cover Problem. Además de todo esto, añade otra conexión entre nuestro problema y problemas centrales en el mundo de la teoría de la computación, siendo las soluciones de uno soluciones también del otro en algunos casos.

HASTA AQUÍ!!!



### 3. Implementación algorítmica

Hasta ahora, hemos presentado y estudiado nuestro problema desde el punto de vista matemático. Ya conocemos a fondo las estructuras que intervienen, cómo se relacionan entre ellas, cómo utilizar medidas para medir la calidad de nuestras soluciones e imponer restricciones según la particularización, y cuál es el coste temporal de utilizar ciertas medidas y de resolver nuestro problema.

Es natural ahora, enforcarnos en la resolución práctica del problema. Para ello, en este capítulo presentaremos varios algoritmos que utilizaremos para resolver nuestro problema, definiendo una adaptación de la formulación general de nuestro problema para poder aplicar cada uno de ellos de forma efectiva, y entrelazando los componentes del algoritmo con nuestros elementos. Además, analizaremos la complejidad computacional de cada uno de ellos y profundizaremos también en el uso adicional de las medidas como criterio interno en el proceso de construcción de soluciones, explicando en detalle cómo se integran en cada algoritmo en particular. Además, mencionaremos algunos otros algoritmos interesantes que hemos decidido no emplear y la razón para ello. Terminaremos con una comparativa de los resultados obtenidos con los algoritmos seleccionados.

#### 3.1. Marco algorítmico

Antes de adentrarnos en los algoritmos para la resolución práctica de nuestro problema, conviene retomar la discusión sobre las medidas, y mencionar un uso adicional que ya nombramos en la [Sección 2.2](#). Nos referimos al uso como criterio interno al algoritmo para guiar el proceso de construcción de la solución, pues algunos algoritmos hacen uso de una función para tomar decisiones según van ejecutándose.

De igual manera que presentamos en el capítulo matemático de este trabajo, al introducir algoritmos, podemos seguir aplicando medidas para cuantificar la calidad de una solución final obtenida, aplicándolas con posterioridad a la ejecución del algoritmo. Ahora además podemos adaptarlas para aplicarlas sobre una solución parcial en cierto punto del algoritmo. Tomando como ejemplo la precisión, podemos aplicarla sobre la aproximación parcial en la iteración  $n$  de un algoritmo,  $\tilde{C}_n$ , en lugar de sobre la solución final  $\tilde{C}$ . Esto, sin embargo, dependerá totalmente del algoritmo concreto en el que quieran usarse. Por ello, iremos viendo su uso concreto cuando expliquemos cada algoritmo y sus componentes. Asimismo podemos seguir usándolas para imponer restricciones sobre el problema general.

## 3.2. Aproximaciones algorítmicas

Nuestro problema sólo podría resolverse de forma exacta explorando todas las posibles combinaciones de subconjuntos de  $F$  con operaciones de  $\mathcal{O}$  y encontrar aquellas expresiones cuya evaluación produce el conjunto que buscamos, ya sea el propio  $G$  o uno que cumpla las restricciones impuestas. Los algoritmos de fuerza bruta hacen precisamente esto, exploran todas las posibles combinaciones de elementos encontrando siempre la solución óptima [FF15]. Sin embargo, al ser nuestro problema *NP-Completo*, en la práctica esto se vuelve imposible, pues requeriría demasiados recursos computacionales y temporales como para que fuese viable.

Es por ello que debemos hacer uso de aproximaciones algorítmicas, que nos permitan obtener una solución razonablemente buena. Nosotros estudiaremos tres, adaptando nuestro problema e imponiendo las restricciones necesarias sobre la manera en la que se explora el espacio de expresiones  $\mathcal{E}$  para poder aplicar dichas técnicas.

Cuando discutimos el uso de distintos algoritmos para conseguir hallar la aproximación que buscamos en nuestro problema, reparamos en el proceso de construcción de la solución. Nos interesa analizar cómo va avanzando el algoritmo para guiar la construcción de la solución. Resulta entonces útil introducir  $\tilde{G}_i \in \mathcal{R}$ , como la aproximación parcial de  $G$  tras la  $i$ -ésima iteración de un algoritmo, que no necesariamente es una solución válida en ese momento, pero puede llegar a constituir la.

A continuación definimos las aproximaciones algorítmicas de nuestro problema correspondientes a los distintos algoritmos que utilizaremos para su resolución:

### 3.2.1. Búsqueda exhaustiva

Como hemos mencionado, los algoritmos de fuerza bruta suelen ser útiles en problemas con un espacio de búsqueda pequeño y bien definido, caso muy alejado del nuestro. Sin embargo, es posible adaptarlos a problemas con mayores espacios de búsqueda. Una posible solución es hacer una búsqueda exhaustiva, que es un ejemplo de algoritmo de fuerza bruta, y establecer una profundidad máxima  $k$ . Es decir, explorar soluciones que utilicen, a lo sumo,  $k$  operaciones. De esta manera no estamos recorriendo todo el espacio, pero sí hasta cierta profundidad. Esto nos permite una buena exploración del espacio, manteniendo el tiempo y uso de recursos computacionales razonable.

