Examen de Estructuras Discretas (Bloque 1)
Grado de Ingeniería de Computadores. Curso 2017-2018

1. **(2 puntos)** Responder a los siguientes apartados:

   a) Definir $p(n)$ y calcular $p(6)$ aplicando la fórmula del número de particiones de n;

   b) Sea n un entero no negativo, indicar razonadamente, si es cierta o no la siguiente igualdad:

   $$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} 5^k = (1+5)^n - 1;$$

   c) Definir el Principio del Palomar. ¿Cuántos números se necesitan para garantizar que al dividirlos por el número 20 hay dos como mínimo con el mismo resto?

   d) Definir forma normal conjuntiva.

2. **(2,5 puntos)** Se tienen 15 libros,

   a) Si hay 6 libros idénticos de programación, 2 idénticos de física, 3 idénticos de matemáticas y otros 4 idénticos de diseño de algoritmos, ¿de cuántas formas las podemos ordenar en una estantería?

   b) Si todos los libros son distintos, determinar mediante una función generadora ¿de cuántas formas los podemos distribuir entre 7 estudiantes de informática?

   c) Si todos los libros son idénticos, determina una función generadora para determinar ¿de cuántas formas los podemos distribuir entre 7 estudiantes de informática de manera que sólo uno de los estudiantes reciba a lo sumo 3?

3. **(2 puntos)** Con los dígitos del sistema decimal se forman números de cinco cifras

   a) ¿Cuántos números se pueden formar?;

   b) ¿Cuántos contienen dos nueves?;

   c) ¿Cuántos de ellos no son múltiplos de cinco?.

4. **(1,5 punto)** Estudiar y justificar, si el siguiente razonamiento es o no válido:

$$\begin{array}{c} p \to q \vee r \\ p \wedge q \to r \\ q \wedge r \to s \\ \hline \therefore p \wedge q \to s \end{array}$$

Observaciones: 1) Tiempo: 2 horas.
2) Sólo se valorarán las respuestas que estén justificadas correctamente.
3) No está permitido el uso de dispositivos electrónicos, ni calculadoras.
4) Responder cada pregunta en folios independientes.

Soluciones Examen de Estructuras Discretas (Bloque 1)

Grado de Ingeniería de Computadores. Curso 2017-2018

1. **(2 puntos)**

   a) Definir partición de un número entero y demostrar que

   $$p(n| \text{ con parte máxima de tamaño } r) = p(n \mid \text{ con r partes });$$

   b) Sea n un entero no negativo, indicar razonadamente, si es cierta o no la siguiente igualdad:

   $$\sum_{r=2}^{n} \binom{n}{k} 5^k = (1+5)^n - 1;$$

   Luego no es cierta la igualdad dada.

   c) Definir el Principio del Palomar e incluir un ejemplo donde se pueda aplicar;

   d) Definir el principio de inclusión–exclusión e indicar cómo calcular el cardinal de $A^c \bigcap B^c$.

   Sol. Los apartados a) y c) aparecen en los apuntes de la asignatura.

   El caso b) considerando el desarrollo del binomio de Newton se tiene

   $$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{k} 5^k = (1+5)^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} 5^1 = (1+5)^n - 1 = 6^n - 1 - 5n.$$

   En el caso d) $\mid A^c \bigcap B^c \mid$ por el principio de inclusión-exclusión se tiene

   $$\mid A^c \bigcap B^c \mid = \mid X \mid \setminus \mid A \bigcup B \mid = \mid X \mid \setminus (\mid A \mid + \mid B \mid \setminus \mid A \bigcap B \mid)$$

   .

2. **(2,5 puntos)** Se tienen 15 libros,

a) Si hay 6 libros idénticos de programación, 2 iguales de física, otros 3 idénticos de matemáticas y otros 4 de diseño de algoritmos, ¿de cuántas formas las podemos ordenar en una estantería?

