Estructuras Discretas

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Alcalá

Tomasa Calvo Sánchez

José Enrique Morais San Miguel

Enriqueta Muel Muel

15 de enero de 2015

Índice general

Parte I

Lógica

Capítulo 1

Lógica

1.1. Proposiciones y conectivos

Cuando en español (o en cualquier otra lengua) se dice una frase del tipo "el hombre es un animal inteligente", es fácil darse cuenta de que la misma admite varias interpretaciones. Algunos pueden ver en la frase una definición de la especie, otros no encontrarán en ella más que el enunciado de una cualidad humana. En general, el lenguaje común se encuentra plagado de este tipo de ambigüedades. En Lógica Clásica, sin embargo, no se admiten más que frases que posean únicamente uno de los dos valores booleanos: VERDADERO o FALSO, sin ambigüedad posible. Estas afirmaciones se llaman **proposiciones**. Por comodidad, simbolizaremos el valor VERDADERO por 1 y el valor FALSO por 0. Por ejemplo, las frases "Madrid es la capital de España", "Son las tres de la tarde" ó "$2 + 2 = 4$"son proposiciones. Sin embargo, expresiones como "lea atentamente las instrucciones" o "¿Qué hora es?" no son proposiciones al no ser declarativas. La expresión "el entero positivo n es primo"tampoco es una proposición puesto que la variable que aparece en la expresión no tiene asignado un valor. De alguna forma, podríamos considerarla como una proposición parametrizada por n, también llamada **predicado**. Para cada valor de n la frase posee un único valor booleano. Para $n = 13$, por ejemplo, la afirmación es cierta, mientras que para $n = 6$ es falsa.

No existe ningún criterio universal que permita decidir si una afirmación del lenguaje usual tiene sentido o no. De hecho, la lógica de las proposiciones (*Lógica Proposicional*) no se interesa por esas cuestiones. Para ésta, las proposiciones elementales tienen sentido. Ciertas paradojas, por otro lado, provienen del carácter no fundado de esta hipótesis. Consideremos la frase "Esta afirmación es falsa". Intentar atribuirle uno de los valores VERDADERO o FALSO a esta frase conduciría a atribuirle, asimismo, el valor contrario. Para el lógico esta paradoja se resuelve decidiendo que esta frase no es una proposición. En cierto modo, esto convierte a la Lógica en una especie de juego formal en el que los elementos de base son proposiciones anónimas, habitualmente notadas por p, q, r, ... o tal vez por $p_1, p_2, p_3, \ldots$ y que, por hipótesis, poseen uno y sólo uno de los valores 0 y 1 (Recordemos que a lo largo del

Capítulo, 0 se corresponde con el valor FALSO, mientras que 1 se corresponde con VERDADERO).

A partir de estas proposiciones elementales o átomos, se pueden construir, gracias a los denominados **conectivos**, proposiciones más complejas, usualmente llamadas **fórmulas**.

En primer lugar tenemos un conectivo unario, llamado **negación**, habitualmente denotado por $\neg$ y definido en la Tabla 1.1.

p	$\neg p$
0	1
1	0

p	q	$p\square q$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Cuadro 1.1: Negación y conectivo binario

Para definir un conectivo binario (esto es, que opera sobre dos proposiciones), necesitamos rellenar la columna vacía de la Tabla 1.1 con ceros o unos. Esto se puede hacer de dieciséis formas distintas por lo que existen dieciséis conectivos binarios de los que algunos no presentan especial interés. Otros, en cambio, se corresponden con construcciones lógicas usuales. Así ocurre, por ejemplo, con la **conjunción**, notada por $\wedge$ y la **disyunción**, notada por $\vee$. La definición de ambos conectivos se encuentra en la Tabla 1.2. La proposición compuesta $p \wedge q$, que se lee *p y q*, es verdadera si tanto p como q lo son y falsa en el resto de los casos. La fórmula $p \vee q$, que se lee *p o q*, es verdadera si alguna de las proposiciones p y q lo es y es falsa cuando ambas lo son. El conectivo $\vee$ se corresponde con un "o"no excluyente; este no es, en general, el sentido dado a la conjunción "o" en el lenguaje ordinario pero sí en los lenguajes de programación.

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Cuadro 1.2: Conjunción y disyunción

Es claro que los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ pueden admitir como operandos no solamente proposiciones elementales sino también proposiciones complejas. Por ejemplo, podemos escribir la fórmula $\neg((p \vee q) \wedge \neg r)$.

Un uso riguroso de los paréntesis es fundamental para evitar toda posible ambigüedad e indicar los operandos de cada conectivo involucrado. En numerosos lenguajes de programación el AND tiene prioridad sobre el OR. Esta convención se justifica por el uso que la electrónica hace de la notación aditiva y multiplicativa para la disyunción y la conjunción. En nuestro caso, no adoptaremos esta convención para no romper la perfecta dualidad ente los conectivos $\wedge$ y $\vee$. Por lo tanto, no habrá cabida para fórmulas como $p \wedge q \vee r$ puesto que no permite distinguir entre las fórmulas $(p \wedge q) \vee r$ y $p \wedge (q \vee r)$.

Por otro lado, daremos prioridad a la negación sobre cualquier otro conectivo. Así, si el conectivo $\neg$ no está seguido de un paréntesis, se adopta el criterio de que actúa sobre la variable proposicional que le sigue. Por ejemplo, $\neg p \wedge q$ es la conjunción de $\neg p$ y q. Si quisiéramos escribir la negación de la conjunción de p y q escribiríamos $\neg(p \wedge q)$.

A partir de las tablas (véanse las Tablas 1.1 y 1.2) con las que hemos definidos los conectivos $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ podemos determinar el valor de cualquier fórmula que involucre a los conectivos citados. La ejecución sistemática de este trabajo conduce a establecer la **tabla de verdad** de la fórmula. Por ejemplo, las tablas de verdad de las fórmulas $p \wedge (q \vee r)$, $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ y $\neg((p \vee q) \wedge \neg r)$ son:

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\neg((p \vee q) \wedge \neg r)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

Cuadro 1.3: Ejemplos de tablas de verdad

Observemos, de paso, que las fórmulas $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ tienen siempre el mismo valor. A esta propiedad, se le conoce como **propiedad distributiva** de $\vee$ con respecto a $\wedge$.

1.2. Implicación y equivalencia lógica

Aparte de los conectivos definidos en la Sección anterior, otros conectivos binarios usuales son la **implicación**, el **bicondicional** o **doble implicación** y la **disyunción excluyente** definidos en la tabla 1.4.

La implicación $p \rightarrow q$ significa *si p, entonces q*. Este conectivo binario es quizás el más delicado de manejar. Imaginemos, por ejemplo, que las proposiciones p y q son las siguientes:

$$p : \textit{hoy es viernes}\ ,\ q : 3 + 2 = 5$$

En ese caso, la fórmula $p \rightarrow q$ se leerá "*si hoy es viernes, entonces 3+2=5*", lo que puede parecer un sinsentido pues no hay ninguna relación de causa-efecto entre ambas proposiciones. En el lenguaje usual, sólo se utilizan las implicaciones cuando existe relación de causa-efecto. Sin embargo, en lógica el contenido de las proposiciones no nos interesa; tan sólo importa su valor de veracidad. En el caso de la implicación, decir que la proposición $p \rightarrow q$ es verdadera significa, simplemente, que si p es verdadera, también lo es q. En otras palabras, $p \rightarrow q$ significa que no es posible que p sea verdadera y q falsa, es decir, negar la conjunción de p y $\neg q$: $\neg(p \wedge \neg q)$. De ahí la tabla de verdad con la que hemos definido la implicación en la Tabla 1.4.

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \oplus q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Cuadro 1.4: Implicación, bicondicional o doble implicación y disyunción excluyente

Constatamos, por otro lado, que al contrario que la disyunción y la conjunción, la implicación no es conmutativa. Los dos operandos no juegan el mismo papel; el de la derecha se llama **antecedente** o **hipótesis**, mientras que el de la izquierda se llama **consecuencia** o **tesis**. Cuando una implicación $p \rightarrow q$ es verdadera, se dice que q es una **condición necesaria** de p. La implicación $p \leftarrow q$ o $q \rightarrow p$ se llama recíproca de $p \rightarrow q$. La implicación $\neg q \rightarrow \neg p$ se llama contrapuesta de $p \rightarrow q$. Se puede comprobar, mediante tablas de verdad, que una implicación siempre tiene el mismo valor que el de su contrapuesta.

La fórmula $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ se suele escribir en forma abreviada como $p \Leftrightarrow q$. La tabla de verdad de este conectivo se encuentra en la Tabla 1.4 y se conoce con el nombre de **bicondicional** o doble implicación. Se observa que $p \Leftrightarrow q$ es verdadera únicamente en los casos en los que p y q poseen el mismo valor. Cuando la equivalencia $p \Leftrightarrow q$ es verdadera se dice que p es una **condición necesaria y suficiente** para q.

La proposición $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$ se escribe de manera abreviada como $p \oplus q$. El conectivo binario $\oplus$ se llama **disyunción excluyente**. La fórmula $p \oplus q$ es verdadera si una sola de las proposiciones p y q lo es.

1.2.1. Del español a expresiones lógicas y viceversa

La traducción de expresiones en español (o en cualquier otro lenguaje natural) a expresiones lógicas es una tarea crucial no sólo en matemáticas, sino también en programación lógica, ingeniería del software, inteligencia artificial y otras muchas disciplinas. En esta Subsección veremos algunos ejemplos en los que traduciremos expresiones en español a términos lógicos y viceversa.

Ejemplo 1.1 *Traducir en una expresión lógica la siguiente frase: "Puedes jugar en la selección española de fútbol sólo si tienes nacionalidad española y no has jugado con otra selección nacional".*

Llamemos p a la proposición "Puedes jugar en la selección española de fútbol", q a la expresión "Tienes nacionalidad española" y r a la proposición "Has jugado con una selección nacional distinta a la española". Con esta notación la fórmula

$$p \rightarrow (q \wedge \neg r)$$

traduce la frase dada.

Ejemplo 1.2 *En un artículo de 1978, Raymond Smullyan enunció problemas lógicos sobre una isla en la que habitaban dos tipos de personas: caballeros, que siempre dicen la verdad y rufianes, que siempre mienten. Uno de los problemas propuestos era el siguiente: Supongamos que nos encontramos dos personas, A y B, en la isla. ¿De qué tipo son A y B si A dice " B es un caballero" y B dice "Somos dos tipos distinto de persona" ?*

Para formalizar el problema y resolverlo, llamemos p a la proposición "A es un caballero" y q a la proposición "B es un caballero".

Supongamos que A es un caballero. En este caso, el valor de verdad de p es 1 y, puesto que los caballeros siempre dicen la verdad, también el valor de verdad de q es uno. Ahora bien, la afirmación de B que formalizada sería $(p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge q)$ en este caso tomaría el valor de verdad 0, por lo que B estaría mintiendo. En consecuencia, A es un rufián y el valor de verdad de p es cero. Ahora, si A es un rufián, como todo lo que dice es falso, se deduce que B es un rufián. Además, la afirmación de B, que sería falsa, es consistente con el hecho de que sea un rufián. En definitiva, ambos son rufianes.

Ejemplo 1.3 *Sean p y q las proposiciones "Hiela" y "Nieva" respectivamente. Escribimos algunas fórmulas y sus traducciones al español:*

- $p \wedge q$: *Hiela y nieva.*
- $p \wedge \neg q$: *Hiela y no nieva. (También sería correcto: Hiela pero no nieva.)*
- $p \rightarrow \neg q$: *Si hiela, no nieva.*

- $p \Leftrightarrow q$: *Helar es condición necesaria y suficiente para que nieve.*
- $p \vee q$: *Nieva o hiela o ambas cosas a la vez.*
- $\neg p \wedge \neg q$: *Ni nieva ni hiela.*

1.2.2. Tautologías y contradicciones

Como se constata en la Tabla 1.4, los valores de $p \oplus q$ y de $p \Leftrightarrow q$ son siempre opuestos. Dicho de otro modo, sean cuales sean los valores de p y q, la fórmula $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \oplus q)$ es siempre cierta. A una fórmula de este tipo, es decir, a una fórmula cuyo valor es 1, independientemente del valor atribuido a cada una de las variables proposicionales que la componen, se le dice **tautología**. Por otro lado, una fórmula que siempre sea falsa, es decir, que, independientemente de los valores que tomen las variables proposicionales que la componen, toma el valor 0, se llama **contradicción**. Una fórmula que es obviamente una contradicción es $p \wedge \neg p$. También, por lo dicho anteriormente, la fórmula $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \oplus q)$ es una contradicción.

Cuando la fórmula $p \Leftrightarrow q$ es una tautología, se dice que las fórmulas p y q son **lógicamente equivalentes**. Habitualmente se escribe $p \equiv q$. Por lo tanto, la expresión $p \equiv q$ denota que las proposiciones p y q toman exactamente los mismos valores de verdad. Así pues, podemos utilizar las tablas de verdad para probar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes. Por ejemplo, las cinco primeras columnas de la Tabla 1.3 prueban que $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Esta propiedad, conocida con el nombre de distributividad, es una de las principales equivalencias lógicas que se refieren a los conectivos fundamentales $\neg$, $\wedge$ y $\vee$ y que listamos a continuación:

Proposición 1.4 *Si p, q y r son proposiciones, se tiene:*

1.- $p \wedge 1 \equiv p$; $p \vee 0 \equiv p$. *(Leyes de identidad)*

2.- $p \vee 1 \equiv 1$; $p \wedge 0 \equiv 0$. *(Leyes de acotación)*

3.- $p \vee p \equiv p$; $p \wedge p \equiv p$. *(Idempotencia de $\wedge$ y $\vee$)*

4.- $\neg\neg p \equiv p$ *(Principio de la doble negación)*

5.- $p \wedge q \equiv q \wedge p$; $p \vee q \equiv q \vee p$ *(Conmutatividad de $\wedge$ y $\vee$)*

6.- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$; $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ *(Asociatividad de $\wedge$ y $\vee$)*

7.- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$; $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ *(Doble distributividad)*

8.- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$; $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ *(Leyes de Morgan)*

9.- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$; $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ *(Leyes de absorción)*

10.- $p \vee \neg p \equiv 1$; $p \wedge \neg p \equiv 0$ *(Leyes del complementario)*

Observación 1.5 *Todas las equivalencias lógicas contenidas en la Proposición 1.4 pueden probarse usando tablas de verdad.*

Observación 1.6 *Observamos que, usando las leyes de Morgan y el principio de la doble negación y dado que* $p \to q$ *es equivalente a* $\neg(p \wedge \neg q)$, $p \to q$ *es también equivalente a la fórmula* $\neg p \vee q$. *Por otro lado, la asociatividad de* $\wedge$ *y* $\vee$ *permite escribir sin paréntesis proposiciones compuestas en las que solamente intervengan disyunciones o conjunciones, es decir, podremos escribir sin paréntesis fórmulas tales como* $p \vee q \vee r \vee s$ *ó* $p \wedge q \wedge r$.

Las equivalencias lógicas anteriores pueden usarse, naturalmente, para construir nuevas equivalencias.

Ejemplo 1.7 *Probar que* $\neg(p \vee (\neg p \wedge q))$ *y* $\neg p \wedge \neg q$ *son lógicamente equivalentes.*

Una forma de probar esta afirmación es el uso de las tablas de verdad. En cambio, vamos a probar la equivalencia utilizando los resultados recogidos en la Proposición 1.4. Se tiene:

$$\begin{array}{lll}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) & \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{(segunda de las leyes de Morgan)} \\
& \equiv \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) & \text{(primera de las leyes de Morgan)} \\
& \equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{(principio de la doble negación)} \\
& \equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{(distributividad)} \\
& \equiv 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{(segunda ley del complementario)} \\
& \equiv \neg p \wedge \neg q & \text{(segunda ley de identidad)}
\end{array}$$

Ejemplo 1.8 *Probar que* $(p \wedge q) \to (p \vee q)$ *es una tautología.*

Probaremos que la fórmula es lógicamente equivalente a 1:

$$\begin{array}{lll}
(p \wedge q) \to (p \vee q) & \equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) & \text{(Observación 1.6)} \\
& \equiv (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) & \text{(primera de las leyes de Morgan)} \\
& \equiv (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q)) & \text{(asociatividad y conmutatividad)} \\
& \equiv 1 \vee 1 & \text{(segunda ley del complementario)} \\
& \equiv 1 & \text{(primera ley de acotación)}
\end{array}$$

Ejemplo 1.9 *Probar que* $p \oplus q$ *es lógicamente equivalente a* $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)$.

Al igual que en los casos anteriores, podríamos probar la afirmación usando tablas de verdad, pero lo haremos usando las equivalencias lógicas contenidas en la Proposición 1.4:

$$
\begin{array}{lll}
(p \oplus q) & \equiv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) & \text{(definición de } \oplus) \\
& \equiv (p \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (\neg q \vee (\neg p \wedge q)) & \text{(distributividad)} \\
& \equiv ((p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q)) & \text{(distributividad)} \\
& \equiv (1 \wedge (p \vee q)) \wedge ((\neg q \vee \neg p) \wedge 1) & \text{(leyes complementario)} \\
& \equiv (p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) & \text{(leyes de identidad)} \\
& \equiv (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) & \text{(conmutatividad)}
\end{array}
$$

En cuanto a los conectivos implicación y bicondicional, recogemos, en el siguiente resultado, algunas de las equivalencias lógicas más importantes que les conciernen:

Proposición 1.10 *Si p, q y r son proposiciones, se tienen las siguientes equivalencias lógicas:*

1.- $p \to q \equiv \neg p \vee q$

2.- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

3.- $\neg(p \to q) \equiv p \wedge \neg q$

4.- $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

5.- $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$

6.- $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

7.- $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

8.- $p \Leftrightarrow q \equiv \neg p \Leftrightarrow \neg q$

9.- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

10.- $\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \neg q$

Observación 1.11 *Todas las equivalencias lógicas contenidas en la Proposición 1.10 pueden probarse, naturalmente, mediante tablas de verdad. Sin embargo, se puede ver que todas se deducen de la primera aplicando, si es necesario, las equivalencias lógicas contenidas en la Proposición 1.4. Como ilustración de este hecho, probaremos las equivalencias lógicas* 7 *y* 9*.*

7.- $(p \vee q) \to r \equiv \neg(p \vee q) \vee r \equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee r \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r) \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

9.- $p \Leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q)) \equiv$

$\equiv ((\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q)) \equiv (0 \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee ((q \wedge p) \vee 0) \equiv$

$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

1.2.3. Forma normal conjuntiva

En el Cálculo Proposicional se conoce como **literal** a una fórmula que se reduce a una variable proposicional, $p, q, r, \ldots$, o a la negación de una variable proposicional, $\neg p, \neg q, \neg r, \ldots$, y a una disyunción de un número finito de literales se le dice **cláusula**. Dado que el valor de verdad 0 es neutro para el conectivo $\vee$, podemos afirmar que la cláusula vacía (disyunción de 0 literales), es una contradicción. Gracias, entre otras, a la primera equivalencia lógica de la Proposición 1.10, se puede probar que toda fórmula es lógicamente equivalente a una conjunción de cláusulas. A esta conjunción de cláusulas equivalente a la fórmula dada, se le conoce como **forma normal conjuntiva** de la misma. Para normalizar de esta forma una fórmula, podemos recurrir sistemáticamente a las tres etapas del algoritmo siguiente:

1.- Eliminar los conectivos no fundamentales, es decir, todos aquellos que no sean $\vee$ o $\wedge$.

2.- Utilizar las leyes de Morgan y el principio de la doble negación para que el conectivo unario $\neg$ se aplique directamente sobre las variables proposicionales.

3.- Explotar la distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$.

Ejemplo 1.12 *Reducir a forma normal conjuntiva la fórmula*

$$(\neg p \wedge q) \to \neg(t \vee \neg r).$$

Utilizando que $p \to q$ es equivalente a $\neg p \vee q$ podemos eliminar el conectivo $\to$ de la fórmula llegando a la fórmula equivalente:

$$\neg(\neg p \wedge q) \vee \neg(t \vee \neg r).$$

Ahora, aplicamos las leyes de Morgan y el principio de la doble negación y obtenemos:

$$p \vee \neg q \vee (\neg t \wedge r).$$

Finalmente, por la distributividad de $\wedge$ con respecto a $\vee$ se llega a:

$$(p \vee \neg q \vee \neg t) \wedge (p \vee \neg q \vee r)$$

que es una conjunción de dos cláusulas.[1]

[1] En general, la normalización proseguiría eliminando las cláusulas que sean tautologías y las cláusulas superfluas. La idempotencia de $\wedge$ y de $\vee$ permitiría suprimir las redundancias en el interior de cada cláusula.

1.3. Predicados y cuantificadores

Como indicamos en la Sección 1.1, un **predicado** es una proposición que hace mención a uno o varios objetos anónimos $x, y, z, \ldots$. Por ejemplo, expresiones como

$$\text{“}x + y = 5\text{”}, \quad \text{“}x > 3\text{”} \;\text{ o }\; \text{“}n \text{ es par”}$$

que son comunes en matemáticas y también en programación, son predicados. Estas afirmaciones no son ciertas o falsas si los valores de las variables son desconocidos. El valor de verdad de un predicado puede variar según el valor de las variables que aparecen involucradas. Por ejemplo, el predicado “x e y son números naturales y $x+y=5$” toma el valor 1 únicamente si $x=0$ e $y=5$, $x=1$ e $y=4$, $x=2$ e $y=3$, $x=3$ e $y=2$, $x=4$ e $y=1$ ó $x=5$ e $y=0$ y toma el valor 0 en el resto de casos. Si $P(x)$ denota el predicado “$x > 3$”, el valor de verdad de $P(4)$ es 1, mientras que el de $P(0)$ es 0.

Cuando en un predicado asignamos un valor concreto a cada una de las variables involucradas, la afirmación resultante se convierte en una proposición con un cierto valor de verdad. Sin embargo, hay otra importante manera, llamada cuantificación, para crear una proposición a partir de un predicado. Los dos tipos de cuantificación los discutiremos a continuación. El área de la Lógica que se ocupa de los predicados y cuantificadores se llama **Cálculo de predicados** o **Lógica de predicados**.

Sea $P(x)$ un predicado en la variable x. Introducimos las dos nuevas fórmulas que siguen:

$$\forall\, x\; P(x) \;\; (1) \qquad \exists\, x\; P(x) \;\; (2)$$

Por definición, la primera de estas fórmulas es verdadera si, y sólo si, todo valor de x hace verdadero al predicado $P(x)$. La segunda es verdadera si, y sólo si, existe al menos un valor de x que hace verdadero el predicado $P(x)$. Por lo tanto, el valor de verdad de las fórmulas (1) y (2) no depende ya del valor que tome la variable x. Los símbolos $\forall$ y $\exists$ se denominan **cuantificador universal** y **cuantificador existencial** respectivamente.

Ejemplo 1.13 *La frase* “Todos los alcalaínos son españoles”*puede formalizarse de la siguiente manera:*

$$\forall\, x\; (x \text{ es alcalaíno} \rightarrow x \text{ es español})$$

En este caso se trata de una implicación cuantificada universalmente.

La frase “Al menos un ciudadano español es pobre” *admite como formalización:*

$$\exists\, x\; (x \text{ es ciudadano español} \wedge x \text{ es pobre})$$

En este caso, se trata de una conjunción cuantificada existencialmente.

En la práctica, los objetos $x, y, z, \ldots$ sobre los que se aplican los cuantificadores no son completamente arbitrarios, sino que, generalmente, están restringidos a ciertos conjuntos $A, B, C \ldots$ aún cuando éstos se omitan si lo permite el contexto. De este modo, se escribirá

$$\forall\, x \in A : P(x)$$

para expresar que todo objeto, miembro del conjunto A, posee la propiedad descrita por el predicado $P(x)$. De hecho, $\forall\, x \in A : P(x)$ es una escritura condensada de $\forall x\ ((x \in A) \ \rightarrow\ P(x))$. Del mismo modo, $\exists\, x \in A : P(x)$ es una escritura abreviada de $\exists\, x((x \in A) \wedge P(x))$. Aunque no parezca muy relevante, no carece de interés el darse cuenta de que las expresiones $\forall\, x \in A : P(x)$ y $\exists\, x \in A : P(x)$ esconden, respectivamente, una implicación y una conjunción: por ejemplo, de ello se deduce que toda fórmula de la forma $\forall x \in \emptyset : P(x)$ es siempre verdadera.

En el contexto del Cálculo Proposicional, cuando un cuantificador se aplica a una variable x se dice que la variable está ligada por el citado cuantificador. Por otro lado, las fórmulas $\forall x\ P(x)$ y $\forall y\ P(y)$ son completamente equivalentes ya que las letras x e y no son más que símbolos para designar los objetos a los que se refiere el predicado P.

Los cuantificadores no sólo aparecen solos sino que pueden aparecer en cascada. Si $P(x, y, z)$, por ejemplo, es un predicado en las variables x, y y z, podemos tener expresiones del tipo

$$\forall x\ \exists y\ \exists z\ P(x, y, z).$$

Ejemplo 1.14 *Formalicemos la frase “Todo cura tiene una bicicleta”. Si contamos con los predicados $c(x)$ (x es cura), $b(y)$ (y es una bicicleta) y $P(x, y)$ (x posee y), la afirmación dada puede escribirse:*

$$\forall x\ (c(x) \rightarrow \exists y\ (b(y) \wedge P(x, y))).$$

Si C designa el conjunto de los curas y B el de las bicicletas, se podría escribir la fórmula (en la que los conectivos $\wedge$ y $\rightarrow$ no aparecen):

$$\forall x \in C\ ,\ \exists y \in B : P(x, y).$$

Consideremos, en el dominio de los números enteros, la fórmula: $\forall x\ (x + y = x)$. La variable x esta ligada por el cuantificador pero esta fórmula es un predicado en y; es decir, está parametrizada por y. Su valor de verdad no depende de x, sino del valor de y (la fórmula es verdadera si $y = 0$). En estos casos, se dice que la variable y es **libre**.

De forma obvia, negar la proposición $\forall x\ P(x)$ quiere decir que al menos un objeto x no verifica la propiedad descrita por el predicado $P(x)$ o, dicho de otro modo, que verifica $\neg P(x)$. Del mismo modo, negar la proposición $\exists x\ P(x)$ es lo mismo que afirmar que ningún objeto x verifica la propiedad $P(x)$, es decir, que todos los objetos x verifican la negación de $P(x)$. Se obtienen, de este modo, las reglas fundamentales para la negación de fórmulas con cuantificadores:

$$\neg\forall x\ P(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg P(x) \qquad\qquad \neg\exists x\ P(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg P(x)$$

En el caso de que tengamos una fórmula con cuantificadores en cascada, basta aplicar estas reglas de forma mecánica para obtener la negación de la misma. Por ejemplo, la fórmula

$$\neg\forall x \in A\ \exists y \in B\ \exists z \in C\ \forall t \in B : P(x, y, z, t)$$

es equivalente a la fórmula

$$\exists x \in A\ \forall y \in B\ \forall z \in C\ \exists t \in B : \neg P(x, y, z, t).$$

Cuando un predicado que depende de varias variables está cuantificado universal y existencialmente, el orden en el que aparecen los cuantificadores no es, en general, indiferente. Así, para un predicado $P(x, y)$, las fórmulas:

$$\forall x\ \exists y\ P(x, y) \quad (1)$$
$$\exists y\ \forall x\ P(x, y) \quad (2)$$

no son equivalentes. En la fórmula (1), el valor de y del que se afirma la existencia puede depender del valor de x, mientras que este no es el caso de la fórmula (2). La proposición (1) puede formalizar el enunciado "Toda cerradura posee una llave", mientras que la segunda fórmula formalizaría la existencia de una llave maestra.

Para finalizar con esta somera introducción a la lógica de predicados, examinamos ahora las propiedades de los cuantificadores en relación con los conectores $\wedge$ y $\vee$. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son predicados, las fórmulas

$$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \text{ y } (\forall x\ P(x)) \wedge (\forall x\ Q(x))$$

son claramente equivalentes. Por contra, las fórmulas

$$\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \text{ y } (\forall x\ P(x)) \vee (\forall x\ Q(x))$$

no lo son. La segunda implica la primera, pero la veracidad de la primera no nos permite deducir la segunda.

Con una simetría perfecta, las fórmulas

$$\exists x\ (P(x) \vee Q(x)) \text{ y } (\exists x\ P(x)) \vee (\exists x\ Q(x))$$

son equivalentes, mientras que sobre las fórmulas

$$\exists x\ (P(x) \wedge Q(x)) \text{ y } (\exists x\ P(x)) \wedge (\exists x\ Q(x))$$

todo lo que podemos afirmar es que la primera implica la segunda.

Ejemplo 1.15 *Sea x una variable que toma valores en el conjunto de las letras del alfabeto español y consideremos los predicados:*

$cons(x)$: x es una consonante
$voc(x)$: x es una vocal.

La fórmula $\forall x\ (cons(x) \vee voc(x))$ afirma que toda letra del alfabeto es una consonante o una vocal. En cambio, la fórmula $(\forall x\ cons(x)) \vee (\forall x\ voc(x))$ afirma que las letras del alfabetos o son todas consonantes o son todas vocales.
Por otro lado, la fórmula $(\exists x\ cons(x)) \wedge (\exists x\ voc(x)))$ afirma que en el alfabeto existen al menos una vocal y una consonante. Sin embargo la fórmula $\exists x\ (cons(x) \wedge voc(x))$ afirma la existencia de una letra que es, al mismo tiempo, consonante y vocal.

1.3.1. Del español a expresiones lógicas y viceversa (y 2)

En la Subsección 1.2.1 veíamos ejemplos de traducción de expresiones del lenguaje natural a formalizaciones lógicas y viceversa. Ahora daremos ejemplos de lo mismo pero dentro del contexto del Cálculo de Predicados.

Ejemplo 1.16 *Escribir mediante una expresión lógica la siguiente propiedad "La suma de dos enteros positivos es positiva".*

En este caso, podemos formalizar la propiedad como

$$\forall x \forall y\ (((x > 0) \wedge (y > 0)) \rightarrow (x + y > 0)),$$

donde el dominio para ambas variables es el conjunto de los números enteros.

Ejemplo 1.17 *Escribir mediante una expresión lógica la siguiente propiedad "Todo número real no nulo posee inverso".*

La propiedad dada puede expresarse como

$$\forall x((x \neq 0) \rightarrow \exists y(xy = 1)).$$

En este caso el dominio para la variable x es el conjunto de los números reales

Ejemplo 1.18 *Traducir a expresiones lógicas las siguientes frase "Todos los leones son fieros" , "Algunos leones no toman café" y "Algunos animales fieros no toman café".*

Si llamamos $P(x)$ al predicado "x es un león", $Q(x)$ al predicado "x es fiero" y $R(x)$ al predicado "x toma café", las tres frases se traducen en las siguientes expresiones lógicas:

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$
- $\exists x\ (P(x) \wedge \neg R(x))$
- $\exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$

Ejemplo 1.19 *Traducir al español el enunciado*

$$\forall x \forall y\ (((x < 0) \wedge (y > 0)) \rightarrow (xy < 0))$$

donde el dominio, para ambas variables, es el conjunto de los números reales.

Naturalmente, no hay una sola traducción posible. Una forma sucinta de traducir el enunciado podría ser " El producto de un número real positivo y de un número real negativo es un número real negativo".

Ejemplo 1.20 *Traducir al español el enunciado*

$$\forall x\ (C(x) \vee \exists y\ (C(y) \wedge F(x, y)))$$

donde $C(x)$ *es "x tiene ordenador",* $F(x, y)$ *es "x e y son amigos" y el dominio de ambas variables es el conjunto de alumnos de la Universidad de Alcalá.*

La traducción puede ser "Todo alumno de la Universidad de Alcalá tiene un ordenador o tiene un amigo que tiene un ordenador".

1.4. Métodos de demostración

En el estudio de las matemáticas aparecen dos cuestiones clave: ¿Cuándo es correcta una argumentación matemática? ¿Qué métodos pueden usarse para construir argumentos matemáticos correctos? Trataremos de dar respuesta a estas cuestiones en esta Sección.

1.4.1. Reglas de inferencia

Lo primero que hay que tener en cuenta a la hora de probar un resultado matemático son las reglas de inferencia que se pueden utilizar, es decir, cuáles son los pasos correctos que se pueden utilizar para llegar a una conclusión a partir de unas premisas. En matemáticas, buena parte de los resultados son de la forma: "bajo ciertas hipótesis, se tiene una cierta conclusión". En términos lógicos si llamamos $p_1, \ldots, p_n$ a las hipótesis y q a la conclusión, tendríamos que demostrar que

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow q$$

es una tautología. Habitualmente, esto se escribe en la forma

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

donde el símbolo $\therefore$ debe leerse como "por lo tanto". Las hipótesis se escriben en una columna y la conclusión bajo una barra horizontal. Siguiendo esta notación recogemos en la Tabla 1.5 las reglas de inferencia más usuales en la lógica proposicional, señalando en cada caso la tautología que le corresponde y su nombre.

Regla de inferencia	**Tautología**	**Nombre**
$\begin{array}{c} p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$	$p \to (p \vee q)$	Adición
$\begin{array}{c} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$	$(p \wedge q) \to p$	Simplificación
$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline \therefore\ p \wedge q \end{array}$	$((p) \wedge (q)) \to (p \wedge q)$	Conjunción
$\begin{array}{c} p \\ p \to q \\ \hline \therefore\ q \end{array}$	$(p \wedge (p \to q)) \to q$	Modus ponens
$\begin{array}{c} \neg q \\ p \to q \\ \hline \therefore\ \neg p \end{array}$	$(\neg q \wedge (p \to q)) \to \neg p$	Modus tollens
$\begin{array}{c} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore\ p \to r \end{array}$	$((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (p \to r)$	Silogismo
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \to q$	Silogismo disyuntivo
$\begin{array}{c} p \vee q \\ \neg p \vee r \\ \hline \therefore\ q \vee r \end{array}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \to (q \vee r)$	Resolución

Cuadro 1.5: Reglas de inferencia

Diremos que un argumento es válido si siempre que todas las hipótesis sean verdaderas, la conclusión también lo es. En consecuencia, mostrar que q se deduce de las hipótesis $p_1, p_2, \cdots, p_n$ es lo mismo que mostrar que la implicación

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \to q$$

es cierta. Determinar si un argumento es válido no consiste en verificar la veracidad de la consecuencia. Un argumento puede ser válido y la conclusión falsa si alguna de las hipótesis es falsa.
Cuando hay muchas premisas, normalmente son necesarias varias reglas de inferencia para demostrar que un argumento es válido. Ilustramos este hecho con los siguientes ejemplos que desarrollamos paso a paso, indicando en cada uno, explícitamente, la regla de inferencia utilizada.

Ejemplo 1.21 *Mostrar que las hipótesis "Está tarde está nublado y hace más frío que ayer", "Iremos a nadar sólo si no está nublado", "Si no vamos a nadar, daremos una vuelta en bicicleta" y "Si damos una vuelta en bicliceta, estaremos en casa al anochecer", llevan a concluir que "Estaremos en casa al anochecer".*

Llamemos p a la proposición "Esta tarde está nublado", q a la proposición "Hace más frío que ayer", r a la proposición "Iremos a nadar", s a la proposición "Daremos una vuelta en bicicleta" y t a la proposición "Estaremos en casa al anochecer". Con esta notación, tenemos las siguientes hipótesis: $p \wedge q$, $r \rightarrow \neg p$, $\neg r \rightarrow s$ y $s \rightarrow t$. La conclusión es t.
Construimos el argumento que muestra que las hipótesis llevan a la conclusión deseada:

Paso	**Regla de inferencia**
1. $p \wedge q$	Hipótesis
2. p	Simplificación y paso 1
3. $r \rightarrow \neg p$	Hipótesis
4. $\neg r$	Modus tollens y pasos 2 y 3
5. $\neg r \rightarrow s$	Hipótesis
6. s	Modus ponens y pasos 4 y 5
7. $s \rightarrow t$	Hipótesis
8. t	Modus ponens y pasos 6 y 7

Ejemplo 1.22 *Construir un argumento válido que muestre que las hipótesis "Si no llueve o no hay niebla, se celebra la regata y se lleva a cabo la demostración de salvamento marítimo", "Si se celebra la regata, se entrega el trofeo" y "El trofeo no se entregó", implican la conclusión "Llovió".*

Llamemos p a la proposición "Llueve", q a la proposición "Hay niebla", r a la proposición "Se celebra la regata", s a la proposición "Se lleva a cabo la demostración de salvamento marítimo" y t a la proposición "Se entrega el trofeo". Con esta notación, tenemos las siguientes hipótesis: $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (r \wedge s)$, $r \rightarrow t$ y $\neg t$. La conclusión, en este caso es p.
Construimos el argumento que muestra que las hipótesis llevan a la conclusión deseada:

Paso	**Regla de inferencia**
1. $(\neg p \vee \neg q) \to (r \wedge s)$	Hipótesis
2. $(r \wedge s) \to r$	Simplificación
3. $(\neg p \vee \neg q) \to r$	Silogismo y pasos 1 y 2
4. $r \to t$	Hipótesis
5. $(\neg p \vee \neg q) \to t$	Silogismo y pasos 3 y 4
6. $\neg t$	Hipótesis
7. $p \wedge q$	Modus tollens y pasos 5 y 6
8. p	Simplificación y paso 7

Ejemplo 1.23 *Estudiar la validez del siguiente argumento formalizándolo previamente:*

Si llueve, la tierra está verde.
Si estamos en Noviembre y hace frío entonces llueve.
La tierra está verde, pero estamos en Noviembre.
$\therefore$ *No hace frío.*

Para formalizar el argumento, llamaremos p a la proposición "llueve", q a "la tierra está verde", r a "estamos en Noviembre" y s a "hace frío". Con esta notación el argumento queda como sigue:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ (r \wedge s) \to p \\ \underline{q \wedge r} \\ \therefore \neg s \end{array}$$

Veamos si, a partir de las premisas, podemos concluir la tesis

Paso	**Regla de inferencia**
1. $p \to q$	Premisa
2. $(r \wedge s) \to p$	Premisa
3. $q \wedge r$	Premisa
4. $(r \wedge s) \to q$	Silogismo y 1 y 2
5. $\neg r \vee \neg s \vee q$	Observación 1.6 y paso 4
6. r	Simplificación y 3
7. $\neg s \vee q$	Silogismo disyuntivo y pasos 5 y 6

Parece que no se puede concluir la tesis a partir de las premisas. Sin embargo, lo hecho no demuestra la invalidez del argumento: sólo prueba que no hemos sido capaces de concluir la tesis a partir de las premisas. ¿Cómo demostrar que el argumento no es válido? Demostrando que existen valores de verdad para las variables que hacen que las premisas tengan valor de verdad 1, mientras que la tesis tiene valor de verdad 0. En este caso, si tomamos $p = q = r = s = 1$, las premisas toman valor de verdad 1, mientras la tesis toma valor de verdad 0. El argumento no es, por lo tanto, válido.

Resolución

En los últimos tiempos[2] se han desarrollado programas cuya tarea es la de automatizar el razonamiento y la prueba de Teoremas. Muchos de estos programas hacen uso extensivo de la regla de inferencia conocida como resolución. Recordemos que esta regla se corresponde con la tautología

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)] \rightarrow (q \vee r).$$

La disyunción final en la regla de resolución, $q \vee r$, se llama **resolvente**. Observemos, que si ponemos $q = r$, se obtiene la tautología

$$[(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)] \rightarrow q.$$

Asimismo, si ponemos $r = 0$, se obtiene $[(p \vee q) \wedge (\neg p)] \rightarrow q$, que es la tautología en la que está basada el silogismo disyuntivo.

La resolución juega un papel fundamental en lenguajes de programación basados en las reglas de la Lógica como Prolog en el que las reglas de resolución para el cálculo de predicados se aplican sistemáticamente. Para construir pruebas en Lógica Proposicional usando resolución como la única regla de inferencia, las hipótesis y las conclusiones han de expresarse en forma normal conjuntiva (es decir, como conjunciones de cláusulas). Apliquemos esto a dos casos concretos para tener una idea de cómo funciona este tipo de inferencias.

Ejemplo 1.24 *Mostrar que las hipótesis* $(p \wedge q) \vee r$ *y* $r \rightarrow s$ *implican la conclusión* $p \vee s$.

Podemos escribir las hipótesis como la conjunción de las cláusulas $c_1 = p \vee r$, $c_2 = q \vee r$ y $c_3 = \neg r \vee s$. Aplicando resolución a las cláusulas c_1 y c_3 se deduce $p \vee s$. Obsérvese, por otro lado, que aplicando resolución a las cláusulas c_2 y c_3 habríamos concluido $q \vee s$.

Ejemplo 1.25 *El método de refutación por resolución de Robinson, consiste en explotar la resolución de manera sistemática hasta la obtención de la cláusula vacía. Ilustramos esta técnica mediante un ejemplo:*

Probemos que la fórmula

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$$

es una tautología.

Nuestra hipótesis es, en este caso, la fórmula $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ que, una vez normalizada, nos proporciona la cláusula $c_1 = \neg p \vee \neg q \vee r$. La tesis es la fórmula $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$ cuya negación es $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow r)$. Normalizando esta última fórmula, se obtiene:

[2] La expresión "últimos tiempos" ha de entenderse en un sentido laxo. Por ejemplo, Prolog es un lenguaje de programación que se empezó a desarrollar en los años sesenta del siglo pasado.

$(\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg r$. Uniendo a la hipótesis la negación de la tesis, obtenemos un conjunto de cuatro cláusulas:

$$c_1 = \neg p \vee \neg q \vee r\ ,\ c_2 = \neg p \vee q\ ,\ c_3 = p\ ,\ c_4 = \neg r.$$

Combinando las cláusulas c_1 y c_2 se obtiene la resolvente $c_5 = \neg p \vee r$. Combinando c_5 y c_3, se llega a $c_6 = r$. Finalmente, la combinación de las cláusulas c_4 y c_6 produce la cláusula vacía como resolvente.

Reglas de inferencia en el Cálculo de Predicados

En la Tabla 1.5 recogíamos las principales reglas de inferencia cuando no teníamos cuantificadores. Ahora nos ocupamos de las reglas de inferencia que nos permiten desarrollar argumentaciones válidas en el Cálculo Proposicional. Naturalmente, las reglas de la Tabla 1.5 son aplicables en este contexto pero necesitamos reglas que nos permitan lidiar con los cuantificadores. Estas reglas de inferencia se utilizan muy habitualmente en matemáticas aunque, bien es cierto, la mayor parte de las veces sin ser mencionadas de manera explícita. Las reglas a las que nos referimos son cuatro:

- **Especificación universal**: esta regla de inferencia se usa para deducir que $P(c)$ es verdadera para cualquier elemento del dominio de la variable x si la proposición $\forall x\ P(x)$ es verdadera.

- **Generalización universal**: esta regla de inferencia establece que $\forall x\ P(x)$ es verdadera, si $P(c)$ es cierta para todos los elementos del dominio de la variable x. La generalización universal se usa para mostrar que $\forall x\ P(x)$ es cierta tomando un elemento arbitrario c del dominio y probando que $P(c)$ es cierta. El elemento seleccionado ha de ser, obviamente, un elemento genérico y no específico del dominio. Esta regla se utiliza mucho en matemática, aunque rara vez se explicita.

- **Especificación existencial**: es la regla que nos permite concluir que hay un elemento del dominio para la varibale x, digamos c, para el que $P(c)$ es cierta si sabemos cierta la proposición $\exists x\ P(x)$. En este caso, no se puede escoger arbitrariamente el elemento c; sólo podemos escoger elementos para los que $P(c)$ es cierta.

- **Generalización existencial**: es la regla de inferencia que se utiliza para concluir que $\exists x\ P(x)$ es verdadera si $P(c)$ es cierta para algún elemento c del dominio.

Al igual que hicimos con anterioridad con las reglas de inferencia en el Cálculo Proposicional, resumimos todas estas reglas en una Tabla. En este caso, las reglas de inferencia se encuentran recogidas en la Tabla 1.6.

Para ver cómo utilizar las reglas de la Tabla 1.6, proponemos los dos ejemplos que siguen.

