OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

El plano complejo: forma binómica y modulo-argumental de los números complejos. Operaciones con complejos: Suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación

Parece lógico pensar que la necesidad de contar da lugar a la aparición de lo que hoy conocemos como números naturales (los enteros positivos), la necesidad de repartir nos trae la aparición de los números fraccionarios o decimales, de forma que el déficit nos da paso a la aparición de los números negativos, tanto enteros como fraccionarios, para al alcanzar una cierta sofisticación, ser capaces de realizar raíces cuadradas no exactas que nos traen la aparición de los números irracionales. Pero, además de todos estos tipos de números que conocemos como números reales, existen otros que se denominan números complejos a los que vamos a dedicar este apéndice.

El plano complejo

Por número complejo entendemos dos números reales dados en un orden, al primero de ellos lo llamaremos parte real y al segundo parte imaginaria del número complejo. De lo que acabamos de decir se desprende que para representar números complejos no podemos usar una recta como ocurre con los números reales, necesitaremos emplear un plano. El eje de abscisas del plano lo reservamos para la parte real del número (eje real) y en el eje de ordenadas representamos las parte imaginaria (eje imaginario).

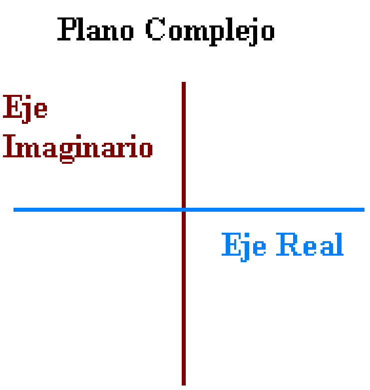

Figura 1

Representación del plano complejo

De la parte real del número complejo poco tenemos que decir, pues al ser un número real su significado es conocido. La parte compleja nace, al realizar raíces de índice par de números reales negativos. Al ser la raíz cuadrada la de índice par más bajo será sobre la que trabajaremos, pues las de índice superior son operaciones realizadas sobre raíces cuadradas.

Si queremos calcular la raíz cuadrada de menos 144 ($\sqrt{-144}$) teniendo en cuenta las propiedades de los radicales, podemos escribir:

$$\sqrt{-144} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{144}$$

el valor de la segunda de las raíces es inmediato, es el número real 12, mientras que somos incapaces de realizar la primera de las raíces en el campo real, para llevar a cabo ese cálculo introducimos los números imaginarios cuya unidad es precisamente la $\sqrt{-1}$, que se representan indistintamente por las letras “i” o “j”, nosotros emplearemos la letra “j”.

De lo anterior obtenemos: $\sqrt{-144} = 12\ \mathrm{j}$, a este número lo llamaremos número imaginario puro o simplemente imaginario y gráficamente se representará en el eje de ordenadas del plano complejo como se muestra en la figura 2. A la hora de denotarlo numéricamente, como no tiene parte real, lo escribiremos como: (0, 12), si bien es más usual emplear: 0 + 12j, o simplemente “12 j”.

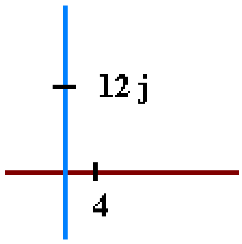

Figura 2

Representación del número real “4” y del imaginario “12 j”

Cuando consideramos un número real, como por ejemplo el número “4”, podemos entender que es un número complejo sin parte imaginaria, y lo podemos representar por 4 + 0j (fig 2).

El empleo de esta notación nos insinúa la posibilidad de tratar a los números complejos como monomios o binomios, de modo que los monomios “4” (número real 4) y “12 j” (número imaginario 12 j) los podremos unir como el complejo:

$$4 + 12\,j$$

cuya representación en el plano complejo será un punto en el primer cuadrante o mejor un segmento orientado (vector) de centro en el origen de coordenadas y extremos en el punto del plano (4, 12).

