Tema V: Campos magnéticos en el vacío

Fuerza magnética sobre cargas en movimiento. Fuerza sobre una corriente. Acción magnética sobre una espira de corriente: momento magnético. Fuerzas entre corrientes. Ley de Biot y Savat. Ecuaciones del campo magnético: Ley de Ampère. Flujo. El fenómeno de la inducción magnética. Leyes de Faraday y de Lenz. Coeficientes de inducción.

Bibliografía: Sears, Zemansky, Young y Freedman “Física”. Ed. Addison Wesley Longman

Conocimientos previos: Los conceptos de corriente y densidad de corriente.

Objetivos: Comprender que los fenómenos eléctrico y magnético son visiones distintas del fenómeno electromagnético. Conocer el comportamiento de las corrientes eléctricas sometidas a la acción de un campo magnético. Calcular la inducción magnética creada por una coriente eléctrica. Aplicar la ley de Ampere al cálculo de la inducción magnética creada por corrientes con la simetría necesaria. Manejar los conceptos de flujo y circulación.

Introducción

Varios años antes de Cristo, el hombre observó que ciertos minerales, tenían la propiedad de atraer pequeños trozos de hierro, esta propiedad que no puede estar relacionada con la atracción gravitatoria, puesto que no todos los cuerpos la poseen y puede presentarse en una dirección distinta a esta, se manifiesta de forma más intensa en ciertas partes de aquellos materiales en los que se presenta.

A primera vista este nuevo fenómeno y el eléctrico parece que no tienen nada en común, ya que, por ejemplo, no son atraídos por los imanes los trocitos de papel ni las bolitas de corcho electrizadas, se dio a esta nueva propiedad física el nombre de magnetismo en recuerdo que la región “Magnesia” en la que, según la tradición, se observó por primera vez el fenómeno.

Como ya hemos dicho con anterioridad para el campo eléctrico, las propiedades magnéticas de la materia han llegado hasta nosotros ligadas a la brujería y a los feriantes, lo que ha dificultado un desarrollo más rápido de su conocimiento en los siglos pasados. Tenemos que esperar hasta el primer cuarto del siglo XIX para encontrar la primera experiencia en la que se sistematiza el comportamiento de los campos magnéticos.

El desarrollo del magnetismo ha estado ligado con la navegación y el comercio por la propiedad de los imanes de orientarse señalando, con buena aproximación, el polo norte geográfico. El primer estudio sistemático del fenómeno, data de 1802 y se debe a Hans Christian Oersted quien observó que al establecerse una corriente eléctrica por un conductor situado en las cercanías de una brújula esta sufría una desviación, con lo que dejaba de señalar el polo norte, si bien en algunas posiciones del hilo no se experimentaba desviación alguna. Es pues en el siglo XIX cuando se inicia el estudio del magnetismo unido a la corriente eléctrica, esto es, al movimiento de las cargas.

Hasta ahora hemos estudiado fenómenos que hemos denominado "electrostáticos" por deberse a cargas que permanecían en reposo, y cuyas acciones se regían por la ley de Coulomb. Pero pensemos que al decir que una carga está quieta, estamos relacionando su estado de movimiento con un sistema de referencia. Si consideramos otro sistema de referencia en el que la carga se mueva con movimiento rectilíneo y uniforme, los fenómenos que aparezcan no se pueden explicar exclusivamente por la ley de Coulomb, como ocurre con el caso de cargas estáticas. Diremos entonces que nos encontramos ante acciones magnéticas.

Es claro que no podemos dar un carácter absoluto a la división entre fenómenos eléctricos y magnéticos, pues el sistema de referencia en el que nos encontremos nos hará ver que una carga en reposo respecto del sistema de referencia "S" genera un campo eléctrico, la misma situación desde un sistema de referencia "S' ", que se mueva respecto "S", nos lleva a ver la existencia de un campo magnético.

Como entendemos que el desarrollo histórico de la formulación del fenómeno magnético no facilita su comprensión, vamos a empezar el estudio del magnetismo por el movimiento de cargas en campos magnéticos.