Regla de inferencia	**Nombre**
$\dfrac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	Especificación universal
$\dfrac{P(c) \text{ para cualquier c}}{\therefore \forall x P(x)}$	Generalización universal
$\dfrac{\exists x P(x)}{\therefore P(c) \text{ para algún elemento } c}$	Especificación existencial
$\dfrac{P(c) \text{ para algún elemento } c}{\therefore \exists x\ P(x)}$	Generalización existencial

Cuadro 1.6: Reglas de inferencia con cuantificadores

Ejemplo 1.26 *Probar que las premisas "Todos los leones son fieros" y "Algunos leones no toman café" conducen a la conclusión "Algunos animales fieros no toman café".*

Construimos el argumento que nos permite llegar a la conclusión, señalando, en cada paso, las reglas de inferencia utilizadas. Para ello, utilizamos la notación y la formalización introducidas en el Ejemplo 1.18.

Paso	**Regla de inferencia**
1. $\exists x\ (P(x) \wedge \neg R(x))$	Premisa
2. $P(c) \wedge \neg R(c)$	Especificación existencial
3. $\forall x\ (P(x) \to Q(x))$	Premisa
4. $P(c) \to Q(c)$	Especificación universal
5. $P(c)$	Simplificación y paso 2
6. $\neg R(c)$	Simplificación y paso 2
7. $Q(c)$	Modus ponens y pasos 4 y 5
8. $Q(c) \wedge \neg R(c)$	Pasos 6 y 7
9. $\exists x\ (Q(x) \wedge \neg R(x))$	Generalización existencial y paso 8

Obsérvese que, en primer lugar, hemos especificado existencialmente la primera premisa ultilizando la variable c, es decir, hemos escogido un ejemplo c de entre los que verifican $P(x) \wedge \neg R(x)$. Una vez hecho esto, podemos especificar la segunda premisa en el mismo ejemplo ya que dicha premisa está cuantificada universalmente.

Ejemplo 1.27 *Probar la validez del siguiente argumento:*

$$\begin{array}{c} \forall x\ (A(x) \to \neg B(x)) \\ \forall x\ (A(x) \wedge C(x)) \\ \hline \therefore \forall x\ (C(x) \wedge \neg B(x)) \end{array}$$

Especificamos universalmente las dos premisas utilizando la misma variable y, que hará referencia al mismo elemento del dominio durante la demostración. Cuando lleguemos a demostrar para el elemento referenciado por y la consecuencia, podremos generalizar universalmente, dado que y proviene de especificaciones universales y, por ende, ha sido tomado como ejemplo cualquiera del dominio.

Paso	**Regla de inferencia**
1. $\forall x\ (A(x) \to \neg B(x))$	Premisa
2. $\forall x\ (A(x) \wedge C(x))$	Premisa
3. $A(y) \to \neg B(y)$	Especificación universal
4. $A(y) \wedge C(y)$	Especificación universal
5. $A(y)$	Simplificación y paso 4
6. $\neg B(y)$	Modus ponens y pasos 3 y 5
7. $C(y)$	Simplificación y paso 4
8. $C(y) \wedge \neg B(y)$	Pasos 6 y 7
9. $\forall x\ (A(x) \wedge \neg B(x))$	Generalización universal y paso 8

1.4.2. Métodos para probar Teoremas

Pruebas directas

La implicación $p \to q$ puede probarse mostrando que si p es cierta, entonces q también lo es. Una prueba de este tipo se conoce como prueba directa. Veamos un ejemplo sencillo.

Ejemplo 1.28 *Dar una prueba directa del resultado "Si n es un entero impar, entonces n^2 también lo es".*

Asumamos que la hipótesis de la implicación es cierta, es decir, que n es impar. Entonces, $n = 2k + 1$, donde k es un entero. Se sigue que $n^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Por lo tanto, n^2 es impar.

Pruebas indirectas

Puesto que la implicación $p \to q$ es equivalente a su contrapuesta $\neg q \to \neg p$, la implicación $p \to q$ puede probarse probando la implicación $\neg q \to \neg p$. A este tipo de demostración se le conoce con el nombre de prueba indirecta.

Ejemplo 1.29 *Dar una prueba indirecta del resultado "Si* $3n+2$ *es un entero impar, entonces n también lo es".*

Asumamos que la tesis de la implicación es falsa, es decir, que n es par. Entonces, $n = 2k$, para algún entero k. Se sigue que $3n+2 = 6k+2 = 2(3k+1)$. Por lo tanto, $3n + 2$ es par, es decir, la hipótesis de la implicación es falsa.

Pruebas por contradicción

Supongamos que podemos encontrar una contradicción q de tal forma que $\neg p \rightarrow q$ es cierta, esto es, que $\neg p \rightarrow 0$. En este caso, la proposición $\neg p$ debe ser falsa o, lo que es lo mismo, la proposición p es verdadera. Esta técnica se utiliza cuando una contradicción, del tipo $\neg r \wedge r$, puede encontrarse de tal forma que sea posible probar que la implicación $\neg p \rightarrow (\neg r \wedge r)$ es correcta. Una prueba de este tipo se dice prueba **por contradicción** o **por reducción al absurdo**. Se cree que una de las primeras pruebas conocidas en las que se usó esta técnica es la demostración de que $\sqrt{2}$ no es un número racional (véanse los apuntes de Fundamentos Matemáticos). Ya en los Elementos de Euclides (aprox. 300 a. de C.) se utilizó esta técnica para probar la existencia de infinitos números enteros primos. Usaremos este ejemplo para mostrar el uso de la reducción al absurdo. Necesitamos, sin embargo, como resultado previo el hecho de que todo número entero mayor que 1 es producto de números primos

Ejemplo 1.30 *Probar, mediante reducción al absurdo el siguiente Teorema:*

Teorema [Euclides, Libro IX de los *Elementos***]**: *Existen infinitos números primos.*

Empecemos negando la afirmación, es decir, supongamos que hay un número finito, n, de primos, digamos, $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Consideremos el número

$$N = p_1 p_2 \cdots p_n + 1.$$

Sabemos que N es producto de primos. Sea, pues, p un factor primo de N. Este primo ha de ser uno de los $p_1, p_2, \ldots, p_n$, digamos $p = p_i$. Entonces, p_i divide a $N - p_1 p_2 \cdots p_n$ que es igual a 1, con lo que hemos llegado a una contradicción, puesto que 1 no es divisible por ningún otro entero positivo.

Pruebas por casos

Para probar la implicación

$$(p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n) \rightarrow q$$

podemos usar la tautología

$$((p_1 \vee p_2 \vee \ldots p_n) \rightarrow q) \Leftrightarrow ((p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow q))$$

como regla de inferencia. Una prueba que utiliza esta tautología se dice prueba por casos.

Ejemplo 1.31 *Probar, mediante una prueba por casos, que $|xy| = |x||y|$ para cualesquiera números reales x e y:*

Sea p la proposición "x e y son números reales" y sea q "$|xy| = |x||y|$". Podemos desglosar la premisa p como disyunción de las cuatro siguientes

- p_1: "$x \geq 0 \wedge y \geq 0$"
- p_2: "$x \geq 0 \wedge y \leq 0$"
- p_3: "$x \leq 0 \wedge y \geq 0$"
- p_4: "$x \leq 0 \wedge y \leq 0$"

Para probar $p \to q$ debemos probar las cuatro implicaciones $p_1 \to q$, $p_2 \to q$, $p_3 \to q$ y $p_4 \to q$. Las cuatro implicaciones se siguen de las propiedades del orden en los reales con respecto al producto (véanse apuntes de Fundamentos Matemáticos).

Pruebas de equivalencia

Muchos resultados en matemáticas establecen que dos propiedades son equivalentes, es decir, pueden escribirse como en la forma $p \Leftrightarrow q$. Evidentemente, para probar un tal resultado se necesita probrar las dos implicaciones $p \to q$ y $q \to p$.

Pruebas de existencia

En los textos matemáticos suelen aparecer resultados que establecen la existencia de objetos de un cierto tipo que satisfacen un cierta propiedad. Estos resultados son, por lo tanto, proposiciones de la forma $\exists x \; P(x)$, donde P es un predicado. Existen varias formas de probar resultados de este tipo. A una prueba que consiste en mostrar un elemento que haga cierto el predicado se le dice constructiva. Es posible también demostrar que existe un elemento que hace cierto el predicado sin necesidad de mostrarlo. A este tipo de pruebas se les dice no constructivas.

Ejemplo 1.32 *(Una prueba de existencia constructiva). Probar que existe un entero positivo que puede escribirse como suma de dos cubos en dos formas distintas.*

Para probar el enunciado bastaría con mostrar que

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3.$$

La prueba del Teorema de Rolle vista en Fundamentos Matemáticos es un ejemplo típico de prueba existencial no constructiva.

Contraejemplos

Hemos visto en la Sección 1.3 que la negación de $\forall x\ P(x)$ es $\exists x\ \neg P(x)$. Así pues, si queremos demostrar que un resultado de la forma $\forall x\ P(x)$ no es cierto, bastará con exhibir un objeto del dominio de la variable x para el que no se verifique $P(x)$. A este elemento se le dice contraejemplo.

Ejemplo 1.33 *Probar que el enunciado "Si dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ no son continuas en $x = 0$, su producto no es continuo en $x = 0$" es falso.*

Para probar que el enunciado no es cierto mediante un contraejemplo, deberemos mostrar dos funciones discontinuas en $x = 0$ cuyo producto sea continuo en $x = 0$. Podemos tomar, por ejemplo, las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

1.5. Problemas propuestos

Problema 1.1 .- Sean p y q variables proposicionales que formalizan los enunciados:

$$p : \text{Él es rico} \qquad q : \text{Él es feliz}$$

Formalizar los siguientes enunciados utilizando las variables p y q.

1.- Él no es rico ni feliz.

2.- Ser pobre es ser infeliz.

3.- Uno nunca es infeliz si es rico.

4.- Él es pobre pero feliz.

5.- Él no puede ser rico y feliz.

6.- Si él es infeliz es pobre.

7.- Si él no es pobre y feliz, entonces es rico.

8.- Ser rico es lo mismo que ser feliz.

9.- Él es pobre o bien es rico e infeliz.

10.- Si él no es pobre, entonces es feliz.

Problema 1.2 .- Sean p, q y r variables proposicionales que formalizan los enunciados:

p : Tuviste gripe $\quad q$: Tomaste una aspirina $\quad r$: Aprobaste Estructuras Discretas

Escribir los enunciados representados por las siguientes fórmulas

$$p \to q \qquad \neg q \to r \qquad p \to \neg r$$

$$(p \vee q) \vee r \qquad (p \wedge q) \vee (\neg q \wedge r) \qquad (p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$$

Problema 1.3 .- Determinar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

1.- Si $5 < 3$, entonces $-3 < -5$.

2.- No es verdad que $2 + 2 = 4$ ó $3 + 3 = 7$.

3.- Es verdad que $2 + 2 \neq 4$ y $3 + 3 = 6$.

4.- Si $3 < 5$, entonces $-3 < -5$.

5.- No es verdad que si $2+2=4$ entonces $3+3=5$ ó $1+1=2$.

6.- Si $2+2=4$, entonces no es verdad que $2+1=5$ implica $5+5=8$.

7.- No es verdad que $2+7=9$ si, y sólo si, $2+1=5$ implica $5+5=8$.

Problema 1.4 .- Escribir la negación de cada uno de los enunciados siguientes de la manera más simple posible:

1.- Él es alto pero galán.

2.- Él no es rico ni feliz.

3.- Si caen los precios de las acciones, aumenta el desempleo.

4.- Ni Marcos ni Enrique son ricos.

5.- Tiene el cabello rubio u ojos azules.

6.- Es rubio si, y solamente si, tiene ojos azules.

7.- Si Marcos es rico, entonces, tanto Enrique como Ana son felices..

Problema 1.5 .- Construir las tablas de verdad de cada una de las siguientes fórmulas:

$a)$ $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ $b)$ $(q \rightarrow \neg p) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ $c)$ $(p \oplus q) \rightarrow (p \wedge q)$

$d)$ $(p \Leftrightarrow q) \oplus (\neg p \Leftrightarrow q)$ $e)$ $(p \oplus q) \rightarrow (p \oplus \neg r)$ $f)$ $p \oplus p$

$g)$ $(p \oplus q) \wedge (p \oplus \neg q)$ $h)$$(p \vee q) \wedge \neg r$ $i)$$(p \wedge q) \vee \neg r$

$j)$ $p \rightarrow (\neg q \vee r)$ $k)$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow r)$ $l)$ $(\neg p \Leftrightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

Problema 1.6 .- Probar todas las equivalencias lógicas de la Proposición 1.4.

Problema 1.7 .- Probar las equivalencias lógicas de la Proposición 1.10 sin utilizar para ello tablas de verdad

Problema 1.8 .- En este problema retomamos las isla habitada por caballeros y rufianes tal cual está descrita en el Ejemplo 1.2. Recordemos que los caballeros siempre dicen la verdad, mientras que los rufianes siempre mienten. Supongamos que nos encontramos en la isla con dos personas A y B. Determinar, si es posible, qué tipo de persona son A y B en los casos que siguen y, en el caso de que no sea posible, determinar qué conclusiones se pueden sacar (en cada uno de los casos, formalizar las afirmaciones de A y de B)

1.- A dice "Al menos uno de nosotros es un rufián" y B no dice nada.

2.- A dice "Los dos somos caballeros" y B dice "A es un rufián" .

3.- A dice "Yo soy un rufián o B es un caballero" y B no dice nada.

4.- Tanto A como B afirman ser caballeros.

5.- A dice "Los dos somos unos rufianes" y B no dice nada.

Problema 1.9 .- Reducir a forma normal conjuntiva cada una de las siguientes fórmulas

a) $(p \to q) \wedge (q \to r)$.

b) $(p \to q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \Leftrightarrow q)$.

c) $\neg p \to \neg q$.

d) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \to (r \vee q))$.

e) $((p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge s))) \vee (p \wedge q \wedge s)$.

f) $(p \vee q) \Leftrightarrow \neg t \wedge r$.

g) $(p \oplus q) \to \neg(\neg q \to r)$.

h) $((p \wedge q) \vee ((p \vee r) \to q)) \to (q \to r)$

i) $(p \to q) \Leftrightarrow (p \to (r \vee q))$

j) $((p \vee q) \wedge (p \vee (r \wedge s))) \vee (p \vee q \wedge s)$

Problema 1.10 .- Justificar la siguiente afirmación: toda fórmula es equivalente a una disyunción de conjunciones de literales.

Problema 1.11 .- Una colección de operadores lógicos se dice **funcionalmente completa** si toda fórmula es lógicamente equivalente a una fórmula que sólo contenga esos operadores lógicos. Probar que:

1.- Los conectivos $\neg$, $\vee$ y $\wedge$ forman una colección de operadores funcionalmente completa.

2.- Ídem para los conectivos $\neg$ y $\vee$.

3.- Ídem para los conectivos $\neg$ y $\wedge$.

Problema 1.12 .- En este problema trabajaremos con los conectivos $NAND$ y NOR. La proposición $p\ NAND\ q$ es verdadera cuando p, q o ambos son falsos y es falsa cuando tanto p como q son verdaderos. La proposición $p\ NOR\ q$ es verdadera si los dos operandos son falsos y falsa en el resto de los casos. Las proposiciones $p\ NAND\ q$ y $p\ NOR\ q$ se denotan por $p|q$ y $p \downarrow q$, respectivamente. (El conectivo $|$ se suele llamar barra de Sheffer y $\downarrow$ flecha de Peirce). Se pide:

1.- Construir la tabla de verdad de $|$ y probar que $p|q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \wedge q)$.

2.- Construir la tabla de verdad de $\downarrow$ y probar que $p \downarrow q$ es lógicamente equivalente a $\neg(p \vee q)$.

3.- Probar que $\{\downarrow\}$ es una familia de operadores funcionalmente completa.

4.- Encontrar una fórmula equivalente a $p \to q$ usando, únicamente el conectivo $\downarrow$.

5.- Probar que $\{|\}$ es una familia de operadores funcionalmente completa.

6.- Probar que el conectivo $|$ es conmutativo pero no asociativo.

Problema 1.13 .- Una fórmula (o conjunto de fórmulas) se dice **satisfacible** si existe una asignación de valores de verdad para las variables en la fórmula (o en el conjunto de fórmulas) que hace que la misma sea verdadera. Explicar cómo un algoritmo que determine si una fórmula es satisfacible puede ser utilizado para determinar si una fórmula es una tautología.

Problema 1.14 .- Estudiar si las siguientes fórmulas o conjunto de fórmulas son satisfacibles:

1.- $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee \neg r \vee \neg s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg s) \wedge (p \vee q \vee \neg s)$

2.- $\{p \to q, \neg q\}$

3.- $\{p \to q, \neg q \vee r, p \wedge \neg r\}$

4.- $\{p \vee q, \neg r \vee \neg s, (\neg p \to q) \to (r \wedge s)\}$

5.- $\{\neg p, q \vee r, p \to (q \wedge r), q \to (r \wedge p), r \to (p \wedge q)\}$

Problema 1.15 .- Usar cuantificadores y predicados con más de una variable para expresar cada uno de los siguientes enunciados:

1.- Todo estudiante de Informática debe seguir un curso de Estructuras Discretas

2.- Al menos un estudiante de esta clase posee un ordenador portátil.

3.- Cada estudiante de esta clase ha seguido al menos un curso de inglés.

4.- Hay un estudiante en esta clase que ha seguido al menos un curso de inglés.

5.- Todos los estudiantes de esta clase han estado en todos los edificios del campus.

6.- Todo estudiante de esta clase ha estado en al menos uno de los edificios del campus.

Problema 1.16 .- Expresar cada una de las especificaciones siguientes usando predicados, cuantificadores y conectivos lógicos:

1.- Todo usuario sólo tiene acceso a una única bandeja de correo.

2.- Hay un proceso que sigue en funcionamiento durante todas las condiciones de error solo si el núcleo trabaja adecuadamente.

3.- Todos los usuarios del campus tienen acceso a cualquier sitio web cuya extensión sea .es.

Problema 1.17 .- Determinar si cada uno de los siguientes argumentos es válido. En el caso de respuesta afirmativa poner de manifiesto las reglas de inferencia utilizadas:

1.- Todos los estudiantes del grado en Ingeniería Informática entienden la Lógica Proposicional. Javier es estudiante del grado en Ingeniería informática. Por lo tanto, Javier entiende la Lógica Proposicional.

2.- Todo estudiante de Informática debe seguir un curso de Estructuras Discretas. Marta sigue un curso de Estructuras Discretas. Por lo tanto, Marta es estudiante de Informática.

3.- A Javier le gustan todas las películas americanas. A Javier le gusta *Los cuatrocientos golpes*. En consecuencia, *Los cuatrocientos golpes* es una película americana.

4.- Todo el que come cereales a diario está sano. Alicia no está sana. Por lo tanto, Alicia no come cereales todos los días.

5.- Si n es un número real tal que $n > 1$, entonces $n^2 > 1$. Supongamos que $n^2 > 1$. Entonces, $n > 1$.

6.- El número $\log 3$ es irracional si no es razón de dos enteros. Por lo tanto, dado que $\log 3$ no puede escribirse en la forma a/b con a y b enteros, es irracional.

7.- Si n es un número real tal que $n > 2$, entonces $n^2 > 4$. Supongamos que $n \leq 2$. Entonces, $n^2 \leq 4$.

Problema 1.18 .- ¿Qué está mal en cada uno de los dos razonamientos siguientes?

1.- Sea $H(x)$ el enunciado "x es feliz."Dada la premisa $\exists x H(x)$, se concluye $H(Lola)$. Por lo tanto, Lola es feliz.

2.- Sea $S(x,y)$ el enunciado "x es más bajo que y."Dada la premisa $\exists s S(s, Juan)$, se deduce que $S(Juan, Juan)$. Si generalizamos existencialmente, se deduce $\exists x S(x,x)$, es decir, que hay alguien más bajo que sí mismo.

Problema 1.19 .- Determinar cuáles de las siguientes fórmulas son tautologías, contradicciones o satisfacibles pero no tautologías

$$\begin{array}{ll} \forall x(P(x) \vee \neg P(x)) & \exists x(P(x) \wedge \neg P(x)) \\ \forall x P(x) \vee \forall x \neg P(x) & \exists x P(x) \vee \exists x \neg P(x) \\ \forall x P(x) \wedge \exists x \neg P(x) & \forall x P(x) \rightarrow \exists x P(x) \end{array}$$

Problema 1.20 .- Demostrar que los siguientes argumentos son válidos:

$$\begin{array}{l} \neg p \rightarrow q \\ \neg(p \vee r) \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg r \rightarrow p \\ \hline \therefore r \vee q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg(q \vee t) \\ (s \rightarrow r) \vee (s \rightarrow t) \\ r \rightarrow (p \wedge q) \\ \hline \therefore \neg s \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee t \\ s \Leftrightarrow t \\ s \Leftrightarrow \neg w \\ \hline \therefore w \rightarrow p \end{array}$$

Problema 1.21 .- Demostrar que los siguientes argumentos no son válidos:

$$\begin{array}{l} p \vee r \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow (r \vee q) \\ \neg p \rightarrow \neg s \\ s \\ \hline \therefore r \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ (q \wedge r) \rightarrow p \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

Problema 1.22 .- Estudiar si los siguientes argumentos son válidos o no:

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \rightarrow \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} (p \wedge q) \rightarrow r \\ \neg p \rightarrow q \\ \hline \therefore r \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \neg(q \wedge r) \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ s \rightarrow r \\ \hline \therefore (p \vee s) \rightarrow r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg p \vee q \\ q \rightarrow r \\ p \rightarrow \neg r \\ \hline \therefore \neg p \end{array} \qquad \begin{array}{l} r \\ p \\ \hline \therefore (q \rightarrow p) \wedge (s \rightarrow r) \end{array} \qquad \begin{array}{l} \neg p \wedge q \\ \neg p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ (q \wedge r) \rightarrow s \\ \hline \therefore s \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \neg(q \vee t) \\ (\neg s \rightarrow r) \vee (s \rightarrow t) \\ r \rightarrow (p \wedge q) \\ \hline \therefore \neg r \end{array}$$

Problema 1.23 .- Formalizar y estudiar la corrección de los siguiente argumentos:

1. Si tomo el tren y el tren llega tarde, faltaré a mi cita.
   Si falto a mi cita y me siento desmoralizado, no iré a casa.
   Si no consigo el empleo, me sentiré desmoralizado y me iré a casa.
   ___
   $\therefore$ Si tomo el tren y éste llega tarde, conseguiré el empleo.

2. Si llueve, la tierra está verde.
   Si estamos en noviembre y hace frío entonces llueve.
   La tierra está verde, pero estamos en noviembre.
   ___
   $\therefore$ No hace frío.

3. El mayordomo o el cocinero o el chófer asesinó al barón.
   Si el cocinero asesinó al barón, entonces el cocido estaba envenenado
   Si el chófer assesinó al barón, había una bomba en el coche.
   El cocido no estaba envenenado y el mayordomo no asesinó al barón.
   ___
   $\therefore$ Había una bomba en el coche.

Problema 1.24 .- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior con los razonamientos siguientes:

1. *Si el ejército marcha contra el enemigo, tiene posibilidades de éxito; y arrasará la capital enemiga, si tiene posibilidades de éxito. O el ejército marcha contra el enemigo, o se repliega rápidamente. Si se repliega rápidamente, el enemigo atacará su retaguardia; y perderá la guerra, si el enemigo ataca su retaguardia. Por tanto, si no arrasa la capital enemiga, perderá la guerra.*

2. *Si la tormenta continúa o anochece, nos quedaremos a cenar o a dormir; si nos quedamos a cenar o a dormir no iremos mañana al concierto; pero sí iremos mañana al concierto. Así pues, la tormenta continúa.*

3. *Si un triángulo tiene tres ángulos, un cuadrado tiene cuatro ángulos rectos. Un triángulo tiene tres ángulos y su suma vale dos ángulos rectos. Si los rombos tienen cuatro ángulos rectos, los cuadrados no tienen cuatro ángulos rectos. Por tanto, los rombos no tienen cuatro ángulos rectos.*

4. *Si no es cierto que se puede ser rico y feliz a la vez, entonces la vida está llena de frustraciones y no es un camino de rosas. Si se es feliz, no se puede tener todo. Por consiguiente, la vida está llena de frustraciones.*

Problema 1.25 .- Formalizar y estudiar la corrección del siguiente argumento indicando en cada paso las reglas de inferencia utilizadas.
Se sabe que

a) *Los animales con pelo o que dan leche son mamíferos.*

b) *Los mamíferos que tienen pezuñas o que rumian son ungulados.*

c) *Los ungulados de cuello largo son jirafas*

d) *Los ungulados con rayas negras son cebras.*

Se observa un animal que tiene pelos, pezuñas y rayas negras. Por sonsiguiente, se concluye que el animal es una cebra.

Problema 1.26 .- Construir una refutación por resolución (véase Ejemplo 1.25), para probar que la fórmula $p \to r$ se deduce de las fórmulas $p \to q$ y $q \to r$.

Problema 1.27 .- Hacer lo mismo que en el ejercicio anterior para probar que las premisas $p \to (q \to r)$, $(r \wedge s) \to t$ y $\neg w \to (s \wedge \neg t)$ conducen a la conclusión $p \to (q \to w)$.

Problema 1.28 .- Construir una prueba de refutación por resolución para demostrar que las premisas $p \to (r \wedge s)$, $r \to (t \vee v)$, $t \to \neg p$ y $(v \vee r) \to \neg s$ conducen a $\neg p$.

Problema 1.29 .- Determinar si los siguientes argumentos son válidos:

$$\begin{array}{l} \exists x[A(x) \to \neg B(x)] \\ \exists x[A(x) \wedge C(x)] \\ \hline \therefore \exists x[C(x) \wedge \neg B(x)] \end{array} \qquad \begin{array}{l} \forall x \forall y[P(x) \to R(x,y)] \\ \exists x \exists y[\neg(\neg Q(y) \vee R(x,y)))] \\ \forall x \exists y[P(x) \vee S(x,y)] \\ \hline \therefore \exists x \exists y S(x,y) \end{array}$$

Problema 1.30 .- Probar que el cuadrado de un número par es par usando:

a) una prueba directa b) una prueba indirecta
c) una prueba por reducción al absurdo

Problema 1.31 .- Probar que el producto de dos números impares es par.

Problema 1.32 .- Probar o refutar la siguiente afirmación: el producto de dos números irracionales es irracional.

Problema 1.33 .- Probar que al menos 10 días de entre cualesquiera 64 días caen en el mismo día de la semana.

Problema 1.34 .- Usar una prueba por casos para probar que para cualesquiera números reales x e y, $\text{máx}(x,y) + \text{mín}(x,y) = x + y$.

Parte II

Combinatoria

Capítulo 2

Técnicas básicas de recuento

2.1. Aplicaciones y cardinal de un conjunto

2.1.1. Aplicaciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas

Antes de definir de manera precisa el concepto de aplicación, estudiemos un ejemplo ilustrativo. En tiempos que parecen ya muy lejanos (cuando la "mili" era obligatoria), todos los mozos de una quinta tenían que pasar por un proceso que incluía, entre otras cosas, la medida de su talla. Este proceso, asociar a cada mozo un número (su talla en centímetros) es un ejemplo típico de aplicación. Dado un conjunto, en este caso los mozos del reemplazo, a cada uno de ellos se le asocia un **único** elemento de otro conjunto (en este caso, un número natural).

Definición 2.1 *Dados conjuntos, A y B, una aplicación f de A en B (escrito $f : A \to B$) asigna a cada elemento $a \in A$ un único elemento $b \in B$. Al conjunto A se le dice* **dominio** *y a B* **rango***. Dos funciones son iguales si poseen el mismo dominio y toman igual valor para elementos iguales del dominio. Si $S \subset A$, podemos definir una aplicación de S en B, llamada restricción de f a S y denotada por $f|_S$, que a cada elemento de S le asigna el mismo valor que f.*

Ejemplo 2.2 *Ejemplos de aplicaciones:*

- La aplicación que a cada ciudadano español le asigna un número (el DNI).
- La aplicación talla estudiada anteriormente.
- $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dado por $f(n) = 2n$. Esta última es una forma típica de expresar una aplicación: decir cuál es la imagen de un elemento genérico del dominio.

Definición 2.3 (Composición de aplicaciones) *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ dos aplicaciones. La composición de las aplicaciones f y g, denotada por $g \circ f$, es una aplicación de A en C dada por*

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)).$$

Dada una aplicación $f : A \to B$ se denomina conjunto imagen al subconjunto de B definido por:

$$\{b \in B : b = f(a) \text{ para algún } a \in A\},$$

y a menudo se denota por Imf. Por otro lado, si $T \subset B$ la imagen inversa de T por f es el conjunto

$$\{a \in A : f(a) \in T\}$$

que, habitualmente se denota por $f^{-1}(T)$. Si T está compuesto por un único elemento, $T = \{b\}$, se suelen omitir las llaves y se escribe $f^{-1}(b)$.

Proposición 2.4 *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Se puede ver que:*

- *para $S \subset A$, $S \subset f^{-1}(f(S))$;*
- *para $T \subset B$, $f(f^{-1}(T)) \subset T$.*

Asimismo, si $\{T_i : i \in I\}$ es una familia de subconjuntos de B, se verifica

- $f^{-1}(\bigcup_{i \in I} T_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(T_i)$
- $f^{-1}(\bigcap_{i \in I} T_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(T_i)$

Nota: El recíproco a las dos primeras afirmaciones del resultado anterior no es, en general, cierto. Por ejemplo, sean J el conjunto de jugadores de la liga inglesa en la temporada actual y f la aplicación que a cada jugador le asocia su altura. Si S es el conjunto formado únicamente por Benayoun ($S = \{\text{Benayoun}\}$), puesto que su altura es de 178 cm, $f^{-1}(f(S))$ es el conjunto de todos los jugadores que miden 178 cm. Entre ellos estará el propio Benayoun, pero también muchos otros. ¿Por qué no se da la igualdad? Simplemente, porque hay más jugadores, aparte de Benayoun, que miden 178 cm.

Consideramos ahora la aplicación $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n) = 2 * n$ y sea T el conjunto de números naturales múltiplos de 3, es decir, $T = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, \ldots\}$. En este caso, $f^{-1}(T) = T$ y $f(f^{-1}(T))$ es el conjunto de naturales múltiplos de 6. En este caso, la igualdad no es cierta porque, naturalmente, no todos los múltiplos de 3 son pares.

En la proposición anterior, la igualdad en las dos primeras afirmaciones se satisface siempre sólo para algunos tipos particulares de aplicaciones. Estudiemos, ahora, estas aplicaciones.

Definición 2.5 (Aplicaciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas) *Sea $f : A \to B$ una aplicación.*

- *f se dice* **inyectiva** *si*

$$\text{para todo } \ a, a' \in A \ \text{ con } \ f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'.$$

- *f se dice* **sobreyectiva** *si*

$$\text{para todo } \ b \in B, \ \ b = f(a) \ \text{ para algún } \ a \in A.$$

- *f se dice* **biyectiva** *si es inyectiva y sobreyectiva.*

Ejercicio 2.6 *Sea $f : A \to B$ una aplicación. Probar que:*

- *si f es inyectiva y $S \subset A$, $S = f^{-1}(f(S))$ y que*
- *si f es sobreyectiva y $T \subset B$, $f(f^{-1}(T)) = T$*

De las definiciones anteriores se deduce que para todo conjunto A la llamada aplicación identidad, I_A, definida por $I_A(a) = a$, es biyectiva.

Hasta este momento, hemos definido una operación entre funciones (la composición) y de entre todas las funciones hemos distinguido algunas especiales (las inyectivas, sobreyectivas y biyectivas). ¿Cómo se comporta la composición frente a estas aplicaciones especiales? La respuesta a esta pregunta se encuentra en los siguientes resultados.

Proposición 2.7 *Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ aplicaciones. Entonces,*

- *f y g inyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es inyectiva;*
- *f y g sobreyectivas $\Longrightarrow g \circ f$ es sobreyectiva*
- *$g \circ f$ inyectiva $\Longrightarrow f$ es inyectiva;*
- *$g \circ f$ sobreyectiva $\Longrightarrow g$ es sobreyectiva.*

Teorema 2.8 *Sea $f : A \to B$ una aplicación y $A \neq \emptyset$.*

I) *f es inyectiva si, y sólo si, existe una aplicación $g : B \to A$ tal que $g \circ f = I_A$.*

II) *f es sobreyectiva si, y sólo si, existe una aplicación $h : B \to A$ tal que $f \circ h = I_B$.*

Demostración.– 1.- Supongamos, primero que existe g tal que $g \circ f = I_A$. Como I_A es inyectiva, por lo anterior, la existencia de g garantiza la inyectividad de A.

Supongamos, ahora que f es inyectiva. Entonces, para cada $b \in f(A)$, existe un único a tal que $f(a) = b$. Sea ahora a_0 un elemento cualquiera de A. La aplicación

$$g(x) = \begin{cases} a, & \text{si } b \in f(A) \text{ y } f(a) = b \\ a_0, & \text{si } b \notin f(A) \end{cases}$$

verifica $g \circ f = I_A$.

2.- Si existe h tal que $f \circ h = I_B$, puesto que I_B es sobreyectiva, la Proposición anterior me garantiza que f es sobreyectiva.

Supongamos ahora que f es sobreyectiva. Eso quiere decir que para cualquier $b \in B$, $f^{-1}(b) \subset A$ no es vacío. En consecuencia podemos elegir $a_b \in f^{-1}(b)$. La aplicación $h(b) = a_b$ verifica la tesis del enunciado ■

Nota. En la prueba del Teorema anterior hemos dado por hecho que en cualquier conjunto no vacío podemos escoger siempre un elemento. Aunque no entraremos en ello, los axiomas típicos de la teoría de conjuntos no nos garantizan que podamos hacerlo. En consecuencia, se suele asumir que esto siempre es posible constituyéndose entonces como un axioma más. Existen distintas versiones de este axioma que se conoce como **Axioma de elección**.

La aplicación g del Teorema anterior se suele llamar inversa a izquierda de f y la h inversa a derecha de f. Si una aplicación $f : A \to B$ posee una inversa a izquierda g y una inversa a derecha h, se tiene:

$$g = g \circ I_B = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = I_A \circ h = h$$

y la aplicación $g = h$ se dice inversa a derecha e izquierda de f. Asimismo, este argumento prueba que si existe inversa a derecha e izquierda de f ésta es única. Ahora, juntando los dos apartados del Teorema y las consideraciones previas, se tiene que si $f : A \to B$ es una aplicación, entonces

$$f \text{ es biyectiva} \iff f \text{ posee inversa a izquierda y derecha.}$$

La única aplicación que es inversa a derecha e izquierda de f se denota por f^{-1} y se llama inversa de f.

2.1.2. Cardinal de un conjunto

Supongamos que tomamos el tren en el apeadero del Campus para trasladarnos a la estación de Atocha. ¿Cómo contamos el número de paradas entre una y otra estación? La primera vez que se para el tren es en Alcalá y a esa parada le asignamos el número natural 1. La siguiente parada es La Garena a la que le asignamos el número 2. De esta manera continuamos hasta llegar a la estación de Atocha que será la undécima y a la que, lógicamente, le asignaremos el número 11. La próxima vez que queramos hacer este recorrido no necesitaremos fijarnos en las paradas; simplemente, tendremos que ir contando el número de paradas hasta once y en ese momento habremos de descender del tren. En términos matemáticos, ¿qué es lo que hemos hecho? Sencillamente, establecer una biyección entre el conjunto de paradas y el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

El supuesto anterior es un ejemplo del hecho siguiente: contar es construir una aplicación biyectiva. Dicho de otra manera, afirmar que un conjunto tiene n elementos es tanto como decir que existe una biyección entre dicho conjunto y $\{1, 2, \ldots, n\}$. Dando otra vuelta de tuerca, contar es, necesariamente, introducir un orden en un conjunto finito.

A través de los argumentos anteriores, podemos asegurar que dos conjuntos finitos tienen el mismo número de elementos si, y sólo si, existe una biyección entre ambos. Al número de elementos de un conjunto finito A se le llama cardinal de A y se escribe $|A|$ o $\#A$. Si hablamos de conjuntos finitos y de su cardinal, es fácil establecer algunas propiedades básicas.

Proposición 2.9 *Sean A y B conjuntos finitos.*

1.- Si $A \subset B$ y $A \neq B$, $|A| < |B|$. Por lo tanto, no existe ninguna biyección entre A y B, es decir, si A es finito, no existe ningún subconjunto propio con el mismo número de elementos que A.

2.- Si A y B son disjuntos, $|A \bigcup B| = |A| + |B|$.

3.- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

4.- Si $f : A \to B$ es inyectiva, $|A| \leq |B|$

5.- Si $f : A \to B$ es sobreyectiva, $|A| \geq |B|$

2.2. Principios básicos de recuento

2.2.1. Principios de la suma y del producto

De las propiedades concernientes al cardinal de conjuntos finitos vistas en la Proposición 2.9, la segunda y la tercera reciben, en muchos textos, el nombre de Principio de la suma y Principio del producto, respectivamente.

Principio del producto

La propiedad $|A \times B| = |A| \cdot |B|$ (referida a cardinales finitos), como hemos dicho, se conoce como Principio del producto. Esto es así porque la podemos parafrasear como sigue:

Si un proceso se puede dividir en una sucesión de dos tareas y si hay n_1 maneras de realizar la primera tarea y n_2 formas de llevar a cabo la segunda, entonces hay $n_1 \cdot n_2$ formas de llevar a cabo el proceso final.

Observación 2.10 *La propiedad referida al producto cartesiano de dos conjuntos es fácilmente extensible si consideramos el producto cartesiano de n conjuntos. En ese caso, si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos, se tiene que*

$$|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_n|.$$

Veamos algunos de ejemplos de aplicación del Principio del producto.

Ejemplo 2.11 *¿Cuántas aplicaciones de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos existen?*

Una función se corresponde con una elección de una imagen para cada uno de los elementos del dominio. Como tenemos n posibles imágenes para cada uno de los elementos del dominio, el número total de aplicaciones es n^m.

Ejemplo 2.12 *¿Cuántas aplicaciones inyectivas de un conjunto de m elementos en un conjunto de n elementos existen?*

Notemos, en primer lugar, que para que existan aplicaciones inyectivas, se debe tener $m \leq n$. Supongamos que los elementos del dominio son $\{a_1, \ldots, a_m\}$. Existen n formas distintas de escoger una imagen para a_1. Una vez elegida la imagen de a_1, el número de posibles imágenes para a_2 es $n-1$. Siguiendo este razonamiento, se llega a que el número de aplicaciones inyectivas de un conjunto de m elementos en uno de n es $n(n-1)\cdots(n-m+1)$, es decir, $\dfrac{n!}{(n-m)!}$. Obsérvese que si $n = m$, inyectiva es lo mismo que biyectiva, de donde se deduce que el número de aplicaciones biyectivas de un conjunto en de n en otro con el mismo cardinal es $n!$.

Ejemplo 2.13 *Utilizar el principio del producto para mostrar que el número de subconjuntos distintos de un conjunto finito S es igual a $2^{|S|}$.*

Pongamos que $|S| = n$ y que listamos de una manera arbitraria los elementos del conjunto S como $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Entonces, existe una biyección entre los subconjuntos de S y las cadenas binarias de longitud n: un subconjunto de S se corresponde con la cadena que tiene 1 en el lugar i si a_i pertenece al subconjunto y 0 en caso contrario. (Así, el conjunto vacío se corresponde con la cadena con todos sus elementos cero). Aplicando el principio del producto, se deduce que el número de cadenas de ceros y unos de longitud n es 2^n. Luego el número de subconjuntos de S es 2^n.

Principio de la suma

Si la tercera propiedad de la Proposición 2.9 se conoce como Principio del producto, la segunda se conoce como Principio de la suma. Al igual que con el principio del producto, la segunda propiedad de la Proposición 2.9 puede extenderse a más de dos conjuntos. Así si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos disjuntos dos a dos, se tiene

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|.$$

Veamos un ejemplo en el que combinaremos los principios de la suma y del producto.

Ejemplo 2.14 *Cada usuario de un servidor posee una contraseña de seis a ocho caracteres de longitud, donde cada carácter debe ser una letra minúscula o un dígito. Cada contraseña, además ha de contener al menos un dígito. ¿Cuántos posibles contraseñas hay?*

Sea C el conjunto de todas las posible contraseñas. Aplicando el principio de la suma se tendrá

$$|C| = |C_6| + |C_7| + |C_8|,$$

donde C_i representa el conjunto de las contraseñas de longitud i (para $i = 6, 7, 8$). Ahora calculamos $|C_6|$, $|C_7|$ y $|C_8|$. Para obtener $|C_6|$ calculamos el conjunto de contraseñas con seis caracteres y le restamos aquellas sin ningún dígito. Haciendo esto, se tiene

$$|C_6| = 37^6 - 27^6 = 2.178.305.920$$

Del mismo modo podemos calcular $|C_7| = 37^7 - 27^7$=84.471.523.930 y $|C_8| = 37^8 - 27^8$=3.230.049.917.440. El número total de contraseñas es

$$|C| = |C_6| + |C_7| + |C_8| = 3.316.699.747.290$$

2.2.2. Principio del palomar

El principio del palomar[1] establece que si hay más palomas que palomares, entonces hay un palomar que debe contener al menos dos palomas. En otras palabras,

si $k + 1$ o más objetos han de distribuirse en k cajas, al menos una de las cajas recibirá como mínimo dos objetos.

Existen múltiples aplicaciones de este principio, como por ejemplo:

1.- En un grupo de 367 personas dos cumplen años el mismo día.

[1]Este principio también se conoce como principio de las cajas de Dirichlet.

2.- En un conjunto de 20 personas nacidas en España, al menos dos han nacido en la misma Comunidad Autónoma.

También hay otras aplicaciones más sutiles del principio.

Ejemplo 2.15 *Mostrar que todo entero positivo n posee un múltiplo que en su desarrollo decimal sólo contiene unos y ceros.*

Consideremos los enteros 1, 11, 111, ..., $11\ldots1$ (donde el último es el entero con $n+1$ unos en su expansión decimal). De entre estos $n+1$, aplicando el principio del palomar, dos deben tener el mismo resto al dividirlos por n. Su diferencia es un múltiplo de n y sólo contiene unos y ceros en su desarrollo decimal.

El principio del palomar puede generalizarse de la siguiente manera:

Si N objetos han de distribuirse en k cajas, al menos una de las cajas recibirá como mínimo $\lceil N/k \rceil$ objetos.

Ejemplo 2.16 *¿Cuántas cartas como mínimo debo elegir de una baraja española para garantizar que elijo tres del mismo palo?*

En este caso, las cajas de las que habla el principio del palomar se identifican con los palos de la baraja. Por lo tanto debemos ver quién es el número natural N más pequeño que verifica $\lceil N/4 \rceil \geq 3$. Este es $2 \cdot 4 + 1 = 9$.

Ejemplo 2.17 *Probar que de entre $n+1$ enteros positivos menores o iguales que $2n$ debe haber uno que divida a otro.*

Escribimos los enteros $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ como una potencia de dos por un número impar, es decir, $a_i = 2^{k_i} q_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n+1$ donde k_i es un entero no negativo. Los enteros $q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$ son todos impares y menores o iguales que $2n$. Como son $n+1$, aplicando el principio del palomar, al menos dos de entre ellos deben ser iguales. Supongamos que $q_s = q_r$ y escribimos $q = q_r = q_s$. Tenemos, entonces, $a_r = 2^{k_r} q$ y $a_s = 2^{k_s} q$. Si $k_r > k_s$, a_s divide a a_r, mientras que si $k_s > k_r$, a_r divide a a_s.

2.3. Variaciones, permutaciones y combinaciones

2.3.1. Variaciones y permutaciones

Supongamos que se decide organizar una cena para doce comensales distribuidos en dos mesas: una para cinco personas y otra para siete. Supongamos además que, para evitar problemas, hemos de colocar una tarjeta con el nombre de cada comensal en el asiento que le corresponderá. ¿De cuántas formas posibles podemos ordenar a los comensales? A esta pregunta se puede responder, por lo menos, de dos formas distintas. En la primera de ellas, en la que haremos uso del principio del producto, aparecen de forma natural los conceptos de variación y de permutación, mientras que en la segunda forma sólo haremos uso del concepto de permutación. Veamos, pues, cuáles son estas dos formas de encarar el problema:

1.- Haciendo uso del principio del producto, primero elegimos a cinco comensales y distribuimos sus nombres en la mesa de cinco. Después, colocamos los nombres de los siete restantes en la otra mesa. Multiplicando las formas en las que se puede hacer la primera tarea por las formas en las que se puede llevar a cabo la segunda, calcularemos el número total de formas posibles de colocar a los comensales. La primera tarea consiste en escoger cinco de los doce comensales y adjudicarles un número entre 1 y 5, es decir, construir una aplicación inyectiva del conjunto $\{1,2,3,4,5\}$ con el conjunto de comensales. Esta primera tarea se puede hacer de $12{\cdot}11{\cdot}10{\cdot}9{\cdot}8 = \frac{12!}{7!}$ formas distintas (véase el Ejemplo 2.12). La segunda tarea, una vez realizada la primera, consiste en colocar los nombres de los siete comensales restantes en la segunda mesa, es decir, establecer una biyección del conjunto $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ con el conjunto de los siete comensales restantes. Esto se puede hacer de 7! formas distintas. Así pues, la distribución de los comensales se puede hacer de 12! formas distintas.

