SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS 6. ESTIMACIÓN PUNTUAL Y POR INTERVALO

1.-
a)

$$\overline{X} = 22 \text{ mg} \qquad s = 4 \text{ mg} \qquad n = 20 \qquad I_\mu = \left[\overline{X} \mp t_{\alpha/2,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad t_{0.05,\,19} = 1.729$$

$$I_\mu = \left[22 \mp 1.729 \frac{4}{\sqrt{20}}\right] = (20.5, 23.6)$$

b)
$n = 800 > 30$ $\qquad$ σ desconocida

$$I_\mu = \left[\overline{X} \mp z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[8.1 \mp 1.96 \frac{9}{\sqrt{800}}\right] = (7.5, 8.7)$$

2.-
a) $\overline{X} = 35.67 \qquad s = 0.54 \qquad n = 10 \qquad I_\mu = \left[\overline{X} \mp t_{\alpha/2,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad t_{0.025,9} = 2.262$

$$I_\mu = \left[35.67 \mp 2.262 \frac{0.54}{\sqrt{10}}\right] = (35.28, 36.06)$$

b) Sí, porque ese valor está contenido en el intervalo.

c) $I_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}};\ \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\,\alpha/2,\,n-1}}\right] \qquad \chi^2_{0.025;9} = 19.023 \qquad \chi^2_{0.975;9} = 2.700$

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{9 \cdot 0.54^{\,2}}{19.023};\ \frac{9 \cdot 0.54^{\,2}}{2.700}\right] = (0.14, 0.97)$$

d) No, porque ese valor no está contenido en el intervalo.

3.-

$$S = 2100 \text{ Å} \ \rightarrow \ s = \sqrt{\frac{28}{27}} 2100 = 2138.5 \qquad\qquad t_{0.025,27} = 2.052$$

a) $\widehat{\mu} = \overline{X} = 12500$ Å $\qquad\qquad \widehat{\sigma}^2 = s^2 = 2138.5^2 = 4573182.3$

b) $I_\mu = \left[\overline{X} \mp t_{\alpha/2,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] = \left[12500 \mp 2.052 \frac{2138.5}{\sqrt{28}}\right] = (11670.7, 13329.3)$

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}};\ \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\,\alpha/2,\,n-1}}\right] \qquad \chi^2_{0.025,\,27} = 43.194 \qquad \chi^2_{0.975,\,27} = 14.573$$

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{27 \cdot 2138.5^2}{43.194};\ \frac{27 \cdot 2138.5^2}{14.573}\right] = (2858635.9, 8472924.0) \rightarrow I_\sigma = (1690.8, 2910.8)$$

4.-
a) $\overline{X} = 5.41 \qquad\qquad s = 2.65 \qquad I_\mu = \left[\overline{X} \mp t_{\alpha/2,\, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] \qquad t_{0.025,\,7} = 2.365$

$$I_\mu = \left[5.41 \mp 2.365 \frac{2.65}{\sqrt{8}}\right] = (3.19, 7.63)$$

b)

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2,\,n-1}};\ \frac{(n-1)\,s^2}{\chi^2_{1-\,\alpha/2,\,n-1}}\right] \qquad \chi^2_{0.05,\,7} = 14.067 \qquad \chi^2_{0.95,\,7} = 2,167$$

$$I_{\sigma^2} = \left[\frac{7 \cdot 2.65^{\,2}}{14.067}; \ \frac{7 \cdot 2.65^{\,2}}{2.167}\right] = (3.49, 22.68) \rightarrow I_\sigma = \left(\sqrt{3.49}, \sqrt{22.68}\right) = (1.87, 4.76)$$

5.-

a) $\widehat{p} = \dfrac{200}{1000} = 0.2$

b) $I_p = \left[\widehat{p} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] \qquad 1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow z_{0.005} = 2.575$

$$I_p = \left[0.2 \mp 2.575\sqrt{\frac{0.2 \cdot 0.8}{1000}}\right] = (0.1674, 0.2326)$$

No, ya que ese valor está contenido en el intervalo.