Consideremos un número complejo (N), que de forma genérica representaremos por “ $N \equiv a + b\ j$ ”, según hemos dicho más arriba en el plano complejo lo representaremos por el punto N de coordenadas “a” y “b”, o por un vector orientado que una el origen “O” con el punto “N”, como se muestra en la figura 3. Si miramos la figura, veremos que el segmento orientado (vector) tiene un módulo ”M”, que será la longitud ON y un argumento “ α ”. Es claro que el módulo “M” se puede calcular fácilmente aplicando el teorema de Pitágoras: $M = \sqrt{a^2 + b^2}$, y el argumento “ α ” será el ángulo cuya tangente sea la relación entre la parte imaginaria y la real: $\alpha = \operatorname{arctag}\dfrac{b}{a}$.

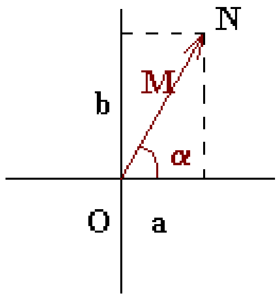

Figura 3
Representación del número complejo “N” expresado en forma binómica y módulo - argumental

Luego un número complejo “N” lo podemos escribir:

- en *forma binómica*: a + b j
- en *forma módulo-argumental o trigonométrica*: $M_{\langle\alpha}$

verificándose que: $M = \sqrt{a^2 + b^2}$ y $\alpha = \operatorname{arctag}\dfrac{b}{a}$.

Naturalmente si partimos de un número complejo expresado en la forma módulo-argumental ($M_{\langle\alpha}$), su representación se obtendrá levantando sobre el eje real un ángulo α , si desde el origen llevamos un segmento de longitud igual al módulo del número complejo, tendremos representado dicho número. Su parte real será la proyección del módulo sobre el eje real, que valdrá $M\cos\alpha$, y su parte imaginaria será $M\,\mathrm{sen}\alpha$. De ahí, que también a veces se diga que el complejo está escrito en forma trigonométrica:

$$M\cos\alpha + j\,(M\,\mathrm{sen}\alpha) = M\,(\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha)$$

Es decir, ya podemos pasar un número complejo expresado en una forma a la otra, si bien, el paso de la forma módulo-argumental a la forma binómica nos reproduce un único número complejo, no ocurre así con el paso inverso, veamos porque.

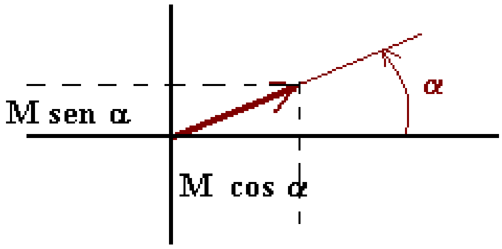

Figura 4
Representación gráfica de un número complejo en la forma módulo-argumental

El argumento del número complejo, lo hemos definido como: $\alpha = \mathrm{arctag}\dfrac{b}{a}$, si recordamos que la tangente de un ángulo es una función periódica de período π, nos daremos cuenta que, en cada circunferencia, existen dos ángulos cuya tangente es la misma, aunque la obtengamos como los cocientes entre $\left(\dfrac{a}{b}\right)$ o entre $\left(\dfrac{-a}{-b}\right)$.

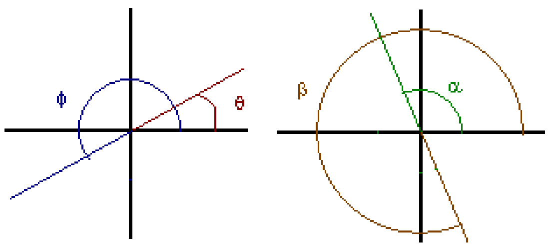

Figura 5
Los ángulos θ y ϕ situados en el segundo y cuarto cuadrante, tienen la misma tangente y es negativa. Los ángulos α y β, situados en el primer y tercer cuadrante, también tiene la misma tangente y es negativa.