2.- El razonamiento se puede simplificar haciendo notar que se dispone de 12 plazas para 12 comensales por lo que disponer a los comensales de una cierta manera es establecer una biyección del conjunto $\{1,2,\ldots,12\}$ con el conjunto de comensales. Naturalmente, esto se puede hacer de 12! formas distintas.

En la primera de las tareas del apartado 1 se escogen 5 elementos distintos de un conjunto de 12 elementos y se los ordena. A esto se le suele llamar $5-$variación de 12 elementos. El número total de estas variaciones se escribe $V(12,5)$. En general, si tenemos n elementos y tomamos m de los mismos ordenados y sin repetir ninguno, se le conoce como $m-$variación de n elementos. El número de estas variaciones se escribe $V(n,m)$. Generalizando el argumento anterior es fácil darse cuenta de que

$$V(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!} = n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1).$$

Cuando $n = m$ las variaciones se dicen permutaciones. Una permutación no es más que una reordenación de los elementos de un conjunto. El número total de permutaciones de un conjunto con n elementos se escribe $P(n)$ y se tiene, obviamente, que $P(n) = n!$

Ejemplo 2.18 *¿Cuántos números de 3 dígitos distintos se pueden formar con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6?*

La respuesta es $V(6,3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$

Ejemplo 2.19 *¿De cuántas maneras pueden reordenarse* 8 *bolas numeradas del* 1 *al* 8*? ¿De cuántas maneras si las bolas* 4 *y* 5 *tienen que quedar juntas?*

La respuesta a la primera pregunta es $P(8)$, es decir, $8! = 40320$ maneras. Para responder a la segunda pregunta, observemos que hay dos formas distintas de situar las bolas 4 y 5 juntas; a saber: 45 ó 54. Una vez elegida una de estas posibilidades es como si tuviésemos que reordenar un conjunto de siete bolas. Por lo tanto, la respuesta a la segunda pregunta es $2 \cdot 7! = 10080$.

2.3.2. Combinaciones

Volvamos, por un momento, al ejemplo de la cena. Supongamos ahora que, por problemas de espacio, hemos de suprimir la mesa de cinco comensales. Por lo tanto, sólo disponemos de siete plazas para doce posibles comensales, por lo que debemos cancelar la invitación de cinco personas. En este caso, debemos escoger cinco personas de entre 12 sin importar ningún tipo de orden. Dicho de otro modo, debemos elegir un subconjunto de cinco personas de un total de doce. ¿De cuántas formas posibles podemos realizar esta tarea? Si escogemos cinco personas y realizamos todas las posibles reordenaciones de estas cinco personas obtenemos 5! reordenaciones. Si multiplicamos el número de formas de escoger cinco personas de entre las doce por 5! obtenemos $V(12,5)$. Por lo tanto, el número total de formas en las que podemos escoger cinco personas de un total de doce es igual a:

$$\frac{V(12,5)}{P(5)} = \frac{12!}{5!7!} = 924$$

En general, cuando tomamos un subconjunto de m elementos de un conjunto de n, se dice que construimos una m-combinación del conjunto de n elementos. El número total de $m-$ combinaciones de un conjunto de n elementos se escribe $C(n,m)$ o $\binom{n}{m}$. Por otro lado, no es difícil probar, generalizando la argumentación anterior, que

$$C(n,m) = \binom{n}{m} = \frac{V(n,m)}{P(m)} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Ejemplo 2.20 *¿Cuántas cadenas binarias de longitud* 13 *contienen, exactamente,* 10 *ceros?*

Si una cadena binaria de longitud 13 contiene 10 ceros, las posiciones en las que se encuentran los ceros constituyen una 10-combinación del conjunto $\{1,2,\ldots,13\}$. Así pues, el número de cadenas binarias de longitud 13 que contienen 10 ceros es

$$\binom{13}{10} = 286.$$

Obsérvese que el conjunto de cadenas binarias de longitud 13 que contienen 10 ceros es el mismo que el conjunto de cadenas binarias de longitud 13 que contienen 3 unos, por lo que se deberá tener que

$$\binom{13}{10} = \binom{13}{3}.$$

La identidad al final del ejemplo anterior no es casual. Es muy fácil ver (basta ver la definición de $\binom{n}{m}$) que para cualesquiera n y m con $m \leq n$, se tiene

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}.$$

Ejemplo 2.21 *Supongamos que un departamento de una empresa está compuesto por* 10 *mujeres y* 14 *hombres. ¿De cuántas formas posibles se puede formar una comisión de seis miembros si el número de hombres y de mujeres ha de ser el mismo?*

Del enunciado se deduce que hay que escoger 3 hombres de entre 14 posibles y 3 mujeres de entre 10 posibles. Esto se puede hacer de

$$\binom{14}{3} \cdot \binom{10}{3} = 43680$$

formas posibles.

2.3.3. Números binomiales

Hemos visto en la Subsección anterior que el número de las m-combinaciones de un conjunto de n elementos se denota por $\binom{n}{m}$. Estos números se conocen como números binomiales dado que aparecen como coeficientes en la expansión en potencias de expresiones binomiales como $(a+b)^n$. Este hecho se discute en el resultado siguiente.

Teorema 2.22 (Teorema del binomio) *Sean x e y variables y sea n un entero no negativo. Entonces*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Demostración.– Veamos qué ocurre al multiplicar n factores

$$(x+y)(x+y)\cdots(x+y)$$

Los términos del producto se obtienen seleccionando x o y en cada factor. El número de términos de $x^{n-k}y^k$ se corresponde con el número de maneras de seleccionar k veces y, lo que es igual al número binomial $\binom{n}{k}$. ■

Aparte del interés en sí mismo, el Teorema 2.22 nos permite deducir algunas identidades útiles.

Corolario 2.23 *Si n es un entero no negativo, se tiene:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Corolario 2.24 *Si n es un entero no negativo, se tiene:*

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

El cálculo de los números binomiales depende, en general, del siguiente resultado fundamental:

Teorema 2.25 (Identidad de Pascal) *Si n y k son enteros positivos con $n \geq k$, entonces*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Demostración.– Sean T un conjunto con n elementos y a un elemento de T. Notemos que el número binomial $\binom{n}{k}$ cuenta todos los subconjuntos de T con k elementos. Estos últimos pueden contener o no a a. Los subconjuntos de T con k elementos que contienen a a son exactamente $\binom{n-1}{k-1}$ (hay que escoger $k-1$ elementos de $T \setminus \{a\}$ que tiene $n-1$ elementos), mientras que los que no contienen a a son exactamente $\binom{n-1}{k}$ (hay que elegir k elementos de $T \setminus \{a\}$). Aplicando el principio de adición se llega al resultado.

$\blacksquare$

El Teorema 2.25 proporciona un método recursivo para calcular los números binomiales, ya que si conocemos los números $\binom{n-1}{k}$ para $0 \leq k \leq n-1$, podemos calcular todos los $\binom{n}{k}$. Estos cálculos se suelen mostrar en forma de triángulo:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \cdots & & & & & & &
\end{array}$$

Esta forma de arreglar los cálculos de los números binomiales se suele conocer como triángulo de Pascal en recuerdo de Blaise Pascal aunque era conocida con anterioridad a él. Los números de la fila $n+1$ son los números binomiales $\binom{n}{k}$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Ya que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ para cualquier n, los bordes del triángulo están enteramente constituidos por unos. El Teorema 2.25 nos dice que cada número es la suma de los dos números que tiene inmediatamente por encima.

2.3.4. Variaciones y combinaciones generalizadas

En 2.3.1 y 2.3.2 hemos tratado variaciones y combinaciones[2]. En ambos casos, se trataba de escoger elementos de un conjunto (importando o no el orden) pero sin repetir elementos, es decir, cada elemento del conjunto en cuestión sólo podía ser elegido una sola vez. En muchos problemas de recuento, sin embargo, algunos elementos suelen ser usados de forma repetida. Este es el caso, por ejemplo, si construimos palabras en un alfabeto finito[3]. Por otro lado, algunos problemas de recuento hacen intervenir elementos que resultan indistinguibles: por ejemplo, si queremos contar todas las formas en las que la palabra española $CATAMARAN$ puede ser reordenada no podemos pensar en permutaciones ya que dicha palabra contiene cuatro aes.

Variaciones con repetición

Tomar elementos en un conjunto importando el orden pero pudiendo repetir elementos puede asimilarse, en términos matemáticos a definir aplicaciones. Tomar m elementos de un conjunto A de n elementos importando el orden en el que se toman y pudiendo repetir, es lo mismo que establecer una aplicación del conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ en A. Este problema lo tratamos en el Ejemplo 2.11. El número de m-variaciones con repetición de un conjunto de n elementos es n^m. Por ejemplo, utilizando el alfabeto español podemos construir $27^5 = 14{,}348{,}907$ palabras de 5 letras.

Combinaciones con repetición

Las combinaciones con repetición se corresponden con la selección de un cierto número de objetos de un conjunto pudiendo repetirlos pero sin importar el orden. Cuando los conjuntos tienen cardinal pequeño y el número de objetos elegidos es también pequeño, es fácil generar todas las posibilidades. Por ejemplo, consideremos que elegimos 4 elementos sin importar el orden del conjunto $\{a, b, c\}$. En este caso, hay quince posibilidades:

[2] No hablamos de permutaciones puesto que estas son caso particular de las variaciones. En esta Subsección debe entenderse, por lo tanto, que cuando hablamos de variaciones incluimos a las permutaciones entre las mismas.

[3] Aquí palabra ha de entenderse como una cadena de elementos del alfabeto.

$$\begin{array}{ccccc} aaaa & aaab & aaac & aabb & aabc \\ aacc & abbb & abbc & abcc & accc \\ bbbb & bbbc & bbcc & bccc & cccc \end{array}$$

Veremos que es posible dar una fórmula general para el número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con n elementos en función de los número binomiales. En la demostración interviene la representación de las posibles combinaciones como palabras del alfabeto $\{0, 1\}$; por ejemplo la combinación $abcc$ (es decir, escoger una a, una b y dos ces) se representa por 101011. Los ceros son marcas que separan el tipo de objeto, y los unos nos informan de cuántos objetos de cierto tipo hay siguiendo el esquema

$$\begin{array}{cccccc} a & & b & & c & c \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1. \end{array}$$

Dado que hay dos marcas que pueden colocarse en cualquiera de las posiciones, el total de las combinaciones en este caso particular, es $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = 15$. De forma general, se tiene:

Teorema 2.26 *El número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con $n$elementos es igual a*

$$\binom{n+m-1}{m}$$

Demostración.– Podemos arreglar las m-combinaciones de tal forma que los elementos escogidos que sean iguales estén juntos. Una vez hecho esto, podemos asignar a cada m-combinación una palabra de longitud $m + (n - 1)$ en el alfabeto $\{0, 1\}$ (cada palabra debe tener m unos, uno por cada objeto elegido, y $n - 1$ marcas para separar los n posibilidades de elementos a escoger). De esta forma establecemos una biyección entre el número de m-combinaciones con repetición de un conjunto con $n-$elementos y el conjunto de palabras en el alfabeto $\{0, 1\}$ de longitud $n + m - 1$ que contienen $n - 1$ ceros. Como el número de palabras en el alfabeto $\{0, 1\}$ de longitud $n + m - 1$ que contienen $n - 1$ ceros es igual a

$$\binom{n+m-1}{n-1} = \binom{n+m-1}{m}$$

concluimos el resultado. ∎

Veamos un ejemplo de aplicación del Teorema 2.26.

Ejemplo 2.27 *¿Cuántas soluciones tiene la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 11,$$

donde x_1, x_2 y x_3 son enteros no negativos?

Para contar el número de soluciones basta con observar que una solución se corresponde con una forma de seleccionar 11 elementos de un conjunto de 3, de tal forma que se escogen x_1 elementos de tipo 1, x_2 del tipo 2 y x_3 del tipo 3. En consecuencia, el número de soluciones buscado es igual a

$$\binom{11+3-1}{11} = \binom{13}{11} = 78$$

Permutaciones con objetos indistinguibles

En algunos problemas de recuento algunos elementos resultan indistinguibles. En este caso, hay que tener cuidado para evitar contar cosas más de una vez. Veamos un ejemplo previo a partir del cual generalizaremos.

Ejemplo 2.28 *¿De cuántas formas distintas podemos reordenar las letras de la palabra PATATA?*

Dado que algunas letras de la palabra se repiten, la respuesta no puede ser el número de permutaciones de 6 letras. Para determinar el número que buscamos, observemos que podemos situar las tres aes que tiene la palabra PATATA de $\binom{6}{3}$ formas distintas. Una vez situadas las aes, podemos situar las dos tes. Esto puede hacerse de $\binom{3}{2}$ formas distintas. Colocadas las aes y las tes tenemos $\binom{1}{1}$ formas distintas de colocar la letra P. Así pues el número total de reordenaciones de la palabra PATATA es:

$$\binom{6}{3}\binom{3}{2}\binom{1}{1} = \frac{6!}{3!3!}\frac{3!}{2!1!}\frac{1!}{1!0!} = \frac{6!}{3!2!1!} = 60$$

El mismo argumento utilizado en el ejemplo puede generalizarse y se obtiene:

Teorema 2.29 *El número de permutaciones de n objetos, donde hay n_1 objetos indistinguibles de tipo 1, n_2 objetos indistinguibles de tipo 2, ..., n_k objetos indistinguibles de tipo k, es*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Demostración.– Como tenemos n_1 objetos de tipo 1, podemos situarlos de $\binom{n}{n_1}$ formas distintas. Una vez situados los objetos de tipo uno, situamos los de tipo 2. Esta segunda tarea se puede hacer de $\binom{n-n_1}{n_2}$ dos formas distintas. En general, una vez situados los objetos de tipo $1, 2, \ldots, r-1$ $(1 \leq r \leq k)$, los objetos de tipo k se pueden situar de $\binom{n-n_1-\ldots-n_{r-1}}{n_r}$ formas distintas. Por lo tanto, el número de permutaciones de n objetos, donde hay n_1 objetos indistinguibles de tipo 1, n_2 objetos indistinguibles de tipo 2, ..., n_k objetos indistinguibles de tipo k, es

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\cdots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k} =$$

$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!}\frac{(n-n_1-n_2)!}{n_2!(n-n_1-n_2-n_3)!}\cdots\frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_k)!}$$

$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

■

2.4. Principio de inclusión y exclusión

Una de las propiedades recogidas en la Proposición 2.9 afirma que el cardinal de la unión de dos conjuntos finitos es la suma de los cardinales si los conjuntos son disjuntos. Si A y B son conjuntos y su intersección es no vacía, tampoco es difícil calcular el cardinal de $A \cup B$: el resultado de sumar $|A|$ y $|B|$ es que los elementos de $A \cap B$ se cuentan dos veces. Por lo tanto,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Este resultado es un caso sencillo de lo que suele llamarse principio de inclusión y exclusión, también conocido como principio de la criba. En su generalidad, recogemos el principio en el siguiente Teorema.

Teorema 2.30 *Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son conjuntos finitos, entonces*

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_n,$$

donde α_i es la suma de los cardinales de todas las intersecciones de i de los conjuntos ($1 \leq i \leq n$).

Demostración.– Probaremos que cada elemento x de la unión contribuye exactamente en una unidad al término de la derecha de la igualdad. Supongamos que x pertenece a k de los conjuntos dados. Entonces x contribuye con k a la suma $\alpha_1 = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n|$. En la suma α_2, x contribuye con 1 a $|A_i \cap A_j|$ si tanto A_i como A_j están entre los k conjuntos que contienen a x. Hay, exactamente, $\binom{k}{2}$ de estos pares, de forma que $\binom{k}{2}$ es la contribución de x a la suma α_2. En general, la contribución de x a α_i es $\binom{k}{i}$ y, por la tanto, la contribución total de x al término derecho de la igualdad es

$$\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \ldots + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}.$$

Pero en virtud del Corolario 2.24 se tiene que está expresión es igual a $\binom{k}{0}$; es decir, igual a 1.

∎

Hay un corolario sencillo del Teorema 2.30 que suele ser útil en la práctica. Supongamos que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son subconjuntos de un conunto X con $|X| = N$. Entonces, el número de elementos de X que no están en ninguno de estos subconjuntos es

$$|X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)| = N - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n.$$

Veamos algunos ejemplos de aplicación del principio de inclusión y exclusión.

Ejemplo 2.31 *En un grupo de* 67 *personas,* 47 *hablan francés,* 35 *alemán y* 23 *los dos idiomas. ¿Cuántos no hablan ni francés ni alemán? Si, además,* 20 *hablan catalán, de los cuales* 12 *hablan también francés,* 11 *también alemán y* 5 *hablan los tres idiomas, ¿cuántos no hablan ninguno de los tres idiomas?*

Si llamamos X al conjunto de 67 personas, A al subconjunto de las mismas que hablan francés y B al subconjunto de los que hablan alemán, el número de los que no hablan ni francés ni alemán es:

$$|X| - |A| - |B| + |A \cap B| = 67 - 47 - 35 + 23 = 8.$$

Si ahora llamamos C al subconjunto de los que hablan catalán, el número de los que no hablan ni francés, ni alemán ni catalán es:

$$|X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C| =$$
$$= 67 - 47 - 35 - 20 + 23 + 12 + 11 - 5 = 6.$$

Ejemplo 2.32 *Una secretaria poco eficiente tiene n cartas y n sobres con las correspondientes direcciones. ¿De cuántas maneras puede lograr que ninguna carta llegue al destinatario correcto? (Este problema se conoce como el problema de los desarreglos.)*

Podemos pensar en que cada sobre y cada carta tienen un entero i entre 1 y n como etiqueta. El hecho de poner las cartas en sobres puede interpretarse, por lo tanto, como una permutación (es decir, como una aplicación biyectiva del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ en sí mismo), π, del conjunto de $\{1, 2, \ldots, n\}$: $\pi(i) = j$ significa que la carta i se introduce en el sobre j. Lo que buscamos es el número de **desarreglos**, es decir, el número de permutaciones π que no fijan ningún elemento de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Para contar estos desarreglos llamemos X al conjunto de permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$ y A_i al subconjunto de X formado por las permutaciones que fijan i $(1 \leq 1 \leq n)$. Como $|X| = n!$, por el Teorema 2.30, el número de desarreglos es

$$d_n = n! - \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \cdots + (-1)^n \alpha_n,$$

donde α_r es la suma de los cardinales de todas las intersecciones de r de los subconjuntos $A_1, A_2 \ldots, A_n$. ¿Cuánto vale α_r? Si elegimos r elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, el número de permutaciones que los fijan es $(n-r)!$. Ahora bien, como hay $\binom{n}{r}$ formas de elegir r elementos en $\{1, 2, \ldots, n\}$, se tiene:

$$\alpha_r = \binom{n}{r}(n-r)! = \frac{n!}{r!},$$

y, en consecuencia,

$$d_n = n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Ejemplo 2.33 *¿Cuántos números primos hay menores que* 120*?*
Como $10 < \sqrt{120} < 11$, todo número no primo mayor que 1 y menor o igual que 120, ha de tener un factor que sea 2, 3, 5 ó 7. Por lo tanto, los primos menores o iguales que 120 y mayores que 1 son los cuatro citados y todos aquellos que no sean divisibles por ninguno de ellos. Para aplicar el principio de inclusión y exclusión, llamemos $X = \{2, 3, \ldots, 120\}$, A_1 al subconjunto de X formado por los pares, A_2 al subconjunto de X formado por los múltiplos de 3, A_3 al de los múltiplos de 5 y A_4 al de los múltiplos de 7. El número de primos buscado es igual a

$$4 + |X \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = 123 - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| +$$
$$+|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| -$$
$$-|A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| =$$
$$= 123 - \left\lfloor \frac{120}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{5} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{6} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{14} \right\rfloor +$$
$$+ \left\lfloor \frac{120}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{21} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{35} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{30} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{42} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{70} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{120}{105} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{120}{210} \right\rfloor =$$
$$= 123 - 60 - 40 - 24 - 17 + 20 + 12 + 8 + 8 + 5 + 3 - 4 - 2 - 1 - 1 + 0 = 30$$

2.5. Problemas propuestos

Problema 2.1 .- Sean A un conjunto de n elementos y $B = \{0, 1\}$. Demostrar que hay $2^n - 2$ aplicaciones suprayectivas entre A y B.

Problema 2.2 .- ¿De cuántas formas se puede asignar un nombre, dos o tres a un niño si se eligen entre una lista de 500 nombres?

Problema 2.3 .- ¿Cuántas matrículas se pueden determinar si cada una consta de cuatro letras del alfabeto español seguidas de tres dígitos?

Problema 2.4 .- Determinar cuántos números de cinco cifras decimales existen que:

a) no contengan ninguna cifra repetida.

b) sean pares.

c) contengan tres nueves.

d) sean impares.

Problema 2.5 .- Supongamos que, en un grupo de seis personas, cada par de individuos consta de dos amigos o de dos enemigos. Probar que existen al menos tres que son amigos mutuamente o tres que son mutuamente enemigos.

Problema 2.6 .- Un hombre ciego tiene un montón de 10 calcetines grises y 10 calcetines marrones en un cajón. ¿Cuántos ha de coger para asegurarse de que entre ellos hay un par que hace juego? ¿Cuántos ha de coger para asegurarse de que hay un par gris?

Problema 2.7 .- Demostrar que si X es un conjunto de personas, existen dos elementos de X que tienen el mismo número de amigos en X. (Se supone que si x es amigo de x', entonces x' lo es de x).

Problema 2.8 .- Se toman cinco puntos en el interior de un triángulo equilátero de lado 1. Demostrar que al menos un par de esos puntos están a una distancia menor que $1/2$.

Problema 2.9 .- Demostrar que

$$V(m, p) = V(m - 1, p) + p \cdot V(m - 1, p - 1)$$

Problema 2.10 .- Sean m, n y r enteros no negativos con $r \leq m$ y $r \leq n$. Demostrar la siguiente identidad, conocida como identidad de Vandermonde:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k} \binom{n}{k}$$

Problema 2.11 .- Encontrar el coeficiente de x^7 en cada uno de los siguientes desarrollos:

a) $(3x + 1)^{10}$

b) $(3x + x^2 + 2)^8$

c) $\left(3x + \frac{2}{x}\right)^{11}$

d) Determinar el coeficiente de x^6 en el desarrollo del binomio del apartado c).

Problema 2.12 .- Mostrar que si n y k son enteros positivos con $1 \leq k \leq n$, entonces

$$\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{2^{k-1}}$$

Problema 2.13 .- Mostrar que si n y r son enteros positivos con $1 \leq r \leq n$, se verifica:

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

(*Pista*: Téngase en consideración que $\binom{n+1}{r+1}$ cuenta el número de cadenas binarias de longitud $n+1$ que contienen $r+1$ unos).

Problema 2.14 .- ¿Cuántos números de seis cifras decimales tienen un número impar de dígitos impares? ¿Y si, además, el número no tiene ningún dígito repetido?

Problema 2.15 .- Una cierta circunscripción electoral en la que se presentan siete partidos políticos elige cinco diputados. Suponiendo un sistema electoral de listas abiertas (cada elector selecciona como mucho cinco candidatos de entre el total) y que todos los partidos presentan exactamente cinco candidatos, ¿de cuántas formas distintas puede votar un elector? ¿Y si no elige más de un diputado por partido?

Problema 2.16 .- Se lanzan cinco dados. Calcular la probabilidad de obtener una pareja, una doble pareja, un trío, un póquer, un full, un repóquer y una escalera. ¿Cuál es la probabilidad de no tener ningún tipo de jugada[4]?

Problema 2.17 .- Se eligen cuatro cartas, con reemplazamiento, de una baraja de 40 cartas

a) ¿Cuántas veces se repite alguna?

[4]Pareja: dos iguales; doble pareja: dos parejas; trío: tres iguales; full: una pareja y un trío; póquer: cuatro iguales; repóquer: cinco iguales; escalera: todos distintos pero consecutivos.

b) ¿Cuántas veces se repite la cuarta carta, pero no es necesariamente la primera repetición?

Problema 2.18 .- Si tomamos cinco cartas de una baraja española, ¿cuál es la probabilidad de tener dos reyes?

Problema 2.19 .- ¿De cuántas formas distintas se puede repartir la primera mano en el mus[5]?

Problema 2.20 .- Si se reparten cartas para comenzar una partida de mus, ¿ de cuántas formas posibles puede ocurrir que cada jugador reciba exactamente dos reyes? Deducir la probabilidad que cada jugador reciba dos reyes. [6]

Problema 2.21 .- ¿Cuántas formas hay de ordenar 10 mujeres y 5 hombres de forma que no haya dos hombres juntos?

Problema 2.22 .- En el plan de estudios de un grado hay 20 asignaturas optativas de cuarto curso y 30 de quinto curso, de las cuales el alumno debe elegir 4 en cuarto y 6 en quinto.

a) Si no hay ninguna restricción, ¿de cuántas maneras se puede cursar el grado?

b) Hay dos asignaturas de quinto (A y B) y otras dos de cuarto (C y D) que tienen los siguientes requisitos:

 i) Si se escoge A es necesario escoger B
 ii) Para escoger B es necesario haber cursado C
 iii) Si se escoge C es necesario escoger D

 ¿ De cuántas maneras se puede cursar el grado?

c) En Jefatura de Estudios se agrupan las asignaturas optativas de quinto de dos en dos con el mismo horario. Si suponemos que se realizan todas las asignaturas de un curso en un solo año académico, ¿ de cuántas formas se puede cursar el grado?

Problema 2.23 .- A un repartidor de publicidad le quedan treinta sobres idénticos que buzonear. Entra en un edificio con veinte vecinos y decide concluir en ese edificio su jornada laboral. ¿De cuántas formas distintas puede hacerlo si introduce al menos un sobre por buzón?

---

[5]En mus se reparten cuatro cartas a cuatro jugadores. Recordemos, además, que la baraja española está formada por cuarenta cartas.

[6]En el mus, los treses son considerados como reyes; es decir, hay ocho reyes en la baraja española cuando de jugar al mus se trata.

Problema 2.24 .- Un examen consta de diez preguntas cuyo valor es un número entero positivo. Si la puntuación total del examen es de cien y cada pregunta vale al menos cinco, ¿cuántas formas distintas hay de asignar un valor a cada pregunta?

Problema 2.25 .- Calcular el número de enteros positivos menores que 1.000.000 que, en su desarrollo decimal, tienen un dígito igual a nueve y tal que la suma de sus dígitos sea igual a quince.

Problema 2.26 .- En este problema trabajaremos con polígonos. Se pide:

a) Calcular el número de triángulos que se obtienen uniendo tres vértices de un polígono de n lados.

b) Probar que un polígono que tenga tantos vértices como diagonales es un pentágono.

Problema 2.27 .- Calcular el número de divisores positivos de 176000. ¿Cuántos son pares?

Problema 2.28 .- ¿De cuántas maneras puede acabar una carrera de caballos con cinco participantes si se admiten empates?

Problema 2.29 .- Un cuarentón, amante del fútbol, repasa en una fría tarde de domingo su vieja colección de cromos Panini del Mundial 82 y coge los cromos sin pegar de Sócrates (Brasil), Paolo Rossi (Italia), Boniek (Polonia), Maradona (Argentina), Arconada (España) y Tigana (Francia), así como los escudos de las correspondientes federaciones. Se pide calcular:

a) De cuántas formas distintas pueden pegarse los doce cromos en fila si todos los jugadores deben estar pegados al lado de su correspondiente escudo.

b) El número de formas distintas en las que los doce cromos pueden pegarse en fila de tal forma que haya, al menos, un jugador que acabe pegado al lado del escudo que le corresponde.

c) El número de formas distintas en las que los doce cromos pueden pegarse en fila de tal forma que ningún jugador acabe pegado al lado del escudo que le corresponde.

Problema 2.30 .- ¿Cuántas palabras en el alfabeto $\{a, b, c\}$ contienen ocho aes, tres bes y cinco ces? ¿Cuántas de entre las anteriores no contienen dos aes consecutivas?

Problema 2.31 .- Responder a cada una de las siguientes preguntas:

a) ¿De cuántas formas se pueden sentar seis personas en una fila de butacas?

b) ¿De cuántas formas se pueden sentar esas seis personas en un mesa redonda[7]?

c) ¿De cuántas formas se pueden sentar cara al público seis personas, tres conferenciantes y tres presentadores, de manera que no se sienten juntos ni conferenciantes ni presentadores?

Problema 2.32 .- Una bolsa contiene seis bolas blancas y cinco negras. ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas blancas y dos negras si saco cuatro bolas de la bolsa? ¿Y de sacar cuatro bolas del mismo color? Hacer lo mismo si cada vez que sacamos una bola volvemos a introducirla en la bolsa[8].

Problema 2.33 .- Un examen consta de diez preguntas de test con cuatro posibles respuestas y una única respuesta correcta cada una de ellas. Calcular la probabilidad de aprobar el examen si las respuestas erróneas no restan y si se responden todas las preguntas al azar.

Problema 2.34 .- Una caravana publicitaria se compone de seis coches y seis furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana, con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas?

Problema 2.35 .- Lanzamos una moneda diez veces anotando si sale cara o cruz. Calcular la probabilidad de obtener exactamente dos caras, de obtener como mucho tres cruces, de obtener como mínimo tres caras y de obtener igual número de caras que de cruces.

Problema 2.36 .- ¿Cuántas formas posibles hay de trasladarse, en el espacio xyz, de $(0, 0, 0)$ a $(4, 3, 4)$ dando pasos de una unidad en sentido positivo en la dirección de cada uno de los ejes? (Nótese que no están permitidos movimientos negativos, por lo que se permiten pasos hacia atrás).

Problema 2.37 .- Calcular el número de cadenas binarias que:

a) contienen exactamente ocho ceros y diez unos si a cada cero le ha de seguir un uno.

b) contienen exactamente cinco ceros y quince unos si a cada cero le han de seguir dos unos.

c) tienen longitud diez y contienen al menos tres ceros y al menos tres unos.

Problema 2.38 .- Una fundación decide conceder una beca de investigación de 100000 euros, dos de 50000 y cinco de 10000. Si hay trece candidatos, ¿de cuántas formas se puede realizar el reparto de las becas?

---

[7] En este caso, se entiende que lo único que importa son las personas que cada uno tiene a derecha e izquierda.

[8] Se supone que las bolas se pueden distinguir.

Problema 2.39 .- Calcular el número de reordenaciones posibles de las siguientes palabras:

a) PARRA b) PERENNE c) CADUCO

Problema 2.40 .- Se tienen once libros ordenados alfabéticamene por el nombre de su autor en una estantería. ¿De cuántas formas se pueden reordenar los libros de forma que ningún libro esté en la posición original?

Problema 2.41 .- ¿De cuántas formas podemos permutar los números del uno al nueve de manera que ninguno de los pares esté en su posición inicial?

Problema 2.42 .- ¿Cuántas palabras se pueden formar con las letras {a, b, c, d, e} que no contengan la secuencia baba?

Problema 2.43 .- ¿De cuántas formas distintas pueden reordenarse las letras A, E, M, O, U e Y de tal forma que no aparezcan ninguna de las palabras inglesas ME y YOU?

Problema 2.44 .- Un número entero se dice libre de cuadrados si no es divisible por el cuadrado de ningún entero positivo mayor que uno. Por ejemplo, 39 es libre de cuadrados, pero 48 no lo es. Calcular el número de enteros positivos libres de cuadrados mayores que uno y menores o iguales que cien.

Problema 2.45 .- ¿De cuántas formas podemos distribuir seis juguetes entre tres niños de tal forma que todo niño reciba al menos un juguete?

Problema 2.46 .- Calcular el número de aplicaciones suprayectivas de un conjunto de m elementos en uno de n $(m \geq n)$.

Capítulo 3

Técnicas avanzadas de recuento

3.1. Funciones generadoras

3.1.1. Series de potencias y sus propiedades algebraicas

En este Capítulo haremos uso de series de potencias

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

como herramienta eficaz para resolver distintos problemas de recuento. En general, no nos importarán las cuestiones referentes a la convergencia por lo que podríamos considerarlas como **series de potencias formales**. Por otro lado, casi siempre tendremos que calcular un coeficiente determinado de una serie de potencias, por lo que nos centraremos en algunas cuestiones algebraicas referentes a las series de potencias formales[1]. El conjunto de series de potencias formales con coeficientes reales se suele denotar por $\mathbb{R}[[x]]$. Obsérvese que el conjunto de polinomios con coeficientes reales es un subconjunto propio de $\mathbb{R}[[x]]$. Dentro de $\mathbb{R}[[x]]$ se definen dos operaciones: suma y producto. Si

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots, \quad B(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n + \cdots$$

son dos series de potencias, entonces

$$A(x) + B(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n + \cdots$$

y

$$A(x)\cdot B(x) = (a_0b_0)+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+\left(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}\right)x^n+\cdots$$

[1]Naturalmente, todas las propiedades estudiadas en Fundamentos Matemáticos son aplicables.

Puede probarse que la suma de series de potencias formales es conmutativa, asociativa, que posee elemento neutro (la serie nula) y que toda serie formal posee opuesta. En cuanto al producto, éste es conmutativo, asociativo y posee elemento identidad (la serie 1). Asimismo, se verifica la propiedad distributiva de la suma con respecto al producto. Lo que no es cierto es que toda serie formal sea inversible, es decir, que exista otra cuyo producto con ella sea 1.

Teorema 3.1 *Una serie de potencias*

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

en $\mathbb{R}[[x]]$ *es inversible si, y sólo si,* $a_0 \neq 0$.

Demostración.– Se propone como ejercicio.

■

Un ejemplo clave de serie inversible es $1 - x$ cuya inversa es

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

3.1.2. Funciones generadoras ordinarias

Definición 3.2 *Dada una sucesión de números reales* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *se dice función generadora ordinaria de la misma a la serie de potencias*

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Ejemplo 3.3 *1.- La función generadora de la sucesión* $1, 1, 1, 1, \ldots$ *es*

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

2.- Podemos considerar funciones generadoras de sucesiones finitas. Por ejemplo, si n *es un entero positivo y llamamos* a_k *a* $\binom{n}{k}$ $(0 \leq k \leq n)$, *la función generadora de la sucesión* $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ *es:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n.$$

De hecho, podríamos escribir $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$, *puesto que* $\binom{n}{k} = 0$ *si* $k > n$.

¿Cómo podemos utilizar las funciones generadoras en problemas de recuento? Veremos algunos ejemplos a continuación.

Ejemplo 3.4 *¿De cuántas formas distintas podemos repartir quince libros entre tres estudiantes si el primero debe recibir al menos tres y el segundo y el tercero como mínimo dos?*
Si llamamos l_i al número de libros que le corresponde a cada estudiante ($i = 1, 2, 3$), lo que buscamos es el número de soluciones enteras de la ecuación

$$l_1 + l_2 + l_3 = 15 \tag{3.1}$$

con las restricciones

$$3 \leq l_1 \leq 11 \quad 2 \leq l_2 \leq 10 \quad 2 \leq l_3 \leq 10.$$

Este problema de recuento es fácil ver que puede verse como el siguiente problema algebraico: calcular la potencia decimoquinta de x en la expansión de

$$(x^3 + x^4 + \cdots + x^{11})(x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})(x^2 + x^3 + \cdots + x^{10})$$

Visto de esta forma, el problema en sí no se ha simplificado nada: calcular el coeficiente pedido equivale a enumerar todas las soluciones de la ecuación 3.1 con las restricciones indicadas. Ahora bien. Reescribir de esta forma el problema nos permite utilizar un software de Álgebra Computacional (Maple, Mathematica, Maxima, Derive,...) para resolverlo. La expansión pedida es igual a:

$$\begin{aligned} x^{31} + 3x^{30} + 6x^{29} + 10x^{28} + 15x^{27} + 21x^{26} + 28x^{25} + 36x^{24} + \\ +45x^{23} + 52x^{22} + 57x^{21} + 60x^{20} + 61x^{19} + 60x^{18} + 57x^{17} + 52x^{16} + \\ +45x^{15} + 36x^{14} + 28x^{13} + 21x^{12} + 15x^{11} + 10x^{10} + 6x^9 + 3x^8 + x^7, \end{aligned} \tag{3.2}$$

por lo que la respuesta a la pregunta inicial es 45. Además, en la expansión se obtiene la respuesta a exactamente 25 problemas de recuento: ¿cuántas formas hay de repartir n libros entre tres estudiantes si el primero debe recibir al menos tres y a lo más once y el segundo y el tercero como mínimo dos y como máximo diez? Por el enunciado, es obvio que n debe ser mayor o igual que siete y menor o igual que 31. Para responder a cada una de las preguntas basta observar el coeficiente del correspondiente x^n en (3.2).

Ejemplo 3.5 *Supongamos que queremos calcular el número de soluciones enteras no negativas de la ecuación*

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = n,$$

con n un entero positivo.
Como hemos visto en el Capítulo 2, la respuesta es

$$\binom{n+4-1}{n} = \binom{n+3}{n},$$

pero ¿cómo podríamos plantear el problema usando funciones generadoras?
Por el planteamiento del problema, el número de soluciones se corresponde con el coeficiente n-ésimo de

$$G(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots)^4. \tag{3.3}$$

Dicho de otro modo, la sucesión de soluciones de los problemas de recuento se corresponde con los coeficientes de la función generadora dada por (3.3), es decir,

$$G(x) = (1 - x)^{-4}.$$

El ejemplo inmediatamente anterior sugiere la necesidad del cálculo de coeficientes de binomios con potencias negativas. Afortunadamente, existe una forma relativamente sencilla de hacer esto, pero para ello primero hemos de extender los números binomiales.[2]

Definición 3.6 (Números binomiales extendidos) *Sean u un número real y k un entero no negativo. Entonces, se define el número binomial $\binom{u}{k}$ como:*

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} \frac{u(u-1)\cdots(u-k+1)}{k!} & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \end{cases}$$

Un caso especialmente importante para nosotros será el de los números binomiales de la forma $\binom{-n}{k}$, donde n y k son enteros no negativos. Usando la definición, podemos relacionar estos números binomiales con los introducidos en el Capítulo 2:

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!} =$$

$$= (-1)^k \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)(n-1)!}{k!(n-1)!} =$$

$$= (-1)^k \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Una vez introducidos estos números binomiales extendidos, podemos enunciar la extensión del Teorema del Binomio (Teorema 2.22).

[2] También llamados combinatorios.

Teorema 3.7 (Teorema del binomio extendido) *Si x es un número real con $|x| < 1$ y u es un número real cualquiera, entonces*

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k.$$

En particular, si $u = -n$, con n un entero positivo, se tiene:

$$(1+x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Obsérvese que, en virtud del Teorema anterior, se tiene:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k} x^k.$$

Dicho de otro modo, lo que ocurría en el Ejemplo 3.5 es un hecho general y no un caso aislado.

Un ejemplo clásico de problema de recuento en el que se usan funciones generadoras es el de la distribución de tareas:

Ejemplo 3.8 *Se desea distribuir 24 tareas de un proyecto entre 4 personas teniendo en cuenta que cada una ha de realizar como mínimo tres tareas y como máximo ocho. ¿De cuántas maneras pude hacerse una distribución de ese tipo?*

Es fácil ver que el número de distribuciones viene dado por la función generadora

$$(x^3 + x^4 + \cdots + x^8)^4.$$

En concreto, la respuesta a la pregunta es el coeficiente de x^{24} en la expansión de $(x^3+x^4+\cdots+x^8)^4$. Calculémoslo. Como $(x^3+x^4+\cdots+x^8)^4 = x^{12}(1+x+x^2+\cdots+x^5)^4$, lo que buscamos el coeficiente de x^{12} en $(1+x+x^2+\cdots+x^5)^4$; pero como

$$(1+x+x^2+\cdots+x^5) = \frac{1-x^6}{1-x},$$

lo que buscamos es coeficiente de x^{12} en la serie $(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$. Ahora bien, como

$$(1-x^6)^4 = \binom{4}{0} - \binom{4}{1}x^6 + \binom{4}{2}x^{12} - \binom{4}{3}x^{18} + \binom{4}{4}x^{24}$$

y

$$(1-x)^{-4} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-4}{k} x^k,$$

el coeficiente buscado es

$$\binom{4}{0}\binom{-4}{12} - \binom{4}{1}\binom{-4}{6} + \binom{4}{2}\binom{-4}{0} = 125.$$

En otro orden de cosas, las funciones generadoras ordinarias pueden ser útiles para probar identidades combinatorias.

Ejemplo 3.9 *Usar funciones generadoras ordinarias para probar que:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Observamos, en primer lugar, que $\binom{2n}{n}$ es el coeficiente de x^n en $(1+x)^{2n}$. Por otro lado, se tiene

$$(1+x)^{2n} = [(1+x)^n]^2 = \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n\right]^2.$$

El coeficiente de x^n en la última expresión es

$$\binom{n}{0}\binom{n}{n} + \binom{n}{1}\binom{n}{n-1} + \binom{n}{2}\binom{n}{n-2} + \cdots \binom{n}{n}\binom{n}{0}.$$

Como $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ para cualquier $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ se tiene que el coeficiente de x^n en $[(1+x)^n]^2$ es justamente $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

3.1.3. Funciones generadoras exponenciales

Las funciones generadoras ordinarias no son las únicas que pueden utilizarse para resolver problemas de recuento. En algunos casos, son útiles las conocidas como funciones generadoras exponenciales. Pero antes de definirlas, veamos un ejemplo previo.

Ejemplo 3.10 *¿Cuántas palabras distintas de longitud cuatro se pueden formar con las letras A, B y C con la condición de que haya al menos dos aes?*

Si llamamos l_1 al número de aes, l_2 al número de bes y l_3 al número de ces, se tendrá: $l_1 + l_2 + l_3 = 4$ con las condiciones $2 \leq l_1 \leq 4$ y $0 \leq l_2, l_3 \leq 2$. Ahora, para cada una de las elecciones posibles de l_1, l_2 y l_3, el número de palabras es

$$\frac{4!}{l_1!\, l_2!\, l_3!}.$$

En consecuencia, la respuesta a la pregunta es, en términos algebraicos, el coeficiente de x^4 en la serie

$$G(x) = \left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots\right)^2$$

multiplicado por 4!. Haciendo el correspondiente cálculo se obtiene que la respuesta a la pregunta es 33. Se podría argüir que la dificultad del cálculo del coeficiente es similar a la de enumerar las palabras de cuatro letras buscadas. Pero al igual que ocurría en el Ejemplo 3.1, podemos usar un software de Álgebra Computacional para los cálculos y, además, los coeficientes de la serie $G(x)$ son la respuesta a diferentes problemas de recuento.

El ejemplo 3.10 sugiere que podemos considerar otro tipo de funciones generadoras distintas de las ordinarias.

Definición 3.11 *Dada una sucesión de números reales* $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ *se dice función generadora exponencial de la misma a la serie de potencias*

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

3.2. Particiones de un entero

Dado un conjunto A, una partición del mismo es una familia de subconjuntos de A disjuntos dos a dos y no vacíos cuya unión es A. Si el conjunto A es un conjunto de cardinal n, si $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ es una partición de A y si $|A_i| = n_i$, tendremos $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Esta última identidad se conoce como una **partición del entero** n en k partes. Por lo tanto, las partes no pueden ser cero y el orden es irrelevante. Como ilustración, listamos las siete particiones de 5:

$$\begin{array}{ccc} 5 & 4+1 & 3+2 \\ 3+1+1 & 2+2+1 & 2+1+1+1 \\ & 1+1+1+1+1 & \end{array}$$

Denotaremos por $p(n)$ el número de particiones de un entero positivo n. Por ejemplo, $p(5) = 7$. Aunque es posible hacerlo, no es nada sencillo obtener una fórmula explícita para $p(n)$. Además, la fórmula exacta es muy complicada. Sin embargo, las funciones generadoras pueden usarse para derivar una sencilla fórmula recursiva para $p(n)$. Es lo que haremos aquí.