   Sol. Permutaciones con repetición de 15 objetos de 5 tipos distintos, con 6 de un tipo, 2 de otro, 3 de otro, 4 de otro y otros 4 del quinto tipo, es decir, $\frac{15!}{6!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!}$.

b) Si todos los libros son distintos, determinar mediante una función generadora ¿de cuántas formas los podemos distribuir entre 7 estudiantes de informática?

   Sol. La función generadora que nos permite encontrar la solución es $G(x) = (1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^7 = e^{7x}$ y la respuesta es el coeficiente de $\frac{x^{15}}{15!}$, i.e, 7^{15}

c) Si todos los libros son idénticos, determina una función generadora para determinar ¿de cuántas formas los podemos distribuir entre 7 estudiantes de informática de manera que sólo uno de los estudiantes reciba a lo sumo 3?

   Sol. La función generadora que nos permite encontrar la solución es

   $$H(x) = (1+x+x^2+\ldots)^6 \cdot (1+x+x^2+x^3) = (1-x)^{-7} \cdot (1+x+x^2+x^3)$$

   y la respuesta es el coeficiente de x^{15}, i.e,

   $$\binom{-6}{15}(-1)^{15} + \binom{-6}{14}(-1)^{14} + \binom{-6}{13}(-1)^{13} + \binom{-6}{12}(-1)^{12}.$$

3. **(2 puntos)** Con los dígitos del sistema decimal se forman números de cinco cifras

a) ¿Cuántos números se pueden formar?;

Sol. Importa el orden. La primera cifra no puede ser cero, entonces, hay $9 \cdot 10^4$

b) ¿Cuántos contienen dos nueves?;

Sol. El total son:

Los que empiezan con 9 y contienen otro 9 y los que no empiezan por nueve y contienen dos nueves. En el primer caso hay $\binom{4}{1}9^3$ y en segundo caso hay $8\binom{4}{2}9^2$. El total es $\binom{4}{1}9^3 + 8\binom{4}{2}9^2$.

c) ¿Cuántos de ellos no son múltiplos de cinco?

Sol. Los múltiplos de cinco son los que acaban acaban en 0 o 5, como hay un total de 90.000 números y pueden acabar en cada una de las seis cifras distintas hay $90000/10 = 9000$ acabados en cada una de las diez cifras, luego hay el doble, 18.000, que son múltiplos de cinco. Por la regla del complementario se tiene que la cantidad de números no múltiplos de dos es $90000 - 18{,}000 = 72000$.

4. **(1,5 punto)** Estudiar y justificar si el siguiente razonamiento es o no válido:

$$\begin{array}{c} p \to q \vee r \\ p \wedge q \to r \\ q \wedge r \to s \\ \hline \therefore p \wedge q \to s \end{array}$$

Sol. Por reducción al absurdo. Se introduce como nueva premisa lo lo que se quiere contrario de

$$\begin{array}{cc}
p \to q \vee r & P_1 \\
p \wedge q \to r & P_2 \\
q \wedge r \to s & P_3 \\
\sim (p \wedge q \to s) \equiv p \wedge q \wedge \sim s & P_4 \\
p \wedge q & (\text{ Simplificación a P4 })P_5 \\
r & (\text{ M. Ponendo Ponens a P2 y P5 })P_6 \\
\sim s & (\text{ Simplificación a P4 })P_7 \\
\sim (q \wedge r) & \equiv \sim q \vee \sim r(\text{ M. T. Tollens a P3 y P7 })P_8 \\
p & (\text{ Simplificación a P5 })P_9 \\
q \vee r & (\text{ M. P. Ponens a P1 y a P9 })P_{10} \\
\sim q & (\text{ Silogismo disyuntivo P6 y P8 })P_{11} \\
q & (\text{ Simplificación a P5 })P_{12} \\
q \wedge \sim q & (\text{ Adjunción a P11 y P12 })P_{13}
\end{array}$$

Se llega a una contradicción, luego lo supuesto es falso, así que es cierta $p \wedge q \to s$.