Además, la búsqueda exhaustiva tiene la ventaja de ser simple de implementar, pues funciona enumerando todo el espacio de soluciones posibles de manera sistemática y comprobando cada una para ver si constituyen una solución válida. Finalmente escoge la mejor según un criterio. Por esta misma razón, no requiere estructuras de datos complejas. En nuestro caso, mantenemos un contador del número de operaciones utilizadas, para saber cuándo cruzamos el umbral y hemos de parar.

Los componentes presentes en un algoritmo de búsqueda exhaustiva son:

1. Generador de candidatos: función que produce de forma sistemática cada elemento del conjunto candidato.

2. Función de factibilidad: función que comprueba si una solución parcial puede seguir extendiéndose sin violar las restricciones del problema. Esto nos permite podar ramas que sabemos que nunca llegarán a ser solución.
3. Función objetivo: función que evalúa la calidad de cada solución completa generada.
4. Función de solución: función que determina si la exploración ha terminado.

Definimos ahora una aproximación algorítmica de nuestro problema, que surge del funcionamiento de un algoritmo de búsqueda exhaustiva con profundidad limitada:

**Definición 3.1** (Aproximación búsqueda exhaustiva de profundidad  $k$ ). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a

$$\mathcal{O} = \{\cup, \cap, \setminus\}.$$

Definimos el subconjunto de expresiones admisibles como

$$\mathcal{E}' = \left\{ e \in \mathcal{E}(F, \mathcal{O}); e = (((e_0 \circ_1 F_{i_1}) \circ_2 F_{i_2}) \cdots) \circ_k F_{i_k} \text{ con } e_0 = \emptyset, k \text{ acotado, y } F_{i_j} \in F \right\},$$

donde cada  $\circ_j \in \mathcal{O}$  y el orden de aplicación de las operaciones es secuencial y fijo, de izquierda a derecha. Lo que buscamos es encontrar una expresión

$$e^* \in \mathcal{E}'$$

que optimice una medida  $M$  con respecto a  $G$ .

Esta variante representa cómo se construye el espacio completo explorado por una búsqueda exhaustiva acotada por profundidad  $k$ .

Podemos ahora relacionar cada uno de los componentes de un algoritmo de búsqueda exhaustiva, con los elementos correspondientes de nuestro problema:

- Generador de candidatos: aunque en nuestra definición describimos el espacio de expresiones como ya construido, algorítmicamente corresponde a la función que, en cada nivel hasta  $k$ , escoge una operación de  $\mathcal{O}$  y un subconjunto  $F_i \in F$ , hasta generar todas las combinaciones posibles en  $\mathcal{E}'$ .
- Función de factibilidad: en nuestro caso no hemos impuesto ninguna restricción adicional sobre las soluciones, de modo que todas las expresiones que se construyen en el algoritmo pertenecen a  $\mathcal{E}'$  y por tanto se consideran factibles. Si definiésemos restricciones, este sería el punto donde introducir una medida para comprobar que se cumplen.
- Función objetivo: la medida  $M$ , que se aplica a cada expresión completa para evaluar su calidad, quedándonos con la expresión de mejor valor.
- Función solución: valdrá verdad cuando el contador valga  $k$ , pues nuestro algoritmo sólo termina cuando se han explorado todas las posibles soluciones de hasta  $k$  operaciones.

### 3. Implementación algorítmica

Volviendo al funcionamiento concreto de la búsqueda exhaustiva adaptada a nuestra aproximación, el algoritmo comienza con una solución parcial vacía  $\tilde{G}_0$ . Para cada nivel de profundidad hasta  $k$ , se generan todas las posibles combinaciones entre una operación de  $\mathcal{O}$  y un subconjunto  $F_i \in F$ , de forma recursiva. Cada combinación se aplica sobre la aproximación parcial actual  $\tilde{G}_i$  para construir una nueva aproximación parcial  $\tilde{G}_{i+1}$ , y el algoritmo continúa la exploración sobre ella. Todas estas combinaciones se van evaluando mediante la función objetiva, y guardamos registro de el mejor valor encontrado hasta el momento, y la solución que lo consiguió. El proceso se repite hasta que se han explorado todas las ramas posibles del espacio de búsqueda. El criterio de solución se alcanza cuando se han generado todas las expresiones de hasta  $k$  pasos, momento en el cual el algoritmo devuelve la mejor aproximación encontrada. Veámoslo de forma más intuitiva con su pseudocódigo:

```
 $\tilde{G}_{best} \leftarrow \emptyset; \quad best\_score \leftarrow -\infty$   
function EXHAUSTIVESHARCH( $\tilde{G}, depth$ )  
  if  $depth = k$  then  
     $score \leftarrow M(\tilde{G}, G)$   
    if  $score > best\_score$  then  
       $best\_score \leftarrow score; \quad \tilde{G}_{best} \leftarrow \tilde{G}$   
    end if  
    return  
  end if  
  for all  $op \in \mathcal{O}$  do  
    for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do  
       $\tilde{G}' \leftarrow op(\tilde{G}, F_i)$   
      EXHAUSTIVESHARCH( $\tilde{G}', depth + 1$ )  
    end for  
  end for  
end function  
  
EXHAUSTIVESHARCH( $\tilde{G}_0 = \emptyset, 0$ )  
return  $\tilde{G}_{best}$ 
```

COMPLEJIDAD!!