En lo que sigue, consideraremos particiones con alguna propiedad particular (por ejemplo, que las partes sean pares). Si $\mathcal{P}$ es una propiedad relativa a una partición, la expresión $p(n|\mathcal{P})$ denotará el número de particiones de n que cumplen la propiedad $\mathcal{P}$.

Para algunas de las consideraciones que seguirán, conviene representar las particiones por los así llamados *diagramas de Ferrers*. Las partes de la partición, en estos diagramas, se disponen en orden, de mayor a menor, y cada parte está representada por una fila con el número adecuado de marcas. Por ejemplo, los diagramas de Ferrers

$$\begin{array}{ccccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & \times & & & \\ \times & & & & & & \\ \times & & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & \\ \times & \times & & & \end{array}$$

representan las particiones

$$7+5+4+1+1 \qquad\qquad 5+5+3+2+2.$$

Podemos ver lo útil de estos diagramas en la demostración de resultados como el que sigue.

Teorema 3.12 *Sean n y r enteros positivos. Entonces:*

$$p(n|\text{número de partes} \leq r) = p(n+r|\text{número de partes} = r)$$

Demostración.– Tomemos una partición de $n+r$ en r partes. Su diagrama contiene exactamente r marcas en la primera columna. Si la eliminamos, tenemos el diagrama de una partición de n en r partes como máximo. Recíprocamente, dada una partición del segundo tipo, podemos añadir una nueva primera columna con r marcas y obtenemos una partición del primer tipo. En otros términos, hemos demostrado que existe una biyección entre los dos conjuntos de particiones y tienen, por lo tanto, el mismo cardinal.

∎

La representación de las particiones por diagramas sugiere la siguiente transformación: intercambiar filas y columnas en el diagrama. Por ejemplo la partición $4+3+3+2+1+1$ se transforma en $6+4+3+1$ como indican los diagramas correspondientes

$$\begin{array}{cccc} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & \times & \\ \times & \times & & \\ \times & & & \\ \times & & & \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccccc} \times & \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times & & \\ \times & \times & \times & & & \\ \times & & & & & \end{array}$$

Dos particiones relacionadas de esta forma se dicen conjugadas. Esta transformación puede utilizarse en la demostración de varios resultados útiles. Por ejemplo, en el que sigue:

Teorema 3.13 *Si n y m son enteros positivos y $m \leq n$, se tiene que:*

$$p(n|\text{parte máxima} = m) = p(n|\text{número de partes} = m)$$

Demostración.– Si m es la mayor de las partes de una partición λ, tanto la primera fila del diagrama de λ como la primera columna de su conjugada λ' contienen m marcas. En consecuencia, λ' es una partición en m partes. En otras palabras, la conjugación produce una biyección entre el conjunto de las particiones de n con parte máxima igual a m y el conjunto de las particiones de n en m partes exactamente, es decir,

$$p(n|\text{parte máxima} = m) = p(n|\text{número de partes} = m)$$

■

Una partición se dice **autoconjugada** si su conjugada es ella misma. Por ejemplo la partición de 10 dada por $4+3+2+1$ es autoconjugada. En relación a las particiones autoconjugadas se puede probar el siguiente resultado:

Teorema 3.14 *El número de particiones autoconjugadas de n es igual al número de particiones de n en partes distintas e impares.*

Demostración.– Se propone como ejercicio.

■

3.2.1. Particiones y funciones generadoras

En esta Subsección obtendremos una fórmula para la función generadora

$$P(x) = p(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \cdots,$$

donde $p(n)$ denota el número de particiones de n y, por convenio, $p(0) = 1$.
El punto de partida es la fórmula

$$(1 - x^i)^{-1} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \cdots$$

Esta serie de potencias es la función generadora de la sucesión (f_n) donde

$$f_n = p(n|\text{cada parte es igual a } i).$$

Por lo tanto, la función generadora de (f_n) es $F(x) = (1 - x^i)^{-1}$.
Sean ahora i y j dos enteros positivos y sea

$$h_n = p(n|\text{cada parte es igual a } i \text{ o } j).$$

¿Cuál es la función generadora $H(x)$ de la sucesión (h_n)?

Si notamos por g_n el número de particiones de n en las que cada parte es igual a j, su función generadora es $G(x) = (1 - x^j)^{-1}$. Como h_n es el número de maneras de escribir n como suma de r y $n - r$, donde r está partido en partes i y $n - r$ en partes j, se tiene

$$h_n = f_0 g_n + f_1 g_{n-1} + \cdots + f_n g_0.$$

La regla de multiplicar series de potencias nos dice que

$$H(x) = F(x)G(x) = (1 - x^i)^{-1}(1 - x^j)^{-1}.$$

Por ejemplo, si $i = 3$ y $j = 4$, el producto de las series $(1 - x^3)^{-1}$ y $(1 - x^4)^{-1}$ es

$$(1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} + x^{15} + \cdots)(1 + x^4 + x^8 + x^{12} + \cdots) =$$

$$= 1 + x^3 + x^4 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + x^{13} + x^{14} + 2x^{15} + 2x^{16} + \cdots$$

El coeficiente de x^{15} es 2 que proviene de los productos $x^{15} \cdot 1$ y $x^3 x^{12}$. Estos productos, a su vez se corresponden con las sumas $15 = 15 + 0 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ y $15 = 3 + 12 = 3 + 4 + 4 + 4$.

La generalización de los argumentos anteriores lleva a:

Teorema 3.15 *La función generadora del número $p(n)$ de particiones de n puede escribirse como el producto infinito*

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty}(1 - x^i)^{-1}$$

Observación 3.16 *La presencia de un número infinito de factores en $P(x)$ no es una dificultad seria, ya que para calcular un coeficiente cualquiera sólo hay que tener en cuenta un número finito de factores. En lo que sigue encontraremos otros productos infinitos de series de potencias y siempre compartirán esta propiedad.*

Una modificación leve de argumentos ya empleados, nos permite calcular funciones generadoras de particiones sujetas a ciertas restricciones. Por ejemplo, supongamos que cada parte puede aparecer como mucho k veces. En ese caso, la contribución de las partes iguales a i provienen de los términos del polinomio

$$1 + x^i + x^{2i} + \cdots + x^{ki},$$

con lo que la función generadora es

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+x+x^2+\cdots+x^{ik})=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-x^{(k+1)i}}{1-x^i}.$$

En particular, si $k=1$, tenemos la función generadora de las particiones con partes distintas. Ésta, junto a otras funciones generadoras útiles se encuentran en la Tabla 3.1.

u_n	$U(x)$
$p(n \mid \text{las partes son distintas})$	$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots$
$p(n \mid \text{las partes son impares})$	$(1-x)^{-1}(1-x^3)^{-1}(1-x^5)^{-1}\cdots$
$p(n \mid \text{las partes son pares})$	$(1-x^2)^{-1}(1-x^4)^{-1}(1-x^6)^{-1}\cdots$
$p(n \mid \text{cada parte es } \leq m)$	$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}\cdots(1-x^m)^{-1}$

Cuadro 3.1: Algunas funciones generadoras útiles

3.2.2. Cálculo de las particiones de un número entero

Hasta ahora hemos calculado la función generadora correspondiente a las particiones de un entero positivo n y, con argumentos similares, hemos deducido algunas otras funciones generadoras para particiones con alguna propiedad en particular. Sin embargo, no hemos utilizado ninguno de esos resultados para derivar una fórmula recursiva eficiente para el cálculo de $p(n)$. Este es el objetivo de esta Subsección.

Para llegar a la fórmula prometida, necesitamos algunas consideraciones previas. En la Tabla 3.1 se encuentra que la función generadora $D(x)$ de las particiones con partes distintas es

$$D(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots$$

Si en esta expresión sustituimos los $+$ por $-$, obtenemos la serie inversa de la función generadora de $(p(n))$

$$Q(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots=1+q_1x+q_2x^2+q_3x^3+\cdots$$

Cada partición de n en partes distintas contribuye al coeficiente q_n de $Q(x)$ con $(-1)^d$, donde d es el número de partes. En general, cada partición de n con un número par de partes distintas contribuye en 1, mientras que aquellas con un número impar contribuye en -1. Por lo tanto,

$$q_n = e_n - o_n,$$

donde

$$\begin{aligned} e_n &= p(n|\text{las partes son distintas y en número par}) \\ o_n &= p(n|\text{las partes son distintas y en número impar}). \end{aligned}$$

Si se tiene la necesaria paciencia y cuidado, se puede ver que los primeros coeficientes de $Q(x)$ son:

$$Q(x) = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \cdots$$

Se observan algunos patrones en esos coeficientes: muchos coeficientes son nulos y los que no lo son son 1 ó -1. Los signos se alternan de forma regular: dos negativos, dos positivos,... En realidad este comportamiento es siempre así, como se encarga de enunciar el siguiente Teorema que daremos sin demostración

Teorema 3.17 *Los coeficientes q_n de la serie $Q(x) = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots$ son:*

$$q_n = \begin{cases} (-1)^m & \text{si } n = \frac{1}{2}m(3m \pm 1), \quad (m \geq 1), \\ \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Observación 3.18 *Los primeros catorce enteros de la forma $\frac{1}{2}m(3m \pm 1)$ son 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, 40 , 51, 57, 70 y 77.*

El resultado contenido en el Teorema 3.17 es la clave para la forma en la que calcuraremos $p(n)$ recursivamente. Como $Q(x)$ es la serie inversa de $P(x)$ se tiene que

$$\begin{aligned} P(x)Q(x) = (1 + p(1)x + p(2)x^2 + p(3)x^3 + \cdots + p(n)x^n)\times \\ (1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15}) = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el coeficiente de x^n en $P(x)Q(x) = 1$ es cero. La regla para multiplicar series de potencias conduce a la ecuación

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + p(n-7) - p(n-12) - p(n-15) + \cdots = 0.$$

Despejando $p(n)$ tenemos la fórmula recursiva

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) + \cdots,$$

donde el miembro derecho contiene únicamente un número finito de sumandos, ya que sólo aparecen los $p(n-k)$ con $n-k \geq 0$. Por ejemplo,

$$p(14) = p(13) + p(12) - p(9) - p(7) + p(2).$$

El cálculo puede disponerse como en la tabla 3.2 donde se supone que los valores $p(0) = 1$, $p(1) = 1$, $p(2) = 2$, $p(3) = 3$, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$ y $p(6) = 11$ son conocidos. Naturalmente, para calcular valores de $p(n)$ con $n \geq 15$ es necesario añadir filas a la tabla.

n	7	8	9	10	11	12	13	14
$p(n-1)$	11	15	22	30	42	56	77	101
$p(n-2)$	7	11	15	22	30	42	56	77
$p(n-5)$	2	3	5	7	11	15	22	30
$p(n-7)$	1	1	2	3	5	7	11	15
$p(n-12)$	–	–	–	–	–	1	1	2
$p(n)$	15	22	30	42	56	77	101	135

Cuadro 3.2: Cálculo de $p(n)$

3.3. Problemas propuestos

Problema 3.1 .- Probar que una serie de potencias formales

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots \in \mathbb{R}[[x]]$$

es inversible si, y sólo si, $a_0 \neq 0$.

Problema 3.2 .- Obtener y simplificar siempre que sea posible el coeficiente de

$$i)\ x^3 \text{ en } (1+2x)^{-7};\quad ii)\ x^n \text{ en } (1-x)^{-4};\quad iii)\ x^{2r} \text{ en } (1-x)^{-r}$$

Problema 3.3 .- Determinar la función generadora de cada una de las siguientes sucesiones

$$i)\ a_n = n^2 + n\ (n \geq 1)\quad ii)\ b_n = 2n^2\ (n \geq 1)\quad iii)\ c_n = (n+1)n(n-1)\ (n \geq 1)$$

Problema 3.4 .- Supongamos que $A(x)$ es la función generadora de la sucesión $(a_n)_{n\geq 0}$. ¿Cuáles son las funciones generadoras de las sucesiones

$$i)\ p_n = 5a_n;\quad ii)\ q_n = a_n + 5;\quad iii)\ r_n = a_{n+5}?$$

Problema 3.5 .- Usar funciones generadoras para probar las identidades de Pascal y Vandermonde.

Problema 3.6 .- Obtener la función generadora de las sucesión u_n que representa el número de maneras de distribuir n libros distintos entre cuatro personas.

Problema 3.7 .- Se pide:

a) Usar una función generadora para contar las selecciones de seis objetos elegidos con repetición de entre tres clases si a lo sumo tomamos cuatro objetos de cada tipo.

b) Dar la función generadora que nos permite contar el número de formas de seleccionar r bolas de un conjunto de 3 verdes, 3 blancas, 3 azules y 3 negras.

Problema 3.8 .- Construir una función generadora que permita determinar el número de soluciones enteras de las ecuaciones que siguen con las correspondientes restricciones:

a) $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = r$, $0 \leq l_i \leq 4$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$.

b) $l_1 + l_2 + l_3 = r$, $0 < l_i < 4$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$.

c) $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = r$, $2 \leq l_i \leq 8$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$, l_1 par y l_2 impar.

d) $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = r$, $0 \leq l_i$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$.

e) $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 = r$, $0 \leq l_i \leq 4$ $(i \in \{1, 2, 3, 4\})$, l_2, l_4 impares y $l_4 \leq 3$.

Problema 3.9 .- Calcular el número de formas de seleccionar veinticinco ficheros de entre siete tipos distintos, si el número de ficheros de cada tipo está entre dos y seis.

Problema 3.10 .- Determinar de cuántas formas distintas se pueden repartir treinta y cinco monedas idénticas de un euro entre cinco personas si:

a) no hay ningún tipo de restricción.

b) cada persona recibe al menos una moneda.

c) cada persona recibe al menos dos monedas.

d) el mayor recibe al menos diez monedas.

e) las dos personas de menor edad reciben al menos diez monedas.

Problema 3.11 .- Se tira un dado doce veces. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las tiradas sea igual a treinta?

Problema 3.12 .- ¿Cuántos números enteros no negativos de cuatro cifras verifican que la suma de sus dígitos es exactamente dieciocho?

Problema 3.13 .- ¿De cuántas formas distintas se puede cambiar una moneda de un euro en monedas de cinco, diez, veinte y cincuenta céntimos?

Problema 3.14 .- En una tómbola se venden 250 papeletas a cien personas y se sortean seis peluches idénticos. Sabiendo que cincuenta personas compraron tres papeletas cada una y que el resto de personas compró dos papeletas, ¿de cuántas formas distintas puede acabar el sorteo? ¿Y si de antemano sabemos que las papeletas 34 y 145 van a tener premio?

Problema 3.15 .- En las máquinas expendedoras repartidas por la escuela, un café cuesta ochenta céntimos. ¿De cuántas maneras se puede pagar el café con monedas de 5, 10, 20 y 50 céntimos?

Problema 3.16 .- Consideremos el conjunto $I_{15} = \{1, 2, \ldots, 15\}$. Determinar el número de subconjuntos de I_{15} de cuatro elementos ninguno consecutivo.

Problema 3.17 .- Un examen consta de diez preguntas cuyo valor es un número entero positivo. Si la puntuación total del examen es de cien y cada pregunta vale al menos cinco y como mucho veinte, ¿cuántas formas distintas hay de asignar un valor a cada pregunta?

Problema 3.18 .- ¿De cuántas formas pueden separarse 3000 sobres idénticos en paquetes de veinticinco entre cuatro grupos de estudiantes de modo que cada grupo tenga al menos 150 sobres pero no más de 1000?

Problema 3.19 .- Sea la sucesión $(V(n,r))_{r\geq 0}$. Calcular su función generadora exponencial.

Problema 3.20 .- ¿Cuántos números de diez cifras decimales con exactamente tres doses y al menos dos ceros, verifican que la suma de sus cifras es igual a sesenta?

Problema 3.21 .- Un barco lleva 48 banderas, doce de cada uno de los colores rojo, verde, blanco y negro. Se colocan 12 de estas banderas en un mástil para comunicar una señal a otros barcos.

a) ¿Cuántas de estas señales utilizan un número par de banderas vedes y un número impar de banderas negras?

b) ¿Cuántas de estas señales utilizan al menos tres banderas blancas o no tienen ninguna?

Problema 3.22 .- Usar funciones generadoras para determinar el número de palabras con siete letras que podemos formar con las letras $\{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \mathrm{d}, \mathrm{e}\}$, teniendo en cuenta que cada palabra ha de contener al menos dos aes y como mínimo una be.

Problema 3.23 .- Determinar la función generadora que calcula el número de formas de ordenar n letras seleccionadas de: a) HAWAII; b) MISSISSIPPI.

Problema 3.24 .- Se pide:

a) Dar tres ejemplos de particiones de números mayores que diez, determinar sus digramas de Ferrers y hallar sus particiones conjugadas.

b) Dar dos ejemplos de particiones autoconjugadas.

Problema 3.25 .- Probar que el número de particiones autoconjugadas de n es igual al número de particiones de n en partes distintas e impares.

Problema 3.26 .- Comprobar que el número de particiones de diez en partes distintas es igual al número de particiones de diez en partes impares, dando el listado de ambos tipos de particiones.

Problema 3.27 .- Escribir todas las particiones de ocho.

Problema 3.28 .- Demostrar que el número de particiones de n en dos partes como máximo es $\lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Problema 3.29 .- Denotaremos por $p_k(n)$ el número de particiones de n en k partes. Con esta notación, se pide:

a) Demostrar que $p_k(n) = p_k(n-k) + p_{k-1}(n-k) + p_{k-2}(n-k) + \cdots + p_2(n-k) + p_1(n-k)$.

b) Calcular $p_5(9)$ y $p_5(10)$.

Problema 3.30 .- Sea $q_{n,d}$ el número de particiones de n en d partes todas distintas. Demostrar que

$$q_{n,d} = q_{n-d,d} + q_{n-d,d-1} \quad (1 \leq d \leq n)$$

Problema 3.31 .- Utilizar el método de las funciones generadoras para demostrar que

$$p(n|\text{cada parte distinta}) = p(n|\text{cada parte es impar})$$

Problema 3.32 .- Utilizar el método de las funciones generadoras para hallar el número de particiones de dieciséis en las que cada parte es un primo impar.

Problema 3.33 .- Hallar las funciones generadoras de:

a) $p(n|\text{cada parte como máximo dos veces})$

b) $p(n|\text{cada parte es potencia de dos})$

c) $p(n|\text{cada parte es menor que cinco})$

Problema 3.34 .- Calcular $p(15)$, $p(16)$, $p(17)$, $p(18)$, $p(19)$ y $p(20)$.

Capítulo 4

Recursividad

4.1. Conceptos básicos

Hay problemas cuya solución puede expresarse como una función, a, de un entero no negativo n. En este caso, los valores de la función a pueden escribirse como términos de una sucesión (a_n). A menudo, se puede obtener una ecuación que nos dé el valor de un a_n en términos de otros valores anteriores, a_r con $r < n$. En esto se basa el método recursivo.

Por ejemplo, muchos algoritmos resuelven un problema con unos datos determinados dividiéndolo en varios problemas más pequeños. Esta reducción se aplica sucesivamente hasta que las soluciones de los problemas más pequeños se puedan calcular de forma sencilla. Estos procedimientos se denominan **algoritmos de tipo divide y vencerás**. Supongamos que un algoritmo recursivo divide un problema de tamaño n en a subproblemas y que cada subproblema tiene tamaño n/b. Supongamos, también, que se requieren un total de $g(n)$ operaciones para combinar los subproblemas y obtener la solución. Si $f(n)$ denota el número de operaciones necesarias para resolver el problema de tamaño n, se verifica la relación de recurrencia $f(n) = a \cdot f(n/b) + g(n)$: para resolver el problema se necesitan $f(n/b)$ operaciones sobre cada uno de los subproblemas de tamaño a, en total $a \cdot f(n/b)$ operaciones. Si para combinarlos se requieren un total de $g(n)$ operaciones, el número de operaciones totales necesarias es $a \cdot f(n/b) + g(n)$.

Un ejemplo típico de sucesión definida recursivamente es el factorial de un número entero positivo. El factorial de un número entero positivo n se puede calcular en términos del factorial de $n - 1$.

$$a_n = n(n-1)(n-2)\cdots 1 = n[(n-1)(n-2)\cdots 1] = n.a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

Esta ecuación, junto con el conocimiento de que $a_1 = 1$, permite calcular los distintos valores de $a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots$ del siguiente modo:

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 1 = 2, a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 2 = 6, a_4 = 4a_3 = 4 \cdot 6 = 24, \ldots$$

Es útil tener una fórmula explícita para a_n. Se dice que la recurrencia se ha resuelto cuando se dispone de esa fórmula. Así, dado un valor concreto n, se conoce el valor correspondiente de a_n sin necesidad de calcular valores previos de la sucesión.

Definición 4.1 *Una* **relación de recurrencia lineal** *para una sucesión* (a_n) *es una ecuación que determina el término* a_n *en función de varios términos anteriores* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$*:*

$$a_n = c_1(n)a_{n-1} + c_2(n)a_{n-2} + \cdots + c_k(n)a_{n-k} + F(n), \quad n \geq k$$

donde los $c_i(n)$*, con* $1 \leq j \leq n$*, y* $F(n)$ *son funciones de* n*. A las funciones* $c_i(n)$ *se les denomina* **coeficientes** *de la relación de recurrencia lineal. Si* $c_k(n) \neq 0$*, se dice que la recurrencia es de orden* k*. Por otro lado, si los coeficientes de la recurrencia son constantes*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n), \quad n \geq k$$

la recurrencia se dice **lineal** *de orden* k *con* **coeficientes constantes***. Asimismo, se dicen:*

- **condiciones iniciales** *a los valores iniciales de la sucesión, es decir, los término anteriores al primer término para el que está definida la relación y*
- *relación de recurrencia* **homogénea** *si* $F(n) = 0$.

Finalmente, se dice que una sucesión es una solución de la relación de recurrencia si, y sólo si, sus términos satisfacen la relación para todo entero positivo n *para el que está definida.*

Las progresiones geométricas son relaciones de recurrencia lineales homogéneas con coeficientes constantes y de orden 1. Las progresiones aritméticas son relaciones de recurrencia lineales no homogéneas con coeficientes constantes y de orden 1.

Ejemplo 4.2 *Varios ejemplos de relaciones de recurrencia:*

- $a_n = na_{n-1}$ $(n \geq 2)$*, es de orden 1, homogénea y con coeficientes no constantes.*
- $a_n = 3a_{n-2} \cdot a_{n-1}$ $(n \geq 2)$*, es de orden* 2*, homogénea, con coeficientes constantes y no lineal.*
- $a_n = n^2 a_{n-1} + 3a_{n-2}$ $(n \geq 2)$*, es de orden* 2*, homogénea y con coeficientes no constantes.*
- $a_n = na_{n-1}^2 + 3a_{n-2} + 3n$ $(n \geq 3)$*, es de orden* 2*, no homogénea, con coeficientes no constantes y no lineal.*

- $a_n = 3a_{n-1}$ $(n \geq 2)$, *es de orden* 1, *homogénea y con coeficientes constantes (progresión geométrica de razón* 3*).*
- $a_n = a_{n-1} + 3$ $(n \geq 2)$, *es de orden* 1, *no homogénea y con coeficientes constantes (progresión aritmética de diferencia* 3*).*

Nuestro estudio se va a centrar en las relaciones de recurrencia lineales con coeficientes constantes.

4.2. Métodos de resolución

4.2.1. Resolución de relaciones de recurrencia lineales homogéneas

Teorema 4.3 *Sea una relación de recurrencia lineal con coeficientes constantes de orden k*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},\ n \geq k$$

donde c_i, con $1 \leq j \leq n$, es un número real y $c_k \neq 0$. Dadas k condiciones iniciales, $a_1 = C_1, a_2 = C_2, \ldots, a_k = C_k$, la sucesión que satisface la relación queda determinada de manera única.

El primer paso para resolver una relación de recurrencia lineal homogénea de coeficientes constantes, es buscar soluciones del tipo $a_n = r^n$, donde r es una constante no nula. A partir de aquí, hay que encontrar k soluciones linealmente independientes cuyas combinaciones lineales conformen el conjunto de soluciones sin tener en cuenta las condiciones iniciales. Las k condiciones iniciales permiten encontrar, de entre las soluciones anteriores, la solución única.

Teorema 4.4 *Sea la relación de recurrencia lineal de orden k con coeficientes constantes*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k},\quad n \geq k.$$

La sucesión (a_n) con $a_n = r^n$, donde r es una constante no nula, es solución si, y sólo si,

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0$$

Demostración.– Basta observar que $a_n = r^n$, donde r es una constante no nula, es solución si, y sólo si, $r^n - c_1 r^{n-1} - c_2 r^{n-2} - \cdots - c_k r^{n-k} = 0$. Al ser r no nulo se pueden dividir ambos lados de igualdad por r^{n-k}, con lo que queda

$$r^k - c_1 r^{k-1} - c_2 r^{k-2} - \cdots - c_{k-1} r - c_k = 0.$$

■

Definición 4.5 *A la ecuación* $x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \cdots - c_{k-1}x - c_k = 0$ *se le denomina* **ecuación característica** *de la ecuación de recurrencia* $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}, \;\; n \geq k$.

Se necesita analizar las situaciones que aparecen al resolver la ecuación característica:

1. Existencia de soluciones reales simples.
2. Existencia de soluciones reales múltiples.
3. Existencia de soluciones complejas no reales simples.
4. Existencia de soluciones complejas no reales múltiples.

Nuestro estudio se va a centrar en los casos 1 y 2, pero se puede hacer un estudio similar en los casos 3 y 4.

Si r es una solución de la ecuación característica, el Teorema 4.4 muestra que $a_n = r^n$ es solución. Si la ecuación característica sólo tiene raíces simples, $r_1, r_2, \ldots, r_k$, cada una de las sucesiones $a_n = r_i^n$ es solución y son linealmente independientes. Ahora bien, si hay raíces múltiples, seguimos necesitando k soluciones linealmente independientes. ¿Cómo encontrarlas? La respuesta la da el siguiente resultado, teniendo en cuenta que soluciones de una recurrencia lineal homogénea asociadas a raíces distintas de la ecuación característica son linealmente independientes.

Teorema 4.6 *Si* r *es raíz de la ecuación característica y tiene multiplicidad* m*, son soluciones linealmente independientes* $\{r^n, nr^n, \ldots, n^{m-1}r^n\}$.

Definición 4.7 *Al conjunto de combinaciones lineales formadas a partir de las* k *soluciones encontradas se le denomina solución general.*

Ahora tenemos todas las herramientas para resolver relaciones de recurrencia lineales homogéneas. Veamos algunos ejemplos

Ejemplo 4.8 *Resolver la relación de recurrencia dada junto con sus condiciones iniciales:*

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} \text{ para } n \geq 2, \;\; a_0 = 1, \;\; a_1 = 0$$

El primer paso es plantear y resolver la ecuación característica: $r^2 - 5r + 6 = 0$. Sus raíces son 2 y 3. Son raíces simples, por lo que $\{2^n, 3^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones de $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ para $n \geq 2$.

La solución general de la recurrencia lineal homogénea es $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$, donde A y B son constantes arbitrarias.

Para determinar la solución que corresponde a las condiciones iniciales dadas, basta sustituir para los valores concretos de a_0 y a_1:

- Sustituyendo para $n = 0$, $a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 3^0$, esto es, $1 = A + B$.
- Sustituyendo para $n = 1$, $a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 3^1$, esto es, $0 = 2A + 3B$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A + 3B = 0 \end{cases}$$

se obtiene $A = 3$ y $B = -2$. Sustituyendo A y B por los valores concretos obtenidos, se tiene la solución única de la relación de recurrencia con las condiciones dadas

$$a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$$

Ejemplo 4.9 *Resolver la relación de recurrencia dada junto con sus condiciones iniciales:*

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} \text{ para } n \geq 3, \;\; a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = -4.$$

El primer paso es plantear y resolver la ecuación característica: $r^3 - 6r^2 + 12r - 8 = 0$, que tiene una única raíz, 2, de multiplicidad 3. Así $\{2^n, n \cdot 2^n, n^2 \cdot 2^n\}$ constituye una base del conjunto de soluciones de $a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3}$ para $n \geq 3$.

La solución general de la recurrencia es $a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n$

Para determinar la solución que corresponde a las condiciones iniciales dadas, basta sustituir para los valores concretos de a_0, a_1 y a_2.

- Sustituyendo para $n = 0$, $a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + C \cdot 0^2 \cdot 2^0$, esto es, $1 = A$
- Sustituyendo para $n = 1$, $a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C \cdot 1^2 \cdot 2^1$, esto es, $0 = 2A + 2B + 2C$
- Sustituyendo para $n = 2$, $a_2 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C \cdot 2^2 \cdot 2^2$, esto es, $-4 = 4A + 8B + 16C$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A = 1 \\ 2A + 2B + 2C = 0 \\ 4A + 8B + 16C = -4 \end{cases}$$

se obtiene $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$.

Sustituyendo A, B y C por los valores concretos obtenidos, se tiene la solución única de la relación de recurrencia con las condiciones dadas:

$$a_n = 2^n - n \cdot 2^n = (1 - n)2^n$$

Ejemplo 4.10 *Resolver la relación de recurrencia dada junto con sus condiciones iniciales:*

$$a_n = -3a_{n-1} + 4a_{n-3} \text{ para } n \geq 3, \;\; a_0 = 1, \; a_1 = 0, \; a_2 = -3.$$

El primer paso es plantear y resolver la ecuación característica: $r^3 + 3r^2 - 4 = 0$, que tiene dos raíces: -2 con multiplicidad 2 y 1, que es raíz simple. Por lo tanto, $\{(-2)^n, n\cdot(-2)^n, 1^n\}$ es base del conjunto de soluciones de la relación de recurrencia homogénea dada.

La solución general de la recurrencia es $a_n = A \cdot (-2)^n + B \cdot n \cdot (-2)^n + C$.

Para determinar la solución que corresponde a las condiciones iniciales dadas basta sustituir para los valores concretos de a_0, a_1 y a_2:

- Sustituyendo para $n = 0$, $a_0 = A\cdot(-2)^0 + B\cdot 0\cdot(-2)^0 + C$, esto es, $1 = A+C$.
- Sustituyendo para $n = 1$, $a_1 = A \cdot (-2)^1 + B \cdot 1 \cdot (-2)^1 + C$, esto es,

  $0 = -2A - 2B + C$.
- Sustituyendo para $n = 2$, $a_2 = A \cdot (-2)^2 + B \cdot 2 \cdot (-2)^2 + C$, esto es,

  $-3 = 4A + 8B + C$

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ -2A - 2B + C = 0 \\ 4A + 8B + C = -3 \end{cases}$$

se obtiene $A = \dfrac{8}{9}$, $B = \dfrac{-5}{6}$, $C = \dfrac{1}{9}$.

Sustituyendo A, B y C por los valores concretos obtenidos, se tiene la solución única de la relación de recurrencia con las condiciones dadas:

$$a_n = \frac{8}{9}(-2)^n - \frac{5}{6}n \cdot (-2)^n + \frac{1}{9}$$

4.2.2. Resolución de relaciones de recurrencia lineales no homogéneas

Sea una relación de recurrencia lineal no homogénea $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k} + F(n)$, $n \geq k$, donde c_i, $1 \leq j \leq n$, es un número real y $c_k \neq 0$. A la relación $a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \cdots + c_ka_{n-k}$, se le denomina relación de recurrencia lineal homogénea asociada.

Teorema 4.11 *Si* $\left(a_n^{(p)}\right)$ *es una solución particular de la relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n)$$

entonces toda solución es de la forma $\left(a_n^{(h)} + a_n^{(p)}\right)$*, donde* $\left(a_n^{(h)}\right)$ *es la solución general de la relación de recurrencia lineal homogénea asociada.*

El problema, por lo tanto, queda reducido a buscar soluciones particulares para distintas funciones $F(n)$. Nosotros vamos a ver su solución en un caso concreto.

Teorema 4.12 *Sea la relación de recurrencia lineal no homogénea con coeficientes constantes*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + F(n),$$

y supongamos que $F(n) = (b_t n^t + b_{t-1} n^{t-1} + \cdots + b_1 n + b_0) s^n$*, donde* b_0*,* b_1*,...,* b_t *y* s *son números reales.*
Se verifica:

a) Si s *no es raíz de la ecuación característica de la relación lineal homogénea asociada, entonces existe una solución particular de la forma:*

$$(p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n$$

b) Si s *es raíz de la ecuación característica de la relación lineal homogénea asociada con multiplicidad* m*, entonces existe una solución particular de la forma:*

$$n^m (p_t n^t + p_{t-1} n^{t-1} + \cdots + p_1 n + p_0) s^n.$$

Ejemplo 4.13 *Resolver la relación de recurrencia*

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)3^n \text{ para } n \geq 3 \tag{4.1}$$

con las condiciones iniciales:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -3.$$

Se trata de una relación de recurrencia lineal no homogénea de orden tres. Para resolverla seguiremos los siguientes cuatro pasos

- *Primer paso*: encontrar la solución general de la homogénea asociada.
- *Segundo paso*: encontrar una solución particular de la dada.
- *Tercer paso*: encontrar la solución general de la dada.

- *Cuarto paso*: sustituir las condiciones iniciales para encontrar la solución.

- *Primer paso*: Consideramos la homogénea asociada:

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} \text{ para } n \geq 3. \tag{4.2}$$

Vimos en el Ejemplo 4.9 que su solución general es

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

- *Segundo paso*: Consideramos la función $F(n) = (1+n)3^n$. Como 3 no es raíz de la ecuación característica, según el Teorema 4.12, hay que buscar una solución particular de la forma $(D + En)3^n$:

$$a_n = (D + En)3^n$$

En la ecuación (4.1) se sustituyen a_n, a_{n-1}, a_{n-2} y a_{n-3} por sus expresiones: $a_n = (D + En)3^n$, $a_{n-1} = (D + E(n-1))3^{n-1}$, $a_{n-2} = (D + E(n-2))3^{n-2}$ y $a_{n-3} = (D + E(n-2))3^{n-3}$.

Simplificando, se obtiene la ecuación $(27 - E)n - D - 6E + 27 = 0$.

Resolviendo

$$\begin{cases} 27 - E = 0 \\ -D - 6E + 27 = 0 \end{cases}$$

se obtiene $D = -135$ y $E = 27$.

De este modo, una solución particular es $a_n = (-135 + 27n)3^n$.

- *Tercer paso*: La solución general de la dada es

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n + (-135 + 27n)3^n$$

- *Cuarto paso*: Para encontrar la solución que verifica las condiciones iniciales dadas, basta sustituir las condiciones iniciales en la solución general obtenida y resolver el sistema lineal que resulta.

    - Para $n = 0$, $a_0 = A \cdot 2^0 + B \cdot 0 \cdot 2^0 + C \cdot 0^2 \cdot 2^0 + (-135 + 27 \cdot 0)3^0$, esto es, $1 = A - 135$.
    - Para $n = 1$, $a_1 = A \cdot 2^1 + B \cdot 1 \cdot 2^1 + C \cdot 1^2 \cdot 2^1 + (-135 + 27 \cdot 1)3^1$, esto es, $0 = 2A + 2B + 2C - 324$.
    - Para $n = 2$, $a_2 = A \cdot 2^2 + B \cdot 2 \cdot 2^2 + C \cdot 2^2 \cdot 2^2 + (-135 + 27 \cdot 2)3^2$, esto es, $-3 = 4A + 8B + 16C - 729$.

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A = 136 \\ 2A + 2B + 2C = 324 \\ 4A + 8B + 16C = 726 \end{cases}$$

se obtiene $A = 136$, $B = \dfrac{117}{4}$ y $C = \dfrac{-13}{4}$. Por lo tanto, la solución buscada es

$$a_n = 136 \cdot 2^n + \frac{117}{4} n \cdot 2^n - \frac{13}{4} n^2 \cdot 2^n + (-135 + 27n)3^n$$

o, escrito de manera diversa,

$$a_n = 17 \cdot 2^{n+3} + 117 \cdot n \cdot 2^{n-2} - 13 \cdot n^2 \cdot 2^{n-2} + (-15 + 3n)3^{n+2}.$$

Ejemplo 4.14 *Resolver la relación de recurrencia*

$$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} + (1+n)2^n \text{ para } n \geq 3, \tag{4.3}$$

con las condiciones iniciales:

$$a_0 = 1,\ a_1 = 0,\ a_2 = -3.$$

Es una relación de recurrencia lineal no homogénea de orden tres. Para resolverla, seguiremos los mismos pasos que en el ejemplo anterior.

- *Primer paso*: Consideramos la homogénea asociada:

  $$a_n = 6a_{n-1} - 12a_{n-2} + 8a_{n-3} \text{ para } n \geq 3. \tag{4.4}$$

  Vimos en el Ejemplo 4.9 que su solución general es

  $$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot n \cdot 2^n + C \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

- *Segundo paso*: Consideramos la función $F(n) = (1+n)2^n$. Como 2 es raíz de la ecuación característica de multiplicidad 3, según el Teorema 4.12, hay que buscar una solución particular de la forma $n^3(D + En)3^n$:

  $$a_n = n^3(D + En)2^n.$$

  En la ecuación (4.3) se sustituyen a_n, a_{n-1}, a_{n-2} y a_{n-3} por sus expresiones: $a_n = n^3(D + En)2^n$, $a_{n-1} = (n-1)^3(D + E(n-1))2^{n-1}$,

  $a_{n-2} = (n-2)^3(D + E(n-2))2^{n-2}$ y $a_{n-3} = (n-3)^3(D + E(n-3))2^{n-3}$.

Simplificando se obtiene la ecuación $(24E-1)n+6D-36E-1=0$. Resolviendo

$$\begin{cases} 27E-1=0 \\ 6D-36E-1=0 \end{cases}$$

se obtiene $D=\dfrac{5}{12}$ y $E=\dfrac{1}{24}$.

Así pues, una solución particular es $a_n = n^3\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{24}n\right)2^n$

- *Tercer paso*: La solución general de la dada es

$$a_n = A\cdot 2^n + B\cdot n\cdot 2^n + C\cdot n^2\cdot 2^n + n^3\left(\frac{5}{12}+\frac{1}{24}n\right)2^n$$

- *Cuarto paso*: Para encontrar la solución que verifica las condiciones iniciales dadas, basta sustituir las condiciones iniciales en la solución general obtenida y resolver el sistema lineal que resulta.
  - Para $n=0$, $a_0 = A\cdot 2^0 + B\cdot 0\cdot 2^0 + C\cdot 0^2\cdot 2^0 + 0^3\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{24}\cdot 0\right)2^0$, esto es, $1=A$.
  - Para $n=1$, $a_1 = A\cdot 2^1 + B\cdot 1\cdot 2^1 + C\cdot 1^2\cdot 2^1 + 1^3\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{24}\cdot 1\right)2^1$, esto es, $0 = 2A+2B+2C+\dfrac{11}{12}$.
  - Para $n=2$, $a_2 = A\cdot 2^2 + B\cdot 2\cdot 2^2 + C\cdot 2^2\cdot 2^2 + 2^3\left(\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{24}\cdot 2\right)2^2$, esto es, $-3 = 4A+8B+16C+16$.

Resolviendo el sistema

$$\begin{cases} A=1 \\ 2A+2B+2C=-\frac{11}{12} \\ 4A+8B+16C=-19 \end{cases}$$

se obtiene $A=1$, $B=-\dfrac{1}{24}$ y $C=-\dfrac{17}{12}$.

En consecuencia, la solución buscada es

$$a_n = 2^n - \frac{1}{24}\cdot n\cdot 2^n - \frac{17}{12}\cdot n^2\cdot 2^n + \left(\frac{5}{12}+\frac{1}{24}n\right)2^n$$

o, escrito de distinta manera,

$$a_n = 2^n - \frac{1}{3}\cdot n\cdot 2^{n-3} - \frac{17}{3}\cdot n^2\cdot 2^{n-2} + \left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}n\right)2^{n-2}.$$

Ejemplo 4.15 *Encontrar una relación de recurrencia y dar las condiciones iniciales para determinar el número de cadenas de n bits que no contienen dos unos consecutivos.*

Sea a_n el número de cadenas de n bits que no tienen dos unos consecutivos.

Al considerar una de esas cadenas hay dos situaciones excluyentes: que la cadena termine en 0 o que termine en 1. Si termina en 0, los $n-1$ primeros bits tienen que cumplir la condición de no tener dos unos consecutivos. De este tipo hay a_{n-1}. Si termina en 1, al no tener dos unos consecutivos, el bit que ocupa el penúltimo tiene que ser 0. De este modo, los $n-2$ primeros bits tienen que cumplir la condición de no tener dos unos consecutivos. De este tipo hay a_{n-2}.

Las observaciones anteriores se pueden realizar siempre que haya al menos 3 bits.

De lo anterior se obtiene la relación de recurrencia:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ si } n \geq 3$$

Veamos ahora cuáles son las condiciones iniciales:

- Las cadenas de longitud uno son dos y ambas verifican la condición. Por lo tanto, $a_1 = 2$.
- De las cuatro cadenas de longitud dos sólo una, 11, no verifica la condición. Por lo tanto, $a_2 = 3$.

Resolviendo la ecuación de recurrencia con las correspondientes condiciones iniciales se tiene:

$$a_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

4.3. Problemas propuestos

Problema 4.1 .- Resolver las siguientes relaciones de recurrencia:

a) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2}$, $n \geq 2$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

b) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3}$, $n \geq 3$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

Problema 4.2 .- Resolver las siguientes relaciones de recurrencia:

a) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n^2 3^n$, $n \geq 2$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

b) $a_n = 7a_{n-1} - 10a_{n-2} + n^2 5^n$, $n \geq 2$; $a_0 = 0$, $a_1 = -2$.

c) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, $n \geq 0$; $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

d) $a_n = 3a_{n-2} - 2a_{n-3} + (-2)^n$, $n \geq 3$; $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$.

e) $a_{n+1} - a_n = 2n + 3$, $n \geq 1$; $a_0 = 1$.

f) $a_{n+1} - 2a_n = 2^n$, $n \geq 0$; $a_0 = 1$.

g) $a_{n+2} = -4a_{n+1} + 5a_n + (n+3)2^n$, $n \geq 0$; $a_0 = 2$, $a_1 = -1$.

h) $a_n = 6a_{n-1} + 8^{n-1}$, $n \geq 1$; $a_0 = 1$.

Problema 4.3 .- ¿Cuál es la forma general de las soluciones de una relación de recurrencia lineal homogénea si las raíces de su ecuación característica son 1, 1, 1, 1, −2, −2, −2, 3, 3, −4?

Problema 4.4 .- Calcular en términos de una relación de recurrencia la suma de los cuadrados de los n primeros números naturales. Resolverla.

Problema 4.5 .- Calcular, usando relaciones de recurrencia, la suma

$$1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n.$$

Problema 4.6 .- Encontrar una relación de recurrencia y las condiciones iniciales para el número de palabras capicúas de longitud n que se pueden formar usando solamente las letras A, B, C. Resolverla.

Problema 4.7 .- Calcular el número de cadenas de longitud n con los dígitos 1, 2, 3, 4 que contienen un número impar de 3.

Problema 4.8 .- Considérense todas las cadenas de longitud n para los caracteres {a, o, e, x, y} que no tengan dos consonantes juntas. Calcular su número utilizando relaciones de recurrencia.

Problema 4.9 .- Determinar la relación de recurrencia que nos permite calcular el número de secuencias de longitud n con los números enteros del 0 al 7, con un número impar de sietes.

Problema 4.10 .- Determinar la relación de recurrencia que nos permite calcular el número de enteros positivos de n cifras decimales con, al menos, dos ceros consecutivos.

Problema 4.11 .- Hallar una relación de recurrencia para el número de formas en que una persona puede subir n escalones si puede subir uno o dos peldaños en cada paso.

Problema 4.12 .- Tenemos una pared cuya superficie es de $2n$ metros cuadrados (n metros de largo y 2 de alto). La vamos a alicatar con baldosas de dos tipos: unas miden 2×1 y las otras 2×2. Se supone que las baldosas no se distinguen salvo por su medida. ¿De cuántas formas podemos alicatar? Encontrar la ecuación de recurrencia que verifica, las condiciones iniciales y resolverla.

Problema 4.13 .- Problema de las Torres de Hanoi: Se tienen n discos y 3 estacas. Los discos están apilados en la estaca 1, ordenados de mayor a menor. El objetivo es pasar los discos uno por uno a otra estaca, colocados en el orden original. En el proceso no se permite que un disco mayor se coloque sobre otro menor. Si a_n es el número mínimo de movimientos que se requieren para hacer esto, encuentra una relación de recurrencia para calcular a_n y resuélvela.

