Conocimiento y Razonamiento Automatizado
Tema 2: Resolución en el Cálculo de Predicados
Grado en Ing. Informática

José Enrique Morais San Miguel

11 de marzo de 2021

Universidad de Alcalá

Recordemos que un término se dice básico si no contiene variables. Del mismo modo, se tiene:

Definición

Una fórmula se dice **básica** *o* **base** *si no contiene variables ni cuantificadores. Una fórmula A' se dice que es una instancia base de una fórmula A si, y sólo si, A' puede obtenerse de A sustituyendo las variables de A por términos básicos.*

Definición (Forma normal conjuntiva prenexa)

Se dice que una fórmula está en forma normal conjuntiva prenexa si es de la forma

$$Q_1X_1\cdots Q_nX_nM,$$

donde cada Q_i, $1 \leq i \leq n$ es un cuantificador y M es una fórmula libre de cuantificadores en forma normal conjuntiva. Normalmente, $Q_1X_1\cdots Q_nX_n$ recibe el nombre de prefijo y M el de matriz.

Skolenización

Definición (Forma clausal, cláusula base)

Se dice que una fórmula cerrada está en forma clausal si está en forma normal conjuntiva prenexa y todos sus cuantificadores son universales. Una cláusula es una disyunción de literales y, una cláusula base es una instancia base de una cláusula.

Ejemplo

La fórmula siguiente está en forma clausal:

$$\forall X \forall Y([p(f(X)) \vee \neg p(g(Y)) \vee q(Y)] \wedge [\neg q(Y) \vee \neg q(g(Y)) \vee q(X)].$$

Para abreviar la notación, se suele escribir la forma clausal anterior como sigue:

$$\{\{p(f(X)), \neg p(g(Y)), q(Y)\}, \{\neg q(Y), \neg q(g(Y)), q(X)\}\}.$$

Skolenización

Teorema (Skolem)

Sea A una fórmula cerrada. Entonces, existe una fórmula A' en forma clausal tal que $A \approx A'$.

- La notación $A \approx A'$ no quiere decir que las fórmula A y A' sean lógicamente equivalentes. Sólo quiere decir que A es satisfacible si, y sólo si, A' es satisfacible.
- La falta de equivalencia lógica en el Teorema de Skolem se produce a la hora de eliminar los cuantificadores existenciales. Esta eliminación se lleva a cabo introduciendo nuevos símbolos de función. Por ejemplo, si consideramos la fórmula $A = \forall X \exists Y p(X,Y)$, se elimina el cuantificador existencial transformando la fórmula en $A' = \forall X p(X, f(X))$. Estamos expresando casi la misma idea: la fórmula A dice que para todo X, se puede producir un valor Y de tal forma que el predicado sea cierto. En la fórmula A', se explicita una forma de hacer esta elección. De ahí que las fórmulas no sean lógicamente equivalentes, pero sí que se comporten igual si de satisfabilidad hablamos. Es fácil ver que $\mathscr{I} = \{(\mathbb{Z}, \{>\}\}$ es un modelo para A. Sin embargo, no cualquier función $F(X)$ sirve para extender el modelo a un modelo para A'. Si tomamos $F(X) = X + 1$, la interpretación $\mathscr{I}' = \{(\mathbb{Z}, \{>\}, \{F(X) = X + 1\}\}$ no es un modelo para A'. Sustituyendo $F(X)$ por $G(X) = X - 1$ en $\mathscr{I}'$ sí se obtiene un modelo para A'.

Demostración del Teorema de Skolem

Se hacen las siguientes transformaciones:

$$\forall X(p(X) \longrightarrow q(X)) \longrightarrow (\forall X p(X) \longrightarrow \forall X q(X))$$

1.- Renombramos las variables de manera que ninguna variable esté en el radio de acción de dos cuantificadores.

$$\forall X(p(X) \longrightarrow q(X)) \longrightarrow (\forall Y p(Y) \longrightarrow \forall Z q(Z))$$

2.- Eliminamos todos los operadores, salvo las conjunciones, disyunciones y negaciones.

$$\neg(\forall X(\neg p(X) \vee q(X)) \vee (\neg \forall Y p(Y) \vee \forall Z q(Z))$$