Es decir, los ángulos situados en el primer cuadrante tienen tangentes positivas lo mismo que los situados en el tercer cuadrante y los situados en el segundo cuadrante tiene tangentes negativas como los situados en el cuarto cuadrante, <u>debemos representar el número en el plano complejo</u> para saber en que cuadrante está colocado y poder dar, de forma correcta, su expresión binómica.

<u>Operaciones con complejos</u>

Pasemos ahora a revisar las distintas operaciones que podemos realizar con los números complejos.

<u>Suma de números complejos</u>

Al poder tratar los números complejos como binomios, también existirá la suma de números complejos que será el complejo cuya parte real será la suma de las partes reales y cuya parte imaginaria sea la suma de las partes imaginarias:

$$(a + b\,j) + (c + d\,j) = (a+c) + (b+d)\,j$$

con las propiedades:

- conmutativa: $(a + b\,j) + (c + d\,j) = (c + d\,j) + (a + b\,j)$
- asociativa: $(a + b\,j) + (c + d\,j) + (e + f\,j) = [(a + b\,j) + (c + d\,j)] + (e + f\,j)$
- existencia de un *elemento neutro* para la suma (o nulo): $(a + b\,j) + 0 = (a + b\,j)$
- existencia de un *elemento opuesto*: $(a + b\,j) + [$***Opuesto*** $(a + b\,j)] = 0$

Está claro que si el opuesto a un complejo tiene que reproducir el elemento nulo, la parte real del opuesto será el número opuesto a dicha parte real, ocurriendo lo mismo para la parte imaginaria:

$$[\textbf{\textit{Opuesto}}\ (a + b\,j)] = -a - b\,j$$

El opuesto a un número complejo lo representaremos por: $-(a + b\,j)$

Está claro que el elemento opuesto a un número complejo es su simétrico respecto del origen de coordenadas (ver figura 6), luego en forma módulo-argumental el opuesto a un complejo tendrá el mismo módulo y por argumento el del original más un ángulo llano: $-(M_{\langle\alpha}) = M_{\langle\pi+\alpha}$

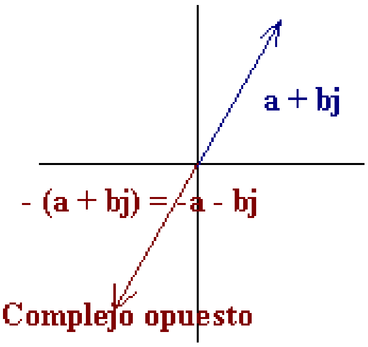

Figura 6
Representación de un número complejo y de su opuesto

Si bien hemos escrito las propiedades de la suma de complejos en forma binómica, es evidente que se podrá realizar la suma de números complejos en la forma módulo-argumental, sin más que tener en cuenta la definición dada para la suma.

Consideremos los números complejos “N” y “L” que expresados en forma módulo-argumental serán:

$$N \equiv N_{\langle\alpha} \ \ y \ \ L \equiv L_{\langle\beta}$$

La representación gráfica (ver figura 7) del primer complejo “ $N_{\langle\alpha}$ ” nos permite, al proyectar el complejo sobre el eje real, representar su parte real (lo que por comodidad hemos llamado “a” en la figura), si representamos también el segundo complejo “ $L_{\langle\beta}$ ”, su proyección sobre el eje real nos dará su parte real (lo que en la figura hemos llamado “c”), el segmento, contado a partir del origen y formado por los dos anteriores nos dará la parte real del número complejo suma. Actuando de la misma manera con las partes imaginarias, tendremos la representación del complejo suma, como se muestra en la figura. La aplicación de la resolución geométrica de triángulos nos permitirá calcular el módulo y el argumento del número complejo suma.