Problema 4.14 .- Se emiten mensajes que duran n segundos y que están compuestos por 4 tipos de señales: las señales de dos de los tipos duran 1 segundo cada una, otro tipo dura 2 segundos y el cuarto tipo dura 3 segundos. ¿Cuántos mensajes se pueden emitir sin hueco entre señal (las señales se pueden emitir de forma independiente)? Encontrar la ecuación de recurrencia que verifica y las condiciones iniciales. (No hay que resolver la relación de recurrencia).

Problema 4.15 .- Sea A_n la matriz

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallar una relación de recurrencia para la sucesión cuyo término general es $D_n = det(A_n)$. Resuélvala.

Problema 4.16 .- Calcular usando recurrencias el número de diagonales de un polígono convexo de n vértices. (Un polígono es convexo si cualquier línea que une dos puntos del polígono está completamente contenida en el polígono).

Problema 4.17 .- Una empleada es contratada por una empresa con un salario de 50.000 euros anuales, y se acuerda que cada año que permanezca en la empresa su salario doblará el del año anterior, con un incremento adicional de 10.000 euros por cada año trabajado.

a) Determinar una relación de recurrencia para el salario de la empleada durante el n-ésimo año.

b) Resuelve esta relación para determinar su salario durante el año n-ésimo.

Problema 4.18 .- Determinar una relación de recurrencia que permita calcular el número de formas en las que se puede ordenar una caravana publicitaria con n furgonetas y n coches de tal forma que no haya dos furgonetas juntas. ¿Cuáles son las condiciones iniciales? Resolver la relación de recurrencia. (**NOTA**: La relación de recurrencia es lineal pero de coeficientes no constantes. Para resolverla, podemos calcular algunos términos de la sucesión para tratar de inferir el término general y, después, demostrar que la inferencia ha sido correcta usando el principio de inducción.)

Parte III

Teoría de grafos

Capítulo 5

Introducción a la teoría de grafos

5.1. Terminología básica y tipos de grafos

Una primera aproximación a la teoría de grafos la tenemos cuando observamos un mapa de carreteras: ciudades (vértices) unidas por tramos de carretera (aristas). Tenemos dos conjuntos distintos de objetos, ciudades y tramos de carretera. Los tramos de carretera establecen una relación en el conjunto de ciudades: estar unidas mediante esa red de carreteras. Nos podemos preguntar, por ejemplo, si dadas dos ciudades concretas podemos ir de una a otra, la forma más corta de ir, o si podemos recorrerlas todas pasando por todos los tramos de carretera una sola vez. A estas y otras preguntas intenta dar respuesta la teoría de grafos. También se pueden utilizar grafos para determinar si dos ordenadores están conectados o para representar la Red de Internet.

5.1.1. Terminología básica

Definición 5.1 *Un grafo es una terna $G = (V, E, p)$ formada por dos conjuntos y una aplicación:*

$$p : E \longrightarrow P_2(V)$$

que hace corresponder a cada elemento del conjunto E un subconjunto de uno o dos elementos del conjunto V[1]*. El conjunto V es no vacío y a sus elementos se les llama* **vértices** *o* **nodos***, mientras que a los elementos de E se les llama* **aristas** *o* **arcos***. La aplicación p se denomina aplicación de* **incidencia del grafo***. Si $p(a) = \{u, v\}$, se dice que los vértices u y v son los* **extremos** *de la arista a. En esta situación, la arista a se dice* **incidente** *con los vértices u y v, y los vértices u y v se dicen* **adyacentes***.*

Otros conceptos de interés asociados los damos a continuación.

[1] Obsérvese que el conjunto de subconjuntos de V de uno y dos elementos está denotado en la definición de p por $P_2(V)$.

- Si dos aristas a y b son incidentes con los mismos vértices se dicen **paralelas**. En este caso se dice que el grafo tiene **aristas múltiples**.
- Si $p(a) = u$ la arista a se denomina bucle.
- Un grafo se dice **simple** si, y sólo si, no posee bucles y la aplicación de incidencia es inyectiva.

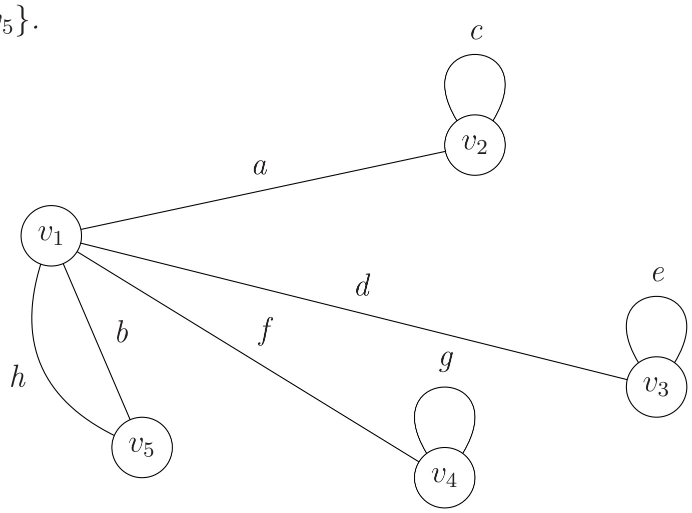
Definición 5.2 *Un* **grafo dirigido** *es una terna $G = (V, E, p)$ formada por dos conjuntos y una aplicación*

$$p : E \longrightarrow V \times V$$

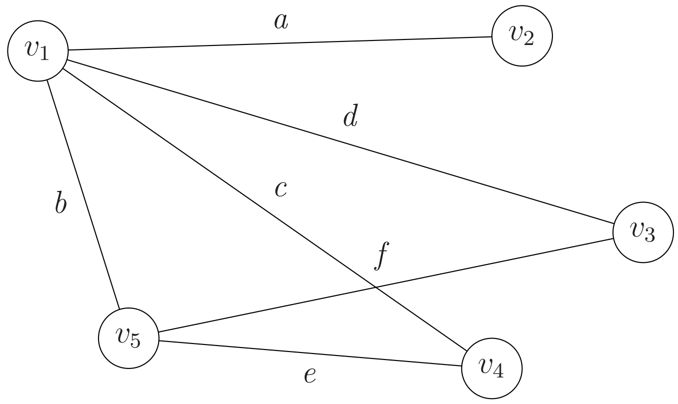
que hace corresponder a cada elemento del conjunto E con un par ordenado de elementos de V. Si $p(a) = (u, v)$ se dice que u es el extremo inicial y v es el extremo final.
Un grafo se dice **etiquetado** *si, y sólo si, a cada una de sus aristas se le asocia un número real. A dicho número se le llama* **peso** *o* **etiqueta**.

En lo que sigue trabajaremos con grafos finitos; es decir, grafos en los que los conjuntos de vértices y aristas son finitos.
Por otro lado, señalemos que en los grafos simples, al ser la arista asociada a un par de vértices única, se puede identificar la arista con el par de vértices en los que incide.

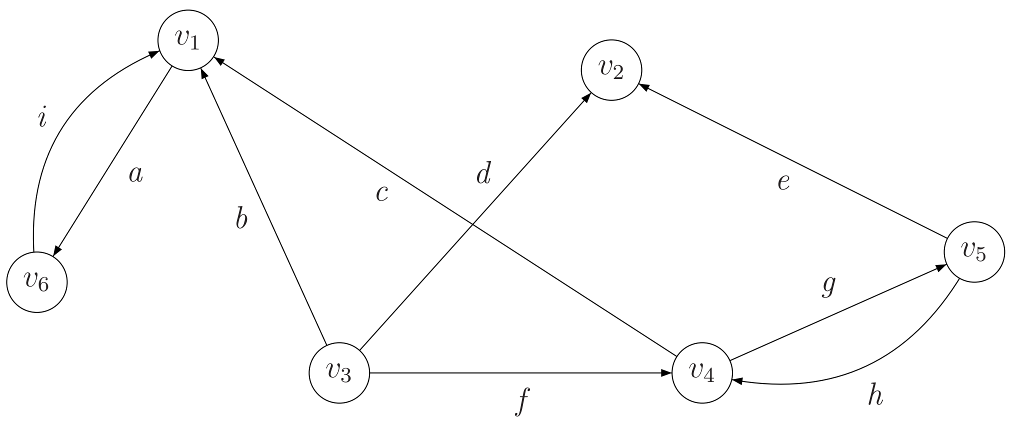
Ejemplo 5.3 *Ejemplo de grafo no simple.*
Consideramos un grafo con cinco vértices, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ y ocho aristas $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. La aplicación de incidencia está dada por: $p(a) = \{v_1, v_2\}$, $p(b) = \{v_1, v_5\}$, $p(c) = \{v_2\}$, $p(d) = \{v_1, v_3\}$, $p(e) = \{v_3\}$, $p(f) = \{v_1, v_4\}$, $p(g) = \{v_4\}$, $p(h) = \{v_1, v_5\}$.



Ejemplo 5.4 *Ejemplo de grafo simple.*
Tomamos un grafo con cinco vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *y seis aristas* $E = \{a, b, c, d, e, f\}$*, cuya aplicación de incidencia está dada por* $p(a) = \{v_1, v_2\}$*,* $p(b) = \{v_1, v_5\}$*,* $p(c) = \{v_1, v_4\}$*,* $p(d) = \{v_1, v_3\}$*,* $p(e) = \{v_4, v_5\}$*,* $p(f) = \{v_5, v_3\}$*.*



Ejemplo 5.5 *Ejemplo de grafo dirigido.*
Consideramos un grafo dirigido con cinco vértices $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ *y nueve aristas* $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$*, cuya aplicación de incidencia viene dada por:* $p(a) = (v_1, v_6)$*,* $p(b) = (v_3, v_1)$*,* $p(c) = (v_4, v_1)$*,* $p(d) = (v_3, v_2)$*,* $p(e) = (v_5, v_2)$*,* $p(f) = (v_3, v_4)$*,* $p(g) = (v_4, v_5)$*,* $p(h) = (v_5, v_4)$*,* $p(i) = (v_6, v_1)$*.*



Definición 5.6 *En un grafo no dirigido, se define* **grado** *de un vértice como el número de aristas que inciden con él, contando los bucles dos veces. El grado del vértice v se denota por $\delta(v)$.*
En un grafo dirigido, el **grado de entrada** *de un vértice v es el número de aristas que lo tienen como vértice final, y se denota por $\delta^-(v)$. El* **grado de salida** *es el número de aristas que lo tienen como vértice inicial, y se denota por $\delta^+(v)$.*

Ejemplo 5.7 *Grados del ejemplo 5.3:*

$$\delta(v_1) = 5,\ \delta(v_2) = 3,\ \delta(v_3) = 3,\ \delta(v_4) = 3,\ \delta(v_5) = 2.$$

Obsérvese que $\sum_{i=1}^{4} \delta(v_i) = 16 = 2 \cdot 8 = 2|E|$. Por otro lado, se ve que hay un número par de vértices, 4, con grado impar. Veremos posteriormente (Teoremas 5.9 y 5.10) que estas dos cosas no son casuales.

Ejemplo 5.8 *Grados del ejemplo 5.5:*

$$\delta^-(v_1) = 3,\ \delta^+(v_1) = 1,\ \delta^-(v_2) = 2,\ \delta^+(v_2) = 0,\ \delta^-(v_3) = 0,\ \delta^+(v_3) = 3,$$
$$\delta^-(v_4) = 2,\ \delta^+(v_4) = 2,\ \delta^-(v_5) = 1,\ \delta^+(v_5) = 2,\ \delta^-(v_6) = 1,\ \delta^+(v_6) = 1$$

Obsérvese que $\sum_{i=1}^{4} \delta^-(v_i) = \sum_{i=1}^{4} \delta^+(v_i) = 9 = |E|$. Veremos (Teorema 5.11) que, de nuevo, esto no es casualidad.

Teorema 5.9 *Sea $G = (V, E, p)$ un grafo no dirigido. Entonces*

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.$$

Demostración.– Basta observar que cada arista aporta dos unidades a la suma de los grados, una por cada uno de los dos vértices a los que es incidente si no es un bucle, y dos por cada bucle.

■

Teorema 5.10 *Todo grafo no dirigido tiene un número par de vértices de grado impar.*

Demostración.– Sea $G = (V, E, p)$ un grafo no dirigido y sean V_1 y V_2 los conjuntos de vértices de grado par y de grado impar, respectivamente. Estos conjuntos constituyen una partición del conjunto V, esto es, $V = V_1 \cup V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.
Aplicando el resultado del Teorema 5.9 se obtiene:

$$2|E| = \sum_{v\in V} \delta(v) = \sum_{v\in V_1} \delta(v) + \sum_{v\in V_2} \delta(v).$$

Si $v \in V_1$, $\delta(v)$ es un número par. Por tanto, $\sum_{v\in V_1} \delta(v)$ es par.

Por otra parte, $\sum_{v\in V_2} \delta(v) = 2|E| - \sum_{v\in V_1} \delta(v)$ es también par. En consecuencia, $\sum_{v\in V_1} \delta(v)$ es un número par que es suma de impares. En consecuencia, tiene que haber un número par de sumandos. El número de sumandos es el número de vértices del conjunto V_2. Así, se tiene, que hay un número par de vértices en V_2.

■

Teorema 5.11 *Sea $G = (V, E, p)$ un grafo dirigido. Entonces*

$$\sum_{v\in V} \delta^-(v) = \sum_{v\in V} \delta^+(v) = |E|$$

Demostración.– Basta observar que cada arista tiene un vértice inicial y un vértice final. Por tanto aporta una unidad a la suma de los grados de entrada y una unidad a la suma de los grados de salida.

■

Definición 5.12 *Dado un grafo $G = (V', E', p')$, se dice subgrafo de un grafo $G = (V, E, p)$ si, y sólo si, se verifican las condiciones:*

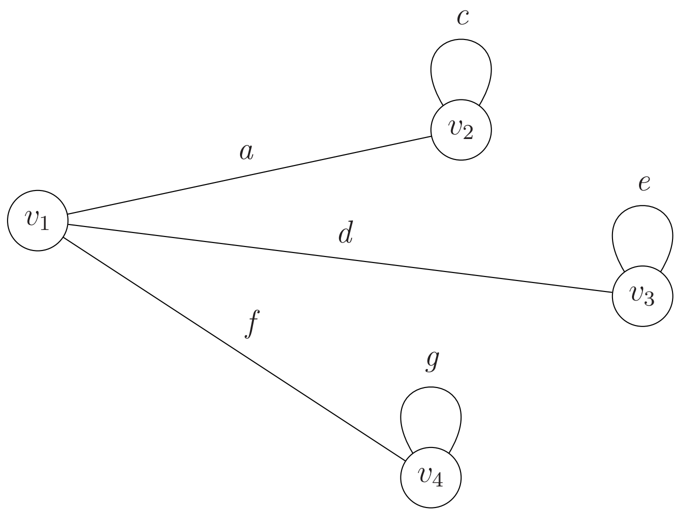
a) $V' \subset V$

b) $E' \subset E$

c) $p' = p|_E$

Podríamos reescribir la definición anterior diciendo que "un subgrafo de un grafo dado es una parte del grafo que es grafo por sí mismo".

Ejemplo 5.13 *Un subgrafo del grafo del ejemplo 5.3*

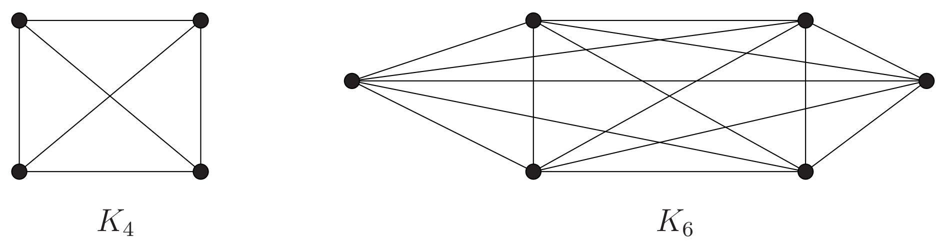


5.1.2. Tipos de grafos

En este apartado se van a introducir algunas familias de grafos simples no dirigidos:

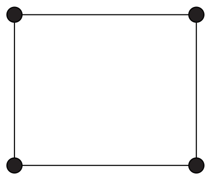
Definición 5.14 *Se dice* **grafo completo** *de n vértices al grafo simple de n vértices que contiene exactamente una arista entre cada par de vértices distintos. Se denota por K_n.*

Ejemplo 5.15 *Dibujamos K_4 y K_6*

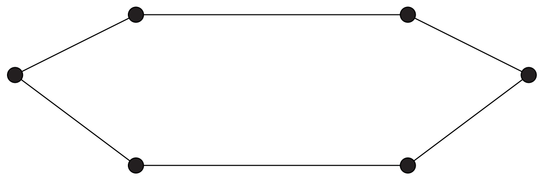


Definición 5.16 *Se llama* **ciclo de n vértices** *($n \geq 3$) al grafo que consta de n vértices, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y las n aristas $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$. El ciclo de n vértices se denota por C_n.*

Ejemplo 5.17 *Dibujamos C_4 y C_6*



C_4



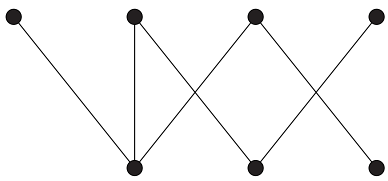
C_6

Definición 5.18 *Los grafos que tienen el mismo grado en todos los vértices se dicen grafos regulares.*

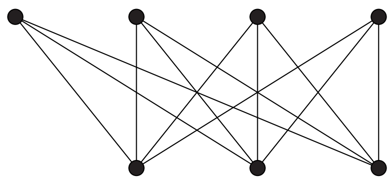
Ejemplo 5.19 *Los grafos C_n y K_n son ejemplos de grafos regulares.*

Definición 5.20 *Un grafo simple es* **bipartido** *si su conjunto de vértices V se puede dividir en dos conjuntos disjuntos, $V = V_1 \cup V_2$, tales que cada arista del grafo conecta un vértice de V_1 con un vértice de V_2, de manera que no haya ninguna arista que conecte entres sí dos vértices de V_1 ni dos vértices de V_2. En el caso en que todos los vértices de V_1 estén conectados con todos los vértices de V_2 se dice* **completo**. *Si los dos subconjunto de vértices tiene m y n vértices, el grafo bipartido completo se denota por $K_{n,m}$.*

Ejemplo 5.21 *Como ilustración de la definición, dibujamos un grafo bipartido y $K_{4,3}$.*



Grafo bipartido



$K_{4,3}$

5.2. Representación de grafos e isomorfismo de grafos

En los apartados anteriores se ha utilizado una representación gráfica de los grafos, representando los vértices como puntos y las aristas como líneas que unen los puntos. En este apartado introduciremos otras formas de representar los grafos, lo que permitirá dar un tratamiento sistemático a su estudio. En particular, permitirá tratar los grafos computacionalmente.

5.2.1. Lista de adyacencia

Las **listas de adyacencia** son una forma de representar grafos sin aristas múltiples. En ellas, se especifican los vértices adyacentes a cada vértice del grafo.

Ejemplo 5.22 *Listas de adyacencia de los grafos de los ejemplos 5.4 y 5.5*

Vértice	Vértices adyacentes
v_1	v_2, v_3, v_4, v_5
v_2	v_1
v_3	v_5
v_4	v_5
v_5	v_1, v_3, v_4

Vértice inicial	Vértices finales
v_1	v_6
v_2	
v_3	v_1, v_2, v_4
v_4	v_1, v_5
v_5	v_2, v_4
v_6	v_1

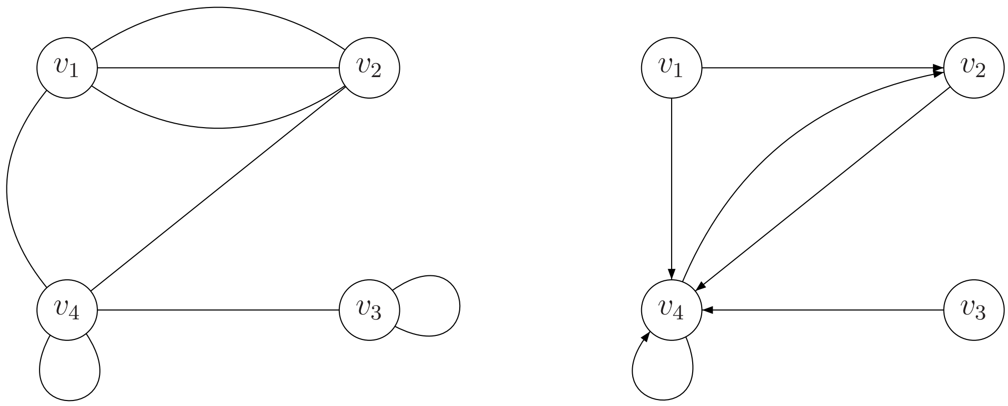
La primera de las tablas se corresponde con el ejemplo 5.4: en ella, se señalan los vértices adayacentes a cada uno de los vértices del grafo. En la segunda tabla, que se corresponde con el grafo dirigido del ejemplo 5.5, hemos de reflejar que el grafo es dirigido: lo hacemos señalando en la primera columna los vértices y en la segunda aquellos vértices finales de aristas que parten del correspondiente vértice.

5.2.2. Matrices de adyacencia

Las **matrices de adyacencia** se basan en la adyacencia de vértices y van asociadas a una ordenación cualquiera en el conjunto de vértices.

Definición 5.23 *Sea $G = (V, E, p)$ un grafo con n vértices, y $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una ordenación del conjunto de vértices. La* **matriz de adyacencia** *respecto a ese orden de los vértices es una matriz $n \times n$, $A = (a_{ij})$, donde a_{ij} es igual al número de aristas adyacentes a los vértices $\{v_i, v_j\}$.*
En el caso de grafo dirigidos, a_{ij} es igual al número de aristas asociadas al par ordenado de vértices (v_i, v_j).

Ejemplo 5.24 *Encontrar las matrices de adyacencia, para la ordenación de vértices $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, de los siguientes grafos:*



Las matrices de adyacencia son:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que la matriz de adyacencia de un grafo no dirigido ha de ser necesariamente simétrica. No es el caso, obviamente, de las matrices de adyacencia asociadas a grafos dirigidos.

Observación 5.25 *Hay tantas matrices de adyacencia asociadas a un grafo como formas de ordenar sus vértices. Si el grafo tiene* n *vértices, hay* $n!$ *matrices de adyacencia.*

5.2.3. Isomorfismo de grafos

Es evidente que lo importante de un grafo no son ni los nombres de los vértices ni su dibujo, o cualquier otra representación. La propiedad característica de un grafo es la manera en que los vértices están unidos por las aristas. Esto motiva la siguiente definición.

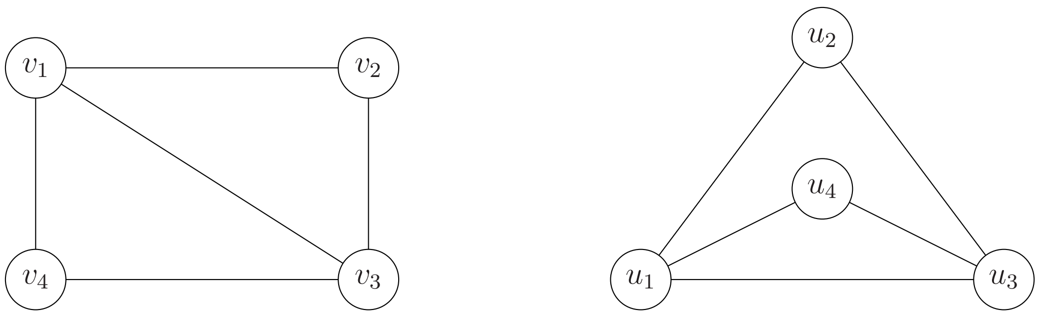
Definición 5.26 *Dos grafos simples* $G_1 = (V_1, E_1, p_1)$ *y* $G_2 = (V_2, E_2, p_2)$ *se dicen isomorfos si, y sólo si, hay una aplicación biyectiva* $f : V_1 \to V_2$ *que verifica que para cada par de vértices* $u, v \in V_1$, u *y* v *son adyacentes en* G_1 *si, y sólo si,* $f(u)$ *y* $f(v)$ *son adyacentes en* G_2. *El vértice* $f(u) \in V_2$ *se dice* **vértice homólogo** *de* $u \in V_1$. *Asimismo, la arista* $\{f(u), f(v)\} \in E_2$ *se dice* **arista homóloga** *de* $\{u, v\} \in E_1$. *La aplicación* f *se denomina isomorfismo entre los grafos* G_1 *y* G_2.

Cuando dos grafos simples son isomorfos hay una función biyectiva que preserva la relación de adyacencia.

Con frecuencia, es difícil determinar si dos grafos simples son isomorfos o no. Para un grafo con n vértices hay $n!$ posibles biyecciones del conjunto de vértices en sí mismo.

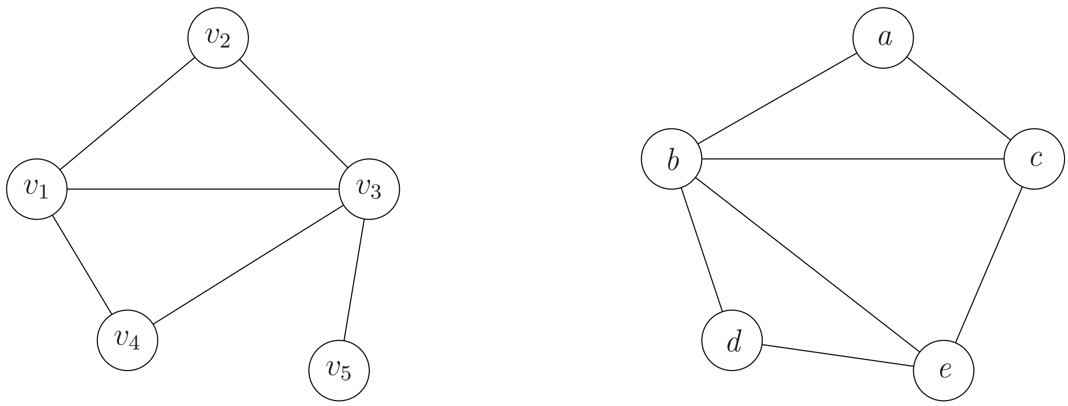
Los grafos isomorfos tienen algunas propiedades comunes. A éstas se les llama invariantes bajo isomorfismo: por ejemplo, son invariantes bajo isomorfismo el número de vértices, el número de aristas, los grados de los vértices... Por tanto, se puede demostrar que dos grafos no son isomorfos demostrando que no comparten alguna propiedad invariante por isomorfismos.

Ejemplo 5.27 *Los dos grafos siguientes son isomorfos*



El isomorfismo f entre ambos grafos está dado por $f(v_i) = u_i$ ($1 \leq i \leq 4$).

Ejemplo 5.28 *Los siguientes dos grafos no son isomorfos.*



Basta observar que el vértice v_5 del primer grafo tiene grado uno, mientras que en el segundo grafo no hay vértices que tengan grado uno.

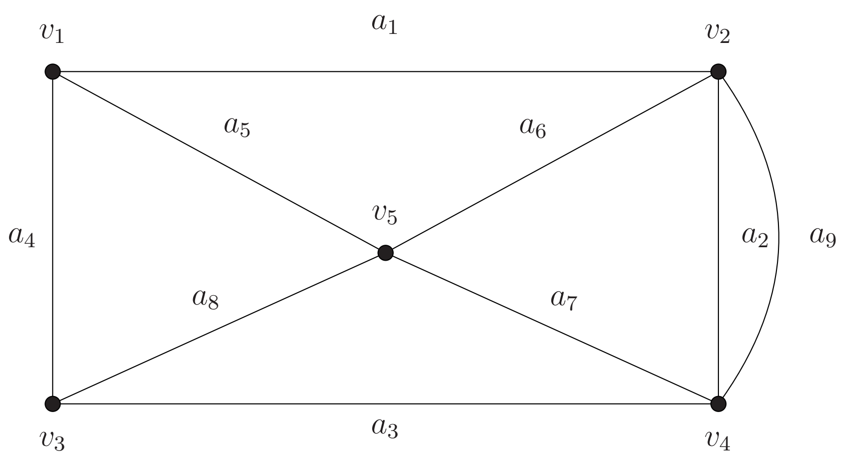
5.3. Caminos y ciclos. Conexión

5.3.1. Caminos

Definición 5.29 *Sean G un grafo no dirigido y n un número entero positivo. Un* **camino de longitud** *n de u a v en G es una secuencia de n aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ de G tal que $e_1 = \{x_0, x_1\}, e_2 = \{x_1, x_2\}, \ldots, e_n = \{x_{n-1}, x_n\}$, donde $x_0 = u$ y $x_n = v$. En esta situación, se dice que los vértices u y v están* **conectados**. *Si el grafo es simple, el camino se denota por su secuencia de vértices.*[2]

Definición 5.30 *El camino se dice circuito o ciclo si empieza y termina en el mismo vértice, esto es, si $u = v$ en la definición anterior. Un camino es simple si todas las aristas son distintas dos a dos. Un camino es elemental si todos los vértices son distintos dos a dos, salvo a lo sumo x_0, x_n.*

Ejemplo 5.31 *En el grafo no dirigido*



un camino simple de v_3 a v_1 está dado por la sucesión de aristas

$$a_8, a_6, a_2, a_3, a_4, a_1, a_9, a_7, a_5.$$

Un circuito está dado por la sucesión de aristas a_8, a_6, a_2, a_9, a_3.

Teorema 5.32 *La existencia de un ciclo simple de una longitud concreta es un invariante por isomorfismo.*

Teorema 5.33 *Sea G una grafo, dirigido o no, y sea A su matriz de adyacencia con respecto a una ordenación $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de sus vértices. El número de caminos distintos de longitud r de v_i a v_j, donde r es un entero positivo, es igual al elemento en la posición (i, j) de la matriz A^r.*

[2] Una definición similar puede darse en grafos dirigidos. Bastará sustituir las aristas $\{x_i, x_{i+1}\}$ por aristas dirigidas (x_i, x_{i+1}).

5.3.2. Conexión

Definición 5.34 *Se dice que un grafo no dirigido es conexo si hay un camino entre cada par de vértices distintos del grafo.*

Teorema 5.35 *Hay un camino simple entre cada par de vértices de un grafo no dirigido conexo.*

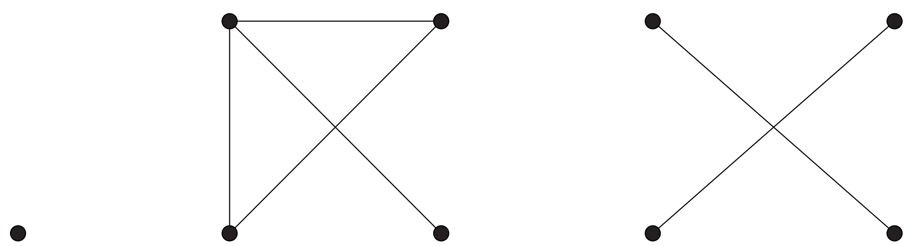
Demostración.– Sea $G = (V, E)$ un grafo conexo no dirigido, y sean u y v dos vértices distintos del grafo. Al ser el grafo conexo existe un camino entre u y v. Sean $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $x_0 = u$ y $x_n = v$, la secuencia de vértices de un camino de longitud mínima. Se va a demostrar por reducción al absurdo que este camino es simple.

Supongamos que no lo es, es decir, que existen aristas que se repiten. Entonces, existen $x_i = x_j$, para algunos i, j con $0 \leq i < j$. Basta considerar el camino que se obtiene eliminando las aristas que componen los vértices $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}$, esto es, el camino $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_j, \ldots, x_n$. Este camino tiene una longitud estrictamente menor que el de partida, lo que contradice que el camino elegido sea el de longitud mínima.

■

Definición 5.36 *Un grafo no dirigido que no es conexo es unión de dos o más subgrafos conexos que dos a dos no tienen vértices en común. A esos subgrafos conexos se les llama componentes conexas.*

Ejemplo 5.37 *El siguiente grafo tiene 4 componentes conexas*



Teorema 5.38 *El número de componentes conexas es un invariante por isomorfismo.*

5.4. Caminos mínimos: Algoritmo de Dijkstra

Al observar un mapa de carreteras se pueden considerar las distancias en kilómetros que hay entre las ciudades: en este caso, a cada arista del correspondiente grafo se le asigna el valor correspondiente a la distancia entre las ciudades que une. Una pregunta natural es cuál es el trayecto a realizar entre dos ciudades para que la distancia recorrida sea mínima.

Definición 5.39 *Un grafo se dice* **ponderado** *si, y sólo si, a cada una de las aristas se le asigna un número real no negativo. A dicho número se le denomina* **peso** *de la arista. En un grafo ponderado hay definida una aplicación, llamada* **función de peso**

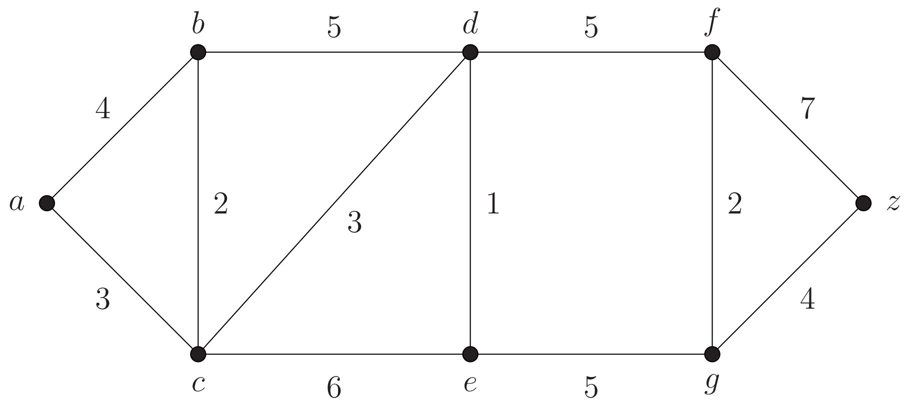
$$w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

que a cada arista del grafo le asocia su peso.

Definición 5.40 *Se define longitud de un camino de un grafo ponderado como la suma de los pesos de las aristas del camino.*

Obsérvese que esta definición de longitud es distinta a la longitud que denota el número de aristas de un camino.

Ejemplo 5.41 *Ejemplo de grafo ponderado*



5.4.1. Algoritmo de Dijkstra

Vamos a presentar un algoritmo que permite hallar un camino de longitud mínima entre dos vértices en un grafo ponderado. Sean a el vértice de partida y z el vértice final. Al peso de una arista cualquiera u, v se le denotará por $w(u, v)$. El algoritmo lo presentaremos para el caso de grafos simples no dirigidos. Es fácil adaptarlo para el caso de grafos dirigidos.

El algoritmo que presentaremos se conoce como algoritmo de Dijkstra y es iterativo:

Se construye un conjunto distinguido de vértices al que se añade un vértice en cada iteración. Este conjunto es el conjunto de vértices para los que se ha obtenido un camino de longitud mínima desde el vértice de partida a. También se lleva a cabo un proceso de etiquetado de los vértices. Este etiquetado es la longitud del camino mínimo de a al correspondiente vértice pasando únicamente por vértices en el conjunto distinguido de vértices (esta longitud se considera ∞ si no hay ningún camino tal), junto a los vértices por los que pasa el citado camino.

- En el inicio, $S_0 = \emptyset$ es el conjunto distinguido de vértices. La etiqueta de a es $L_0(a) = 0$, $C_0(a) = \emptyset$. El resto de vértices están etiquetados por $L_0(a) = \infty$, $C_0(a) = \emptyset$.

- Se supone construidos en el paso $(k-1)-$ésimo S_{k-1}, el conjunto de vértices distinguidos, y $L_{k-1}(v), C_{k-1}(v)$, la etiqueta de cualquier vértice v.

- Veamos cómo se construyen S_k, $L_k(v), C_k(v)$ en el paso $k-$ésimo:

  Se actualiza el conjunto distinguido de vértices: S_k se construye añadiendo a S_{k-1} un vértice cuya etiqueta $L_{k-1}(v)$ sea mínima entre los vértices v que no están en S_{k-1}. Sea u un tal vértice, esto es, $S_k = S_{k-1} \cup \{u\}$.

  Se actualizan las etiquetas de todos los vértices que no están en S_k de la forma siguiente:
  $$L_k(v) = \text{mín}\{L_{k-1}(v), L_{k-1}(u) + w(u, v)\}$$
  teniendo en cuenta que si $L_{k-1}(v) = L_{k-1}(u) + w(u, v)$, se escoge como mínimo $L_{k-1}(v)$.

  Ahora, si $L_k(v) = L_{k-1}(v)$, se hace $C_k(v) = C_{k-1}(v)$. Si $L_k(v) = L_{k-1}(u) + w(u, v)$, se hace $C_k(v) = C_{k-1}(u) \cup \{u\}$.

  Esto se hace así porque $L_k(v)$ es la longitud de un camino de longitud mínima entre a y v que pasa sólo por vértices de S_k. Este camino puede ser un camino de longitud mínima que pasa por vértices de S_{k-1} ó bien es el resultado de añadir la arista $\{u, v\}$ al camino más corto obtenido en el paso $k-1$.

- El proceso finaliza en el momento en el que el vértice z se añade al conjunto distinguido. En ese caso, la etiqueta de z, $L_m(z)$, es la longitud mínima entre a y z y $C_m(z)$ un camino de longitud mínima entre a y z.

El hecho de que el algortimo de Dijkstra acabe cuando z se añade al conjunto distinguido es debido a la observación siguiente:

Observación 5.42 *En el paso k-ésimo del algoritmo de Dijkstra se verifica:*

a) La etiqueta, $L_k(v)$, de cada vértice que está en S_k es la longitud de un camino de longitud mínima entre a y dicho vértice.

b) La etiqueta de cada vértice que no está en S_k es la longitud de un camino de longitud mínima entre a y dicho vértice que sólo contiene (exceptuando el propio vértice) vértices de S_k.

Ejemplo 5.43 *Encontrar un camino de longitud mínima entre los vértices a y z del grafo ponderado del ejemplo 5.41:*

- Paso 0:
  - $S_0 = \emptyset$
  - $L_0(a) = 0$
  - $L_0(b) = L_0(d) = L_0(e) = L_0(f) = L_0(g) = L_0(z) = \infty$
- Paso 1:
  - $S_1 = \{a\}$
  - $L_1(b) = \text{mín}\{L_0(b), L_0(a) + w(a, b)\} = \text{mín}\{\infty, 4\} = 4.$
    Etiqueta de b: $4(a)$
  - $L_1(c) = \text{mín}\{L_0(c), L_0(a) + w(a, c)\} = \text{mín}\{\infty, 3\} = 3.$
    Etiqueta de c: $3(a)$
  - $L_1(d) = \text{mín}\{L_0(d), L_0(a) + w(a, d)\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty.$
    Etiqueta de d: ∞
    Análogamente, $L_1(e) = L_1(f) = L_1(g) = L_1(z) = \infty.$

  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso c.
- Paso 2:
  - $S_2 = \{a, c\}$
  - $L_2(b) = \text{mín}\{L_1(b), L_1(c) + w(c, b)\} = \text{mín}\{4, 3 + 2\} = 4.$
    Etiqueta de b: $4(a)$
  - $L_2(d) = \text{mín}\{L_1(d), L_1(c) + w(c, d)\} = \text{mín}\{\infty, 3 + 3\} = 6.$
    Etiqueta de c: $6(a, c)$
  - $L_2(e) = \text{mín}\{L_1(e), L_1(c) + w(c, e)\} = \text{mín}\{\infty, 3 + 6\} = 9.$
    Etiqueta de d: $9(a, c)$
  - $L_2(f) = \text{mín}\{L_1(f), L_1(c) + w(c, f)\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty.$
    Análogamente, $L_2(f) = L_2(g) = L_2(z) = \infty.$

  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es b.
- Paso 3:

- $S_3 = \{a, c, b\}$
- $L_3(d) = \text{mín}\{L_2(d), L_2(b) + w(b, d)\} = \text{mín}\{6, 4 + 5\} = 6$.
  Etiqueta de d: $6(a, c)$
- $L_3(e) = \text{mín}\{L_2(e), L_2(b) + w(b, e)\} = \text{mín}\{9, \infty\} = 9$.
  Etiqueta de e: $9(a, c)$
- $L_3(f) = \text{mín}\{L_2(f), L_2(b) + w(c, f)\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty$
  Análogamente, $L_3(f) = L_3(g) = L_3(z) = \infty$.

Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es d.

- Paso 4:

  - $S_3 = \{a, c, b, d\}$
  - $L_4(e) = \text{mín}\{L_3(e), L_3(d) + w(d, e)\} = \text{mín}\{9, 6 + 1\} = 7$.
    Etiqueta de e: $7(a, c, d)$
  - $L_4(f) = \text{mín}\{L_3(f), L_3(d) + w(d, f)\} = \text{mín}\{\infty, 6 + 5\} = 11$.
    Etiqueta de f: $11(a, c, d)$
  - $L_4(g) = \text{mín}\{L_3(g), L_3(d) + w(d, g)\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty$
    Análogamente, $L_3(z) = \infty$.

  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es e.

- Paso 5:

  - $S_5 = \{a, c, b, d, e\}$
  - $L_5(f) = \text{mín}\{L_4(f), L_4(e) + w(e, f,)\} = \text{mín}\{11, \infty\} = 11$.
    Etiqueta de f: $11(a, c, d)$
  - $L_5(g) = \text{mín}\{L_4(g), L_4(e) + w(e, g)\} = \text{mín}\{\infty, 7 + 5\} = 12$.
    Etiqueta de g: $12(a, c, d, e)$
  - $L_5(z) = \text{mín}\{L_4(z), L_4(e) + w(e, z)\} = \text{mín}\{\infty, \infty\} = \infty$

  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es f.

- Paso 6:

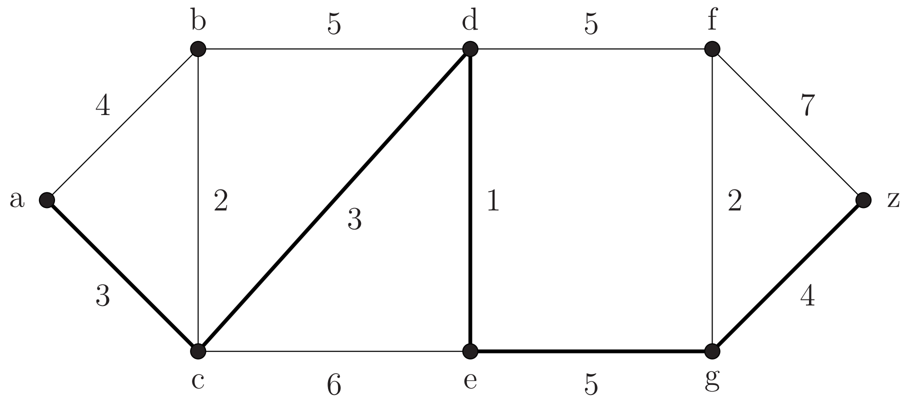
  - $S_6 = \{a, c, b, d, e, f\}$
  - $L_6(g) = \text{mín}\{L_5(f), L_5(f) + w(f, g)\} = \text{mín}\{12, 11 + 2\} = 12$.
    Etiqueta de g: $12(a, c, d, e)$
  - $L_6(z) = \text{mín}\{L_5(z), L_5(f) + w(f, z)\} = \text{mín}\{\infty, 11 + 7\} = 18$.
    Etiqueta de z: $18(a, c, d, f)$

Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso z.

- Paso 7:
  - $S_7 = \{a, c, b, d, e, f, g\}$
  - $L_7(z) = \text{mín}\{L_6(z), L_6(g) + w(g, z)\} = \text{mín}\{18, 12 + 4\} = 6.$
    Etiqueta de z: $16(a, c, d, e, g)$

  Se elige un vértice con etiquetado mínimo, en este caso es z.

En el siguiente paso se incluiría a z en el conjunto de vértices destacados por lo que el proceso puede darse por finalizado. El camino a seguir y la longitud de ese camino mínimo vienen dados por el etiquetado del vértice z: $16(a, c, d, e, g)$. Esto significa que un camino mínimo se obtiene siguiendo las aristas $a - c - d - e - g - z$ y que su longitud es 16.