3.- Llevamos las negaciones junto a los átomos empleando las leyes de Morgan y las equivalencias y eliminamos las dobles negaciones:

$\neg \forall X A(X)$	$\exists X \neg A(X)$
$\neg \exists X A(X)$	$\forall X \neg A(X)$

$$\exists X(p(X) \wedge \neg q(X)) \vee \exists Y \neg p(Y) \vee \forall Z q(Z))$$

Demostración del Teorema de Skolem

4.- Extraemos los cuantificadores de la matriz. Repetidamente, escogemos un cuantificador que no esté en el radio de acción de otro cuantificador aún en la matriz y lo extraemos de la matriz empleando las siguientes equivalencias:

$$A \; op \; QXB(X) \equiv QX(A \; op \; B(X)) \text{ y}$$

$$QXA(X) \; op \; B \equiv QX(A(X) \; op \; B),$$

donde Q es cualquier cuantificador y op es $\wedge$ o $\vee$.

$$\exists X((p(X) \wedge \neg q(x)) \vee \exists Y \neg p(Y) \vee \forall Z q(Z))$$

$$\exists X \exists Y((p(X) \wedge \neg q(x)) \vee \neg p(Y) \vee \forall Z q(Z))$$

$$\exists X \exists Y \forall Z((p(X) \wedge \neg q(x)) \vee \neg p(Y) \vee q(Z))$$

5.- Aplicamos las leyes distributivas para transformar la matriz a forma normal conjuntiva.

$$\exists X \exists Y \forall Z((p(X) \vee \neg p(Y) \vee q(Z)) \wedge (\neg q(X) \vee \neg p(Y) \vee q(Z)))$$

Demostración del Teorema de Skolem

6.- Eliminamos los cuantificadores existenciales como sigue: si un cierto cuantificador $\exists X$ no está precedido por un cuantificador universal, consideramos un nuevo símbolo de función 0-ario (símbolo de constante), digamos a, eliminamos $\exists X$ y sustituimos todas las apariciones de X por a. Si $\exists X$ está precedido por n cuantificadores universales, digamos $\forall X_1 \cdots \forall X_n$, consideramos un nuevo símbolo de función $n-$aria, digamos f, eliminamos $\exists X$ y sustituimos cada aparición de X por $f(X_1, \ldots, X_n)$. Los nuevos símbolo introducidos, a o f según el caso, se llaman funciones de Skolem.

$$\forall Z((p(a) \vee \neg p(b) \vee q(Z)) \wedge (\neg q(a) \vee \neg p(b) \vee q(Z)))$$

La forma clausal es, por lo tanto:

$$\{\{p(a), \neg q(b), q(Z)\}, \{\neg q(a), \neg p(b), q(Z)\}$$

Demostración del Teorema de Skolem

La única transformación que merece especial atención es la última (en el resto, aplicamos equivalencias lógicas). Supongamos que reemplazamos un cuantificador existencial por una función de Skolem. Debemos probar que $A \approx A'$. Para ello, sea $\mathscr{I}$ un modelo para la fórmula $\forall X_1 \dots \forall X_n \exists X p(X_1, \dots, X_n, X)$ y sea A' la fórmula que introduce la correspondiente función de Skolem $\forall X_1 \dots \forall X_n p(X_1, \dots, X_n, f(X_1, \dots, X_n))$. Extendemos $\mathscr{I}$ a una interpretación $\mathscr{I}'$ de A' sin más que asociar a f, la función F definida en el dominio mediante: dados $c_1, \dots, c_n$, se define $F(c_1, \dots, c_n) = c_{n+1}$, donde c_{n+1} es tal que $(c_1, \dots, c_{n+1}) \in P$, siendo P la relación asociada al predicado p. Dicho c_{n+1} siempre existe al ser $\mathscr{I}$ un modelo para A. Además, resulta claro que $\mathscr{I}'$ es un modelo para A'.
Probemos, ahora, que si A' es satisfacible, A es satisfacible. Sea $\mathscr{I}'$ un modelo para A' y F la función asociada a f. La interpretación $\mathscr{I}$, obtenida de $\mathscr{I}'$, eliminando el símbolo f es un modelo para A. Dado cualquier $(c_1, \dots, c_n)$ en el dominio, existe otro c en el dominio, basta tomar $c = F(c_1, \dots, c_n)$, tal que $p(c_1, \dots, c_n, c)$.