6.-

a) $\widehat{p} = \dfrac{60}{70}$

$$I_p = \left[\widehat{p} \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right] \qquad 1-\alpha = 0,99 \rightarrow \alpha/2 = 0,005 \rightarrow z_{0,005} = 2,575$$

$$I_p = \left[\frac{60}{70} \mp 2,575\sqrt{\frac{\frac{60}{70} \cdot \frac{10}{70}}{70}}\right] = (0,7494, 0,9648)$$

b) No, con una confianza del 99%, puesto que el intervalo correspondiente no contiene al valor 0.98.

c) $z_{\alpha/2}\sqrt{\dfrac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}} \le \varepsilon \rightarrow 2.575\sqrt{\dfrac{\frac{60}{70} \cdot \frac{10}{70}}{n}} \le 0.04 \rightarrow n \ge 508$

7.-

Poblaciones independientes con distribuciones normales. Varianzas poblacionales desconocidas y tamaños muestrales grandes

$$\begin{array}{lll} \overline{X_1} = 18,21 & s_1^2 = 5,31 & n_1 = 25 \\ \overline{X_2} = 16,82 & s_2^2 = 4,05 & n_2 = 25 \end{array}$$

a) $z_{0.025} = 1.96$

$$I_{\mu_1-\mu_2} = \left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right] = \left[18.21 - 16.82 \mp 1.96\sqrt{\frac{5.31}{25} + \frac{4.05}{25}}\right] = [0.1907, 2.5893]$$

b) Como el intervalo no contiene al cero, de los datos de las muestras no hay razones para afirmar que las medias son iguales. Con una confianza del 95% la diferencia es significativa y no se debe exclusivamente al azar.

8.-
a) Tamaños muestrales pequeños y varianzas poblacionales desconocidas. Intervalo de confianza del cociente de varianzas:

$$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left[\frac{s_1^2\,/s_2^2}{F_{\alpha/2;\,n_1-1,\,n_2-1}};\ \frac{s_1^2\,/s_2^2}{F_{1-\,\alpha/2;\,n_1-1,\,n_2-1}} \right]$$

$$F_{0.025;\,8,\,8} = 4.432 \qquad F_{0.975;\,8,\,8} = \frac{1}{4.432}$$

$$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left[\frac{45^2\,/43^2}{4.432};\ \frac{45^2\,/43^2}{1/4.432} \right] = (0.25, 4.86) \text{ como contiene al } 1 \rightarrow \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$I_{\mu_1-\mu_2=} \left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \mp t_{\alpha/2,\,n_1+n_2-2}\ s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \right] \qquad t_{0.025;16} = 2.120$$

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)\,s_1^2 + (n_2-1)\,s_2^2}{n_1+n_2-2} = \frac{8\cdot 45^2 + 8\cdot 43^2}{16} = 1937 \rightarrow s_P = 44.01$$

$$I_{\mu_1-\mu_2=} \left[(329-238) \mp 2.120\cdot 44.01\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}} \right] = (47.01, 134.98)$$

b) Con una confianza del 95%, el FL113 reducirá el tiempo medio de recuperación de las ratas entre 47.01 y 134.98 segundos.

9.-
Tamaños muestrales pequeños y varianzas poblacionales desconocidas. Intervalo de confianza del cociente de varianzas:

$$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left[\frac{s_1^2\,/s_2^2}{F_{\alpha/2;\,n_1-1,\,n_2-1}};\ \frac{s_1^2\,/s_2^2}{F_{1-\,\alpha/2;\,n_1-1,\,n_2-1}} \right] \qquad t_{0.025;13} = 2.16$$

$$F_{0.025;\,12.\,15} = 2.963 \qquad F_{0.975;\,12,\,15} = \frac{1}{3.1772}$$

$$I_{\sigma_1^2/\sigma_2^2} = \left[\frac{28^2\,/7^2}{2.963};\ \frac{28^2\,/7^2}{1/3.1772} \right] = (5.4, 50.8) \text{ como no contiene al } 1 \rightarrow \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$I_{\mu_1-\mu_2=} \left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \mp t_{\alpha/2,\,f}\ \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}} \right] \qquad f = \frac{\left(\frac{28^2}{13}+\frac{7^2}{16}\right)^2}{\frac{\left(\frac{28^2}{13}\right)^2}{13+1}+\frac{\left(\frac{7^2}{16}\right)^2}{16+1}} - 2\ \simeq 13$$

$$I_{\mu_1-\mu_2=} \left[(166-164.7) \mp 2.16\cdot\sqrt{\frac{28^2}{13}+\frac{7^2}{16}} \right] = (-15.9, 18.5)$$