Fuerza magnética sobre cargas en movimiento

Vamos a introducir fenomenológicamente la expresión de la fuerza que actúa sobre una carga eléctrica que se encuentra en un campo magnético. Supongamos, que en una región del espacio en la que sabemos que existe un campo magnético (por ejemplo el entrehierro de un imán) introducimos, con velocidad conocida, partículas cargas. En estas condiciones observaremos:

- que la carga se ve sometida a la acción de una fuerza perpendicular a la velocidad que llevaba.
- que si aumentamos el módulo de la velocidad, sin variar ni su dirección ni su sentido, aumentará el módulo de la fuerza que actúa sobre la carga.

Si variamos la dirección de la velocidad:

- la fuerza es siempre perpendicular a la dirección de la velocidad y a otra, que es siempre la misma.
- que existe una dirección de privilegio, en la que la carga no sufre desviación. Esa dirección privilegiada, es la dirección a la que la fuerza ha sido perpendicular para cada velocidad que ha tenido la carga.

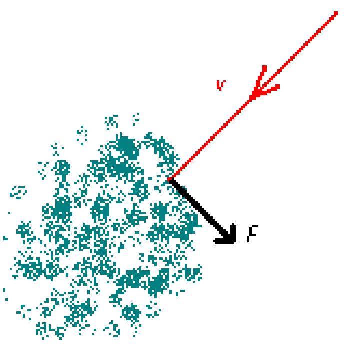


Figure 1
La partícula cargada que se mueve con velocidad "v", sufre la acción de una fuerza "F", perpendicular a la velocidad, al entrar en la zona en la que existe un campo magnético "B"

Lo que acabamos de describir lo podemos representar por una expresión del tipo: $\vec{F} \propto q\left[\vec{v} \times \vec{u}_p\right]$, siendo $\vec{u}_p$ un vector unitario en la dirección privilegia. La constante de proporcionalidad, será el módulo del vector inducción magnética “ $\vec{B}$ ” que caracterizará al campo magnético existente en la región. Lo que nos permite formular que, una carga que se mueve estará sometida a la acción de una fuerza magnética de valor $\vec{F} = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$, y a una fuerza de tipo eléctrico de valor $\vec{F} = q\,\vec{E}$. La fuerza total que puede actuar sobre una carga será:

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$$

que se conoce como la **fuerza de Lorentz**.

La expresión anterior nos permite un primer acercamiento a las unidades del vector inducción magnética $\vec{B}$. En efecto las unidades de la inducción deben ser tales que multiplicadas por una velocidad nos den las del campo eléctrico luego [B] = [E/v] = (V m^{-1}) / (m s^{-1}) = V s m^{-2} que se conoce como “Tesla”, o Weber m^{-2}. Veamos alguna de las aplicaciones de la fuerza de Lorentz.

Movimiento de una partícula cargada en el seno de un campo magnético de inducción magnética perpendicular a la velocidad de la partícula.

Supongamos, que en la región limitada por el recuadro de la figura 2, a partir del momento en que un electrón se encuentra en el punto “A” producimos un campo magnético campo perpendicular al plano del papel y entrante en él, si el módulo del vector inducción es B, en ese momento sobre la partícula actuará una fuerza $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right)$, si no existe campo eléctrico alguno, la expresión anterior se transforma en $\vec{F}_B = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$. Como la fuerza es en cada punto perpendicular a la velocidad, el movimiento se transformará en circular, pues el módulo de la velocidad no variará, quien si lo hará será la dirección, que será en cada punto perpendicular a la velocidad, por lo que describirá una circunferencia, cuyo radio “r” será tal que $\left|\vec{F}_M\right| = m\,\omega^2\, r = m\dfrac{v^2}{r}$ que vendrá condicionado por el módulo de la fuerza central de origen magnético que actúa, lo que permite escribir:

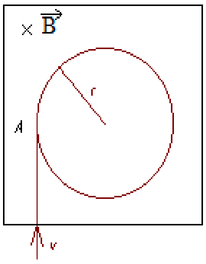


Figure 2
Movimiento de un electrón en un campo magnético

$$\left|\vec{F}_B\right| = q \cdot \left|\vec{v} \cdot \left|\vec{B}\right|\right| = \left|\vec{F}_M\right| = m_q\,\frac{v^2}{r} = m_q\,\omega^2\, r$$

luego el radio de la circunferencia descrita será: $r = \dfrac{m\left|\vec{v}\right|}{q\left|\vec{B}\right|}$