Ejemplo

Skolenizar la fórmula

$$\forall X \exists Y (p(X,Y) \longrightarrow q(Y)) \longrightarrow (\exists\, X p(X) \wedge \forall X \exists Y\, r(X,Y))$$

1. $\forall X \exists Y (p(X,Y) \longrightarrow q(Y)) \longrightarrow (\exists Z\, p(Z) \wedge \forall U \exists V\, r(U,V))$
2. $\exists X \forall Y (p(X,Y) \wedge \neg q(Y)) \vee (\exists Z\, p(Z) \wedge \forall U \exists V\, r(U,V))$
3. $\exists X \forall Y (p(X,Y) \wedge \neg q(Y)) \vee \exists Z \forall U \exists V (p(Z) \wedge\ r(U,V))$

   $\exists X \forall Y \exists Z \forall U \exists V [(p(X,Y) \wedge \neg q(Y)) \vee (p(Z) \wedge\ r(U,V))]$
4. $$\begin{gathered}\exists X \forall Y \exists Z \forall U \exists V [(p(X,Y) \vee p(Z)) \wedge (p(X,Y) \vee r(U,V)) \wedge \\ \wedge (\neg q(Y) \vee p(Z)) \wedge (\neg q(Y) \vee r(U,V))]\end{gathered}$$
5. $$\boxed{\begin{gathered}\forall Y \forall U [(p(a,Y) \vee p(f(Y))) \wedge (p(a,Y) \vee r(U,g(Y,U))) \wedge \\ \wedge (\neg q(Y) \vee p(f(Y))) \wedge (\neg q(Y) \vee r(U,g(Y,U)))]\end{gathered}}$$

Ejemplo

Skolenizar la fórmula

$$\exists X \forall Y\, p(X,Y) \longrightarrow \forall Y \exists X\, p(X,Y)$$

1. $\exists X \forall Y\, p(X,Y) \longrightarrow \forall W \exists Z\, p(W,Z)$
2. $(\forall X \exists Y\, \neg p(X,Y)) \vee \forall W \exists Z\, p(W,Z)$
3. $(\forall X\, \neg p(X,f(X))) \vee (\forall W\, p(W,g(W)))$
4. $\boxed{(\forall X \forall W(\neg p(X,f(X)) \vee\ p(W,g(W)))}$

Definición

Llamaremos sustitución a todo conjunto de la forma:

$$\{X_1 \leftarrow t_1, \ldots, X_n \leftarrow t_n\},$$

donde cada X_i es una variable y cada t_i es un término distinto de la variable X_i ,para $1 \leq i \leq n$.

Definición

Expresión: todo término, cláusula o conjunto de cláusulas.
Instancia $E\theta$: expresión obtenida a partir de E sustituyendo simultáneamente cada aparición de X_i en E por t_i.

Ejemplo

Sea $E = p(X) \vee q(f(Y))$ y $\theta = \{X \leftarrow Y, Y \leftarrow f(a)\}$. Entonces $E\theta = p(Y) \vee q(f(f(a)))$.

Composición de sustituciones

$\theta = \{X_1 \leftarrow t_1, \dots, X_n \leftarrow t_n\}$; $\sigma = \{Y_1 \leftarrow s_1, \dots, Y_m \leftarrow s_m\}$
Si $\mathscr{X}$ e $\mathscr{Y}$ son sus respectivos conjuntos de variables, definimos la composición de θ con σ, denotada $\theta\sigma$, mediante:

$$\theta\sigma := \{X_i \leftarrow t_i\sigma : X_i \in \mathscr{X}, X_i \neq t_i\sigma\} \cup \{Y_j \leftarrow s_j : Y_j \in \mathscr{Y},\ Y_j \notin \mathscr{X}\}.$$

Dicho en palabras: se aplica la sustitución σ a los términos t_i de θ (siempre y cuando no resulte $X_i \leftarrow X_i$) y se añaden las sustituciones de σ en las que no aparecen variables que ya estén en θ.