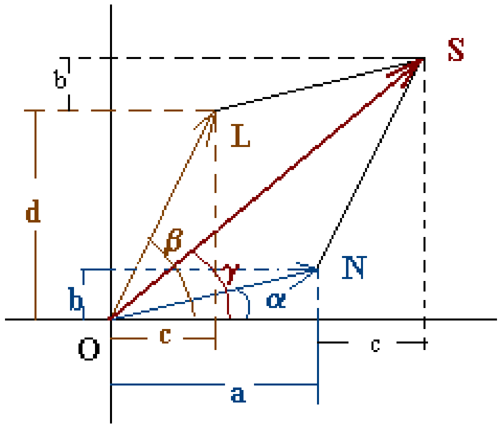

Figura 7
Representación de la suma gráfica de los números complejos el N = a + b j y el L = c + d j, cuya resultante es S = (a+c) + (b+d) j

Después de lo dicho, es evidente que para calcular la suma de dos números complejos es mucho más cómodo poner ambos en forma binómica y sumarlos, para expresarlos luego en la forma módulo-argumental si así nos lo piden.

<u>Diferencia de dos números complejos</u>

La diferencia de dos números complejos será sumar al minuendo el opuesto del sustraendo, siendo por tanto válido todo lo dicho para la suma, excepto, como es lógico, la propiedad conmutativa

$$(a + b\,j) - (c + d\,j) = (a + b\,j) + [-(c + d\,j)] = (a - c) + (b - d)\,j$$

Producto de un número complejo por un número real

Si podemos sumar números complejos, podremos también multiplicar un número complejo por un número real, pues la multiplicación no es más que una suma de sumandos iguales, luego al multiplicar un número complejo (a + b j) por un número real "n" obtendremos un complejo cuya parte real sea la parte real del complejo originario multiplicado por el número real y cuya parte imaginaria sea también el producto del número real por la parte imaginaria del complejo. Si el complejo está expresado en la forma módulo-argumental, tendremos otro complejo de módulo el producto del módulo por el número real y de argumento el mismo si el número real es positivo, si es un número negativo el argumento vendrá aumentado en π. Lo que escrito en forma binómica será:

$$\lambda(a + b\ j) = \lambda a + \lambda b\ j\ .$$

Para la forma módulo-argumental:

$$\lambda \succ 0 \quad \lambda \times \left[M_{\langle\alpha} \right] = (\lambda \cdot M)_{\langle\alpha} \qquad y \qquad \lambda \prec 0$$

$$\lambda \times \left[M_{\langle\alpha} \right] = (|\lambda| \cdot M)_{\langle\alpha+\pi}$$

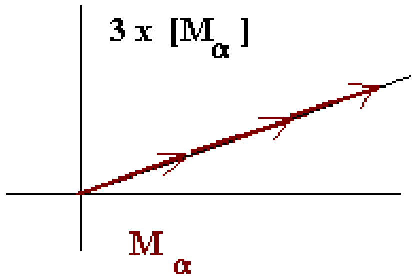

Figura 8
Representación del producto del número complejo M $_\alpha$ por el número real 3

Producto de dos números complejos

Si hemos dicho más arriba que los números complejos se les puede tratar como a los binomios, se podrán multiplicar entre sí, con las mismas reglas que los binomios. Es decir:

$$(a + b\ j)\ x\ (c + d\ j) = ac + bc\ j + ad\ j + bd\ j^2$$

teniendo en cuenta el valor del cuadrado de la unidad imaginaria $\left(j^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \right)$, obtenemos:

$$(ac - bd) + (bc + ad)\ j$$

Si empleamos la forma trigonométrica de los complejos escribiremos:

$$\left[M \cos\alpha + j\ M\ \text{sen}\alpha \right] \times \left[L \cos\beta + j\ L\ \text{sen}\beta \right]$$

recordando las expresiones de las funciones trigonométricas de la suma de ángulos, obtenemos que en forma modulo-argumental (trigonométrica) la expresión del producto de dos complejos, resulta:

$$(M \cdot L) \cos(\alpha + \beta) + j\,(M + L)\ \text{sen}(\alpha + \beta)$$

Es decir, el producto de dos números complejos es otro complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos

$$\left[M_{\langle\alpha} \right] \cdot \left[L_{\langle\beta} \right] = \left(M \cdot L \right)_{\langle\alpha+\beta}$$

Como comprobación, tenemos la definición que hemos dado de producto de un número complejo por un número real, el número real tiene de argumento "cero" o π, según sea positivo o negativo y hemos dicho que el producto coincidía con el producto del módulo del complejo por el número real y el argumento era el mismo, le sumábamos cero, o le debíamos sumar un ángulo llano, le sumábamos π .