#### 3.2.2. Greedy

#### HABLAR DE LIMITACIONES DE BÚSQUEDA EXHAUSTIVA, Y RAZONES PARA USAR GREEDY

Otro algoritmo que utilizaremos y estudiaremos es el Greedy o voraz. Este algoritmo funciona eligiendo, en cada paso, la opción más prometedora según un criterio local, sin tener en cuenta las consecuencias que tendrá su elección en el futuro [JSK15], por lo que no garantiza encontrar siempre el óptimo global, ya que puede quedar estancado en óptimos locales. Así, parte de una solución vacía y va haciendo la mejor elección de entre las posibles iteración a iteración, acabando con una solución al problema. La principal diferencia con el algoritmo de búsqueda exhaustiva, es que este recorría todas las ramas posibles hasta cierto límite, para garantizar no dejar nada atrás, mientras que Greedy sólo continúa explorando la rama más

prometedora en cada momento. Algunas de sus principales ventajas son que es un algoritmo rápido y eficiente, que no requiere mucha memoria y que en la mayoría de los casos puede resolverse en tiempo lineal o polinomial, como veremos. Esto resuelve directamente la dificultad que teníamos de la complejidad computacional al intentar encontrar la solución óptima para nuestro problema. Por otro lado, no siempre devuelve una buena solución, porque tiene tendencia a estancarse en óptimos locales. Sin embargo, merece la pena explorarlo para nuestro problema, pues se trata de un algoritmo rápido y simple de implementar, que puede dar soluciones suficientemente buenas, que comprobaremos mediante el uso de medidas como criterio de calidad.

### 3.2.2.1. Aproximación estándar

Los componentes de un algoritmo Greedy son [Kun96]:

1. Conjunto candidato: el conjunto de opciones de entre las que el algoritmo puede elegir en cada paso.
2. Función de selección: función que determina qué elemento del conjunto candidato se escoge en cada caso.
3. Función de factibilidad: función que comprueba si el elemento seleccionado del conjunto candidato puede ser añadido a la solución parcial sin violar las restricciones del problema.
4. Función objetivo: función que evalúa la calidad de la solución parcial o final.
5. Función de solución: función que indica si se ha alcanzado una solución completa.

El algoritmo Greedy empieza con una solución inicial vacía. En cada iteración, selecciona el candidato del conjunto de candidatos que optimiza localmente la función de selección. Una vez elegido, comprueba con la función de factibilidad si este candidato puede ser parte de la solución sin violar las restricciones del problema. Si es factible, se incorpora a la solución parcial. Si no, lo descarta y continúa con el resto de candidatos. Este proceso se repite de manera iterativa hasta que se alcanza la solución completa, que se determina por la función de solución, o bien hasta que se agotan los candidatos. Finalmente, con la función objetivo se puede evaluar la calidad de la solución obtenida [ASo8].

Definimos ahora una aproximación algorítmica de nuestro problema, imponiendo restricciones en la forma en que se construyen las expresiones, las cuales surgen del funcionamiento del propio algoritmo Greedy:

**Definición 3.2** (Aproximación Greedy estándar). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a

$$\mathcal{O} = \{\cup, \cap, \setminus\}.$$

Llamamos  $F_2 = F \setminus \{\emptyset\}$  y definimos el subconjunto de expresiones admisibles como

$$\mathcal{E}' = \left\{ e \in \mathcal{E}(F_2, \mathcal{O}); e = (((e_0 \circ_1 F_{i_1}) \circ_2 F_{i_2}) \cdots) \circ_k F_{i_k} \text{ con } e_0 = \emptyset, k \text{ acotado, y } F_{i_j} \in F_2 \right\},$$

### 3. Implementación algorítmica

donde cada  $\circ_j \in \mathcal{O}$  y el orden de aplicación de las operaciones es secuencial y fijo, de izquierda a derecha. Lo que buscamos es encontrar una expresión  $e^* \in \mathcal{E}'$  que optimice una medida  $M$  con respecto a  $G$ .

Es decir, una expresión del espacio de soluciones donde cada par operación, elemento de  $F_2$  se va añadiendo secuencialmente a la expresión y optimiza una medida  $M$  con respecto a  $G$ .

En este esquema, la construcción de  $e^*$  se realiza de forma iterativa: partimos de  $e_0 = \emptyset$  y en cada paso seleccionamos un par  $\{\circ_j, F_i\}$  en función de una medida, de manera que la solución se construye secuencialmente como hemos dicho. Esto representa como construye una solución un algoritmo Greedy.

Esta definición nos permite ver claramente el nuevo uso de las medidas como criterio utilizado dentro del algoritmo. Para poder monitorizar cómo se construye cada solución parcial  $\tilde{G}_i$  en cada iteración, y elegir efectivamente la mejor opción de todo el conjunto candidato, es necesario usar una medida en cada una de dichas iteraciones. Esta puede ser cualquiera de las medidas ya mencionadas que se pueda adaptar para que actúe o bien sobre la solución parcial, o bien sobre los elementos del conjunto candidato, pudiendo siempre comparar con el conjunto objetivo. Vemos así, que las medidas que presentábamos, no sólo tienen un interés teórico para permitirnos aplicar restricciones para particularizar el problema, o para medir la calidad de una solución obtenida, sino que existe un gran interés y necesidad práctica, para el propio funcionamiento del algoritmo.