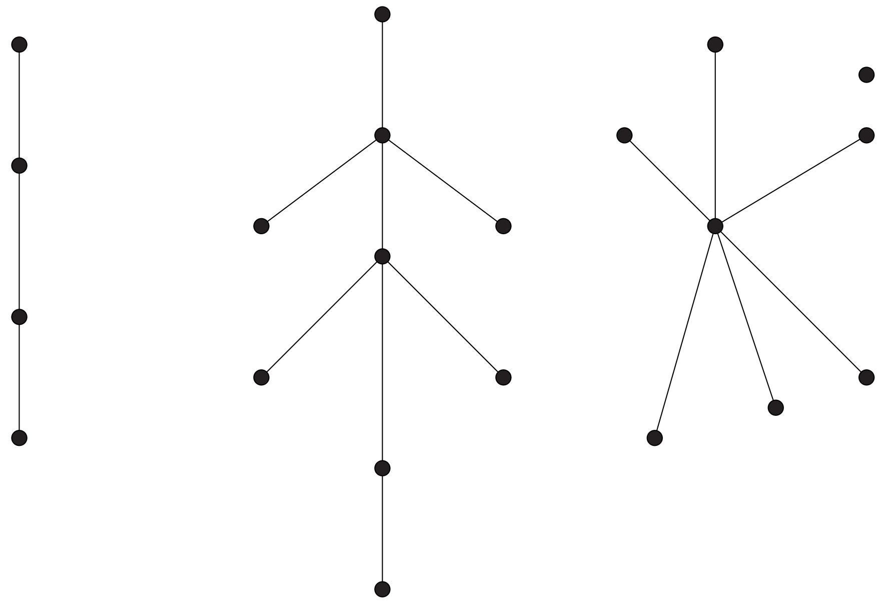
5.5. Árboles: definiciones, propiedades y ejemplos

Definición 5.44 *A todo grafo no dirigido, conexo que no contiene ciclos*[3] *se le denomina árbol.*

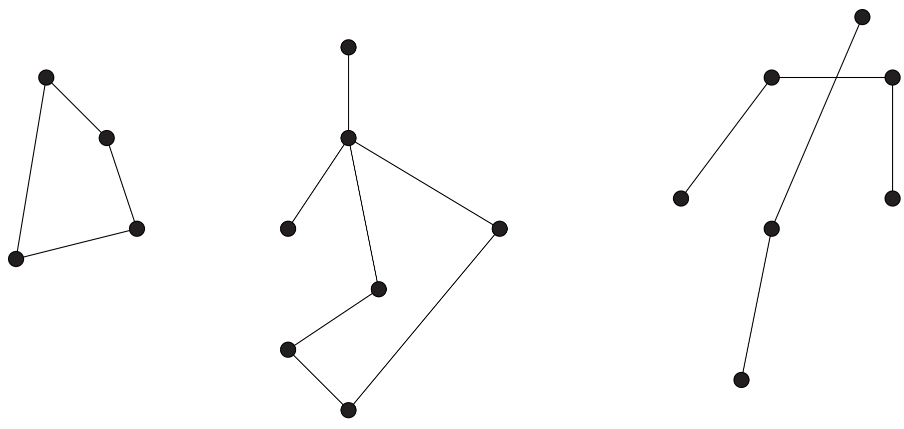
Ejemplo 5.45 *Dibujamos cuatro ejemplos de árboles:*

---

[3] A los circuitos simples se les denomina ciclos.



Ejemplo 5.46 *Tres grafos que no son árboles:*



Los dos primero grafos no son árboles, pese a ser conexos, porque contienen ciclos. El tercero de lo grafos no contiene ciclos, pero no es conexo. Sus componentes conexas sí que son árboles.

Obsérvese que puesto que un árbol no puede contener ciclos, tampoco puede contener bucles o aristas múltiples. Por tanto, se tiene:

Teorema 5.47 *Todo árbol es un grafo simple.*

Como consecuencia de este resultado, en un árbol se puede denotar cada arista por el par de vértices adyacentes a ella. Si dos vértices definen una arista, lo hacen de manera única. Por ello, al considerar el grafo se puede omitir la aplicación de incidencia y denotar al grafo únicamente por su conjunto de vértices y de aristas.

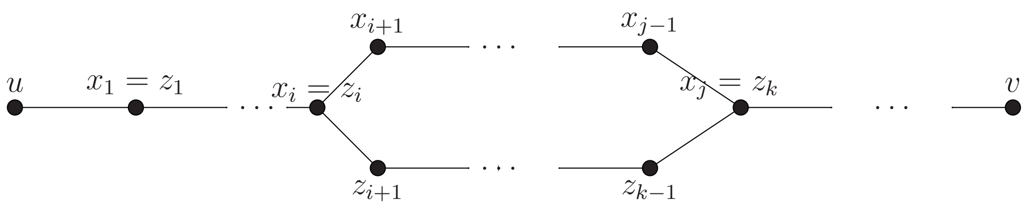
Teorema 5.48 *Sea $T = (V, E)$ un árbol con al menos dos vértices. Entonces, se verifica que para cada par de vértices u y v, existe un único camino de u a v en T.*

Demostración.– Al ser T un grafo conexo, existe un camino del vértice u al vértice v. Supongamos que existen dos caminos distintos que unen dichos vértices:

$$u = x_0, x_1, \ldots, x_r = v \text{ y } u = z_0, z_1, \ldots, z_s = v$$

Al ser dos caminos distintos, existe un primer vértice en el que difieren: sea i el menor índice para el cual $x_{i+1} \neq z_{i+1}$.

Puesto que ambos caminos terminan en v, debe existir un vértice en el que ambos caminos se encuentren de nuevo: sea j el menor de los índices tal que $j > i$ y $x_j = z_k$ para algún k. La situación puede representarse gráficamente como sigue:



Por lo tanto, $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_j, z_{k-1}, \ldots, z_{i+1}, z_i = x_i$ es un ciclo en T, lo que contradice el hecho de que T sea un árbol.
En consecuencia, existe un único camino de u a v en el árbol T.

■

Teorema 5.49 *Sea $T = (V, E)$ un árbol con al menos dos vértices. Entonces, el grafo que se obtiene de T al eliminar cualquier arista tiene dos componentes conexas, cada una de las cuales es un árbol.*

Demostración.– Sea $\{u, v\}$ una arista del grafo cuyos vértices adyacentes son u y v, y sea $T' = (V, E')$ el subgrafo de T que tiene los mismos vértices que T y como aristas $E' = E \setminus \{\{u, v\}\}$.

Sea V_1 el conjunto de todos los vértices x de T para los cuales el único camino desde x a v pasa por u. Evidentemente, V_1 es no vacío pues contiene a u. Uno de esos caminos tiene que terminar en la arista $\{u, v\}$ dado que, en virtud del Teorema 5.48, sólo hay un camino que conecte u y v. Por tanto, cada vértice de V_1 está unido a

u por un camino del subgrafo T'; a saber, el camino de x a v en T al que se le ha quitado la arista $\{u, v\}$.

Consideramos ahora $V_2 = V \setminus V_1$, es decir, el conjunto de todos los vértices x de T para los cuales el único camino desde x a v no pasa por u. Como $v \in V_2$, V_2 es no vacío. Obviamente, uno de esos caminos no contiene a la arista $\{u, v\}$. Por tanto, es un camino del subgrafo T'. Como consecuencia, todo vértice de V_2 está unido a v por un camino del subgrafo T'.

Cada vértice de V_1 está unido a u por un camino del subgrafo T' y cada vértice de V_2 está unido a v por un camino del subgrafo T'. Sin embargo en T' no hay ningún camino de u a v. Por tanto, V_1 y V_2 son los conjuntos de vértices de las dos componentes conexas del grafo.

Como cada componente conexa es conexa y no contiene ciclos, pues T no los contiene, las dos componentes conexas son árboles.

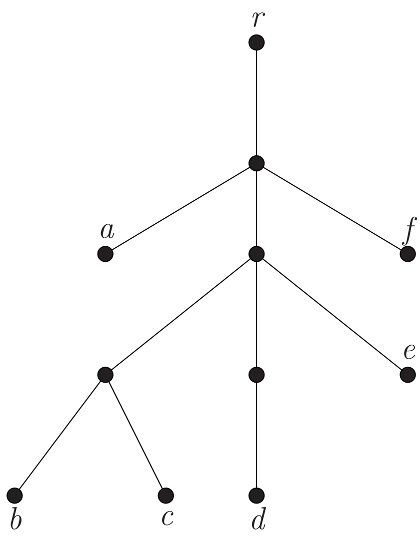
■

En algunas aplicaciones se designa un vértice del grafo como raíz, disponiéndose los vértices del árbol por niveles. En el nivel 0 está únicamente el vértice elegido como raíz. En el nivel 1 se disponen los vértices adyacentes al vértice raíz. En el nivel 2 los vértices adyacentes a los del nivel 1, y que sean distintos de los del vértice raíz. Dispuestos los vértices del nivel $k-1$, el nivel k contiene los vértices adyacentes a los del nivel $k-1$ que no estén en el nivel $k-2$. Se construye de esta forma lo que se conoce como **árbol con raíz**.

Definición 5.50 *Un árbol con raíz es un árbol en el que uno de sus vértices se ha designado como vértice raíz y sigue la disposición de la construcción anterior. Un vértice del nivel k se dice que es* **padre** *de sus adyacentes del nivel $k+1$ y a éstos se les dice* **hijos** *de dicho vértice. A un vértice que no tiene hijos se le dice* **hoja**. *A los vértices que tienen hijos se les llaman* **vértices internos**. *Finalmente, la* **altura** *de un árbol con raíz es el máximo valor l para el cual el nivel l no es vacío.*

Definición 5.51 *Un árbol se dice $m-$ario si todos los vértices internos tienen, a lo más, m vértices hijos.*

Ejemplo 5.52 *Dibujamos un árbol con raíz r, $3-$ario y con altura 4. En el mismo, los vértices a, b, c, d, e y f son hojas.*



Teorema 5.53 *Sea $T = (V, E)$ un árbol. Entonces, se verifica que $|E| = |V| - 1$.*

Demostración.– La demostración se puede hacer por inducción sobre el número de vértices $|V|$. Si $|V| = 1$, el resultado es cierto, pues el único árbol posible no tiene aristas.
Supongamos, por inducción, que el resultado es cierto para todos los árboles con menos de n vértices y veamos que es cierto para todos los árboles con n vértices: sea T un árbol con n y sea u una hoja de T. Si se considera el subgrafo $T' = (V', E')$ que resulta de eliminar dicha hoja u, queda también eliminada la arista incidente con u. Por tanto, es un árbol con un vértice y una arista menos que T. Al ser $|V'| = n - 1$, por la hipótesis de inducción se verifica

$$|E'| = |V'| - 1.$$

Como consecuencia, se tiene que

$$|E| = |E'| + 1| = |V'| - 1 + 1 = |V'| = |V| - 1.$$

■

Teorema 5.54 *Un árbol m-ario de altura h tiene, a lo sumo, m^h hojas.*

Demostración.– Probaremos el resultado por inducción sobre la atura del árbol.
La afirmación es cierta para altura $h = 0$. En este caso, sólo hay un vértice, que es hoja. Por tanto el número de hojas es $m^0 = 1$.

Supongamos que el resultado es cierto para todos los árboles con altura menor que h. Veamos que, en ese caso, también es cierto para los árboles de altura h.
Sea T un árbol con altura h. Si se elimina la raíz se obtienen tantos árboles como hijos tenga la raíz todos ellos con altura $h-1$. Como el árbol es $m-$ario, esto significa que hay como mucho m. Por hipótesis de inducción para cada uno de ellos el número de hojas es, a lo sumo, m^{h-1}. Las hojas de todos los subárboles obtenidos son las hojas del árbol de partida. Cada uno de ellos tiene a lo más m^{h-1}. Puesto que hay como mucho m subárboles, se verifica que el número de hojas del árbol dado T es, a lo sumo, $m \cdot m^{h-1} = m^h$.

■

5.6. Árbol generador de un grafo

Definición 5.55 *Sea G un grafo simple. Un árbol generador de G es un subgrafo de G que es un árbol y contiene todos los vértices de G.*

Ejemplo 5.56 *Dos árboles generadores distintos de K_6:*

Lema 5.57 *Si un grafo simple conexo contiene algún ciclo y se elimina una arista del ciclo, el subgrafo resultante es conexo.*

Demostración.– Basta observar que, en un ciclo, para dos vértices adyacentes existen dos caminos que los unen: uno la arista que incide en ambos, otro el formado por las restantes aristas del ciclo. Por tanto, si se elimina dicha arista de un camino puede ser sustituida por el camino que forman las restantes aristas del ciclo.

■

Teorema 5.58 *Un grafo simple es conexo si, y sólo si, tiene un árbol generador.*

Demostración.– Sea G un grafo simple que admite un árbol generador T. El árbol T es, por definición, un subgrafo conexo de G que contiene a todos los vértices de G.

Por tanto, para cada par de vértices de G existe un camino en T que los une. Este camino también es un camino en G, de donde se deduce que G es conexo.

Los tres algoritmos que se van a describir son una demostración constructiva de la existencia de árbol generador para todo grafo simple conexo. Bastaría considerar la construcción del algoritmo de Prim[4] dando a todas las aristas del grafo un peso igual a 1.

Observación 5.59 *Los árboles generadores de un grafo con n vértices tienen siempre n vértices y $n-1$ aristas. En consecuencia, todos los procesos de construcción de árboles generadores de un grafo con n vértices terminan cuando el número de vértices es igual a n o el número de aristas es igual a $n-1$.*

En las tres subsecciones que siguen, describiremos tres algoritmos que permiten construir un árbol generador para grafos conexos simples. Por lo tanto, en lo que resta, todos los grafos son grafos conexos simples.

5.6.1. Búsqueda en profundidad (BEP)

Sea G el grafo de partida. El algorimo BEP construye un árbol con raíz, en un proceso en el que intervienen caminos que nos llevan de la raíz a cada una de las hojas. Una vez alcanzada una hoja, deberemos retrocer en el camino hasta encontrar un nodo que tenga algún hijo.
En cada paso hay que tener en cuenta el subárbol construido hasta ese momento, que llamaremos árbol parcial, y el último vértice añadido, conocido como vértice activo.
El algoritmo BEP puede describirse como sigue:

- Inicio: Se elige de forma arbitraria un vértice como raíz r.

- Supongamos construido un árbol parcial W, que u es el vértice activo y que $\{w, u\}$ es la última arista añadida a W. Debemos ver cómo añadir la siguiente arista. Para ello, si:

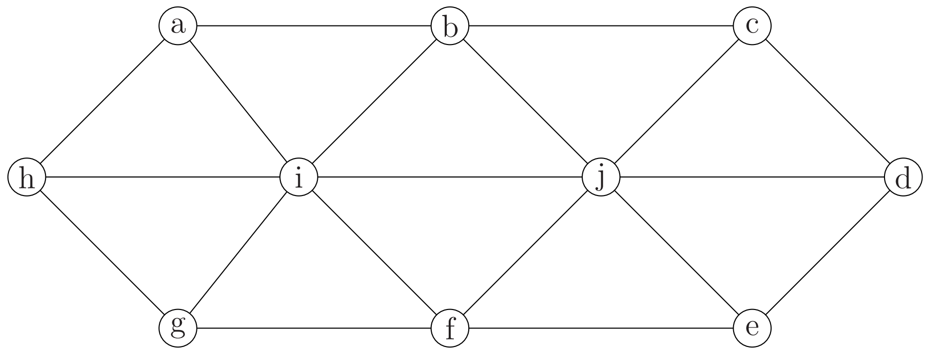
  1) el vértice u tiene vértices adyacentes en G que no están en W, se elige uno de ellos, z, y se añade la arista $\{u, z\}$ al árbol T. El nuevo vértice activo es z.

  2) todos los vértices en G adyacentes a u están en W, se retrocede hasta el vértice w, considerándolo como vértice activo.

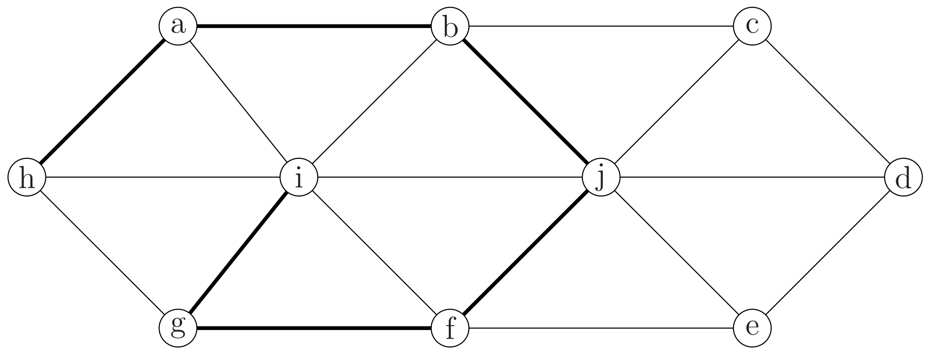
- El proceso termina cuando todos los vértices de G están en T.

[4] Véase Subsección 5.6.3

Ejemplo 5.60 *Usando algoritmo BEP, construir un árbol generador del grafo*

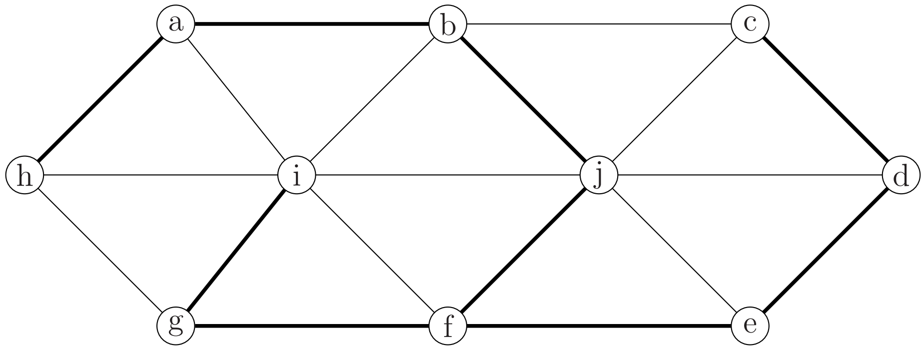


- Paso 0: Se elige un vértice raíz, h.
- Paso 1: a es vértice adyacente a h. Se añade la arista $\{h, a\}$ al subgrafo anterior.
- En los pasos del 2 al 6 se van añadiendo las aristas $\{a, b\}$, $\{b, j\}$, $\{j, f\}$, $\{f, g\}$, $\{g, i\}$ al subgrafo del paso anterior llegando al árbol parcial

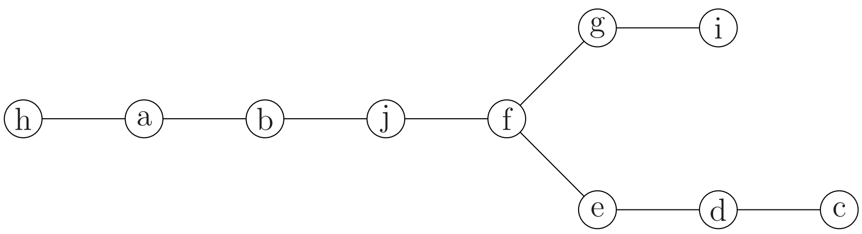


- Paso 7: el vértice activo es i. Sus vértices adyacentes están en el árbol parcial. Se retrocede hasta el vértice g, pasando a convertirse éste en el vértice activo.
- Paso 8: el vértice activo es g, al que le ocurre lo mismo que a i en el paso anterior. Se retrocede, por lo tanto, hasta el vértice f.
- Paso 9: e es vértice adyacente de f. Se añade la arista $\{f, e\}$ al subgrafo anterior.
- En los pasos 10 y 11 se añaden las aristas $\{e, d\}$ y $\{d, c\}$.

- Todos los vértices están en el árbol. El algoritmo termina y se obtiene el siguiente árbol como árbol generador del grafo dado:



El árbol obtenido, transformado en árbol con raíz h es:



5.6.2. Búsqueda en anchura (BEA)

Sea G el grafo de partida. El algoritmo BEA encuentra un árbol con raíz, en un proceso en el que se van construyendo los niveles del árbol. Desde el vértice activo se visitan todos los vértices adyacentes.

Se considera el conjunto de vértices del árbol parcial no visitados, que está formado por aquellos vértices del árbol parcial para los cuales no se han detectado sus hijos (los adyacentes del nivel siguiente al que está el vértice).

Una posible descripción del algortimo BEA es la que sigue:

- Inicio: Se elige de manera arbitraria un vértice como raíz del árbol, v. Se definen los conjuntos:

  $W_0 = \{v\}$: conjunto de vértices del árbol parcial en el paso 0

  $F_0 = \emptyset$: conjunto de aristas del árbol parcial en el paso 0

$L_0 = \{v\}$, como conjunto de vértices del árbol parcial no visitados en el paso 0

- Se supone construidos en el paso $(k-1)-$ésimo W_{k-1}, el conjunto de vértices del árbol parcial, F_{k-1}, el conjunto de aristas del árbol parcial y L_{k-1}, el conjunto de vértices de W_{k-1}no visitados. Veamos cómo a partir de aquí se construyen W_k, F_k y L_k: Se considera el primer vértice del conjunto de vértices no visitados L_{k-1}. Sea u dicho vértice. Entonces:
    - Se actualiza el conjunto de vértices del árbol parcial añadiendo todos los vértices adyacentes a u que no estén en W_{k-1}, esto es,

    $$W_k = W_{k-1} \cup \{\text{vértices adyacentes a } u \text{ que no estén en } W_{k-1}\}$$

    - Se actualiza el conjunto de aristas del árbol parcial añadiendo todas las aristas que unen u con los vértices añadidos, esto es,

    $$F_k = F_{k-1} \cup \{\{u, w\}, w \text{ vértices añadidos}\}$$

    - Se actualiza el conjunto de vértices no visitados borrando u (ya se ha visitado) y añadiendo las nuevos vértices, es decir, $L_k = (L_{k-1} \setminus \{u\}) \cup \{w, w \text{ vértices añadidos}\}$
- El proceso termina cuando todos los vértices han sido visitados, esto es, cuando se tenga $L_s = \emptyset$.

Ejemplo 5.61 *Usando algoritmo BEA construir un árbol generador del grafo del ejemplo 5.60*

- Paso 0: Se elige una raíz. En este caso, b. Por lo tanto,

$$W_0 = \{b\}, \ F_0 = \emptyset \ \text{ y } \ L_0 = \{b\}.$$

- Paso 1: Se consideran los vértices adyacentes a b: $\{a, i, j, c\}$, se añaden al conjunto de vértices y las aristas que los unen con b al conjunto de aristas. Así pues:
    - $W_1 = \{b, a, i, j, c\}$
    - $F_1 = \{\{b, a\}, \{b, i\}, \{b, j\}, \{b, c\}\}$
    - $L_1 = \{a, i, j, c\}$ (se borra b, que ya ha sido visitado y se añaden los vértices nuevos.)
- Paso 2: Se consideran los vértices adyacentes a a que no pertenecen a W_1 (en este caso, únicamente h), se añaden al conjunto de vértices y añadimos las aristas que los unen con a al conjunto de aristas. Se tiene:

- $W_2 = \{b, a, i, j, c, h\}$
- $F_2 = F_1 \cup \{\{a, h\}\}$
- $L_2 = \{i, j, c, h\}$ (se borra a, que ya ha sido visitado y se añade el nuevo vértice h)

- Paso 3: Se consideran los vértices adyacentes a i que no pertenecen a W_2, $\{g, f\}$, se añaden al conjunto de vértices y las aristas que los unen con i al conjunto de aristas. Entonces,

  - $W_3 = \{b, a, i, j, c, h, g, f\}$
  - $F_3 = F_3 \cup \{\{i, g\}, \{i, f\}\}$
  - $L_3 = \{j, c, h, g, f\}$ (se borra i que ya ha sido visitado y se añaden los vértices nuevos)

- Paso 4: Se consideran los vértices adyacentes a j que no pertenecen a W_3, $\{e, d\}$, se añaden al conjunto de vértices y las aristas que los unen con j al conjunto de aristas:

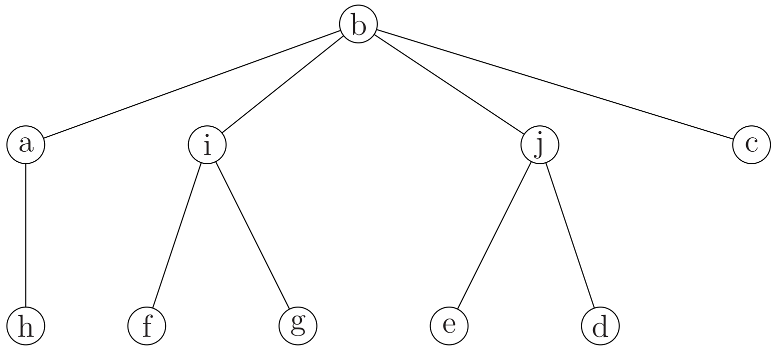
  - $W_4 = \{b, a, i, j, c, h, g, f, e, d\}$
  - $F_4 = F_3 \cup \{\{j, e\}, \{j, d\}\}$
  - $L_4 = \{c, h, g, f, e, d\}$ (se borra j, que ya ha sido visitado, y se añaden los vértices nuevos)

- Paso 5: Se consideran los vértices adyacentes a c que no pertenecen a W_4. En este caso, no hay ninguno. Por lo tanto, no se pueden añadir ni vértices ni aristas. Así pues,

  - $W_5 = \{b, a, i, j, c, h, g, f, e, d\}$
  - $F_5 = F_3$
  - $L_5 = \{h, g, f, e, d\}$ (se borra c, que ya ha sido visitado)

- En los pasos 6, 7, 8, 9 y 10 se vacía el conjunto de vértices no visitados.

Por lo tanto, un árbol generador del grafo dado es:



5.6.3. Algoritmo de Prim

Definición 5.62 *Un árbol generador mínimo de un grafo ponderado es un árbol generador tal que la suma de los pesos de sus aristas es la mínima posible.*

Teorema 5.63 *En todo grafo ponderado existe algún árbol generador mínimo.*

Demostración.– Dado G un grafo finito, el número de sus subgrafos es conjunto finito. En particular el número de árboles generadores es finito. Por tanto existe un valor mínimo para la suma de los pesos de las aristas.

■

Sea G un grafo conexo con función de peso w. Se va a dar un algoritmo para construir árboles generadores con pesos mínimos, añadiendo, en cada paso, una arista al árbol parcial obtenido.

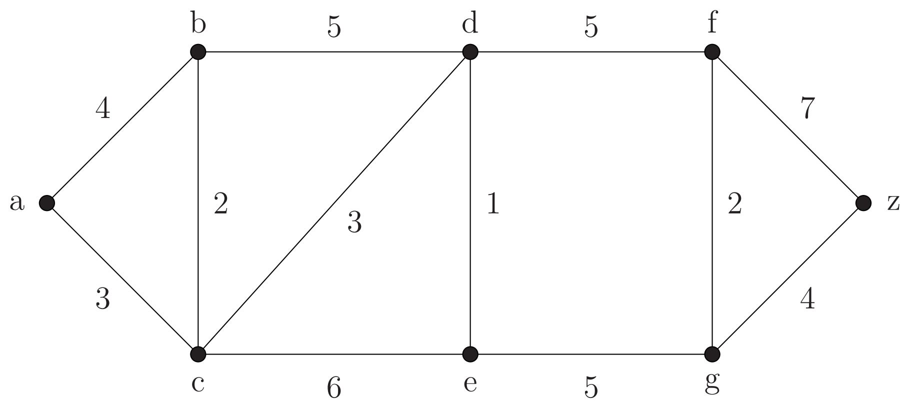
- Paso 1: Se elige una arista con peso mínimo. Sea a dicha arista. Se define $T_1 = a$ que es el conjunto de aristas del árbol parcial.

- Se supone construido en el paso $(k-1)$ el árbol parcial T_{k-1}. Veamos cómo se construye el árbol parcial T_k en el paso $k-$ésimo: Se elige una arista de peso mínimo incidente con un vértice del árbol parcial T_{k-1} que no forme un ciclo. Sea e una arista tal. Se actualiza el árbol parcial añadiendo dicha arista, es decir,

$$T_k = T_{k-1} \cup \{e\}$$

- El algortimo finaliza después de repetir lo anterior $n-1$ veces.

Ejemplo 5.64 *Encontrar un árbol generador mínimo para el grafo ponderado:*



Apliquemos el algoritmo:

- Paso 1: Se elige una arista con peso mínimo. Sólo hay una posibilidad de elección: $\{e, d\}$. Luego,

$$T_1 = \{\{e, d\}\}.$$

- Paso 2: Se elige una arista con peso mínimo incidente con las aristas de T_1 sin formar un ciclo: $\{d, c\}$. Luego

$$T_2 = \{\{e, d\}, \{d, c\}\}.$$

- Paso 3: Se elige una arista con peso mínimo incidente con las aristas de T_2 sin formar un ciclo: $\{c, b\}$. Por lo tanto,

$$T_2 = \{\{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}\}.$$

- Paso 4: Se elige una arista con peso mínimo incidente con las aristas de T_3 sin formar un ciclo: $\{c, a\}$. Así pues,

$$T_4 = \{\{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{c, a\}\}.$$

- Paso 5: Se elige una arista con peso mínimo incidente con las aristas de T_4 sin formar un ciclo: hay dos posibilidades: $\{d, f\}$ y $\{e, g\}$. Escogemos, por ejemplo, $\{d, f\}$. De esta forma,

$$T_5 = \{\{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{c, a\}, \{d, f\}\}.$$

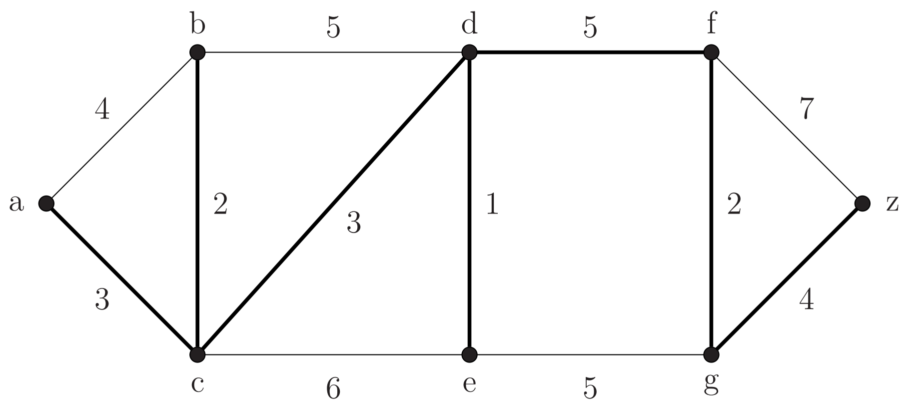
- Paso 6: Se elige una arista con peso mínimo incidente con las aristas de T_5 sin formar un ciclo: $\{f, g\}$. Entonces,

$$T_6 = \{\{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{c, a\}, \{d, f\}, \{f, g\}\}.$$

- Paso 7: Se elige una arista con peso mínimo incidente con las aristas de T_6: $\{g, z\}$. Se tiene entonces

$$T_6 = \{\{e, d\}, \{d, c\}, \{c, b\}, \{c, a\}, \{d, f\}, \{f, g\}, \{g, z\}\}.$$

El proceso se ha repetido 7 veces, se ha obtenido el árbol generador



La suma de los pesos de las aristas del árbol es 20.

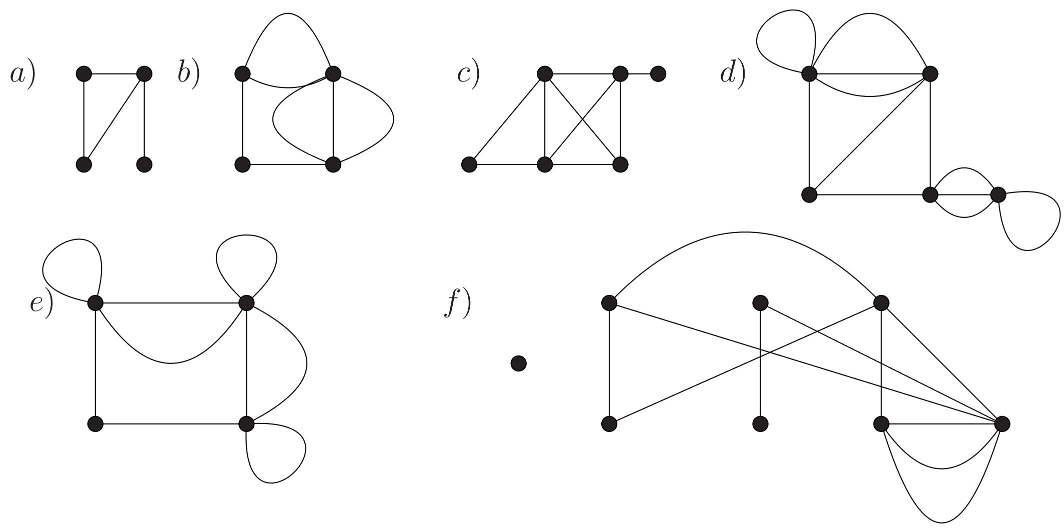
Teorema 5.65 *El árbol T obtenido mediante el algoritmo de Prim es un árbol generador mínimo, esto es, para cualquier otro árbol generador U del grafo G se verifica*

$$w(T) \leq w(U),$$

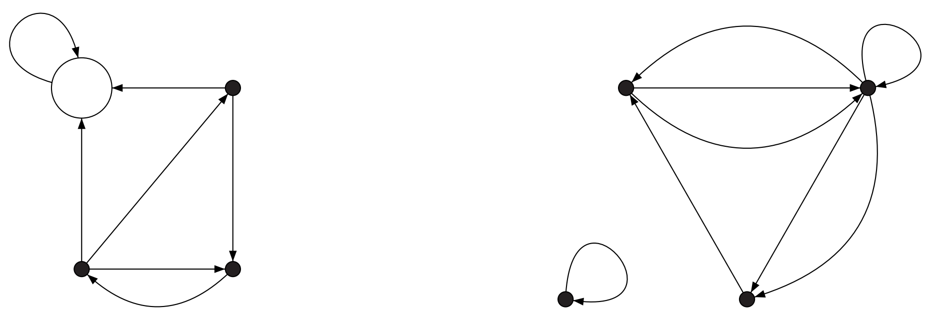
donde $w(T)$ y $w(U)$ denotan la suma de los pesos de las aristas de T y U respectivamente.

5.7. Problemas propuestos

Problema 5.1 .- Para cada uno de los siguientes grafos, encontrar el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice, comprobando que la suma de los grados de todos los vértices coincide con el doble del número de aristas:



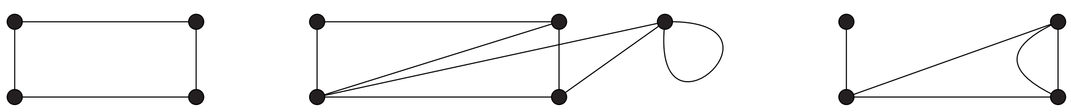
Problema 5.2 .- Para cada uno de los siguientes grafos dirigidos, encontrar el número de vértices, el número de aristas y el grado de cada vértice, comprobando que coinciden con el número de aristas:



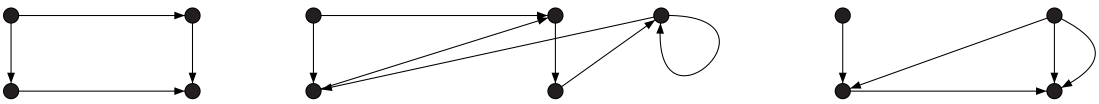
Problema 5.3 .- ¿Pueden los 15 vértices de un grafo simple tener grado 5?

Problema 5.4 .- Demostrar que en un grafo 2-regular el número de vértices y aristas coinciden.

Problema 5.5 .- Encontrar matrices de adyacencia de los siguientes grafos:



Problema 5.6 .- Determinar matrices de adyacencia de los siguientes grafos dirigidos:



Problema 5.7 .- Dibujar los grafos de las siguientes matrices de adyacencia.

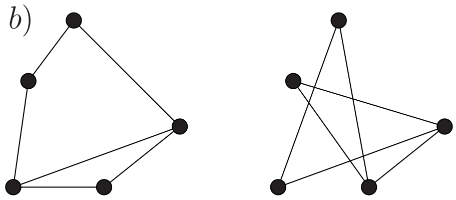
$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

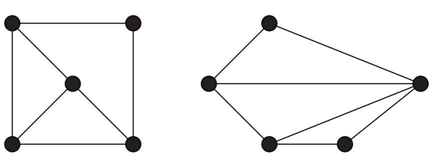
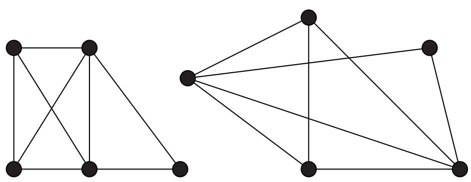
$$d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad e)\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

En los apartados *a*) y *b*), determinar cuántos caminos de longitud 3 hay de v_1 a v_3. En *c*) y *d*) determinar cuántos caminos de longitud 4 hay de v_2 a v_4 y de v_1 a v_4. En el apartado *e*) determinar cuántos caminos de longitud 3 van desde de v_1 a v_3.

Problema 5.8 .- Comprobar si los siguientes pares de grafos son isomorfos

a)

b)


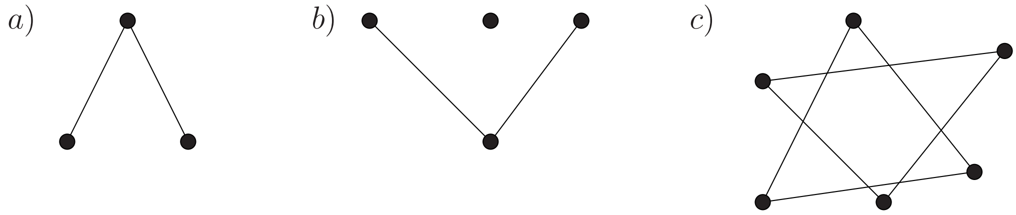
c)

d)


Problema 5.9 .- Sean G_1, G_2 y G_3 grafos simples de 4 vértices y 2 aristas. Demostrar que, como mínimo, 2 de ellos son isomorfos.

Problema 5.10 .- Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de orden 6. Demostrar que en G o en su complementario hay un ciclo de longitud 3. Esto equivale a demostrar que en una reunión de 6 personas siempre hay 3 que se conocen o 3 que no se conocen mutuamente.
(Complementario de un grafo G es el subgrafo del grafo completo de orden $|V|$, de manera que las aristas que lo forman son las aristas del grafo completo que no están en G).

Problema 5.11 .- Describir, salvo isomorfismo, todos los grafos conexos simples de orden 5 con todos los grados pares.

Problema 5.12 .- Estudiar si son conexos los siguientes grafos, dando el número de componentes conexas de cada uno:

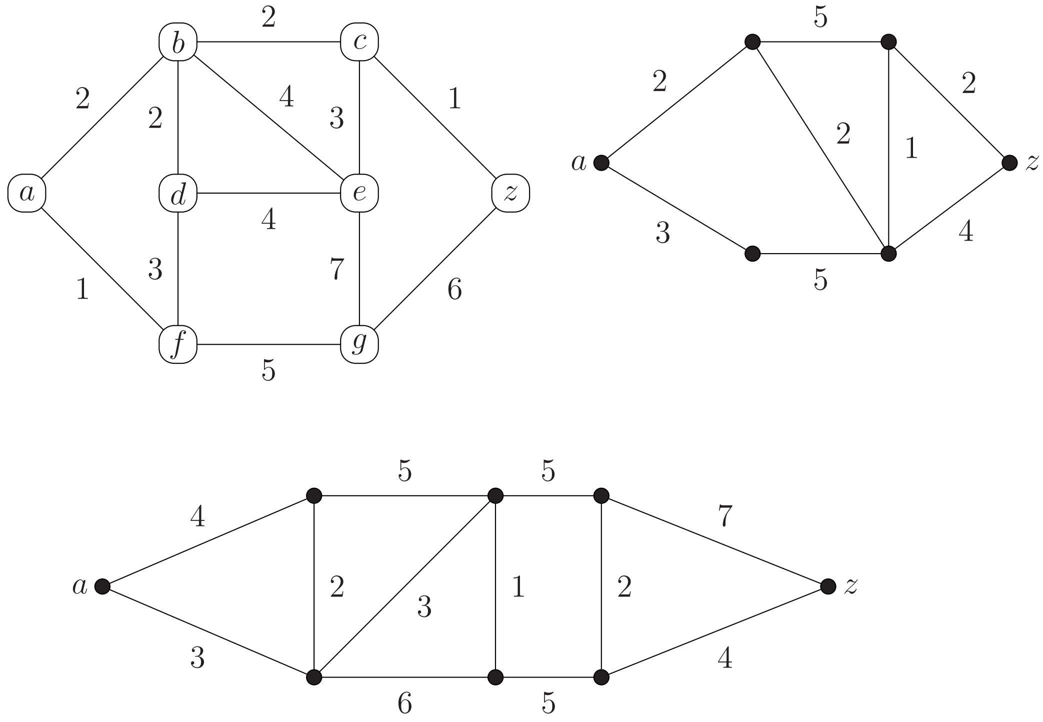


Problema 5.13 .- Sea $G = (V, E)$ un grafo de orden p y dos componentes conexas que son grafos completos. Probar que el número de aristas de G es mayor o igual que $\frac{1}{4}\left(p^2 - 2p\right)$.

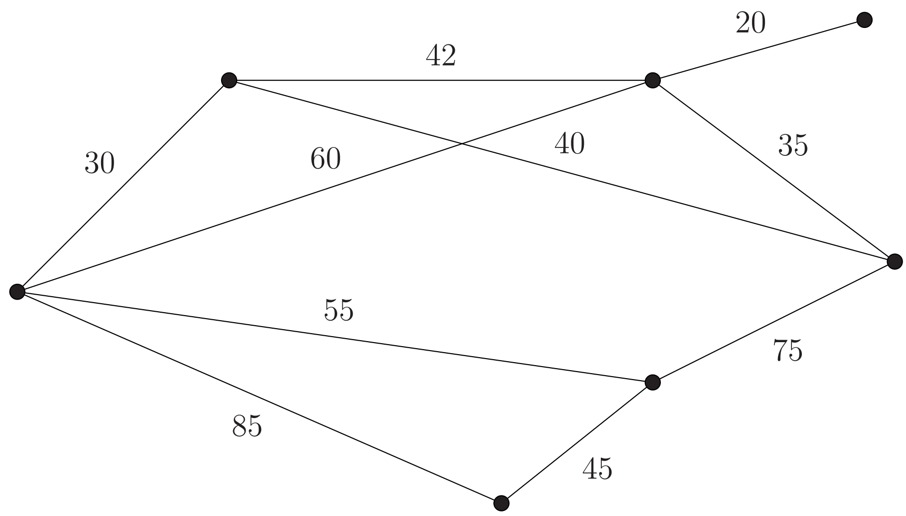
Problema 5.14 .- Sea G un grafo simple con n vértices, $n > 1$. Demostrar que si G tiene dos componentes conexas, el número de aristas es menor o igual que $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Problema 5.15 .- Sea $G = (V, E)$ un grafo simple de orden n. Demostrar que si $\delta(x) + \delta(y) \geq n - 1$ para todo $x \neq y$ de V, entonces G es conexo.

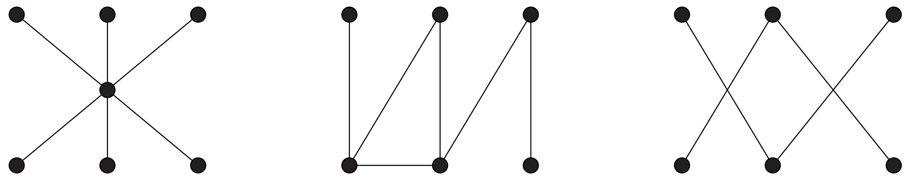
Problema 5.16 .- Para los grafos ponderados de la siguiente figura encontrar, utilizando el algoritmo de Dijkstra, la distancia mínima entre el vértice entre a y z y un camino de longitud mínima entre a y z.



Problema 5.17 .- El siguiente grafo representa un mapa de carreteras. Encontrar la distancia mínima y un camino de longitud mínima entre distintas ciudades.

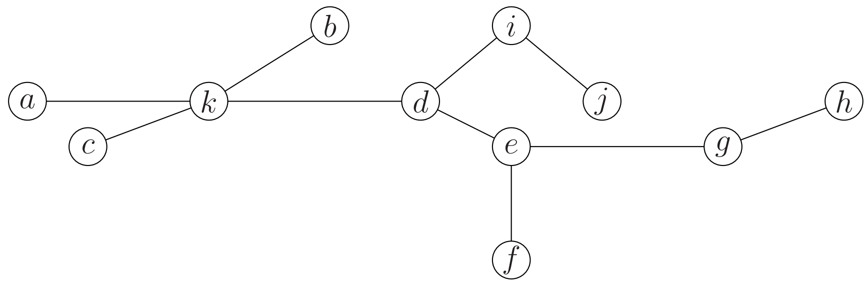


Problema 5.18 .- ¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles?