Si la velocidad y el campo magnético no son perpendiculares el electrón describirá una hélice, cuya proyección sobre un plano perpendicular al campo tendrá por radio $r_h = \dfrac{m\left|\vec{v}\right| \operatorname{sen}\varphi}{\left|\vec{B}\right| q}$ siendo la velocidad axial a lo largo de la hélice constante e igual a: v cosφ, siendo φ el ángulo formado por la velocidad y la inducción magnética

Efecto Hall

Otra consecuencia inmediata de la fuerza experimentada por un carga en el seno de un campo magnético es el efecto sufrido por los portadores de carga de un conductor cuando está inmerso en un campo magnético, la desviación sufrida por la carga en su trayectoria y las consecuencias que de este hecho se derivan, se conoce como efecto Hall.

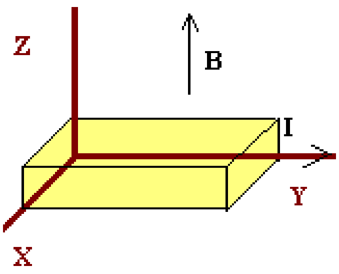


Figure 3

Tal vez el caso más curioso se presente en muestras semiconductoras, pues en este caso el tipo de portador (hueco, o, electrón), va a tener una influencia trascendental en el sentido del efecto, de modo que la llamada tensión Hall (que aparece en la muestra) va a servir para caracterizar el tipo de muestra de la que se trate.

- Consideremos una muestra paralelepipédica semiconductora tipo "n", como la que se muestra en la figura 4 por la que circula una corriente en el sentido positivo del eje "Y", que está situada en el interior de un campo magnético homogéneo paralelo al eje "Z". Si la muestra es de tipo "n" la conducción se realiza por electrones y la velocidad de los portadores será de sentido contrario al de la corriente, $\vec{v} = v_e \left(-\vec{j}\right)$, la inducción magnética será $\vec{B} = B\left(+\vec{k}\right)$, al ser todos los vectores perpendiculares entre sí, aparecerá una fuerza de módulo "$q_e \cdot v_e \cdot B$", y su sentido lo obtendremos del producto del signo de la carga por los sentidos de los vectores campo y velocidad "$-\left[\left(-\vec{j}\right)\times\left(+\vec{k}\right)\right] = +\vec{i}$", es decir <u>los electrones se verán empujados hacia la cara externa.</u>

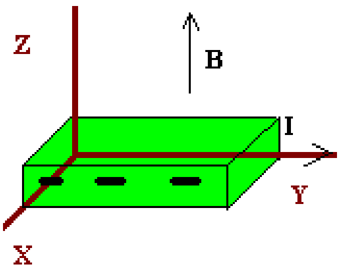


Figure 4
Semiconductor tipo "n" por el que pasa una corriente "I" en un campo magnético. Los portadores (electrones) son desviados a la cara anterior de la muestra

- Veamos ahora que ocurre si la muestra, con la misma geometría, es tipo "p", como se muestra en la figura 5, es decir la conducción se lleva a cabo por huecos ("cargas positivas"), suponiendo que la corriente tiene el mismo sentido y que está en el mismo campo magnético, es decir su inducción será: $\vec{B} = B\left(+\vec{k}\right)$. Ahora la velocidad de los portadores tendrá el mismo sentido que la corriente, es decir, $\vec{v} = v_p \left(+\vec{j}\right)$. La fuerza tendrá por módulo: $q_p \cdot v_p \cdot B$. Su sentido será: $\left[\left(+\vec{j}\right)\times\left(+\vec{k}\right)\right] = +\vec{i}$, es decir el mismo que antes, lo que significa en esta situación que los <u>portadores positivos se verán empujados hacia la cara externa</u>

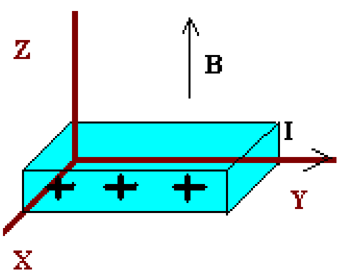


Figure 5
Semiconductor tipo "p" por el que pasa una corriente "I" en un campo magnético. Los portadores (huecos) son desviados a la cara anterior de la muestra.