#### HABLAR DE COSTE DE CÓMPUTO DE LA MEDIDA.

Haciendo uso de esta definición, veamos qué elementos de nuestro problema se corresponde con qué componente de un algoritmo Greedy:

- Conjunto candidato: el conjunto  $(\mathcal{O} \times F_2) = \{(O_j, F_i); F_i \in F_2, O_j \in \mathcal{O}\}$ , donde recordamos que  $F_2 = F \setminus \{\emptyset\}$ . Sus elementos son pares formados por un subconjunto de  $F_2$  y una operación de  $\mathcal{O}$ . En la primera iteración, la solución parcial es  $\tilde{G}_0 = \emptyset$ .
- Función de selección: la medida  $M$ , que determina en cada momento qué candidato escoger. Concretamente, escoge el par  $(O_j, F_i)$  que optimiza  $M$  aplicado a la solución parcial actual respecto de  $G$ . Esta es la medida que se utiliza con criterio interno al algoritmo.
- Función de factibilidad: es esta versión del problema es trivial, pues cualquier candidato  $(O_j, F_i) \in F_2 \times \mathcal{O}$  puede aplicarse a la solución parcial.
- Función objetivo: en la definición de nuestro problema no hay una como tal. La medida  $M(e, G)$  que evalúa la calidad de la solución completa  $e$  que obtenemos tras  $k$  iteraciones del algoritmo, en relación con  $G$ . Es importante que esta medida tenga criterio de optimización, evaluando la calidad de los elementos del conjunto candidato. Si fuese una medida para imponer una restricción, todas las medidas que la cumpliesen, serían igual de buenas candidatas y no se podría distinguir y elegir.
- Función de solución: en nuestro caso, el algoritmo termina cuando se han realizado  $k$  operaciones, es decir, cuando  $\tilde{G}_k$  ya no puede extenderse más bajo la restricción de



profundidad. Existe la posibilidad, que veremos a continuación, de añadir una función de solución a nuestra definición del problema, en cuyo caso, tiene sentido que sea una función para imponer restricciones, y no una para medir la calidad de una aproximación parcial, pues queremos determinar cuándo una aproximación es solución.

Volviendo al funcionamiento de Greedy, aplicándolo en concreto para nuestra aproximación, el algoritmo parte de una solución inicial vacía,  $\tilde{G}_0$ . En cada iteración  $iter = 1, \dots, k$ , se generan todas las combinaciones candidatas  $(op, F_i)$ , con  $op \in \mathcal{O}$ ,  $F_i \in F_2$ . Para cada candidata, se evalúa la medida interna  $M$  aplicando la operación sobre el conjunto  $F_i$  y la última aproximación parcial. Se selecciona la candidata que optimice dicha medida. Esta combinación escogida como la más prometedora, se utiliza para contruir la nueva aproximación parcial a partir de la última. El proceso continúa hasta alcanzar las  $k$  iteraciones, devolviendo la aproximación final,  $\tilde{G}$ .

Lo vemos de forma más intuitiva con el pseudocódigo:

```

 $\tilde{G}_0 \leftarrow \emptyset$ 
for  $iter \leftarrow 1$  to  $k$  do
   $best\_score \leftarrow -\infty$ ;  $best\_op \leftarrow \text{null}$ ;  $best\_i \leftarrow \text{null}$ 
  for all  $op \in \mathcal{O}$  do
    for  $i \leftarrow 1$  to  $m$  do
       $score \leftarrow M(op(\tilde{G}_{iter-1}, F_i), G)$ 
      if  $score > best\_score$  then
         $best\_score \leftarrow score$ ;  $best\_op \leftarrow op$ ;  $best\_i \leftarrow i$ 
      end if
    end for
  end for
   $\tilde{G}_{iter} \leftarrow best\_op(\tilde{G}_{iter-1}, F_{best\_i})$ 
end for
 $\tilde{G} = \tilde{G}_{iter-1}$ 
return  $\tilde{G}$ 

```

## HABLAR DE COMPLEJIDAD

### HABLAR DE POR QUÉ A VECES NO BASTA CON ESTA APROXIMACIÓN Y MOTIVA EL UMBRAL

#### 3.2.2.2. Aproximación alternativa

A veces, podemos simplificar el proceso de exploración y acortar el tiempo de ejecución del algoritmo utilizando una medida adicional con caracter restrictivo. Esta actuará como función de solución, permitiendo al algoritmo parar antes de haber explorado todas las posibles combinaciones del conjunto candidato, si encuentra una solución que cumple con la restricción de acuerdo con el umbral de la medida establecido.