Problema 5.19 .- ¿Cuántos árboles con raíz hay con tres vértices (salvo isomorfismos)?

Problema 5.20 .- Encontrar el nivel de cada vértice en el siguiente árbol, si se considera k como vértice raíz:



Problema 5.21 .- ¿Cuántas aristas tiene un árbol con 1.000 vértices?

Problema 5.22 .- Sea T un árbol con n vértices que sólo contiene vértices de grados 1 y 3. Demostrar que el número de vértices de grado 3 es $(n-2)/2$.

Problema 5.23 .- Un árbol $m-$ario se dice completo si todos sus vértices internos tienen exactamente m vértices hijos. Sea T un árbol binario completo con n vértices.

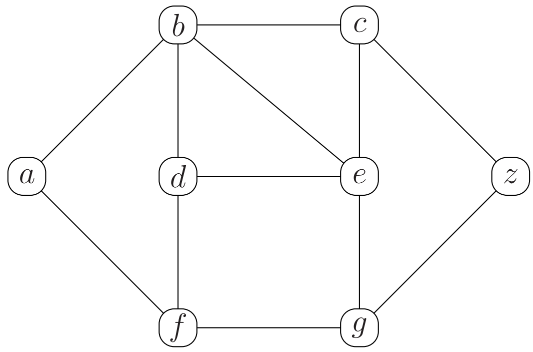
a) Demostrar que n es impar.

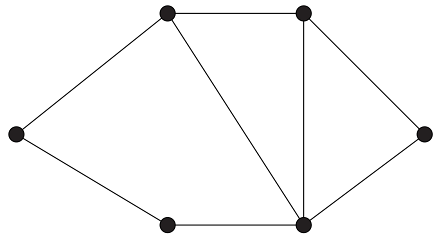
b) Demostrar que el número de vértices de grado 1 es $(n+1)/2$.

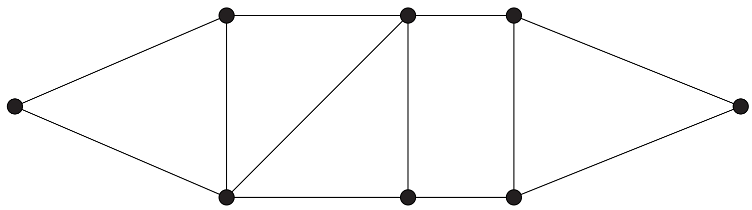
c) Encontrar el número de vértices de cada grado posible.

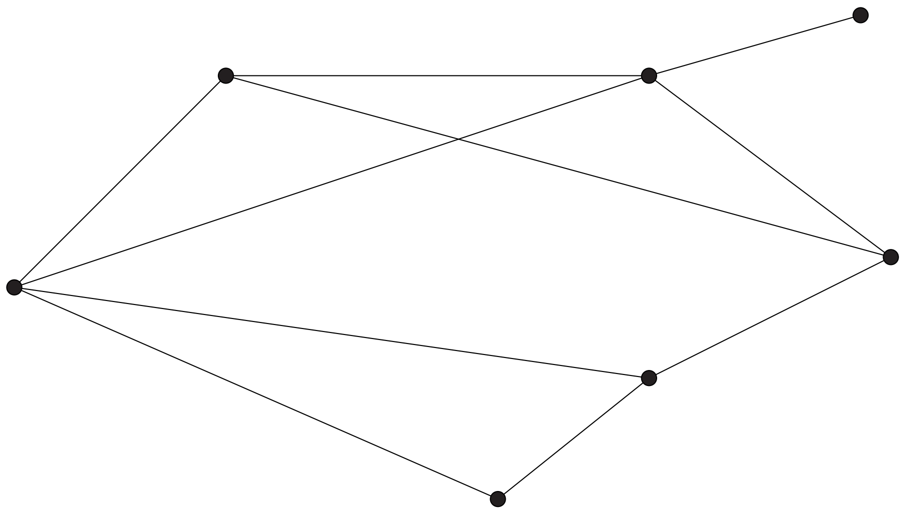
Problema 5.24 .- Encontrar un árbol generador mínimo para los grafos de los ejercicios 5.16 y 5.17.

Problema 5.25 .- Usando los algoritmos BEA y BEP, encontrar árboles generadores para los siguientes grafos

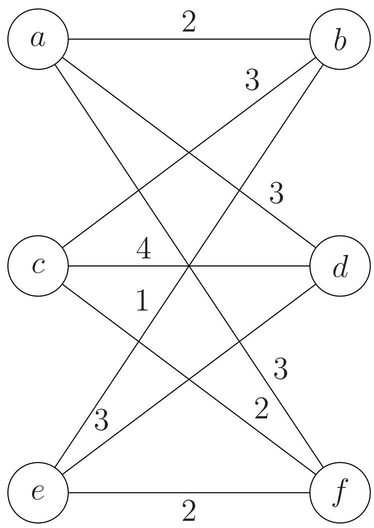








Problema 5.26 .- Dado el grafo ponderado:



se pide:

a. Encontrar un árbol generador mínimo.

b. Ignorando los pesos de las aristas, encontrar un árbol generador usando el algoritmo BEA

c. Ignorando los pesos de las aristas, encontrar un árbol generador usando el algoritmo BEP

Capítulo 6

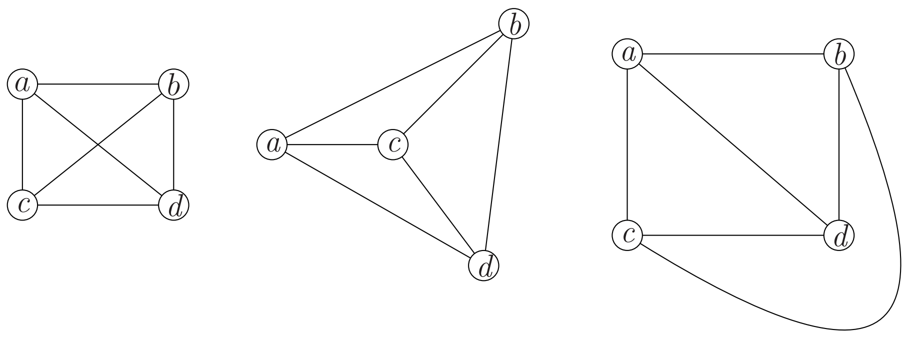
Grafos y redes

6.1. Grafos planos

Nos podemos preguntar si se puede o no implementar un circuito sobre una placa en una sola capa. Se va a poder siempre que no se crucen los cables del circuito. Esto nos lleva a definir un tipo especial de grafos: aquellos que podemos representarlos gráficamente sobre un plano sin que sus aristas se corten en puntos que no sean los vértices.

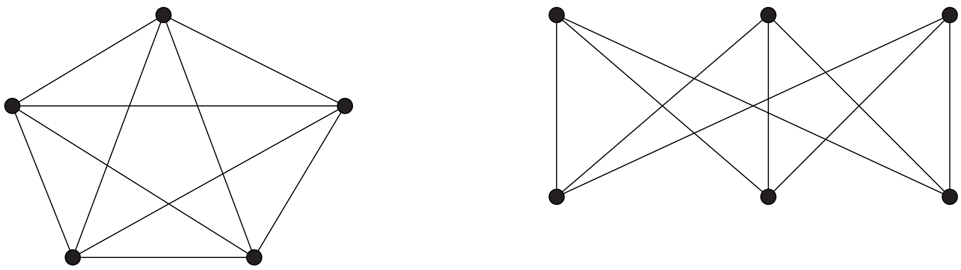
Definición 6.1 *Un grafo se dice* **plano** *si admite una representación en un plano de manera que sus aristas sólo se corten en los vértices.*

Ejemplo 6.2 *El grafo que se muestra en la figura es plano.*



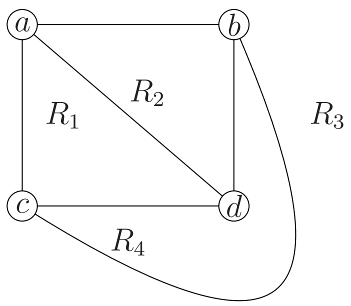
Son tres representaciones del mismo grafo. En la primera representación se cruzan aristas. En las otras dos, no.

Ejemplo 6.3 *Dos grafos que no son planos:* K_5 *y* $K_{3,3}$



Estos dos grafos juegan un papel muy importante en la caracterización de los grafos planos.

Toda representación plana de un grafo divide el plano en varias regiones, una de las cuales es infinita. Así, en el Ejemplo 6.2, la representación plana ha dividido el plano en 4 regiones. A saber



Además, se verifica: $|E| = 6$, $|V| = 4$ y el número de regiones, $|R|$, es igual a 4. Por lo tanto, $|V| - |E| + |R| = 2$.

Teorema 6.4 (Teorema de Euler) *Sea G un grafo simple, conexo y plano con e aristas y v vértices y sea r el número de regiones en que divide una representación plana de G el plano. Entonces,*

$$v - e + r = 2$$

Una consecuencia inmediata del Teorema de Euler es que todas las representaciones planas de un grafo dado tienen el mismo número de regiones.
Algunas caracterizaciones de los grafos simples que pueden ayudarnos a saber si un grafo es o no plano, se recogen en los siguientes resultados.

Teorema 6.5 *Sea G un grafo simple, conexo y plano con e aristas y v vértices y $v \geq 3$. Entonces, $e \leq 3v - 6$ y $2e \geq 3r$.*

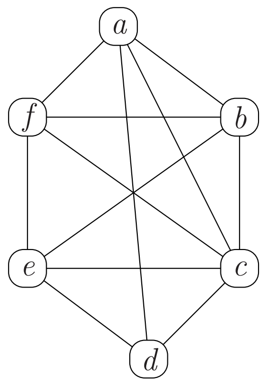
Teorema 6.6 *Sea G un grafo simple, conexo y plano con e aristas y v vértices y $v \geq 3$. Si G no tiene ciclos de longitud 3, se verifica que $e \leq 2v - 4$.*

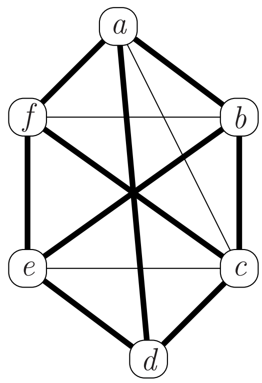
Ejemplo 6.7 *El grafo K_5 tiene diez aristas y cinco vértices, por lo que no es plano aplicando el Teorema 6.5. Por otro lado, el grafo $K_{3,3}$ tiene seis vértices y nueve aristas por lo que, en virtud del Teorema 6.6 no es un grafo plano.*

Definición 6.8 *Dado un grafo G, se llama* **división elemental** *al siguiente proceso de obtención de un nuevo grafo: Dada una arista $\{u, v\}$ del grafo G, se elimina la arista $\{u, v\}$ y se añade un nuevo vértice w junto con las aristas $\{u, w\}$ y $\{w, v\}$. El grafo de partida y el nuevo grafo obtenido mediante división elemental se dicen homeomorfos.*

Teorema 6.9 (Teorema de Kuratowski) *Un grafo G es plano si, y sólo si, no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*

Ejemplo 6.10 *El grafo que sigue no es plano pues contiene un subgrafo que es isomorfo a $K_{3,3}$ (aquel cuya aristas están trazadas en trazo grueso a la derecha):*





6.2. Coloración de grafos

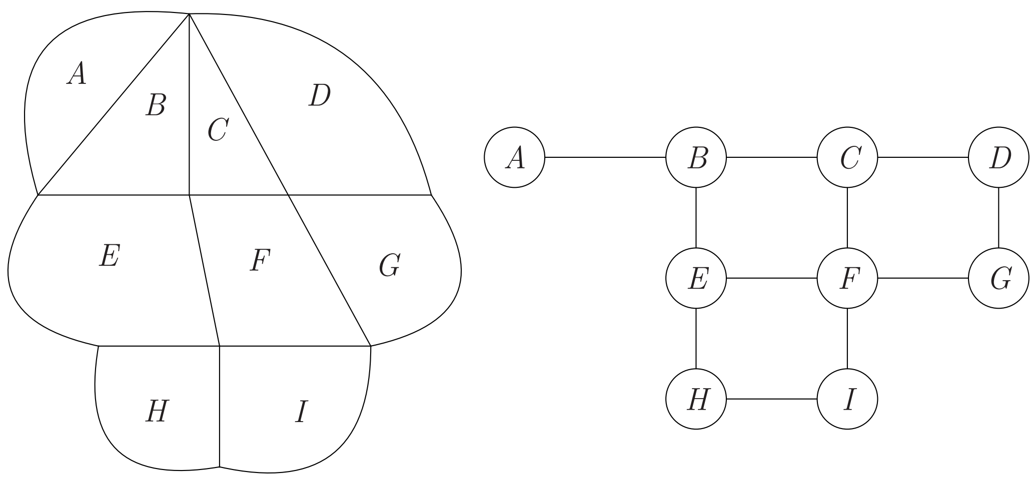
Al colorear un mapa se asignan colores distintos a las regiones[1] que tienen frontera común. Se plantea el problema de determinar el menor número de colores que deben usarse para colorear el mapa.

[1]Se considerarán regiones conexas, esto es, se pueden unir dos cualesquiera de sus puntos mediante una línea poligonal contenida en la región.

Todo mapa en el plano se puede representar por un grafo. Para ello cada región del mapa se representa mediante un vértice, y cada par de vértices que representan regiones fronterizas se conectan mediante una arista. Dos regiones que se tocan en un solo punto no se consideran fronterizas. El grafo así construido es un grafo plano. El problema de colorear un mapa se transforma en el problema de colorear los vértices del grafo dual de tal forma que vértices adyacentes tengan colores distintos.

Definición 6.11 *El grafo que resulta del proceso anterior se llama grafo dual del mapa.*

Ejemplo 6.12 *Un mapa y su grafo dual*



Definición 6.13 *Una* **coloración** *de un grafo simple es una asignación de colores a los vértices del grafo de manera que a vértices adyacentes se les asignan colores distintos. El* **número cromático** *de un grafo simple es el número mínimo de colores que se requieren para una coloración del grafo, se denota por* $\chi(G)$.

6.2.1. Algoritmo de coloración

El algoritmo de coloración que presentamos a continuación, que resulta ser el obvio, es, desde un punto de vista de la eficiencia computacional, apropiado.

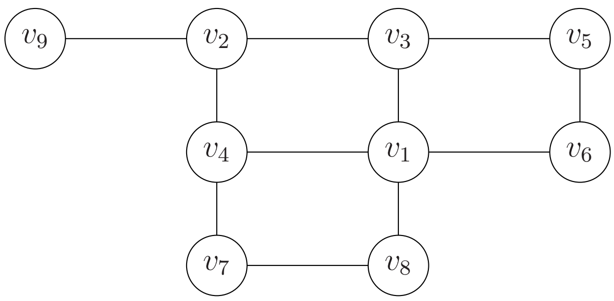
- Input: Un grafo simple (V, E)
- Inicio: Se ordenan los vértices de manera arbitraria. Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ la ordenación considerada.

- Paso 1: Se asigna el primer color, 1, al vértice v_1 y después, siguiendo el orden dado a los vértices, se asigna el color 1 a cada uno de los vértices no adyacentes a vértices ya coloreados con el color 1.
- Coloreados con el $(k-1)$-ésimo color, se repite el paso 1 con el color k-ésimo sobre los vértices no coloreados.
- El proceso se termina cuando todos los vértices están coloreados.

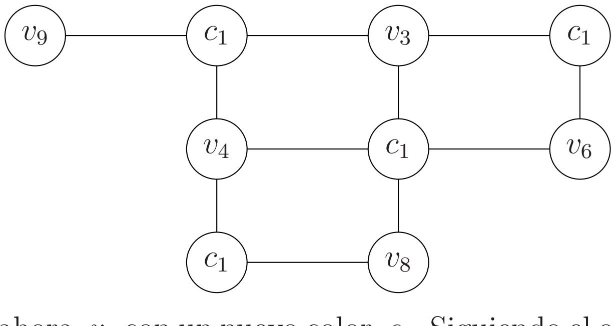
La cantidad de colores a usar para esta coloración puede depender de la ordenación que se haya elegido de vértices. Un ordenación que a veces se utiliza es la de ordenar los vértices del grafo según un orden no creciente de grados: $\delta(v_1) \geq \delta(v_2) \geq \cdots \geq \delta(v_n)$.

Teorema 6.14 *Sea G un grafo conexo tal que el grado de sus vértices sea como máximo k. Entonces, $\chi(G) \leq k+1$.*

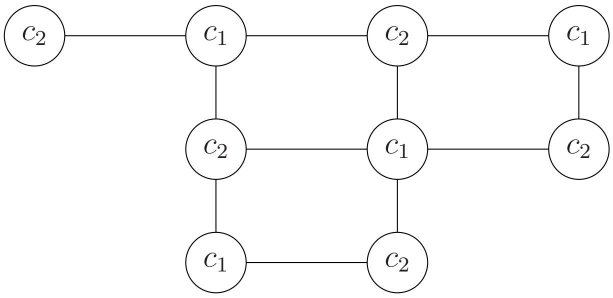
Ejemplo 6.15 *Colorear el grafo del ejemplo 6.12.*
Elegimos una ordenación para sus vértices de tal forma que la sucesión de grados sea no creciente.



Coloreamos v_1 con un color, c_1. Siguiendo el orden establecido podemos colorear del mismo color los vértices v_2, v_5 y v_7:

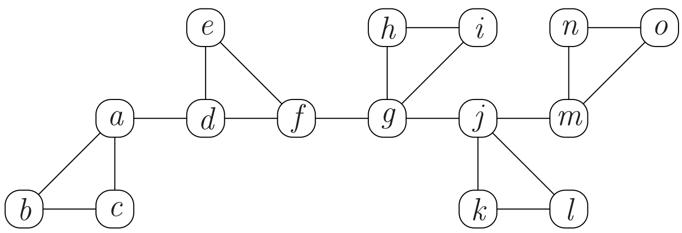


Coloreamos, ahora, v_3 con un nuevo color, c_2. Siguiendo el orden establecido podemos colorear del mismo color v_4, v_6, v_8 y v_9.

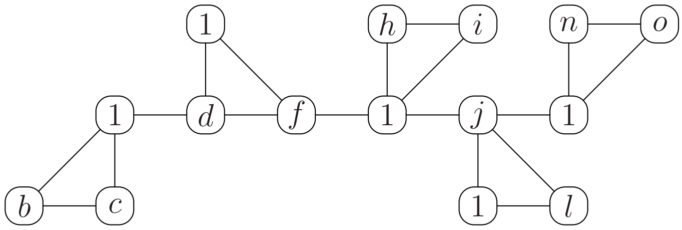


Puesto que el grafo puede colorearse con dos colores es bipartido. Los conjuntos de vértices que tienen asignados el color c_1, V_1, y los que tienen como color c_2, V_2, forman una partición del conjunto de vértices inicial y, además, sólo hay aristas que van de V_1 a V_2. Por otro lado, es obvio que el grado cromático de un grafo bipartido con aristas es 2.

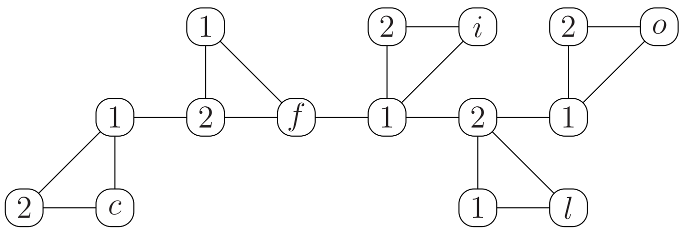
Ejemplo 6.16 *Colorear el siguiente grafo tomando la ordenación de vértices dada:*



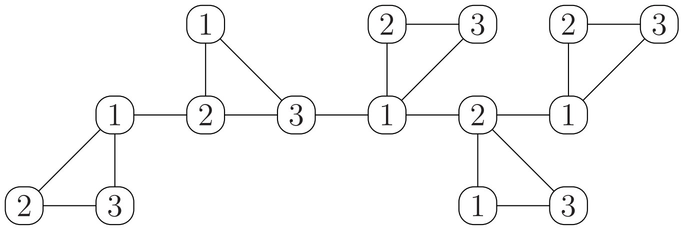
Empezamos asignando el color 1 a a. Siguiendo el algoritmo se llega a



Llegados a este punto, asignamos a b el color 2 y llegamos a



Un único color más, 3, sirve para colorear el grafo:



Como el grafo contiene ciclos de longitud 3, no se puede colorear con menos de tres colores, por lo que $\chi(G) = 3$.

Ejemplo 6.17 *El número cromático de K_n es igual a n.*

Todo grafo con n vértices admite coloración con n colores. Por otro lado, no se puede colorear K_n con menos colores, dado que todos los vértices son adyacentes dos a dos.

6.3. Emparejamiento en grafos bipartidos

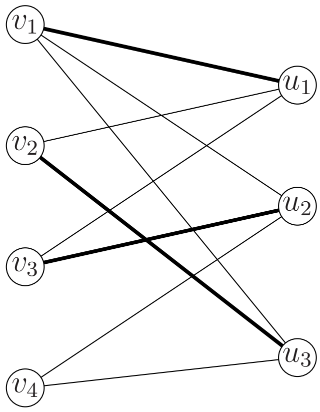
Definición 6.18 *Un* **emparejamiento** *de un grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ es un subconjunto M del conjunto de aristas E con la propiedad de que dos aristas de M nunca tienen un vértice en común. Un emparejamiento se dice que es* **máximo** *si, y sólo si, ningún otro emparejamiento tiene cardinal (es decir, número de aristas) mayor. Un emparejamiento se dice que es* **completo** *si, y sólo si, su cardinal coincide con el número de vértices del conjunto V_1.*

Teorema 6.19 *Un grafo bipartido $G = (V_1 \cup V_2, E)$ admite un emparejamiento completo si, y sólo si, se cumple la* **condición de Hall***, es decir,*

$$|T(A)| \geq |A| \text{ para todo } A \subseteq V_1,$$

donde $|T(A)| = \{v \in V_2 | \{u, v\} \in E \text{ para algún } u \in V_1\}$

En el dibujo siguiente, se presenta un grafo bipartido con emparejamiento no completo $M = \{\{v_1, u_1\}, \{v_2, u_3\}, \{v_3, u_2\}\}$. Es obvio, en este caso, que el grafo no admite ningún emparejamiento completo.



En la última Sección se verá un algoritmo para detectar emparejamientos máximos.

6.4. Redes de transporte

En este apartado se van a considerar grafos simples, dirigidos, ponderados y conexos. Podemos imaginar las aristas como tuberías a través de las cuales fluye cierto suministro. Los pesos son las capacidades que limitan las cantidades que pueden fluir por las tuberías.

Definición 6.20 *Una* **red de transporte** *es un grafo dirigido etiquetado que verifica las siguientes condiciones:*

a) Los pesos de las aristas son números reales positivos, denominados **capacidades** *de las aristas. A la aplicación que asigna a cada arista su capacidad se le denomina* **función de capacidad***.*

b) Existe un único vértice que es extremo inicial de todas las aristas incidentes con él ($\delta^-(v) = 0$). Se le denomina **fuente***.*

c) Existe un único vértice que es extremo final de todas las aristas incidentes ($\delta^+(v) = 0$) con él. Se le denomina **sumidero***.*

Definición 6.21 *Sea $G = (V, E)$ una red de transporte con función de capacidad c, fuente s y sumidero t. Un* **flujo** *en la red es una función*

$$f : E \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

que verifica

a) $f(u,v) \leq c(u,v)$ *(ley de viabilidad)*

b) *entrada*$(v) =$ *salida*(v) $\forall v \neq s, t$ *(ley de conservación), donde*
entrada$(v) = \sum_{(u,v)\in E} f(u,v)$ *y salida*$(v) = \sum_{(v,w)\in E} f(v,w)$

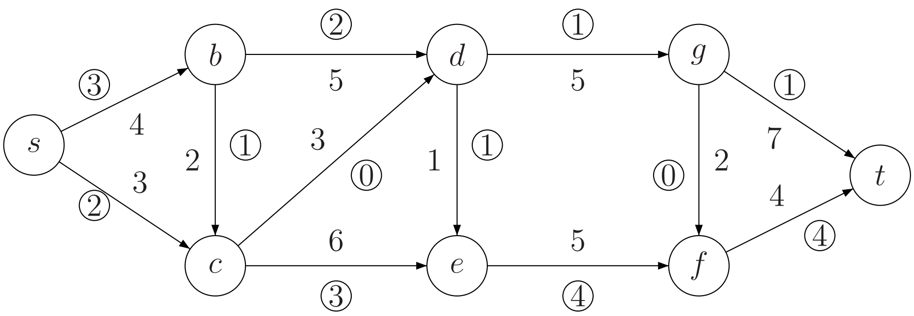
Definición 6.22 *En una red de transporte, a la suma de los flujos de las aristas que tienen como vértice inicial la fuente se denomina* **valor** *del flujo:*

$$Valor(f) = salida(s) = \sum_{(s,v)\in E} f(s,v)$$

Definición 6.23 *En una red de transporte, un* **corte** *es una partición del conjunto de vértices (S,T), de tal forma que que $s \in S$ y $t \in T$. Dado un corte (S,T), se define capacidad del corte como*

$$cap(S,T) = \sum_{u\in S,\, v\in T} c(u,v) \quad (^2)$$

Ejemplo 6.24 *Red de transporte con un flujo dado (de las dos etiquetas de cada arista, la rodeada por un círculo es la que define el flujo).*



Para este flujo, se tiene: $Valor(f) = f(s,b) + f(s,c) = 5$.

Si consideramos el corte dado por $S = \{s,b,d,f\}$ *y* $T = \{c,e,g,t\}$, *se tiene*

$$cap(S,T) = c(s,c) + c(b,c) + c(d,e) + c(d,g) + c(f,t) = 3 + 2 + 1 + 5 + 4 = 15$$

Teorema 6.25 *Sea G una red de transporte con un flujo y (S, T) un corte. Se verifica:*

$$valor(f) = \sum_{x\in S,\, v\in T} f(x,v) - \sum_{x\in S,\, w\in T} f(w,x) \quad (^3)$$

[2] En el caso de que (u,v) no sea una arista del grafo, se toma $c(u,v) = 0$.

[3] Si $(u,v) \notin E$, su flujo se considera nulo, es decir, $f(u,v) = 0$

Teorema 6.26 *Sea G una red de transporte con un flujo f y sea (S,T) un corte. Entonces,*

a) $valor(f) = entrada(t)$

b) $valor(f) \leq Cap(S,T)$

Demostración.– Se propone como ejercicio.

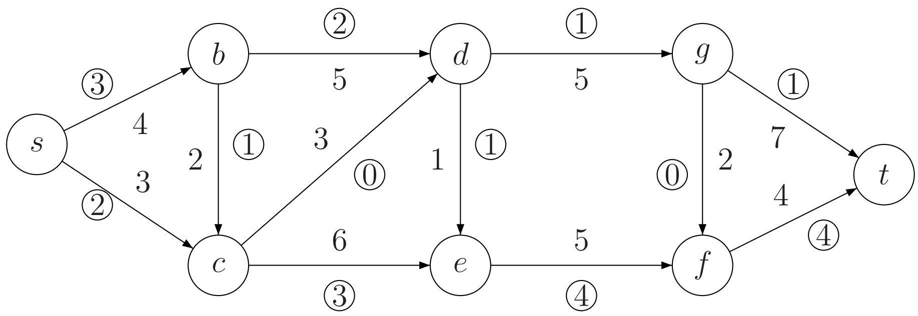
■

6.4.1. Teorema del flujo máximo y del corte mínimo

El Teorema 6.26 nos dice que el valor de cualquier flujo es menor que la capacidad de cualquier corte. Como el número de cortes es finito, esto implica que existe algún flujo cuyo valor es máximo y algún corte cuya capacidad es mínima. Asimismo, nos dice que

$$\text{Valor flujo máximo} \ \leq \ \text{capacidad corte mínimo.}$$

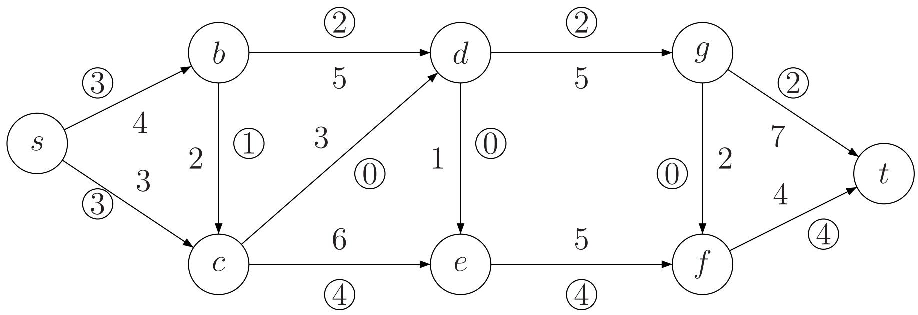
En la siguiente Subsección describiremos un algoritmo que permite encontrar un flujo máximo y un corte mínimo. Pero veamos, ahora, cómo podemos aumentar el valor del flujo dado en el Ejemplo 6.24:



Ninguna de las dos aristas que parten de la fuente está saturada[4]. Podemos, por ejemplo, aumentar el flujo de la arista (s,c) a 3. Esto obliga, para preservar la ley de conservación, a modificar el flujo de al menos una arista incidente con c. En este caso concreto, podemos hacer cero el flujo de (b,c), hacer 4 el flujo de (c,e) o hacer que el flujo de (c,d) pase a ser uno. Supongamos que aumentamos en una unidad el flujo de (c,e). De nuevo, debemos modificar el flujo de al menos una arista incidente en e para preservar la ley de conversación. En este caso hay dos formas de hacerlo: aumentando a 5 el flujo de (e,f) o disminuyendo a 0 el flujo de (d,e). Si el flujo de (e,f) pasase a ser 5, deberíamos aumentar el flujo de (f,t), lo que es

[4]Una arista en una red con flujo se dice saturada si el flujo es igual a la capacidad de la arista.

imposible pues la arista está saturada, o disminuir el flujo de (g, f). Esto último es imposible ya que el flujo de (g, f) es nulo. Por lo tanto, sólo nos queda disminuir a cero el flujo de (d, e). Si aumentamos ahora a 2 el flujo de (d, g) y hacemos lo propio con (g, t), habremos encontrado un camino (obviando los sentidos de las aristas), $s-c-e-d-g-t$, que conduce de la fuente al sumidero y que nos permite aumentar el valor del flujo obteniendo



¿Qué condiciones son esenciales para que hayamos podido hacer tal cosa? Básicamente, que, en el camino construido, las aristas que van en el mismo sentido que el camino no están saturadas y la que va en sentido opuesto, no tiene flujo nulo. De ahí, la definición que sigue:

Definición 6.27 *Sean G una red de transporte con fuente s, sumidero t y capacidad c, y f un flujo en la red. Un camino no dirigido de s a t, $s = v_1, v_2, \ldots, v_n = t$, se dice* **camino f-aumentante** *si, y sólo si, verifica que:*

a) $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$, *si* $(v_i, v_{i+1}) \in E$

b) $f(v_i, v_{i+1}) > 0$ *si* $(v_{i+1}, v_i) \in E$

Un camino no dirigido de la fuente al sumidero es f-aumentante si las aristas que se recorren según el sentido del grafo dirigido no han llegado a su capacidad máxima y las aristas que se consideran en el sentido contrario llevan flujo no nulo. La existencia de caminos f-aumentantes en un flujo permite aumentar el valor del flujo.

Definición 6.28 *Sean G una red de transporte con fuente s, sumidero t y capacidad c, y f un flujo en la red. Un camino no dirigido que parte de s y no llega a t, $s = v_1, v_2, \ldots, v_n$ ($v_n \neq t$), se dice camino f-aumentante incompleto si, y sólo si, verifica las dos condiciones siguientes:*

a) $f(v_i, v_{i+1}) < c(v_i, v_{i+1})$, *si* $(v_i, v_{i+1}) \in E$

b) $f(v_i, v_{i+1}) > 0$ *si* $(v_{i+1}, v_i) \in E$

Una vez encontrado un camino $f-$aumentante, no podemos aumentar o disminuir el flujo en las aristas que lo componen de manera arbitraria. Debemos de tener en cuenta que no podemos saturar las aristas que vayan en el sentido del camino, ni hacer negativo el flujo en las aristas que vayan en sentido negativo al camino. Con esta precaución, se tiene el siguiente resultado.

Teorema 6.29 *Sean $G = (V, E)$ una red de transporte con fuente s, sumidero t y capacidad c, y f un flujo en la red. Si hay un camino f-aumentante, existe un flujo f^* cuyo valor es mayor que el de f. Si el camino f-aumentante es $s = v_1, v_2, \ldots, v_n = t$, se define f^* de la forma siguiente:*

- *$f^*(a) = f(a)$ si a no es una arista del camino f-aumentante*
- $f^*(v_i, v_{i+1}) = \left\{ \begin{array}{ll} f(v_i, v_{i+1}) + \alpha & \text{si}(v_i, v_{i+1}) \in E \\ f(v_i, v_{i+1}) - \alpha & \text{si}(v_{i+1}, v_i) \in E \end{array} \right.$ *, donde* $\alpha = \min\limits_{1 \leq i \leq n-1} \alpha_i$ *y*

$$\alpha_i = \left\{ \begin{array}{ll} c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1}) & \text{si}(v_i, v_{i+1}) \in E \\ f(v_i, v_{i+1}) & \text{si}(v_{i+1}, v_i) \in E \end{array} \right.$$

Demostración.– Por la forma de definir α, la ley de viabilidad se mantiene y ninguna arista tiene flujo negativo. Veamos que también se preserva la ley de conservación:

Para los vértices v que no están en el camino no hay variación en las entradas y salidas. Para un vértice v que está en el camino hay tres situaciones, y en las tres se verifica la ley de conservación:

a) v es extremo inicial y final de aristas (x, v) y (v, y). Entonces, $f^*(x, v) = f(x, v) + \alpha$ y $f^*(v, y) = f(v, y) + \alpha$. Al aumentar en α tanto la entrada como la salida de v se preserva la ley de conservación.

b) v es extremo final de aristas (x, v) y (y, v). En este caso, una de las aristas tiene sentido contrario al del camino, por lo que se suma α en una y se resta en la otra. Así pues, no varían ni entrada ni salida de v.

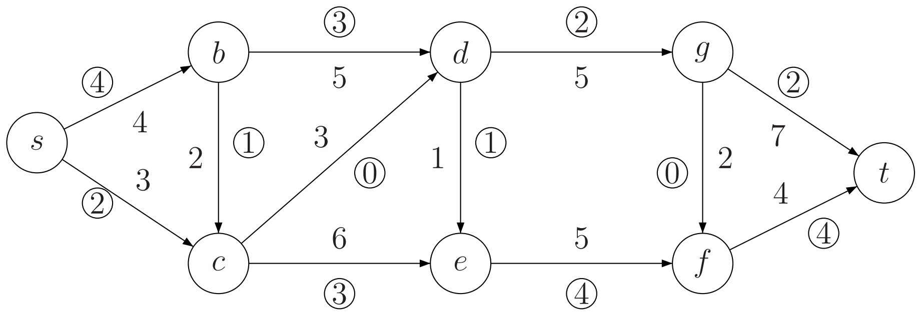
c) v es extremo inicial de aristas. La situación es análoga a la de b)

■

Ejemplo 6.30 *Ya hemos construido un camino f-aumentante para el flujo del ejemplo 6.24. No es el único camino f-aumentante. También lo es el camino $s - b - d - g - t$. En este caso,*

	s	$\to$	b	$\to$	d	$\to$	g	$\to$	t
capacidad		4		5		5		7	
flujo		3		2		1		1	
diferencia		1		3		4		6	

Al restar capacidad menos flujo en esas aristas el mínimo es 1, luego, siguiendo la notación del Teorema anterior, $\alpha = 1$.
Así pues, podemos aumentar en una unidad el flujo de las aristas del camino obteniendo un flujo de mayor valor:



Teorema 6.31 *El valor máximo de un flujo de s a t en una red es igual a la capacidad mínima de un corte que separe a s de t.*

Demostración.– Sea f un flujo máximo para la red. Para ese flujo, sea S el conjunto de vértices x para los que existe un camino f-aumentante de s a x y sea T el conjunto complementario de S en el conjunto de vértices de la red. Al ser f un flujo máximo, no existe un camino f-aumentante de s a t. Por tanto, $t \notin S$, y todos los caminos f-aumentantes son incompletos. Por ser T el conjunto complementario de S, se verifica que $t \in T$.

Veamos que $cap(S,T) = valor(f)$. Sea (x,y) una arista cualquiera de la red con $x \in S$ e $y \in T$. Por definición de S, existe un camino f-aumentante incompleto de s a x. Si $f(x,y) < c(x,y)$, el camino se podría extender a y, contradiciendo que $y \in T$. Por tanto, $f(x,y) = c(x,y)$. Sea (u,v) una arista cualquiera de la red con $u \in T$ e $v \in S$. Entonces, existe un camino f-aumentante incompleto de s a v. Si $f(u,v) > 0$, el camino se podría extender a u, contradiciendo que $u \in T$. Por tanto, $f(u,v) = 0$.

Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores y el Teorema 6.25, se tiene

$$valor(f) = \sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) - \sum_{u\in T, v\in S} f(u,v) = \sum_{x\in S, y\in T} f(x,y) = cap(S,T)$$

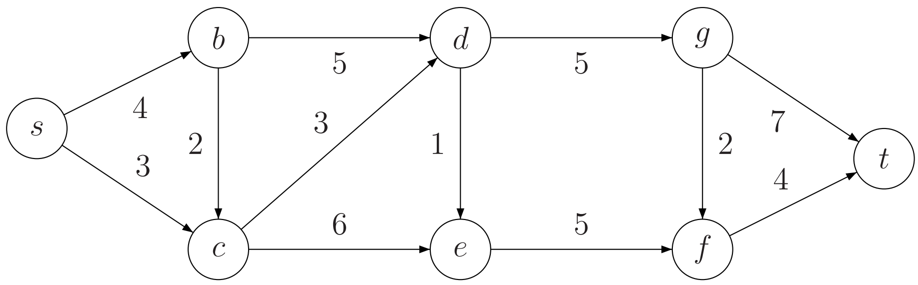
■

6.4.2. Algoritmo de etiquetaje del flujo máximo

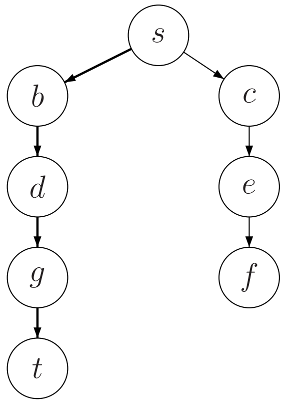
Dado un flujo, se trata de encontrar un árbol de caminos f-aumentantes utilizando el método de búsqueda en anchura. Para ello se considera el grafo subyacente ignorando la dirección de las aristas

- Inicio: Empezar por un flujo cualquiera (Por ejemplo, se puede asignar flujo 0 a todas las aristas)
- Paso 1: Utilizar BEA para construir un árbol de caminos f-aumentantes con raíz s: Partiendo del vértice fuente s se van añadiendo vértices adyacentes formando un árbol por BEA; no se puede elegir un vértice ya elegido. La elección de vértices hijos se realiza eligiendo aristas de tal forma que, si van en su dirección tengan flujo menor que su capacidad, y si van en la dirección contraria, tengan flujo no nulo.
- Paso 2: Si el árbol llega a t, se considera el camino f-aumentante y se aumenta el valor del flujo. Repetir el paso 1 con el nuevo flujo. (El teorema 6.29 nos da la manera de definir el nuevo flujo con valor mayor).
- Fin: El proceso termina si el árbol no llega a t. El último flujo obtenido en el paso 2 es máximo. El conjunto S del corte está formado por los vértices de este árbol de caminos f-aumentantes incompletos con raíz s (Todos los caminos f-aumentantes son incompletos. En la demostración del Teorema 6.25 vimos que el conjunto S lo forman los vértices con caminos f- aumentantes incompletos desde s).

Ejemplo 6.32 *Encontrar un flujo máximo y un corte mínimo en la siguiente red de transporte*



- Inicio: Comenzamos con un flujo f_1 que asigna el valor 0 a todas las aristas de la red.
- Paso 1: Partiendo de s se pueden elegir los dos vértices adyacentes, b y c, puesto que el flujo de las aristas correspondientes no supera su capacidad. Desde b se puede elegir d, pero no c pues ya está en el árbol. Desde c se puede elegir e, pero no d pues ya está en el árbol. Desde d se puede elegir g, pero no e. Desde e se puede elegir f. Finalmente, desde g se puede elegir t, pero no f. Se obtiene:



- Paso 2: Hemos encontrado un camino f-aumentante en el que todas las aristas van en su sentido. Entonces

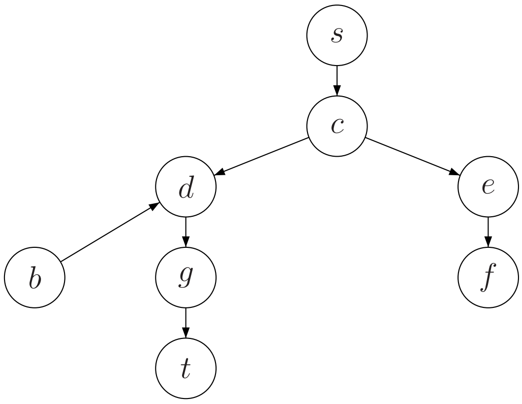
	s	$\rightarrow$	b	$\rightarrow$	d	$\rightarrow$	g	$\rightarrow$	t
capacidad		4		5		5		7	
flujo f_1		0		0		0		0	
diferencia		4		5		5		7	

El nuevo flujo, f_2, se obtienen sumando 4 unidades al flujo f_1 en las aristas de ese camino. El flujo no cambia para el resto de las aristas[5].

	s-b	s-c	b-d	b-c	c-d	c-e	d-e	d-g	e-f	g-f	f-t	g-t
cap	4	3	5	2	3	6	1	5	5	2	4	7
f_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f_2	**4**	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	4

- Volvemos a aplicar el paso 1, pero ahora con f_2 como flujo. Partiendo de s, no se puede elegir b pues la arista está saturada. Se puede elegir c. Desde c se puede elegir d o e, pero no se puede elegir b pues va en sentido contrario y el flujo es 0. Desde d se puede elegir b pues su arista va en sentido contrario y el flujo es positivo. Tampoco pueden elegirse ni c ni e pues ya están en el árbol. Se puede elegir g. Desde e no se pueden elegir c ni d pues ya están en el árbol. Puede elegirse f. Por último, desde g se puede elegir t. Se obtiene el árbol

[5]En la tabla, un número en negrita indica que la correspondiente arista está saturada



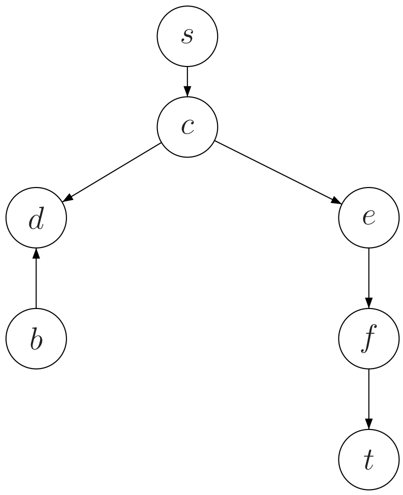
- Hemos obtenido un camino f-aumentante. Todas las aristas de la red van en el sentido del camino, por lo que debemos restar capacidad menos flujo.

	s	$\to$	c	$\to$	d	$\to$	g	$\to$	t
capacidad		3		5		5		7	
flujo f_2		0		0		4		4	
diferencia		3		5		1		3	

El nuevo flujo se obtiene sumando 1 al flujo f_2 en las aristas de ese camino. Para el resto de las aristas, el flujo se mantiene.

	s-b	s-c	b-d	b-c	c-d	c-e	d-e	d-g	e-f	g-f	f-t	g-t
cap	4	3	5	2	3	6	1	5	5	2	4	7
f_2	**4**	0	4	0	0	0	0	4	0	0	0	4
f_3	**4**	1	4	0	1	0	0	**5**	0	0	0	5

- Volvemos al paso 1, pero ahora con f_3 como flujo. Partiendo de s, no se puede elegir b, pero sí c. Desde c se pueden elegir d o e, pero no b. Desde d se puede elegir b pues aunque va en sentido contrario el flujo es 4. Sin embargo, no se puede elegir d pues ya está en el árbol, ni tampoco g pues la arista está saturada. Desde e solamente se puede elegir f. Desde b no se puede elegir ningún vértice. Finalmente, desde g no se pueden elegir ni e ni f, sino únicamnete t. De este modo se obtiene el árbol:



- En el paso anterior hemos encontrado un camino f-aumentante para el que las correspondientes aristas de la red van en su sentido. Por lo tanto, hay que restar capacidad menos flujo.

$$\begin{array}{lccccccccc} & s & \rightarrow & c & \rightarrow & e & \rightarrow & f & \rightarrow & t \\ \text{capacidad} & & 3 & & 6 & & 5 & & 4 & \\ \text{flujo } f_3 & & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ \text{diferencia} & & 2 & & 6 & & 5 & & 4 & \end{array}$$

  El nuevo flujo se obtiene sumando 2 al flujo f_3 en las aristas de ese camino. Para el resto de las aristas, el flujo se mantiene.

	s-b	s-c	b-d	b-c	c-d	c-e	d-e	d-g	e-f	g-f	f-t	g-t
cap	4	3	5	2	3	6	1	5	5	2	4	7
f_3	**4**	1	4	0	1	0	0	**5**	0	0	0	5
f_4	**4**	**3**	4	0	1	2	0	**5**	2	0	2	5

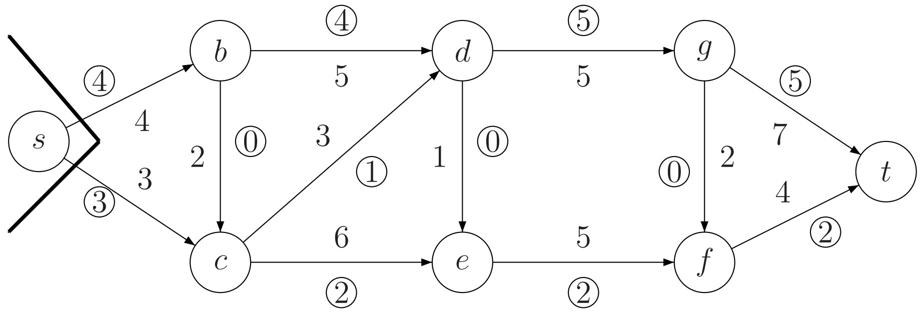
- Volvemos al paso 1, tomando como flujo de partida f_4. Partiendo de s, no se puede elegir ningún vértice ya que las aristas que van a b y a c están saturadas. El árbol consta de un único vértice s. Los caminos f-aumentantes no llegan a t, son incompletos.

