VARIABLES ALEATORIAS

1. Sea una variable aleatoria continua X cuya función de densidad $f(x)$ es:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2, & 15 \leq x \leq 17 \\ 0, & resto \end{cases}$$

(a) Probar que efectivamente es una función de densidad.

(b) La representación gráfica de la función de densidad.

(c) Obtener la $P(15 \leq X \leq 16)$ y $P(16.25 \leq X \leq 16.75)$

(d) Obtener la $P(X \leq 16)$, $P(X \leq 17)$ y la $P(X \leq k)$ para $15 \leq k \leq 17$

(e) Obtener la función de distribución y el valor que toma en el punto $x = 16$

2. Una estación de servicio tiene un depósito de gasolina sin plomo de 2.000 litros lleno al comienzo de cada semana. La demanda semanal muestra un comportamiento creciente hasta llegar a los 1.000 litro, y después se mantiene entre 1.000 y 2.000 litros. Si designamos por X la variable aleatoria que indica la demanda semanal, en miles de litros, de gasolina sin plomo, la función de densidad es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Se pide:

a. Comprobar que es una función de densidad.
b. Representación gráfica de la función de densidad.
c. La función de distribución.
d. Representación gráfica de la función de distribución.
e. Probabilidad de que la demanda esté comprendida entre 750 y 1.500 litros en una semana dada.

3. La demanda semanal de cierta materia prima por parte de una empresa, es de tipo aleatorio y tiene por función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} k(x-1)^2, & 1 < x < 3 \\ 0, & resto \end{cases}$$

Se pide:

a. Determinar el valor de la constante k para que f sea función de densidad.
b. La función de distribución
c. ¿Qué stock debe disponer la empresa al principio de la semana para garantizar que se atienda la demanda semanal con una probabilidad de 0.95?

4. Dada la variable aleatoria x con función de distribución $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^n & 0 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$, donde $n \geq 1$ se pide:
    a. Calcular la función de densidad.
    b. Encontrar la mediana
    c. Encontrar la media y la varianza de x.

5. Una variable aleatoria tiene como función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & resto \end{cases}$$

Se pide:
    a. La función de distribución de x
    b. Encontrar $F\left({}^{2}/{}_{3}\right),\ F\left({}^{9}/{}_{10}\right)$ y $P\left({}^{1}/{}_{3} < x \leq {}^{1}/{}_{2}\right)$
    c. Aquel valor de a tal que $P(x \leq a) = {}^{1}/{}_{4}$
    d. La media y varianza de x

6. Una máquina fabrica ejes cuyos radios se distribuyen con función de densidad $f(x) = \begin{cases} k(x-1)(3-x) & 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & resto \end{cases}$. La variable x se mide en metros. Se pide:
    a. Calcular k
    b. Escribir la función de densidad para los radios de los ejes medidos en cm.
    c. Escribir la función de densidad para el diámetro de los ejes.

7. Sea la siguiente función de densidad $f(x) = \begin{cases} mx & 0 < x < 2 \\ 1 - mx & 2 < x < 4 \end{cases}$. Se pide:
    a. Hallar m
    b. Hallar $E(x)$
    c. Dibujar $F(x)$

8. El tiempo de reparar una máquina en horas tiene la función $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ {}^{x}/{}_{2} & 0 \leq x \leq 1 \\ {}^{1}/{}_{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ {}^{x}/{}_{4} & 2 \leq x \leq 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$
    a. Dibujar la función de distribución
    b. Obtener la función de densidad e interpretarla.
    c. Si el tiempo de reparación es superior a 1 hora, ¿cuál es la probabilidad de que sea superior a 3,5 horas?

1. Un agente de seguros dedicado a la venta de seguros de vida, realiza visitas a posibles clientes con el fin de contratar un seguro de vida. Se sabe de su trayectoria como agente que en el 60% de las visitas tiene éxito y contrata un seguro. Definir la variable aleatoria a este experimento aleatorio y obtener la media y la varianza.

2. Dada una variable aleatoria X que se distribuye según una distribución binomial con parámetros $n = 15$ y $p = 0{,}3$. Obtener:
   a. $P(X = 2)$
   b. $P(X \leq 2)$
   c. La media y varianza

3. Un representante realiza 5 visitas cada día a los comercios de su ramo, y por su experiencia anterior sabe que la probabilidad de que le hagan un pedido en cada visita es del 0,4. Obtener:
   a. La distribución del número de pedidos por día.
   b. Las probabilidades para los diferentes números de pedidos.
   c. La representación gráfica de la función de probabilidad.
   d. El número medio de pedidos por día.
   e. La varianza.
   f. La probabilidad de que el número de pedios que realiza durante un día esté comprendido entre 1 y 3.
   g. La probabilidad de que por lo menos realice dos pedidos.

4. Se envían 20 invitaciones a los representantes estudiantiles para asistir a una conferencia, de experiencias anteriores se sabe que la probabilidad de aceptar la invitación es del 0,8. Si las decisiones de aceptar estas invitaciones son independientes, determinar la probabilidad de que como máximo 17 estudiantes acepten la invitación.

5. Una máquina dedicada a la fabricación de piezas de alta precisión, produce las piezas de una en una siendo independiente la fabricación de cada pieza. La probabilidad que tiene cada pieza de ser defectuosa es del 0,15. Obtener:
   a. La probabilidad de que la primera pieza defectuosa durante un día sea la número 40.
   b. Sabiendo que en la fabricación de cada pieza se tardan 20 segundos, ¿cuál será el tiempo medio que hay que esperar hasta que sea producida la primera pieza defectuosa?
   c. Probabilidad de que las 8 primeras piezas fabricadas sean todas buenas.
   d. Media y varianza del número de piezas buenas que se han fabricado antes de tener una defectuosa.