Como mencionamos antes, existe la posibilidad de enriquecer la definición de la aproximación anterior añadiendo una medida umbral que funcione como condición para constituir

### 3. Implementación algorítmica

una solución:

**Definición 3.3** (Aproximación Greedy con umbral). Sea  $U$  un conjunto finito,  $F \subseteq \mathcal{P}(U)$  una familia de subconjuntos y  $G \subseteq U$  un conjunto objetivo. Restringimos el conjunto de operaciones a

$$\mathcal{O} = \{\cup, \cap, \setminus\}.$$

Sea  $F_2 = F \setminus \{\emptyset\}$ . Definimos el subconjunto de expresiones admisibles como

$$\mathcal{E}' = \left\{ e \in \mathcal{E}(F_2, \mathcal{O}); e = (((e_0 \circ_1 F_{i_1}) \circ_2 F_{i_2}) \cdots) \circ_k F_{i_k} \text{ con } e_0 = \emptyset, k \text{ acotado, y } F_{i_j} \in F_2 \right\},$$

donde cada  $\circ_j \in \mathcal{O}$  y el orden de aplicación de las operaciones es secuencial y fijo, de izquierda a derecha. Lo que buscamos es encontrar una expresión

$$e^* \in \mathcal{E}'; (\circ_j, F_{i_j}) \in \arg \text{opt}_{(\circ, F) \in \mathcal{O} \times F_2} M(e_{j-1} \circ F, G), j = 1, \dots, k, \text{ donde } e_j = e_{j-1} \circ_j F_{i_j}.$$

Es decir, una expresión del espacio de soluciones donde cada par operación, elemento de  $F_2$  que se va añadiendo a la expresión, es aquel que optimiza una medida  $M$  con respecto a  $G$ . Además, exigimos que

$$M_{\text{rec}}(e^*, G) \bowtie \tau,$$

donde  $\bowtie \in \{\geq, \leq\}$  según la naturaleza de la restricción, y  $\tau \in \mathbb{R}$  es un umbral fijo. Es decir, consideramos que una aproximación es una solución cuando la medida  $M_{\text{rec}}$  respeta el umbral y por ende cumple la restricción.

En este caso, los elementos de Greedy en nuestro problema son los mismos que antes, con la diferencia de que ahora, la función de solución es esta nueva medida  $M_{\text{rec}}$  que nos permite imponer una restricción adicional. Cabe destacar que esta medida no tiene por qué ser la misma que la medida  $M$  que se usa como función de selección, pero podría serlo si se trata de una medida que puede usarse para aplicar restricciones y para medir la calidad de una aproximación indistintamente.

### 3.3. Algoritmos descartados

### 3.4. Implementación técnica

Para la parte informática de este Trabajo, nos centramos en implementar y comparar distintos algoritmos para resolver nuestro problema de aproximar un conjunto  $G$  mediante operaciones sobre una familia de conjuntos  $F$ , optimizando una métrica escogida por el usuario.

Hay varios aspectos que ya hemos mencionado y son claves a la hora de escoger los algoritmos que vamos a implementar. Entre ellos están: la eficiencia del algoritmo, la flexibilidad para adaptarse al uso de diferentes métricas de evaluación, y la facilidad de implementación y análisis. Por otro lado, como sabemos que nuestro espacio de búsqueda es exponencial, y podemos trabajar con conjuntos de grandes tamaños, la complejidad del algoritmo también juega un papel importante.

Hemos decidido utilizar el lenguaje C++, que permite tener un gran control sobre estructuras de datos y memoria, y es muy útil para algoritmos en los que realizamos muchas operaciones sobre conjuntos. En particular, hemos utilizado la librería estándar (STL), que tiene estructuras de datos interesantes como el *unordered\_set* que utilizamos para representar conjuntos sin duplicados y con inserciones y búsquedas rápidas. Además, en C++ es fácil integrar el uso de OpenMP para paralelizar partes del algoritmo y acelerarlo, como hemos hecho con Greedy.

Aunque otros lenguajes como Python podrían haber sido utilizados, pues ofrecen un desarrollo simple y lectura de código fácil, al ser lenguajes interpretados y tener mayores tiempos de ejecución, son menos adecuados para tareas intensivas. Por otro lado, Java, al ejecutarse sobre una máquina virtual, tiene mayor abstracción y esto conlleva un rendimiento inferior al de C++. [Pan23]

### 3.5. Análisis de resultados

### 3.6. Normativa de la comisión del Grado en Matemáticas

El TFG lo rigen dos normativas:

- una a nivel general de la UGR ([Reglamento del Trabajo o Proyecto fin de Grado de la Universidad de Granada<sup>1</sup>](#)) y
- otra complementaria a nivel de la Facultad de Ciencias ([Reglamento del trabajo fin de grado en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada<sup>2</sup>](#)).

Además, la comisión del Grado de Matemáticas impone unos [Requisitos de la memoria<sup>3</sup>](#).

El TFG hay que elaborarlo preferiblemente en LaTeX y puede usar la plantilla disponible en [Plantilla TFG grado en matemáticas formato .tex<sup>4</sup>](#).

Toda la información anterior puede encontrarse en la [web del Grado en Matemáticas<sup>5</sup>](#).

Es conveniente tener presente la documentación anterior para la elaboración del TFG. En especial en lo relativo a las fechas de depósito del TFG para su defensa.