Ejemplo

$\theta = \{X \leftarrow f(Y), Y \leftarrow f(a), Z \leftarrow U\}$ $\sigma = \{Y \leftarrow g(a), U \leftarrow Z, V \leftarrow f(f(a))\}$ y $E = p(U,V,X,Y,Z)$. Entonces,
$\theta\sigma = \{X \leftarrow f(g(a)), Y \leftarrow f(a), U \leftarrow Z, V \leftarrow f(f(a))\}$
$E(\theta\sigma) = p(Z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), Z)$.

Teorema

Si θ y σ son sustituciones y E es una expresión, se tiene $E(\sigma\theta) = (E\theta)\sigma$. Por otro lado, la composición de sustituciones es asociativa.

Unificación, unificación más general

Definición

Dado un conjunto de átomos, una unificación es una sustitución que hace los átomos idénticos. Una unificación más general es una unificación θ tal que para cualquier otra unificación σ, existe una tercera μ satisfaciendo $\sigma = \theta\mu$.

No todos los átomos son unificables. Evidentemente, dos átomos cuyos símbolos de predicado son diferentes no son unificables. Tampoco son unificables, por ejemplo, $p(X)$ y $p(f(X))$.
Como para que dos átomos sean unificables sus símbolos de predicado deben ser iguales (es decir, sus símbolos y su aridad son iguales), la unificabilidad de dos átomos se describe mediantes ecuaciones de términos. Así, la unificabilidad de los predicados $p(f(X), g(Y))$ y $p(f(f(a)), g(Z))$ se expresa por las ecuaciones

$$\begin{aligned} f(X) &= f(f(a)) \\ g(Y) &= g(Z) \end{aligned}$$

Forma resuelta

Diremos que un conjunto de ecuaciones de términos está en forma resuelta si todas las ecuaciones son de la forma $X_i = t_i$, con X_i variable, y cada variable que aparece en la parte izquierda de las ecuaciones, no aparece en término alguno. Una ecuación en forma resuelta define, de manera obvia, una sustitución.

Algoritmo (Unificación)

Input*: Un conjunto de ecuaciones de términos.*
Output*: Un conjunto en forma resuelta (determinando una unificación más general) o "no es posible la unificación".*
Se aplica las siguientes reglas:

1. *Transforma las ecuaciones de la forma $t = X$, con t término y X variable, en ecuaciones de la forma $X = t$.*
2. *Elimina toda ecuación de la forma $X = X$, con X variable.*
3. *Dada una ecuación de la forma $t = t'$ con t y t' no variables, lleva a cabo las siguientes tareas: para, indicando la imposibilidad de la forma resuelta, si los símbolos de función más exteriores son distintos o tienen distinta aridad. En caso contrario, si los símbolos de función más exteriores son iguales y tienen la misma aridad, i.e., si $t = f(t_1, \ldots, t_n)$ y $t' = f(t'_1, \ldots, t'_n)$, substituye la ecuación $t = t'$ por las ecuaciones $t_1 = t'_1, \ldots, t_n = t'_n$.*
4. *Dada una ecuación de la forma $X = t$, tal que X aparece en algún otro término, para indicando la imposibilidad de la forma resuelta si X aparece en t. En caso contrario, si X no aparece en t, substituye X por t allá donde aparezca X.*

Teorema

El algoritmo anterior siempre termina. Además, si determina que la unificación no es posible, es que no hay unificación posible. Si termina devolviendo un conjunto de ecuaciones en forma resuelta $\{X_1 = t_1, \ldots, X_n = t_n\}$*, la sustitución que define*

$$\{X_1 \leftarrow t_1, \ldots, X_n \leftarrow t_n\}$$

es una umg del conjunto de ecuaciones.

Ejemplo

Estudiar si es posible unificar los siguientes conjuntos de fórmulas. En caso de que sea posible la unificación, determinar una umg.