Veamos que significa multiplicar un número complejo por la unidad imaginaria. Desde luego será otro complejo del mismo módulo y su argumento vendrá aumentado en el de "j", es decir, en $\pi/2$ (ver figura 9)

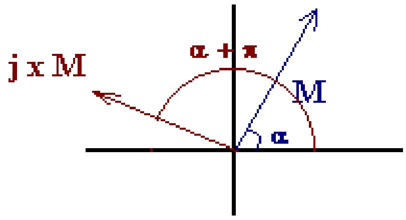

Figura 9
El producto por la unidad imaginaria, resulta girado en $+\frac{\pi}{2}$ respecto de la posición del complejo original

Pasemos ahora a definir **complejo conjugado**. Es el complejo simétrico respecto del eje real. De lo dicho se desprende, que tendrá la misma parte real siendo su imaginaria opuesta. Lo representamos con una recta encima del complejo.

Así, dado el complejo (a + b j) su conjugado, que representamos como $\overline{(a + b\ j)}$, será: (a - b j). Escrito en forma módulo-argumental, tendremos que restar a la circunferencia completa el argumento del complejo original, es decir el conjugado de $M_{\langle\alpha}$ $\left(\overline{M_{\langle\alpha}}\right)$ será: $M_{\langle 2\pi-\alpha}$

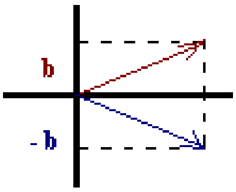

Figura 10
Representación de un número complejo y de su conjugado.

De la definición que hemos dado se desprende que el producto de un complejo por su conjugado es el cuadrado del módulo del complejo:

$$\left(M_{\langle\alpha}\right)\cdot\left(\overline{M_{\langle\alpha}}\right) = \left(M_{\langle\alpha}\right)\cdot\left(M_{\langle 2\pi-\alpha}\right) = M^2\Big|_{\alpha+(2\pi-\alpha)} = M^2$$

<u>Cociente de dos números complejos</u>

La primera aplicación del complejo conjugado, la tenemos al definir una nueva operación la división de números complejos. Para dividir dos complejos, multiplicaremos el dividendo (numerador en forma de quebrado) y el divisor(denominador) por el conjugado del denominador (igual que hacíamos para racionalizar). De este modo, el numerador es el producto de dos complejos, operación que ya sabemos hacer, y el denominador un número real (el cuadrado del módulo del segundo complejo). Tendremos:

$$\frac{a + b\ j}{c + d\ j} = \frac{(a + b\ j)\cdot(c - d\ j)}{(c + d\ j)\cdot(c - d\ j)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)\,j}{c^2 + d^2}$$

Si los complejos los escribimos en forma módulo-argumental (trigonométrica) y, como hemos dicho antes, tenemos en cuenta las expresiones trigonométricas de la diferencia de ángulos, obtenemos:

$$\frac{M\cos\alpha + j\,M\,\mathrm{sen}\alpha}{L\cos\beta + j\,L\,\mathrm{sen}\beta} = \frac{\left(M\cos\alpha + j\,M\,\mathrm{sen}\alpha\right)\cdot\left(L\cos\beta - j\,L\,\mathrm{sen}\beta\right)}{\left(L\cos\beta + j\,L\,\mathrm{sen}\beta\right)\cdot\left(L\cos\beta - j\,L\,\mathrm{sen}\beta\right)} =$$

$$\frac{M}{L}\left[\cos(\alpha-\beta) + j\,\mathrm{sen}(\alpha-\beta)\right]$$

Luego el cociente de dos números complejos es otro complejo de módulo el cociente de los módulos y argumento la diferencia de los de los dos complejos:

$$\frac{M_{\langle\alpha}}{L_{\langle\beta}} = \left(\frac{M}{L}\right)_{\langle\alpha-\beta}$$

Veamos ahora lo que significa dividir un complejo por la unidad imaginaria. También es más cómodo emplear la notación módulo-argumental, pues vemos que será un complejo del mismo módulo y al argumento restarle $\pi/2$, lo que equivale a girar el complejo original $3\pi/2$ (ver figura 11).