Cubre al cero, lo que indica que con una confianza del 95% no hay diferencia significativa entre las tensiones arteriales de los pacientes de las dos ciudades

---

10.-
$\widehat{p}_1 = 0.685 \qquad n_1 = 200 \qquad\qquad \widehat{p}_2 = 0.653 \qquad n_2 = 150$

$$I_{p_1-p_2} = \left[\widehat{p}_1 - \widehat{p}_2 \mp z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\widehat{p}_1(1-\widehat{p}_1)}{n_1}+\frac{\widehat{p}_2(1-\widehat{p}_2)}{n_2}} \right] =$$

$$= \left[0.685 - 0.653 \mp 1.96\sqrt{\frac{0.685 \cdot 0.315}{200} + \frac{0.653 \cdot 0.347}{150}}\right] = (-0.0677, 0.1317)$$

11.-

X: Peso de los terneros a las seis semanas. Y: Peso de los terneros a las cuatro semanas.
$D_i = X_i - Y_i$

Ternero	1	2	3	4	5	6	7	8
Peso (4 semanas) Y	130	125	128	127	129	123	131	130
Peso (6 semanas) X	138	140	139	141	137	137	142	142
$d_i = x_i - y_i$	8	15	11	14	8	14	11	12

$$\overline{D} = \frac{\sum d_i}{n} = 11.6 \qquad s_D = 2.7 \qquad t_{0.025,7} = 2.365$$

$$I_{\mu_X - \mu_Y} = \left[\overline{D} \mp t_{\alpha/2, n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right] = \left[11.6 \mp 2.365\frac{2.7}{\sqrt{8}}\right] = (9.3, 13.9)$$

como el intervalo contiene el valor 12, con una confianza del 95% que la suposición es cierta.

12.-

Datos emparejados

Antes X	95	85	77	100	92	67	81	94	99
Después Y	40	37	28	49	37	21	45	52	37
$d_i = x_i - y_i$	55	48	49	51	55	46	36	42	62

a) $\overline{D} = 49.33 \qquad s_D = 7.6 \qquad t_{0.025;8} = 2.306$

$$I_{\mu_d} = I_{\mu_X - \mu_Y} = \left[\overline{D} \mp t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right] = \left[49.33 \mp 2.306\frac{7.68}{\sqrt{9}}\right] = [43.43, 55.24]$$

b) El porcentaje medio de actividad de protrombina después del tratamiento es entre 43.43 y 55.24 puntos menor que antes del tratamiento. Por tanto, con una confianza del 95%, puede admitirse la afirmación del enunciado.

c) $l = 55.24 - 43.43 = 11.81 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot 1.96\,\frac{7.68}{\sqrt{n}} = \frac{11.81}{3} \quad \rightarrow \quad n = 59$ pacientes

---

13.-

Sujeto	1	2	3	4	5	6	7	8
PFOS (ng/mL) 1979 Y	28.2	31.6	30.1	27.9	28.8	30.1	32.1	30.9
PFOS (ng/mL) 1986 X	30.6	31.9	32.8	30.8	33.7	29.8	33.6	30.4
$d_i = x_i - y_i$	2.4	0.3	2.7	2.9	4.9	−0.3	1.5	−0.5

a) $\overline{D} = 1.74 \qquad s_D = 1.85 \qquad t_{0.025;7} = 2.365$

$$I_{\mu_d} = I_{\mu_X - \mu_Y} = \left[\overline{D} \mp t_{\alpha/2,n-1}\frac{s_D}{\sqrt{n}}\right] = \left[1.74 \mp 2.365\frac{1.85}{\sqrt{8}}\right] = [0.19, 3.29]$$

b) Sí, con una confianza del 95%, porque $0.19 < \mu_{1986} - \mu_{1979} < 3.29$.