1. $\{p(g(Y), f(X, h(X), Y)), p(X, f(g(Z), W, Z))\}$
2. $\{p(a, X, f(g(Y))), p(Y, f(Z), f(Z))\}$
3. $\{p(f(X, X), g(Y), Z)), p(f(a, V), g(b), h(W)))\}$

Resolución

Antes de definir la regla de resolución, necesitamos introducir la siguiente notación. Si $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$ es un conjunto de literales, se denota por L^c el conjunto de literales $L^c = \{l_1^c, \ldots, l_n^c\}$.

Definición (Regla de Resolución)

Sean C_1 y C_2 dos cláusulas **sin variables en común**, *de tal forma que existen subconjuntos de literales $L_1 = \{l_1^1, \ldots, l_n^1\} \subseteq C_1$ y $L_2 = \{l_1^2, \ldots, l_m^2\} \subseteq C_2$ satisfaciendo que L_1 y L_2^c pueden unificarse por una u.m.g. σ (en ese caso diremos que C_1 y C_2 se contradicen o que son generatrices). Se define la resolvente de C_1 y C_2 mediante*

$$Res(C_1, C_2) = (C_1\sigma \setminus L_1\sigma) \cup (C_2\sigma \setminus L_2\sigma\})$$

Obsérvese que la regla de resolución requiere que las cláusulas no tengan variables en común. Esto siempre se puede conseguir renombrando las variables en una de las cláusulas antes de usarla en la regla de resolución. Como las variables en las cláusulas están cuantificadas universalmente, esto no cambia la satisfabilidad.

Resolución

Algoritmo

Input: *Una forma clausal S.*

Output: *La forma clausal S es satisfacible o insatisfacible.*

Comenzamos con el conjunto $S_0 = S$. Supongamos que hemos construido S_i. Si existen dos cláusulas generatrices $C_1, C_2 \in S_i$ en S_i, sea $C = Res(C_1, C_2)$. Si $C = \square$, se acaba el algoritmo y S es insatisfacible. En caso contrario,

$$S_{i+1} \leftarrow S_i \cup Res(C_1, C_2)$$

Si $S_{i+1} = S_i$ para todos los pares posibles de cláusulas contradictorias, se termina el proceso y S es satisfacible.

Resolución

Ejemplo

En el ejemplo, las líneas 1 *a* 7 *especifican un conjunto de cláusulas. En el resto de líneas se deriva la cláusula vacía mediante resolución. Cada línea contiene la resolvente, la unificación más general y las cláusulas padre.*

1.- $\neg p(X) \vee q(X) \vee r(X, f(X))$		
2.- $\neg p(X) \vee q(X) \vee s(f(X))$		
3.- $t(a)$		
4.- $p(a)$		
5.- $\neg r(a, Y) \vee t(Y)$		
6.- $\neg t(X) \vee \neg q(X)$		
7.- $\neg t(X) \vee \neg s(X)$		
8.- $\neg q(a)$	$\{X \leftarrow a\}$	3, 6
9.- $q(a) \vee s(f(a))$	$\{X \leftarrow a\}$	2, 4
10.- $s(f(a))$		8, 9
11.- $q(a) \vee r(a, f(a))$	$\{X \leftarrow a\}$	1, 4
12.- $r(a, f(a))$		8, 11
13.- $t(f(a))$	$\{Y \leftarrow f(a)\}$	5, 12
14.- $\neg s(f(a))$	$\{X \leftarrow f(a)\}$	7, 13
15.- $\square$		10, 14

Ejemplo

¿De las fórmulas

$$\forall X \forall Y p(X) \rightarrow (r(X) \wedge s(X, Y)),$$

$$\forall X \exists Y \forall Z \neg s(X, Y) \vee t(Y, Z) \text{ y}$$

$$\forall Y \forall Z \neg t(Y, Z) \vee v(Y),$$

se deduce $\forall X p(X) \rightarrow v(X)$? Usar resolución para responder a la pregunta.

Skolenizando cada una de las fórmulas, se obtienen las cláusulas:

1.- $\neg p(X) \vee r(X)$
2.- $\neg p(X_1) \vee s(X_1, Y_1)$
3.- $\neg s(X_2, f(X_2)) \vee t(f(X_2), Z_2)$
4.- $\neg t(Y_3, Z_3) \vee v(Y_3)$
5.- $p(a)$
6.- $\neg v(a)$