Resumen de Tema 3

1. Funciones Generadoras

La **utilidad** de estas funciones radica en que permiten:

1. Calcular el número de formas de distribuir objetos distintos en clases diferentes
2. Demostrar identidades de tipo combinatorio
3. Resolver relaciones de recurrencia.

Función generadora ordinaria:

- Definición: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **,** determina la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ **.**
- Ejemplo: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 1.x^n = \frac{1}{1-x}$ (Nota: Se puede demostrar esta igualdad aplicando el desarrollo en serie de MacLaurin)
- Permite calcular las distribuciones de objetos en clases distintas con y sin restricciones.
- Ver listado de las funciones generadoras más frecuentes.
- Operaciones más frecuentes:
  - **Suma:** $(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n+b_n)x^n$
  - **Producto:** $(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ **con** $c_n=\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}$
- Dada una sucesión podemos determinar fácilmente su función generadora pero también se puede llevar a cabo el proceso inverso.

Teorema del binomio extendido (con exponentes negativos):

$$(\mathbf{1}+\boldsymbol{x})^{\boldsymbol{u}} = \sum_{\boldsymbol{k}=\mathbf{0}}^{\infty} \binom{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{R}; \quad \binom{\boldsymbol{u}}{\boldsymbol{k}} = \begin{cases} \dfrac{\boldsymbol{u}(\boldsymbol{u}-\mathbf{1})\dots(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}{\boldsymbol{k}!}, & \boldsymbol{k}>\mathbf{0} \\ \mathbf{1}, \quad \boldsymbol{k}=\mathbf{0} \end{cases}$$

- $(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} (-1)^k x^k$

Función generadora exponencial:

- Definición: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$**,** determina la sucesión $\{a_n\}_{n\in N}$ **.**
- Ejemplo: $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} 1 + x + \frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+....+\frac{x^k}{k!}+....=e^x$ (Nota: Se puede demostrar esta igualdad aplicando el desarrollo en serie de MacLaurin).
- Permite calcular las diferentes ordenaciones de objetos distintos.
- Algunas funciones generadoras exponenciales.

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-.....+(-1)^k\frac{x^k}{k!}+.....$$
$$\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-.....+\frac{x^{2k}}{2k!}+.....$$
$$\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-.....+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+.....$$

2. Particiones de un número entero positivo y funciones generadoras

- **Definición:** Una partición de *n* es una descomposición de *n* de la siguiente forma $n=n_1+n_2+n_3+....+n_k;\quad \forall n\in N\quad y\quad n_i>0, i=1,...,k$
- Denotaremos por *p(n)* al número de particiones de *n*, para todo $n\in$ ***N*.**
- Ejemplo: Particiones de *n*=4 y el número de ellas
  - o 4; 3+1; 2+2; 1+1+1+1; 2+1+1
  - o *p*(4)=5.
- Una partición se puede representar por medio de un diagrama de Ferrers, es decir, un diagrama que consta de k-filas y en cada fila se representa la cantidad n_i, correspondiente a cada sumando de la partición, por medio de puntos (marcas). De manera que el número de puntos de una fila a la siguiente nunca aumenta. Estos diagramas facilitan la demostración de ciertos resultados relacionados con las particiones de un número entero positivo.
- La partición conjugada de una partición de *n* es la que se obtiene intercambiando filas por columnas en el diagrama asociado a la partición dada. Si la partición obtenida coincide con la original se dice que la partición dada es auto-conjugada.
- **Proposición**:
  - o $p(n/\text{con un numero de partes }\leq r)=p(n+r/\text{con } r \text{ partes exactamente})$
    $p_{aut}(n)=p(n/\text{con partes distintas e impares})$
- **Particiones de *n* con restricciones**
  - o De $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}1.x^n=\frac{1}{1-x}$ se deduce que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(x^i)^n=\frac{1}{1-x^i}$**.** Es la función generadora de la sucesión de números $\{f_n\}_{n\in N}$, $f_n=\left\{\begin{array}{ll}1, & n=ki,\\ 0 & n\neq ki,\end{array}\; k=0,1,2,3......\right\}=p(n/\text{cada parte de tamaño } i)$
  - o Generalizando podemos determinar la función generadora de $p(n/\text{con partes de tamaño } i, j \text{ o } k)$, como sigue $h(x)=\frac{1}{1-x^i}\frac{1}{1-x^j}\frac{1}{1-x^k}$
  - o Por tanto, la función generadora de $\{p(n)\}_{n\in N}$ es $P(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$
  - o Además, la función generadora de $\{p(n/\text{donde cada parte de tamaño } i \text{ aparece un numero maximo } k \text{ de veces})\}_{n\in N}$ es $g(x)=\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i+(x^i)^2+(x^i)^3+...+(x^i)^k)=\prod_{i=1}^{\infty}(\frac{1-x^{i(k+1)}}{1-x^i})$**.** Tomando

k=1, se obtiene la función generadora de $p(n/\text{con partes distintas})$, es decir, $f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3).....(1+x^k)...$

- Análogamente, de $P(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$ se obtiene $h(x)=\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^4}\frac{1}{1-x^6}.....\frac{1}{1-x^{2k}}...$ correspondiente a $p(n/\text{con partes pares})$. También, $t(x)=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^3}\frac{1}{1-x^5}.....\frac{1}{1-x^{2k+1}}...$ que es la función generadora de $p(n/\text{con partes impares})$ y $r(x)=\frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^3}.....\frac{1}{1-x^m}$ como función generadora de $p(n/\text{con partes de tamaño } \le \text{m})$.

- **Cálculo de *p(n)***
  - Consideramos $P(x)=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^i}$**,** función generadora de $\{p(n)\}_{n\in N}$ y la función $Q(x)=(1-x)(1-x^2)....(1-x^n)....$ que es la inversa de $P(x)$, es decir, $P(x)\,Q(x)=1$.
  Luego,
  $1=P(x)Q(x)=(1+p(1)x+p(2)x^2+....+p(n)x^n+....)(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+.....)$
  - Entonces igualando los coeficientes de x^n en ambos términos de la igualdad anterior se obtiene

$$0=p(n)-p(n-1)-p(n-2)+p(n-5)+p(n-7)-p(n-12)-p(n-15)+......$$
$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-p(n-7)+p(n-12)+p(n-15)-......$$

Ejemplo: $p(7)=p(6)+p(5)-p(2)-p(0)=11+7-2-1$**.**

N	7	8	9	10	11	12	13	14
p(n-1)	11	15	22	30	42	56	77	101
p(n-2)	7	11	15	22	30	42	56	77
p(n-5)	2	3	5	7	11	15	22	30
p(n-7)	1	1	2	3	5	7	11	15
p(n-12)	---	--	--	--	--	1	1	2
p (n)	15	22	30	42	56	77	101	135