A continuación destaco algunos aspectos importantes de la misma:

- El plagio, entendido como la presentación de un trabajo u obra hecho por otra persona como propio o la copia de textos sin citar su procedencia y dándolos como de elaboración propia, conllevará automáticamente la calificación numérica de cero. Esta consecuencia debe entenderse sin perjuicio de las responsabilidades disciplinarias en las que pudieran incurrir los estudiantes que plagien.
- Las memorias entregadas por parte de los estudiantes tendrán que ir firmadas sobre una declaración explícita en la que se asume la originalidad del trabajo, entendida en el sentido de que no ha utilizado fuentes sin citarlas debidamente.

<sup>1</sup><https://secretariageneral.ugr.es/sites/webugr/secretariageneral/public/inline-files/BOUGR/187/PLANTILLA%20CABECERASDoc2.pdf>

<sup>2</sup><https://fciencias.ugr.es/images/stories/documentos/reglamentos/reglamentoTfgCiencias23.pdf>

<sup>3</sup><https://grados.ugr.es/matematicas/pages/infoacademica/tfg/requisitosTFG>

<sup>4</sup><https://github.com/latex-mat-ugr/Plantilla-TFG/archive/master.zip>

<sup>5</sup><https://grados.ugr.es/matematicas/pages/infoacademica/trabajofingrado>

### 3.7. Formato de la memoria

La memoria se presentará usando un editor de textos científico, preferiblemente L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, e incluir los siguientes apartados:

1. *Resumen en inglés*: Deberá estar escrito completamente en inglés y tener una longitud recomendada entre 800 y 1500 palabras.
2. *Introducción*. Deberá:
  - Indicar los *Objetivos del trabajo*: deberán aparecer con claridad los objetivos inicialmente previstos en la propuesta de TFG y los finalmente alcanzados con indicación de dificultades, cambios y mejoras respecto a la propuesta inicial. Si procede, es conveniente apuntar de manera precisa las interdependencias entre los distintos objetivos y conectarlos con los diferentes apartados de la memoria. Se pueden destacar aquí los aspectos formativos previos más utilizados.
  - Contextualizar el trabajo explicando antecedentes importantes para el desarrollo realizado y efectuando, en su caso, un estudio de los progresos recientes.
  - Describir el problema abordado, de forma que el lector tenga desde este momento una idea clara de la cuestión a resolver o del producto a desarrollar y una visión general de la solución alcanzada.
  - Indicar los resultados obtenidos.
  - Citar las principales fuentes consultadas.
3. *Desarrollo del trabajo*: El trabajo se estructurará en partes o capítulos según convengan, con la posibilidad de incluir apéndices. Se recomienda que la extensión de esta parte (sin incluir los apéndices) sea de unas 50 páginas.
4. *Conclusiones y vías futuras*: Las conclusiones deberán incluir todas aquellas de tipo profesional y académico. Si hubiese posibles vías claras de desarrollo posterior sería interesante destacarlas aquí, poniéndolas en valor en el contexto inicial del trabajo.
5. *Bibliografía final*: Se incluirán tanto las fuentes primarias como todas aquellas cuyo peso haya sido menor en la realización del trabajo. Se recomienda un breve comentario de las referencias, ya sea individualizado, por grupos de referencias o global. En caso de incluir URLs de páginas web deberán ir acompañadas de título, autor y fecha de último acceso, entre otros datos relevantes. Se recomienda no abusar de este tipo de fuentes.

### 3.8. Recomendaciones

A la hora de abordar un trabajo como este, de cierta complejidad y extensión, es conveniente tener ciertas consideraciones desde un principio que ayuden a la organización y realización del mismo.

- La memoria deberá ceñirse a las directrices dadas en la sección precedente.
- Cualquier consulta externa (libro, artículo, página web, imagen,...) debe estar debidamente referenciada tanto en el texto como en la bibliografía al final del trabajo. La bibliografía debe de aparecer en orden alfabético (del primer autor) en el formato indicado en la plantilla.

- Se debe evitar copiar texto de forma literal, salvo citas literales, que se indicarán como tales y entrecorridas. LaTeX proporciona el entorno `quote` para ello.
- Todas las imágenes y tablas incluidas en el documento deben figurar con su respectivos créditos (excepto que sean de elaboración propia). Por tanto, es recomendable guardar las referencias consultadas (direcciones web, libros) para la obtención de cualquier material gráfico o de datos.
- Si el trabajo contiene gran cantidad de vocabulario específico, conviene añadir un glosario de términos al final del mismo. Esto es mejor ir haciéndolo conforme se avanza en la redacción del trabajo.
- Es conveniente hacer un esquema inicial con la estructura general de la memoria: ¿de cuántas partes constará? ¿en qué orden? ¿qué incluirá cada una de ellas? En la plantilla proporcionada se recomienda una estructura general. Ello ayudará a organizar mejor el trabajo. No obstante, dicha estructura inicial puede ser modificada cuando el trabajo esté avanzado si el contenido lo requiere.



## 4. Conclusiones y Perspectivas Futuras

### 4.1. Conclusiones y trabajo futuro

#### 4.1.1. Resumen de los principales hallazgos

#### 4.1.2. Limitaciones del trabajo

#### 4.1.3. Posibles líneas de investigación futuras

Este fichero `capitulo-ejemplo.tex` es una plantilla para añadir capítulos al TFG. Para ello, es necesario:

- Crear una copia de este fichero `capitulo-ejemplo.tex` en la carpeta `capitulos` con un nombre apropiado (p.e. `capitulo01.tex`).
- Añadir el comando `\input{capitulos/capitulo01}` en el fichero principal `tfg.tex` donde queremos que aparezca dicho capítulo.