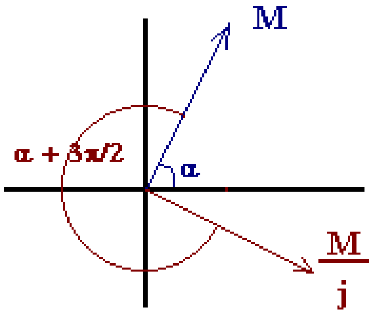

Figura 11
Dividir entre la unidad imaginaria es girar el complejo un ángulo de $-\pi/2$

Potencia de números complejos

Si ya hemos visto como se multiplican complejos, podemos pasar ahora a elevar a una potencia un número complejo. Por definición, la potencia es hacer un producto de tantos factores iguales a la base como unidades tiene el exponente. Por tanto, la potencia un número complejo será otro número complejo cuyo módulo sea igual al módulo del complejo, que es la base, elevado al exponente de la potencia y el argumento tendrá que ser el argumento de la base multiplicado por el exponente:

$$\left(M_{\langle\alpha}\right)^n = \left(M^n\right)_{\langle n\cdot\alpha}$$

En forma binómica, debemos realizar el producto del complejo por sí mismo tantas veces como indique el exponente:

$$\left(a+b\ j\right)^n = \overbrace{(a+b\ j)\cdot(a+b\ j)\cdot\ldots\cdot(a+b\ j)}^{n}$$

de lo que acabamos de decir se desprende la comodidad de utilizar la forma modulo-argumental para elevar un complejo a una potencia.

Raíz de un número complejo

Por último, nos que da ver como se calcula la raíz de un número complejo. Sabemos que la raíz de índice "n" de un número real son "n" números reales, por la misma razón la raíz n-ésima de un número complejo serán "n" números complejos. Para calcularlos, de nuevo es más cómodo hacerlo en la forma módulo-argumental, pues el módulo de todos ellos será el valor absoluto de la raíz de indice "n" del módulo y los argumentos serán:

- el valor del argumento dividido por el índice de la raíz.
- el valor del argumento más una circunferencia, dividido por el índice de la raíz.
- el valor del argumento más dos circunferencias, dividido por el índice de la raíz.
- Así hasta "n - 1" circunferencias.

Las "n" raíces del número complejo serán:

$$\sqrt[n]{\left(M_{\langle\alpha}\right)} = \begin{vmatrix} \left(\sqrt[n]{M}\right)_{\langle\frac{\alpha}{n}} \\ \left(\sqrt[n]{M}\right)_{\langle\frac{\alpha+2\pi}{n}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(\sqrt[n]{M}\right)_{\langle\frac{\alpha+(n-1)\cdot 2\pi}{n}} \end{vmatrix}$$

Es decir que cada raíz se encuentra girada respecto de la anterior en $\frac{2\pi}{n}$

Veamos un caso sencillo, calcularemos la $\sqrt[4]{16}$. El número real 16 lo podemos escribir como un complejo de módulo 16 y argumento 0: $16 = 16_{\langle 0}$. Su raíz cuarta serán cuatro números complejos cada uno de ellos de módulo $\left|\sqrt[4]{16}\right| = 2$. Las cuatro raíces las denominaremos: R_1, R_2 R_3 y R_4.

Veamos cuales serán sus argumentos: $\begin{vmatrix} \frac{0}{4} = 0 \\ \frac{0+2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \\ \frac{0+4\pi}{4} = \pi \\ \frac{0+6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \end{vmatrix}$

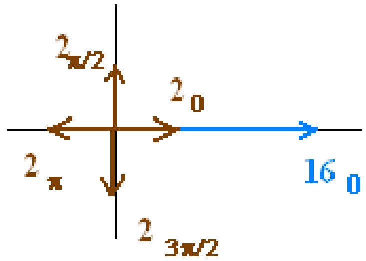

Figura 12
Representación del número real 16 y de sus cuatro raíces cuartas.