  El flujo f_4 es un flujo máximo.

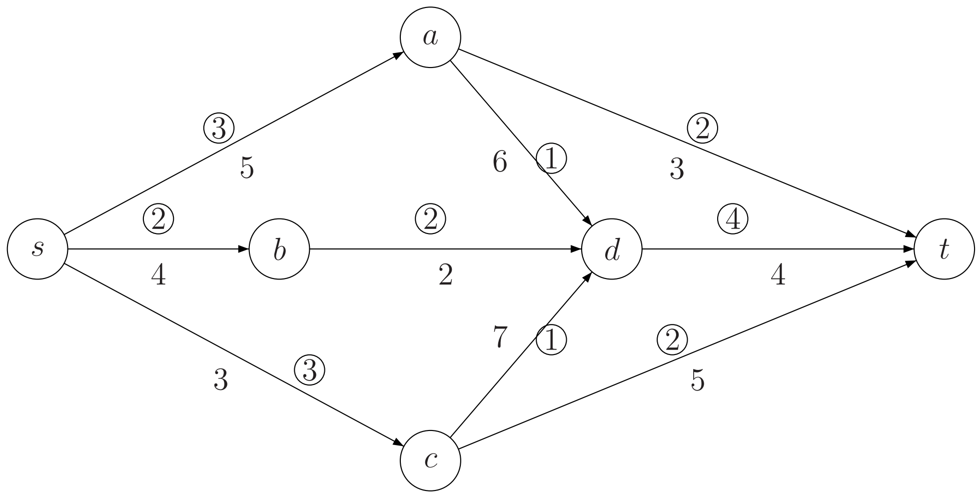
  El corte mínimo calculado se corresponde con: $S = \{s\}$, $T = \{b, c, d, e, f, g, t\}$.

  Se tiene que $Valor(f_4) = f_4(s, b) + f_4(s, c) = 4 + 3 = 7$ y que la capacidad del corte obtenido es $f_4(s, b) + f_4(s, c) = 4 + 3 = 7$.

El flujo y el corte obtenidos se representan en la siguiente figura:



Ejemplo 6.33 *Encontrar el flujo máximo y el corte mínimo en la siguiente red de transporte, comenzando por el flujo que se indica.*



- Inicio: Comenzamos con el flujo f_1 que se indica en la figura inmediatamente anterior.
- Debemos buscar un camino f-aumentante para f_1 que parta de s.

  En este caso, utilizando BEA, es fácil ver que $s-a-t$ es un camino tal. Como

	$s \rightarrow a$	$a \rightarrow t$	Mínimo
capacidad	5	3	
flujo f_1	3	2	
diferencia	2	1	1

  aumentado en una unidad el flujo de las aristas $s-a$ y $a-t$ y dejando el flujo intacto en el resto de aristas, obtenemos un nuevo flujo, f_2, de mayor valor que f_1 (véase la Tabla 6.1).

- No es difícil ver que, aplicando BEA, se encuentra que $s-a-d-c-t$ es un camino f-aumentante para f_2. Dado que

	s	$\to$	a	$\to$	d	$\leftarrow$	c	$\to$	t	Mínimo
capacidad		5		6		7		5		
flujo f_2		4		1		1		2		
diferencia		1		5				3		
flujo						1				1

  para obtener un nuevo flujo, f_3, de mayor valor que f_2 debemos aumentar en una unidad el flujo de las aristas $s-a$, $a-d$ y $c-t$ y restar una unidad al flujo de la arista $c-d$, sin modificar el flujo del resto de aristas (véase la Tabla 6.1)

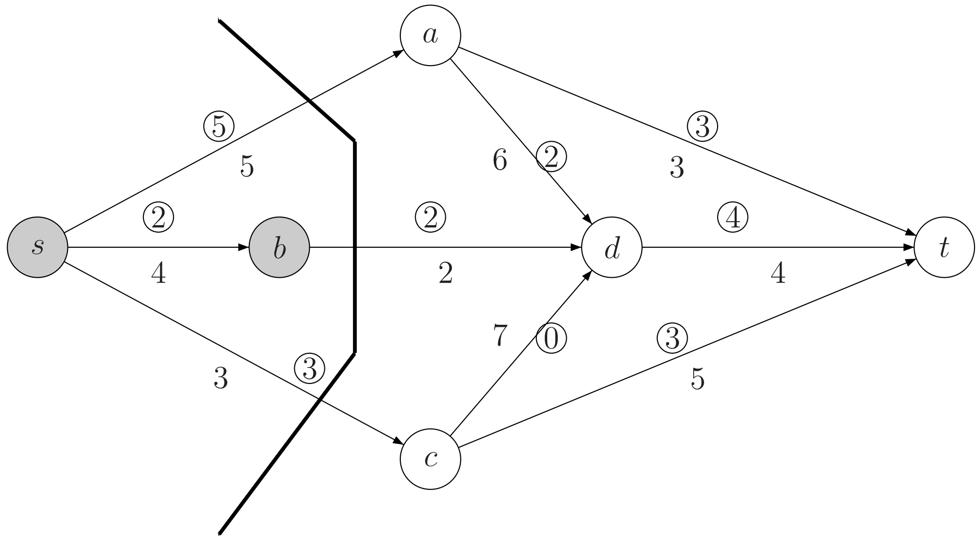
- Ahora, debemos buscar un camino f-aumentante para f_3. Es fácil ver que todos los caminos f-aumentantes son incompletos, por lo que f_3 es un flujo de valor máximo. El corte de capacidad mínima, en este caso, está formado por los conjuntos $S = \{s, b\}$ y $T = \{a, c, d, t\}$.

	s-a	*s-b*	*s-c*	*a-d*	*a-t*	*b-d*	*c-d*	*c-t*	*d-t*
capacidad	5	4	3	6	3	2	7	5	4
f_1	3	2	**3**	1	2	**2**	1	2	**4**
f_2	4	2	**3**	1	**3**	**2**	1	2	**4**
f_3	**5**	2	**3**	2	**3**	**2**	0	3	**4**

Cuadro 6.1: Sucesivos flujos del ejemplo 6.33

Teniendo en cuenta la Tabla 6.1, se tiene que el valor de un flujo máximo es $f(s,a)+f(s,b)+f(s,c) = 5+2+3 = 10$, mientras que la capacidad de un corte mínimo es igual a $c(s,a)+c(s,c)+c(b,d) = 5+3+2 = 10$.

Representamos en la siguiente figura, el flujo máximo y el corte mínimo obtenidos:



6.4.3. Algoritmo para obtener emparejamientos máximos

El estudio de los emparejamientos se puede reducir al estudio de redes y flujos y esta es la aproximación que adoptaremos aquí

Definición 6.34 *Dado un grafo bipartido $G = (U \cup V, E)$, se denomina red de emparejamiento a la red obtenida a partir de él según el proceso siguiente:*

a) Se transforma en un grafo dirigido, tomando los vértices de U como vértices iniciales y los de V son vértices finales de las aristas de G.

b) Se añade un vértice fuente s y aristas dirigidas desde s a cada uno de los vértices de U.

c) Se añade un vértice sumidero t y aristas dirigidas desde cada uno de los vértices de V al vértice t.

d) Se asigna una capacidad igual a 1 a cada una de las aristas.

Teorema 6.35 *Dada una red de emparejamiento $G = (U \cup V, E)$, se verifica:*

a) Un flujo corresponde a un emparejamiento.

b) Un flujo máximo corresponde a un emparejamiento máximo.

c) Un flujo cuyo valor es $|U|$ corresponde a un emparejamiento completo.

Demostración.– Supongamos que la arista (u, v) tiene flujo 1. La única arista que llega a u desde s es (s, u). Por el principio de conservación esa arista tiene que tener flujo 1 y el resto de las aristas que parten de u hacia vértices de V tienen que tener flujo 0. La única arista que partiendo de u tienen flujo 1 es (u, v). Razonamiento análogo se puede para v. Las aristas con asignación de flujo igual a 1 constituyen un emparejamiento. El número de vértices del emparejamiento es igual al valor del flujo.

■

La construcción y el teorema anteriores, junto con el algoritmo del flujo máximo, dan un algoritmo para encontrar un emparejamiento máximo y un emparejamiento completo si este existe.

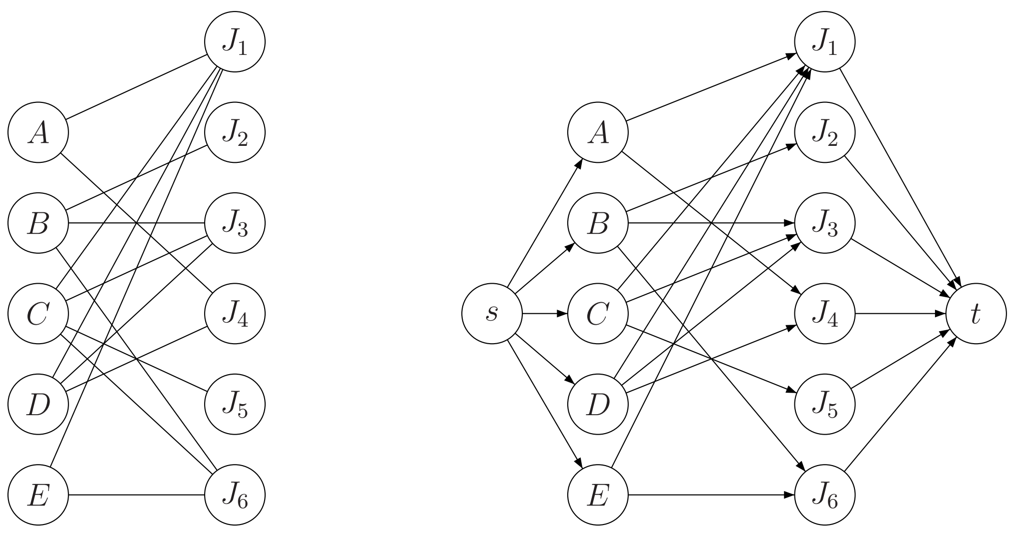
Ejemplo 6.36 *En un proceso de selección de personal, cinco candidatos distintos, digamos* $\{A, B, C, D, E\}$*, se presentan para seis puestos,*$\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6\}$*. Se tiene que el candidato A está cualificado para los puestos* J_1 *y* J_4*, que B está cualificado para los puestos* J_2*,* J_3 *y* J_6*, que C está cualificado para los puestos* J_1*,* J_3 *,* J_5 *y* J_6*, que D está cualificado para los puestos* J_1*,* J_3 *y* J_4 *y que E está cualificado para los puestos* J_1 *y* J_6*.*

a) Modelizar esta situación mediante una red de emparejamiento.

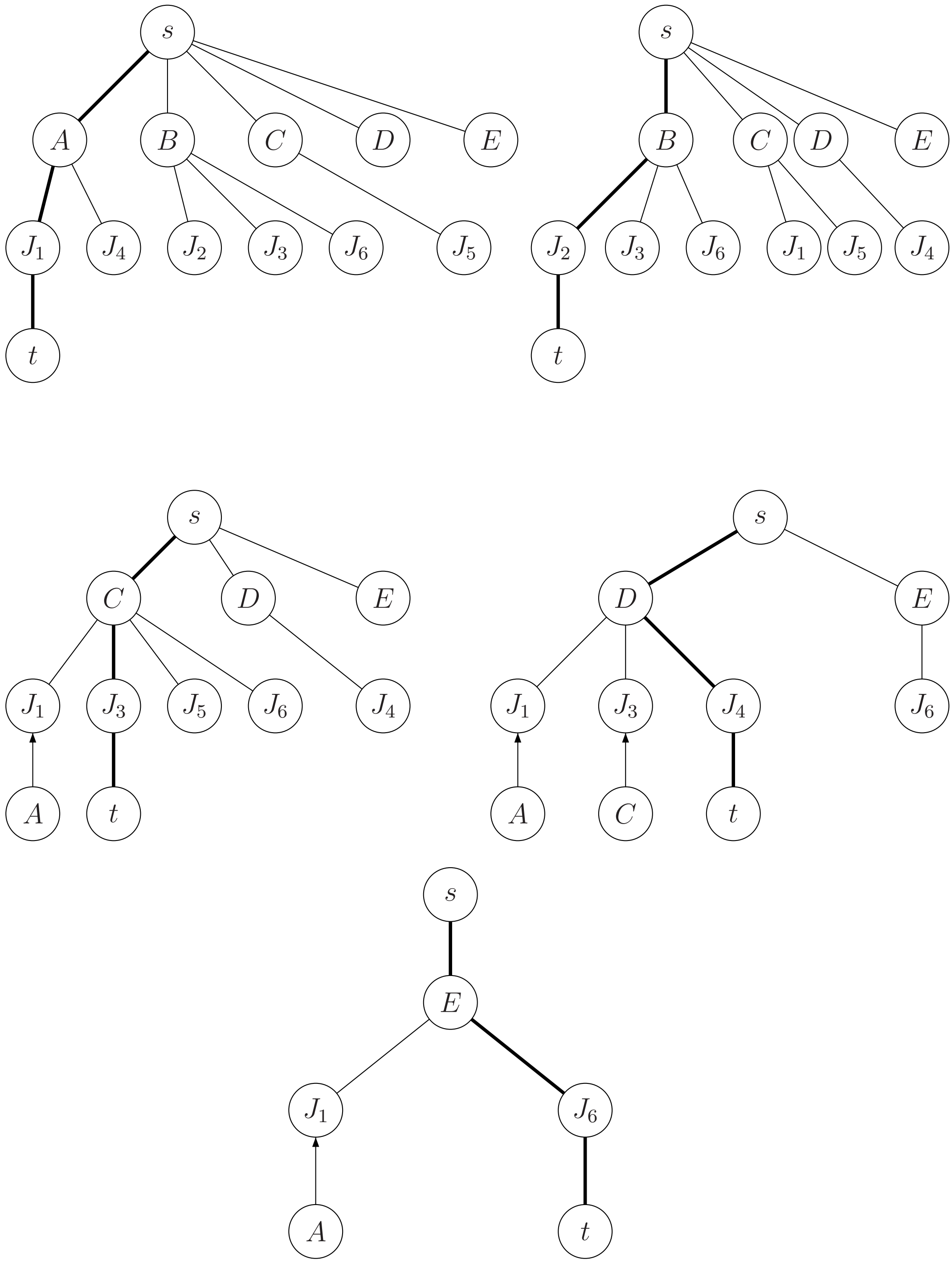
b) Encontrar un emparejamiento máximo.

c) ¿Existe emparejamiento completo?

a)

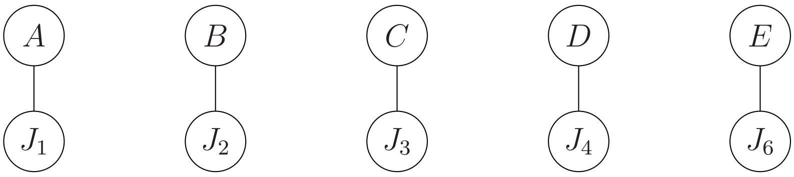


Ahora, debemos encontrar un flujo máximo para la red de la derecha teniendo en cuenta que la capacidad de todas las aristas de la red es igual a 1. Comenzamos con el flujo f_1 igual a cero en todas las aristas y buscamos un camino f-aumentante para cada nuevo flujo, obteniendo la siguiente sucesión de árboles.



Las aristas marcadas son las aristas cuyo valor de flujo es 1. Para el resto, el flujo es 0.

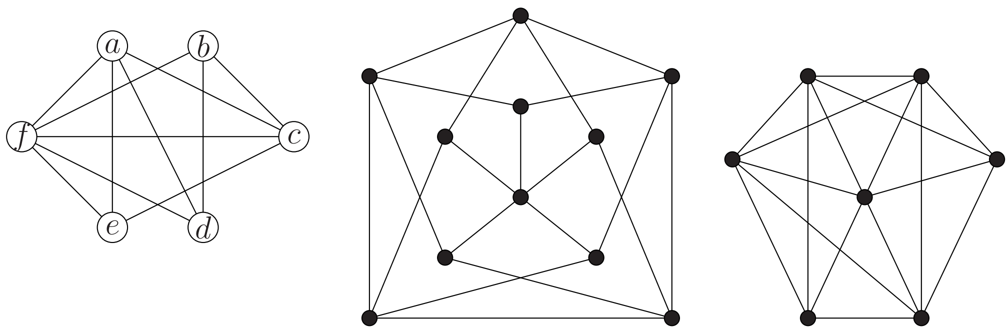
Eliminando del grafo bipartido las aristas con flujo máximo igual a 0 obtenemos el emparejamiento máximo:



Es un emparejamiento completo, ya que el número de aristas coincide con el número de vértices del primer conjunto.

6.5. Problemas propuestos

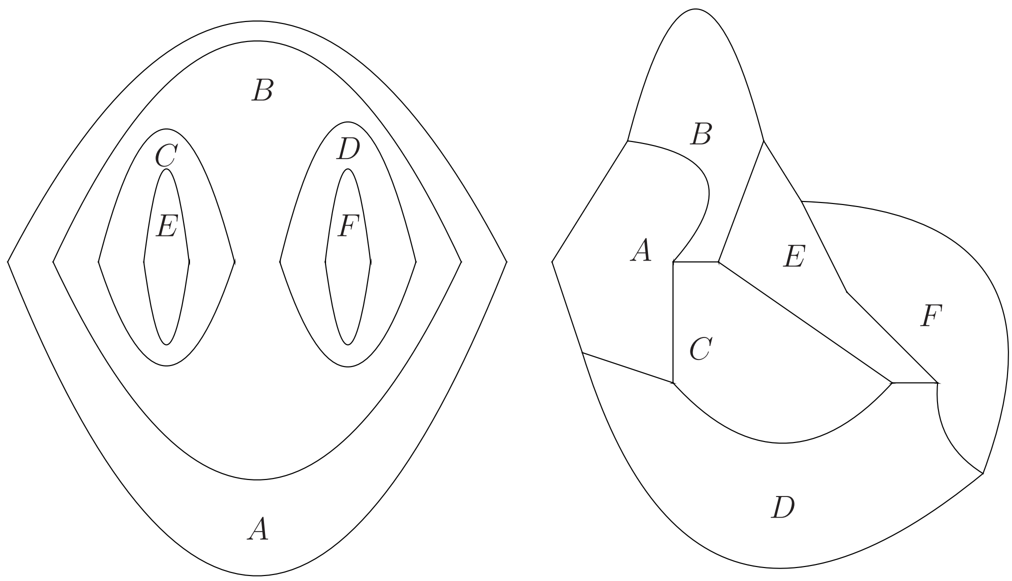
Problema 6.1 .- Determinar si los siguientes grafos son o no planos. En el caso de que lo sean, comprobar la fórmula de Euler.



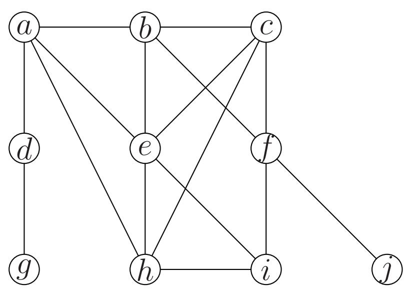
Problema 6.2 .- Indicar, razonadamente, para qué valores de n los grafos completos K_n son planos.

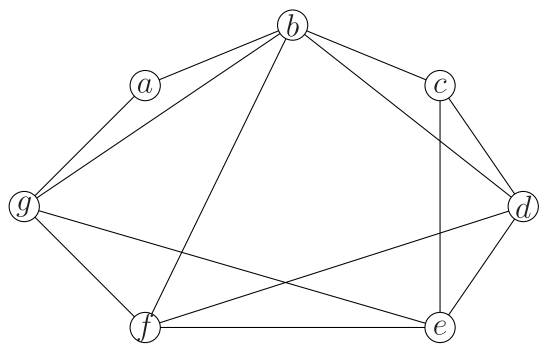
Problema 6.3 .- Demostrar que en todo grafo simple, conexo y plano existe al menos un vértice cuyo grado es, a lo más, cinco.

Problema 6.4 .- Construir el grafo dual a cada uno de los siguientes mapas. Utilizar el algoritmo de coloración para encontrar una coloración para cada uno de ellos. ¿Qué número cromático tienen?



Problema 6.5 .- Utilizando el algoritmo de coloración, construir una coloración de los grafos dados. Encontrar el número cromático de los mismos.





Problema 6.6 .- Encontrar el número cromático de los grafos C_n y W_n ($n \geq 3$). [6]

Problema 6.7 .- Encontrar, razonadamente, para qué valores de n el grafo K_n es bipartido.

Problema 6.8 .- En una empresa hay seis comisiones que se reúnen una vez al mes. Si representamos los miembros de las mismas por las iniciales de sus apellidos, las comisiomes son: $C_1 = \{a, b, z\}$, $C_2 = \{b, l, r\}$, $C_3 = \{a, r, z\}$, $C_4 = \{l, r, z\}$, $C_5 = \{a, b\}$ y $C_6 = \{b, r, z\}$. ¿Cuál es mínimo número de reuniones distintas que se necesitan para asegurar que ningún miembro es convocado para asistir a dos reuniones al mismo tiempo?

Problema 6.9 .- La Escuela de Informática ha programado 6 conferencias de una hora de duración A, B, C, D, E, F. Se ha estimado que, entre la posible audiencia, habrá alumnos interesados simultáneamente en A y B, A y C, A y E, A y F, B y C, B y D, B y F, C y D, C y E, C y F, D y E, D y F, E y F. ¿Cuántas horas como mínimo son necesarias para programar las conferencias, de manera que todos los alumnos puedan asistir a las conferencia en las que están interesados?

[6] El grafo W_n se obtiene añadiendo un vértice adicional al ciclo C_n y conectando el nuevo vértice con los demás.

Problema 6.10 .- Tenemos nueve paquetes informáticos instalados en ocho ordenadores tal y como se indica en la siguiente tabla

Ordenador	1	2	3	4	5	6	7	8
Paquetes	1,2,6,9	2,7,8	4,6	3,5,8	6,7,9	1,2,3,4,6	8,9	1,2,6

Se quieren distribuir los ordenadores en laboratorios, de modo que los que estén en la misma sala no tengan ningún paquete en común.

a) Demostrar que 5 salas son suficientes para la distribución.

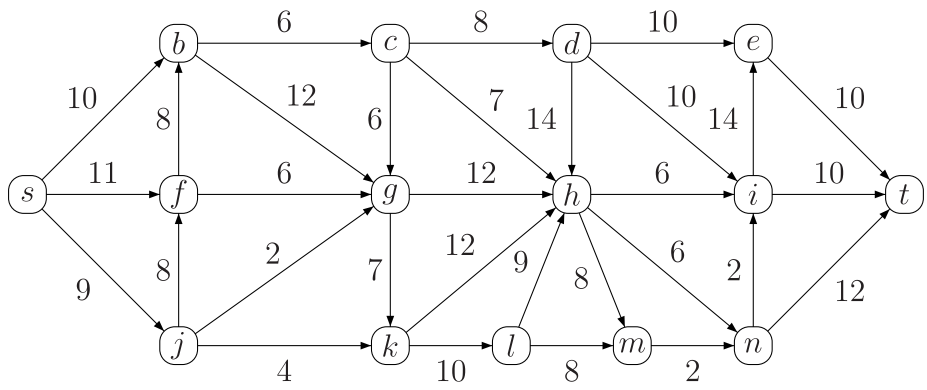
b) Demostrar que 5 salas son necesarias para la distribución.

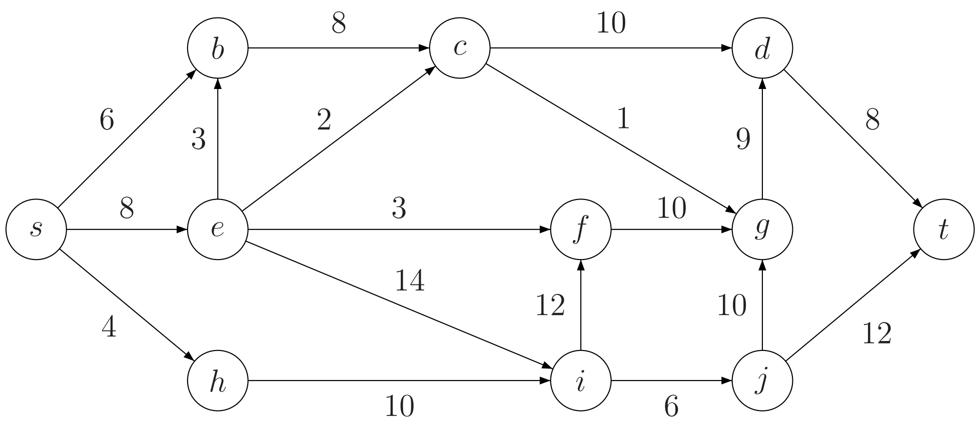
Problema 6.11 .- Un zoo quiere construir hábitats naturales para exhibir los animales de que dispone. Supongamos que denotamos las especies a las que pertenecen los animales por letras mayúsculas. El problema que se encuentra es la depreciación entre especies. En la tabla se indica la situación (una x en el lugar (X, Y) de la tabla significa que la especie X depreda a la especie Y):

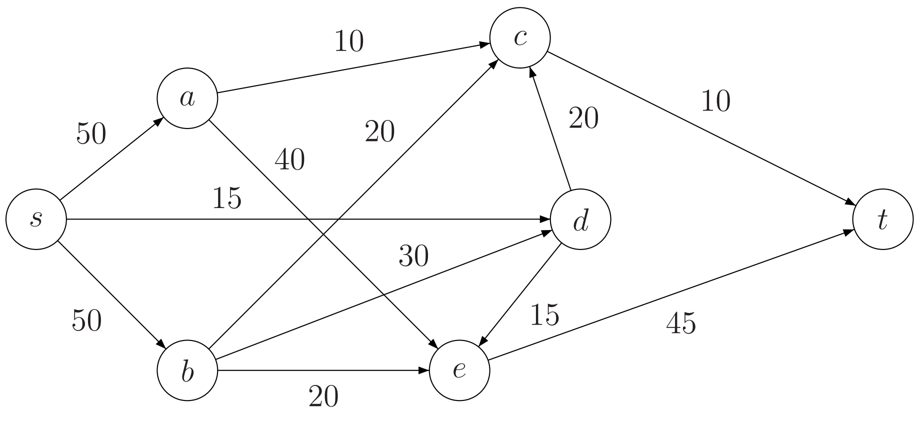
	A	B	C	D	E	F	G	H
A		x	x		x	x	x	
B			x	x		x		x
C				x				x
D		x			x		x	
E			x					x
F			x				x	x
G			x		x			
H					x			

Representar la situación mediante un grafo y utilizar una coloración para distribuir las especies de forma que no se depreden.

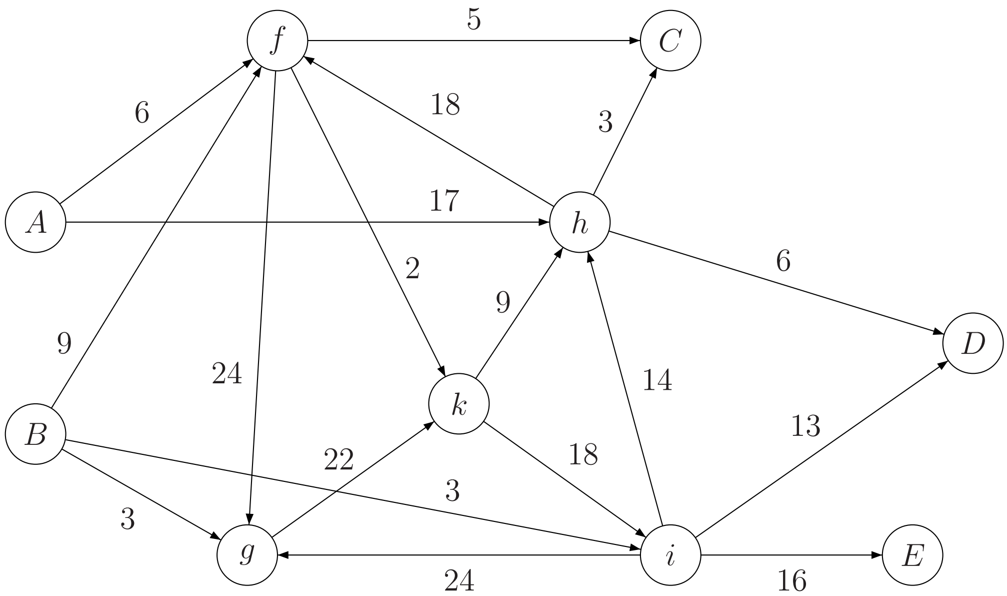
Problema 6.12 .- Determinar un flujo máximo y un corte mínimo para las redes dadas. Comenzar en los tres casos con flujo inicial igual a cero.





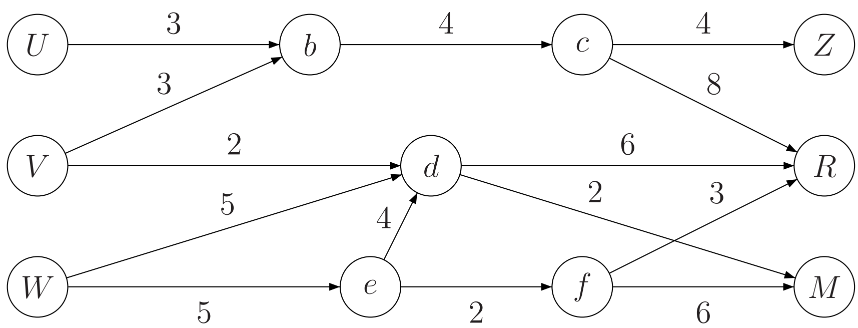


Problema 6.13 .- Las empresas A y B fabrican un producto que se transporta, a través de la red que muestra la figura, a los mercados C, D y E. Las capacidades de las vías de transporte aparecen en la gráfica. Modelizar la red y determinar su flujo máximo.



Problema 6.14 .- Sea una red con el conjunto de vértices $\{s, a, b, x, d, e, g, t\}$ y arcos y capacidades según la lista: $(s, a) = n$, $(s, d) = n$, $(a, b) = n$, $(b, x) = n$, $(b, e) = 1$, $(x, t) = n$, $(d, e) = n$, $(e, g) = n$, $(g, t) = n$, ¿cuántas iteraciones se pueden necesitar para construir un flujo máximo si se empieza con un flujo inicial de cero?

Problema 6.15 .- En la siguiente red se refleja el sistema de bombeo por la que se distribuye petróleo a tres refinerías U, V y W desde tres pozos M, R y Z. Los vértices b, c, d, e y f representan las estaciones de bombeo intermedias. Las capacidades de la red aparecen en la gráfica. Modelizar la red y determinar el flujo máximo de la misma.



Problema 6.16 .- Consideremos ahora la red anterior con las siguientes restricciones: El pozo U puede bombear como máximo dos unidades, el pozo V como mucho 4 unidades y el pozo W como mucho 7 unidades. Además, la estación intermedia d

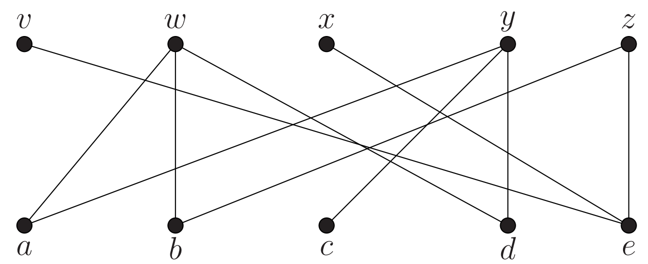
puede bombear como mucho 6 unidades. Finalmente, la ciudad Z requiere 4 unidades, la R requiere 3 y la M requiere 4 unidades. Modelizar la red y determinar el flujo máximo de la red.

Problema 6.17 .- Sea $G = (U \cup V, E)$ un grafo bipartido con $U = \{a, b, c, d, e\}$, $V = \{v, w, x, y, z\}$ y $E = \{av, ax, bv, bz, cw, cy, dy, dz, ez\}$. Encontrar un emparejamiento máximo. ¿Es emparejamiento completo?

Problema 6.18 .- En una empresa se han formado varias comisiones que representaremos por las iniciales de los apellido de sus miembros: $C_1 = \{a, m\}$, $C_2 = \{a, r, e\}$, $C_3 = \{m, a, r, e\}$, $C_4 = \{m, a, s, b, e, r\}$, $C_5 = \{m, e\}$ y $C_6 = \{r, a, m\}$. Se ha decidido que cada comisión nombre un representante. ¿Puede conseguirse que cada comisión tenga un representante distinto?

Problema 6.19 .- En una empresa se han formado varias comisiones que representaremos por las iniciales de los apellido de sus miembros: $C_1 = \{a, b, r, e\}$, $C_2 = \{r, e, s, m\}$, $C_3 = \{s, a, r, e\}$, $C_4 = \{m, a, r\}$, $C_5 = \{s, a, r, m\}$ y $C_6 = \{s, m, a, b, e\}$. Se ha decidido que cada comisión nombre un representante. ¿Puede conseguirse que cada comisión tenga un representante distinto?

Problema 6.20 .- En una consulta de urgencias hay 5 médicos y 5 enfermeros. Se quieren planificar las vacaciones de forma que siempre queden de guardia un médico y un enfermero. Las preferencias se indican el grafo:



a) ¿Pueden hacerse 5 parejas distintas respetando las preferencias que se indican en la figura?

b) ¿Cuál es el mayor número de parejas que pueden hacerse respetando las preferencias?

Problema 6.21 .- En un departamento de una compañía trabajan cinco mujeres, M_i con $i = 1, \ldots, 5$ y cinco hombres, H_i con $i = 1, \ldots, 5$. A la hora de realizar tareas conjuntas, se dan las siguientes preferencias: M_1 prefiere trabajar con H_1, H_2 y H_3, M_2 con H_2 y H_4, M_3 con H_1 y H_2, M_4 con H_4, H_2 y H_5 y M_5 con H_1, H_2 y H_3. Determinar el grafo de las preferencias. ¿Existe un emparejamiento completo en el que se respete que M_2 trabaje con H_4 y M_4 con H_5?

Parte IV

Apéndices

Apéndice A

Principio de inducción

A.1. Números naturales

El conjunto de los números naturales se define usando la conocida como **Axiomática de Peano** que data de 1889. Esto es,

I) 0 es un número natural

II) Para cada número natural x existe otro número natural x' llamado sucesor de x, tal que

   a) 0 no es sucesor de ningún número natural

   b) Si $x' = y'$, entonces $x = y$

III) *Axioma de Inducción :* Si S es un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica :

   a) $0 \in S$,

   b) Si x está en S, su sucesor también.

   Entonces, $S = \mathbb{N}$.

Antes de continuar, algunos pequeños comentarios sobre estos axiomas:

El primero de ellos postula la existencia de un elemento que consideramos el primero de todos para la ordenación que introduce el segundo postulado. El segundo postulado garantiza la infinitud de $\mathbb{N}$ y, por último, el tercero nos garantiza que el único conjunto que se puede construir a partir de los dos primeros postulados es el de los números naturales.

Usando los axiomas de Peano, es posible definir la suma en $\mathbb{N}$. En la forma habitual, llamemos 1 al sucesor de 0, 2 al sucesor de 1, 3 al sucesor de 2,... De esta forma, podemos definir $n + 0 = n$ y una vez definido $n + m$, definimos $n + m' := (n + m)'$, por ejemplo, $n + 1 = (n + 0)' = n'$. La multiplicación puede también definirse a partir de estos axiomas de la forma que sigue:

- $n \cdot 1 := n$
- una vez definido $n \cdot m$, definimos $n \cdot m' := (n \cdot m) + n$

A pesar de que no entraremos en ello señalemos que, a partir de estas definiciones, se pueden demostrar las propiedades habituales de las operaciones aritméticas suma y producto en $\mathbb{N}$ (conmutatividad de la suma y del producto, asociatividad de suma y producto, existencia de elemento neutro para la suma y elemento identidad para el producto, distributividad,...).

Amén de las operaciones aritméticas ya señaladas, sabemos que en $\mathbb{N}$ se tiene un orden que puede deducirse del segundo postulado de los axiomas de Peano. Señalemos, únicamente, que este orden es el habitual en $\mathbb{N}$ y que con este orden, el conjunto de los números naturales está bien ordenado, es decir, todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ admite mínimo. Obsérvese que el mínimo de $\mathbb{N}$ es 0.

Para finalizar esta pequeña introducción a los números naturales, probemos una ligera variación en nuestro axioma de inducción.

Teorema A.1 *Sea S un subconjunto de $\mathbb{N}$ que verifica*

I) $n_0 \in S$ *y*

II) *para todo* $n \geq n_0$, $n \in S \Longrightarrow n+1 \in S$.

Entonces, $\{x \in \mathbb{N} : x \geq n_0\} \subset S$.

Demostración.– Supongamos que la inclusión no se verifica. En ese caso, el conjunto $X = \{x \in \mathbb{N} : x \geq n_0 \text{ y } x \notin S\}$ es no vacío. Dada la buena ordenación de $\mathbb{N}$, esto implica que el conjunto X posee mínimo, digamos α. Como n_0 pertenece a S, se tendrá que $\alpha > n_0$, o dicho de otra manera, si β es el inmediato antecesor de α, es decir, $\alpha = \beta+1$, $\beta \geq n_0$. Puesto que α es el mínimo de X y $\beta \geq n_0$, se tendrá $\beta \in S$. Ahora bien, por *2* se tendrá que $\beta + 1 = \alpha \in S$, llegando a una contradicción. ∎

A.2. Principio de inducción

El Teorema A.1 se puede trasladar de manera casi inmediata a un resultado de gran utilidad para la prueba de ciertos resultados. Pero antes, una anécdota atribuida al gran matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Cuenta la leyenda (véase, por ejemplo, [1]), que de niño Gauss asistía a la escuela local de Brunswick, dirigida por un maestro que gustaba de la rutina. Un día, el maestro tuvo la feliz idea de hacer sumar a sus alumnos todos los números del 1 al 100, ordenándoles además que, según fuesen acabando cada uno esta poco grata tarea, debían poner su pizarra sobre la

[1] Carl B. Boyer. *Historia de la Matemática*, Alianza Editorial

mesa. A los pocos segundos, Gauss colocó la pizarra sobre su mesa, diciendo: "Ya está". El maestro le miró con desdén y dejó al resto de los alumnos con su tarea. Cuando acabaron todos, se encontró con la sorpresa de que la única pizarra en la que aparecía el resultado correcto, 5050, era la de Gauss. Obviamente, Gauss había hecho el cálculo mental de sumar la progresión aritmética $1+2+\cdots+99+100$ asociando parejas de términos igualmente alejados de los extremos, es decir, esencialmente usando la fórmula

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Esta fórmula es un caso claro del tipo de problemas que podemos atacar con el Teorema A.1. Tenemos una serie de afirmaciones, una por cada número natural, y queremos verificar la veracidad de cada una de ellas. Para ello, definimos el conjunto S como

$$S=\{n\in\mathbb{N}:1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}\}$$

Se tiene que $1\in S$ por cuanto

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}.$$

Además si suponemos que $n\in S$, es decir,

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

es fácil ver que también es cierto

$$1+2+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

o, lo que es lo mismo, $(n+1)\in S$. Aplicando el Teorema A.1, habremos demostrado que la fórmula es cierta para cualquier número natural mayor o igual que 1.

El mismo razonamiento que hemos hecho con la suma aritmética, puede realizarse para cualquier conjunto de proposiciones que dependan de un parámetro natural.

Corolario A.2 (Principio de inducción) *Supongamos que para cada natural $n\geq n_0$ se tiene una proposición $P(n)$ que puede ser cierta o falsa. Si*

i) *$P(n_0)$ es cierta y*

ii) *para todo $n\geq n_0$, $P(n)$ cierta $\Longrightarrow$ $P(n+1)$ es cierta.*

Entonces, $P(n)$ es cierta para todo $n\geq n_0$.

Asimismo, por argumentos no demasiado complicados, podemos formular el principio de inducción de esta otra manera:

Corolario A.3 *Supongamos que para cada natural $n \geq n_0$ se tiene una proposición $P(n)$ que puede ser cierta o falsa. Si*

i) *$P(n_0)$ es cierta y*

ii) *para todo $n \geq n_0$, $P(m)$ cierta para todo m con $n_0 \leq m \leq n \Longrightarrow P(n+1)$ es cierta.*

Entonces, $P(n)$ es cierta para todo $n \geq n_0$.

Ejemplo A.4 (Más ejemplos de aplicación del principio de inducción)
1.- Probar que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \text{ para todo } n \geq 1$$

a) La fórmula es cierta para $n = 1$, pues $1 = \frac{1}{6}1 \cdot 2 \cdot 3$.
b) Supongamos que la fórmula es cierta para n. Si eso implica que la fórmula es cierta para $n+1$, tendríamos probada la fórmula para cualquier natural ≥ 1. Se tiene, aplicando la hipótesis de la veracidad de la fórmula para n (*hipótesis de inducción*), que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2.$$

Unas pequeñas cuentas prueban que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3),$$

con lo que habríamos terminado.

2.- Probar que $3^{2n} - 1$ es múltiplo de 8 para todo natural ≥ 1.
a) Como $3^2 - 1 = 8$, la afirmación es cierta para $n = 1$.
b) Lo que tenemos que ver ahora es

$$3^{2n} - 1 \text{ múltiplo de } 8 \Longrightarrow 3^{2(n+1)} - 1 \text{ múltiplo de } 8$$

Ahora bien,

$$3^{2(n+1)} - 1 = 3^{2n+2} - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 1 = 3^{2n} \cdot 3^2 - 3^2 + 3^2 - 1 = 3^2(3^{2n} - 1) + (3^2 - 1)$$

Aplicando que $3^{2n} - 1$ es múltiplo de 8 (*hipótesis de inducción*)y que $3^2 - 1 = 8$ también, se concluye que $3^{2(n+1)} - 1$ es múltiplo de 8.