## A. Ejemplo de apéndice

Los apéndices son opcionales.

Este fichero `apendice-ejemplo.tex` es una plantilla para añadir apéndices al TFG. Para ello, es necesario:

- Crear una copia de este fichero `apendice-ejemplo.tex` en la carpeta `apendices` con un nombre apropiado (p.e. `apendice01.tex`).
- Añadir el comando `\input{apendices/apendice01}` en el fichero principal `tfg.tex` donde queremos que aparezca dicho apéndice (debe de ser después del comando `\appendix`).



## Glosario

La inclusión de un glosario es opcional.  
Archivo: glosario.tex

$\mathbb{R}$  Conjunto de números reales.

$\mathbb{C}$  Conjunto de números complejos.

$\mathbb{Z}$  Conjunto de números enteros.



## Bibliografía

- [AB09] Sanjeev Arora y Boaz Barak. *Computational Complexity: A Modern Approach*. Cambridge University Press, 2009.
- [Abd19] Mohamed Abdelnaby. Rsa algorithm in p vs np domain and time complexity, 05 2019.
- [Alo] José A. Alonso. Números de bell. <https://www.glc.us.es/~jalonso/exercitium/numeros-de-bell/>. Exercitium, Universidad de Sevilla. [Accedido: 18-abr-2025].
- [ASo8] María Teresa Abad Soriano. Algoritmos voraces. Apuntes de la asignatura Anàlisi i Disseny d'Algorismes, Facultat d'Informàtica, Universitat Politècnica de Catalunya, 2008. Departamento de Lenguajes y Sistemas Informáticos, curso 2007/2008.
- [BB01] P. Baldi y S. Brunak. *Bioinformatics, second edition: The Machine Learning Approach*. Adaptive Computation and Machine Learning series. MIT Press, 2001.
- [BL21] Eric J. Beh y Rosaria Lombardo. *An introduction to correspondence analysis*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley and Sons, Incorporated, Hoboken, New Jersey, 2021.
- [Bre13] Lucas Bremond. *An Optimal Tour Generation Strategy for a Multiple Rendezvous Mission to the Trojan Asteroids*. PhD thesis, Universite Paul Sabatier - Toulouse III, August 2013.
- [Cha25] Julio Chai. *Los 7 Problemas del Milenio: El Camino Hacia lo Imposible*. 04 2025.
- [CHK23] Peter Christen, David J. Hand, y Nishadi Kirielle. A review of the f-measure: Its history, properties, criticism, and alternatives. *ACM Comput. Surv.*, 56(3), October 2023.
- [Cor] Cornell University. Set cover. Course materials. Accedido: 1 septiembre 2025.
- [Cru22] Esteban Rubén Hurtado Cruz. Álgebra superior 1 - unidad 1.3: Potencia, producto cartesiano, familias, 2022. Último acceso: 12 de marzo de 2025.
- [FF15] Luis Javier Rodríguez Fuentes y Amparo Varona Fernández. Técnicas de diseño de algoritmos: Búsqueda exhaustiva. OpenCourseWare, Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV/EHU), 2015. Departamento de Electricidad y Electrónica, Facultad de Ciencia y Tecnología.
- [FH03] L. Fortnow y S. Homer. A short history of computational complexity. 80, June 2003. Computational Complexity Column.
- [GK79] Leo A. Goodman y William H. Kruskal. *Measures of association for cross classifications*. Springer series in statistics. Springer-Verlag, New York, 1979.
- [Gup23] Aarti Gupta. Cos 326: Functional programming. lecture: Boolean satisfiability (sat) solvers. <https://www.cs.princeton.edu/lec/23-01-sat>, 2023. Princeton University. Acknowledgements: Sharad Malik, Emina Torlak.
- [Hal74] Paul R. Halmos. *Measure Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, first edición, 1974. Originally published by Litton Educational Publishing, Inc., 1950.
- [HM15] Mohammad Hossin y Sulaiman M.N. A review on evaluation metrics for data classification evaluations. *International Journal of Data Mining & Knowledge Management Process*, 5:01–11, 03 2015.
- [HST<sup>+</sup>22] Steven A. Hicks, Inga Strümke, Vajira Thambawita, Mohamed Hammou, Michael A. Riegler, Pål Halvorsen, y Sravanthi Parasa. On evaluation metrics for medical applications of artificial intelligence. *Scientific Reports*, 12(1):5979, 2022.