Luego obtenemos que: $\sqrt[4]{16} = \begin{vmatrix} 2_{\langle 0} \\ 2_{\langle\frac{\pi}{2}} \\ 2_{\pi} \\ 2_{\frac{3\pi}{2}} \end{vmatrix}$

que como vemos son cuatro complejos de igual módulo que resultan de girar el anterior un ángulo igual a una circunferencia dividida por el índice de la raíz $\left(\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}\right)$

En el campo real, para calcular $\sqrt[4]{16}$ recordamos que $\sqrt[4]{16} = \pm\sqrt{\sqrt{16}}$ es decir: $\pm\sqrt{4} = \pm 2$, donde claramente hemos perdido los valores negativos de $\sqrt{16}$, los correspondientes a $\pm\sqrt{-4}$ que sólo tienen sentido en el campo complejo, y valen $\pm 2\,j$ como se muestra en la figura.

Como ejemplo, más completo, calcularemos la raíz cúbica del complejo 15 - 20 j. Según hemos dicho para calcularlo será más cómodo ponerlo en forma módulo argumental

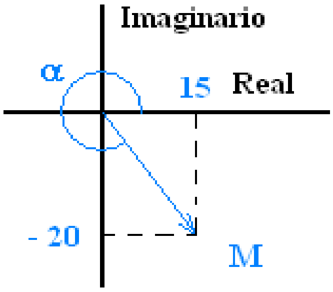

Figura 13
Representación del complejo cuya raíz cúbica queremos calcular

- El módulo será $M = \sqrt{15^2 + 20^2} = \sqrt{625} = 25$
- El argumento será el ángulo cuya tangente sea la relación entre -20 y 15; $\alpha = \text{arctag}\dfrac{-20}{15}$ = -0,93 radianes (-51,13º), que se corresponde con nuestra situación pues el ángulo es del cuarto cuadrante, es decir $\alpha = 5{,}35$ rad (308,87º).

Luego nuestro número complejo es: $25_{\langle 5,35}$.

Su raíz cúbica serán tres números complejos todos ellos de módulo: $\sqrt[3]{25}$.

Sus argumentos serán: $\left| \begin{array}{lll} \dfrac{5{,}35}{3} & = 1{,}78 \text{ rad} & = 77{,}8^{\circ} \\ \dfrac{5{,}35 + 2\pi}{3} & = 3{,}88 \text{ rad} & = 197{,}8^{\circ} \\ \dfrac{5{,}35 + 2 \times 2\pi}{3} & = 5{,}98 \text{ rad} & = 317{,}8^{\circ} \end{array} \right.$

Luego sus tres raíces serán: $\sqrt[3]{25} = \left| \begin{array}{l} R_1 = \sqrt[3]{25}_{\langle 1,78} \\ R_2 = \sqrt[3]{25}_{\langle 3,88} \\ R_3 = \sqrt[3]{25}_{\langle 5,98} \end{array} \right.$

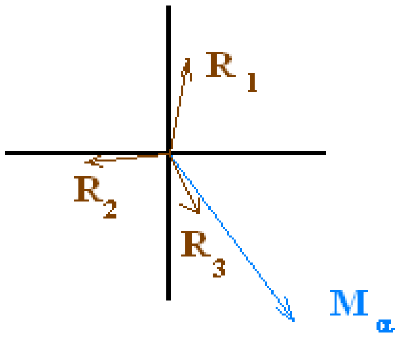

Figura 14
Representación en el plano complejo de un número complejo y de sus tres raíces cúbicas

que como podemos observar en la figura forman cada una con la siguiente un ángulo de $\dfrac{2\pi}{3}$ radianes $\equiv \dfrac{360^0}{3}$