6. En una cierta empresa constructora el número de accidentes es por término medio de 3 por mes. Calcular:
   a. La probabilidad de que no ocurra ningún accidente en un mes dado.
   b. La probabilidad de que ocurran menos de 5 accidentes en un mes dado.
   c. La probabilidad de que ocurran más de 3 accidentes en un mes dado.
   d. La probabilidad de que ocurran exactamente 3 accidentes en un mes dado.

7. Se sabe que el 1% de los artículos importados de un determinado país tienen algún defecto. Si tomamos una muestra de tamaño 30 artículos, determinar la probabilidad de que tres o más de ellos tengan algún defecto.

8. A una calculadora le fallan, por término medio en cada hora de trabajo, dos transistores. Se sabe que el número de fallos de los transistores sigue una distribución de Poisson. La calculadora deja de funcionar cuando se le averían seis o más transistores. Calcular la probabilidad de que una operación de tres horas se pueda realizar sin avería.

9. Un servicio de urgencias recibe un promedio de cinco enfermos por hora. Determinar:
   a. La probabilidad de que 3 enfermos acudan en una hora seleccionada al azar.
   b. La probabilidad de que menos de 3 enfermos acudan en una hora seleccionada al azar.

10. El número medio de personas que llegan a un cierto comercio es de 2 personas cada 5 minutos y admitimos que el número X de personas que llegan a ese comercio cada 5 minutos sigue una distribución de Poisson. Obtener:
    a. La distribución de probabilidad de la variable aleatoria X.
    b. La probabilidad de que en el período de cinco minutos no llegue ninguna persona, que llegue una persona y que lleguen 2 personas.
    c. Probabilidad de que lleguen más de 2 personas.

11. Desde el año 1980 el número medio de empresas, con más de 100 trabajadores, que han presentado suspensión de pagos ha sido de 6,8 por año, y admitimos que el número de empresas con más de 100 trabajadores, X, que han presentado suspensión de pagos durante un período determinado de tiempo sigue una distribución de Poisson. Obtener:
    a. La probabilidad de que ninguna empresa de más de 100 trabajadores presente suspensión de pagos durante un trimestre.
    b. La probabilidad de que por lo menos dos empresas de más de 100 trabajadores presenten suspensión de pagos durante un determinado año.

12. La distribución del número de veces que es demandado el servicio de un médico a una clínica durante un cierto período de tiempo tiene como función de densidad:
    $f(x) = ke^{-2x}, \ 0 < x < \infty.$

    Determinar:
    a. El valor de k para que $f(x)$ sea una función de densidad.
    b. El número medio de demandas y su desviación típica.

13. En un aparcamiento público se ha observado que los coches llegan aleatoria e independientemente a razón de 360 coches por hora.
    a. Utilizando la distribución exponencial encontrar la probabilidad de que el próximo coche no llegará dentro de medio minuto.
    b. Utilizando la distribución de Poisson obtener la misma probabilidad anterior.

14. Sea X una variable aleatoria “tiempo de duración hasta su adquisición, de cierto producto en el escaparate de un comercio” y se distribuye $Exp(0,2)$ en días. Obtener:
    a. Tiempo esperado del producto en el escaparate.
    b. Desviación típica del tiempo de exposición.
    c. La función de supervivencia sin adquirirse, del producto.

15. Consideramos una variable aleatoria X distribuida según una distribución normal de media 40 y desviación típica 3, $N(40,3)$ y deseamos conocer la $P(43 \leq x \leq 46)$

16. Dada una distribución normal estándar, calcular el área bajo la curva normal que está:
    a. A la izquierda de 1,78.
    b. A la derecha de 0,76.
    c. A la izquierda de -1,45.
    d. Entre 0,25 y 2,65.
    e. Entre -1,24 y 1,85

17. Dada una distribución $N(0,1)$, obtener el valor de k tal que
    a. $P(Z \geq k) = 0{,}2946$
    b. $P(Z \leq k) = 0{,}2709$
    c. $P(Z \geq k) = 0{,}9726$
    d. $P(k \leq Z \leq -0{,}18) = 0{,}4199$

18. Sea una variable aleatoria X distribuida según una normal con media $\mu = 50$ y desviación típica $\sigma = 8$. Obtener:
    a. La probabilidad de que la variable aleatoria X tome valores entre 38 y 58.
    b. La probabilidad de que la variable aleatoria X tome un valor mayor que 66.

19. Las calificaciones finales de una asignatura siguen una distribución normal con media $\mu = 6{,}5$ y desviación típica $\sigma = 2$. Si el 10% de alumnos obtienen la calificación de sobresaliente, ¿cuál será la calificación más baja de sobresaliente?

20. Supongamos que la demanda semanal de un artículo sigue una distribución normal de media $\mu = 100$ y desviación típica $\sigma = 20$. ¿Qué existencia deben de tener al principio de la semana para poder satisfacer la demanda con una probabilidad del 0,95?

21. Un servicio dedicado a la reparación de electrodomésticos en general, ha observado que recibe cada día, por término medio 15 llamadas. Determinar la probabilidad de que se reciban más de 20 llamadas en un día.

22. Sea una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}$, independientes y distribuidas según una Poisson de parámetro $\lambda = 2$. Se define la variable aleatoria $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

    Determinar la $P(190 \leq S_{100} \leq 210)$