## Bibliografía

- [JSK15] Abhishek Jain, Manjeet Saini, y Manohar Kumar. Greedy algorithm. *Journal of Advance Research in Computer Science & Engineering* (ISSN: 2456-3552), 2:11015, 04 2015.
- [Kar72] Richard M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. En R. E. Miller, J. W. Thatcher, y J. D. Bohlinger, editores, *Complexity of Computer Computations*, páginas 85–103. Plenum, New York, 1972.
- [Ken75] JW Kendall. Hard and soft constraints in linear programming. *Omega*, 3(6):709–715, 1975.
- [Kun96] Joseph P.S. Kung. *Matroids*, página 157–184. January 1996.
- [Lip98] Seymour Lipschutz. *Teoría de conjuntos y temas afines*. Schaum’s Outline. McGraw-Hill, 1ª edición en español edición, 1998.
- [Llu16] Cristina Jordan Lluch. Recubrimiento y partición de un conjunto. <https://riunet.upv.es/handle/10251/64155>, 2016. Universitat Politècnica de València. [Accedido: 18-abr-2025].
- [LP14] David J. Leep y Pam Pierce. Exact cover by 3-sets. <https://npcomplete.owu.edu/2014/06/10/exact-cover-by-3-sets/>, 2014. NP-Complete Problems and What To Do With Them, Ohio Wesleyan University. [Accedido: 18-abr-2025].
- [Mir] Jesús García Miranda. Capítulo 3. conjuntos ordenados. retículos y álgebras de boole. <https://www.ugr.es/~jesusgm/Curso%202005-2006/Matematica%20Discreta/Ordenes.pdf>. Universidad de Granada. Apuntes de docencia. Accedido: 3 de septiembre de 2025.
- [MMW24] Nima Moradi, Fereshteh Mafakheri, y Chun Wang. Set covering routing problems: A review and classification scheme. *Computers & Industrial Engineering*, 198:110730, 2024.
- [Mol24] Desiré Romero Molina. Tema 7: Contraste de hipótesis. Apuntes de la asignatura Inferencia Estadística, Universidad [poner nombre de tu uni], 2024. Material docente facilitado por la profesora.
- [Mun06] Tamara Munzner. Approximation algorithms for np-hard problems: The set cover problem. <https://math.mit.edu/~goemans/18434S06/setcover-tamara.pdf>, 2006. Massachusetts Institute of Technology (MIT). [Accedido: 18-abr-2025].
- [Nie] Lars Tyge Nielsen. Curso de probabilidad ii. <http://lya.fciencias.unam.mx/lars/pub/proba2.pdf>. Facultad de Ciencias, UNAM, México. [Accedido: 18-abr-2025].
- [Pal] Eugenio Miranda Palacios. Álgebra básica. <https://www.ugr.es/~bullejos/AlgI/anillos.pdf>. Apuntes de Álgebra I, Universidad de Granada.
- [Pal99] Antonio Pallares. Apuntes de teoría de la medida. <https://webs.um.es/apall/archivos/medida/medida1998-99.pdf>, 1999. Universidad de Murcia, 1998–1999.
- [Pan23] Abhin Pandey. Python vs. c++ vs. java: Choosing the right language for your project. <https://abhinnpandey.medium.com/python-vs-c-vs-java-choosing-the-right-language-for-your-project-31947682a1fd>, 2023. Consultado el 5 de mayo de 2025.
- [Rob21] Robinteuwens. Precision vs recall: Optimizing fraud costs, 2021. Accedido: 3 de septiembre de 2025.
- [RTF76] Charles ReVelle, Constantine Toregas, y Louis Falkson. Applications of the location set-covering problem. *Geographical Analysis*, 8(1):65–76, 1976.
- [RV96] Raimundo Real y Juan M. Vargas. The probabilistic basis of jaccard’s index of similarity. *Systematic Biology*, 45(3):380–385, 09 1996.
- [Set20] Capítulo 1: Teoría axiomática de conjuntos. <https://www.fing.edu.uy/fundamentos-1>, 2020. Apuntes de curso.
- [SFMK24] Tobias Schlosser, Michael Friedrich, Trixy Meyer, y Danny Kowerko. A consolidated overview of evaluation and performance metrics for machine learning and computer vision, 01 2024.

- [Sip12] M. Sipser. *Introduction to the Theory of Computation*. Introduction to the Theory of Computation. Cengage Learning, 2012.
- [ST24] Sathyanarayanan Swaminathan y B Roopashri Tantri. Confusion matrix-based performance evaluation metrics. *African Journal of Biomedical Research*, 27:4023–4031, 11 2024.
- [Unia] Generalidades de teoría de conjuntos. <https://riemann.unizar.es/~jicogo/docencia/topoi/At1.pdf>. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza. Accedido el 22 de mayo de 2025.
- [Unib] Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Algoritmos heurísticos y aproximados. <https://users.exa.unicen.edu.ar/docs/Teorica-1.pdf>. Accedido: 3 de septiembre de 2025.
- [Unic] University of Cambridge. Sets and logic. <https://www.cl.cam.ac.uk/teaching/DiscMathII/>. Accedido: 3 de septiembre de 2025.
- [Unid] University of Illinois Urbana-Champaign. 30 np-hard problems. Course notes. Accedido: 1 septiembre 2025.
- [Urd05] T.C. Urdan. *Statistics in Plain English*. Online access with subscription: Proquest Ebook Central. Lawrence Erlbaum Associates, 2005.
- [Zum] Jörg Zumbraegel. Semirings and semiring modules. <https://staff.fim.uni-passau.de/~zumbraegel/semirings.html>. University of Passau. [Accedido: 18-abr-2025].