Es decir en ambos casos va a aparecer una tensión entre las caras anterior y posterior de la muestra, sin embargo, en un caso la cara exterior es positiva respecto de la interior (conducción por portadores positivos) y en el otro la cara exterior es negativa respecto de la interior (conducción por electrones). Por tanto el sentido de la tensión Hall, que nos ha resultado de signo opuesto en un caso que en el otro, nos dirá el tipo de muestra que tenemos

Fuerza sobre una corriente

Veamos que ocurrirá cuando varias cargas, que se mueven en el interior de un conductor, se encuentran en el seno de un campo magnético de inducción $\vec{B}$. Por lo que acabamos de saber cada portador se verá sujeto a la acción de una fuerza de valor: $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$. Consideremos un elemento de corriente de longitud diferencial ($d\vec{l}$), de forma que todos los portadores en él contenidos, se moverán con una velocidad promedio $< \vec{v} >$. Para cada portador la fuerza será: $\vec{f}_p = q\left[< \vec{v} > \times \vec{B}\right]$, como en el interior del tramo de conductor que hemos considerado existirán varios portadores, sobre el elemento de conductor que estamos considerando existirá una fuerza $d\vec{F}$, que será la suma de las fuerzas que actúan sobre todos y cada uno de los portadores que contiene ese elemento de conductor $d\vec{F} = \sum \vec{f}_p$.

Para calcular la suma de las fuerzas sobre los portadores ($\sum \vec{f}_p$), debemos saber el número total de portadores que tenemos en el volumen de conductor que estamos considerando. Si llamamos “n” al número de portadores por unidad de volumen y $\Delta\tau$ el volumen de la porción de conductor considerado, el producto $n\Delta\tau$, será el número total de portadores es decir que la fuerza que actúa sobre el elemento de corriente será: $d\vec{F} = \sum \vec{f} = n\,\Delta\tau\, q\left[< \vec{v} > \times \vec{B}\right]$.

Calculemos ahora el valor de ese volumen de conductor que en general será un prisma recto de sección “s”, si su longitud hemos dicho que es $d\vec{l}$ tendremos que $\Delta\tau = \vec{s} \cdot d\vec{l}$, luego la fuerza que actuará será: $d\vec{F} = \sum \vec{f} = n\,\Delta\tau\, q\left[< \vec{v} > \times \vec{B}\right] = n\left(\vec{s} \cdot d\vec{l}\right) q\left[< \vec{v} > \times \vec{B}\right]$.

Vamos a reordenar la ecuación anterior, para ello tendremos en cuenta que en esa expresión tenemos magnitudes que dependen de la naturaleza del conductor (n, q, $< \vec{v} >$), de la geometría del conductor ($\vec{s}$), y otras que pueden ser variadas por el observador ($d\vec{l}$ y$\vec{B}$). Si queremos agrupar esas magnitudes por su origen, debemos intercambiar la posición que ocupan en la fórmula la velocidad media de los portadores y la longitud de conductor que hemos considerado. Desde el punto de vista del cálculo lo podemos hacer pues, son dos vectores paralelos, con lo que obtenemos: $d\vec{F} = n\left(\vec{s} \cdot < \vec{v} >\right) q\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]$, si ahora permutamos el orden del producto escalar y reagrupamos términos obtenemos: $d\vec{F} = \left(n\, q < \vec{v} >\right) \cdot \vec{s}\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]$, el término entre paréntesis es la densidad de corriente ($\vec{J}$), lo que nos permite escribir: $d\vec{F} = \left(\vec{J} \cdot \vec{s}\right)\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]$, el producto escalar de la densidad de corriente por la superficie nos da la intensidad que circula por el conductor, es decir:

$$d\vec{F} = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]$$

que nos da la fuerza que actúa sobre un elemento de corriente. Si queremos obtener la fuerza sobre un conductor debemos realizar la integral a lo largo de todo él.

$$\vec{F} = \int_{\text{circuito}} I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]$$

Acción magnética sobre una espira de corriente: momento magnético

Como una aplicación directa del cálculo de la fuerza ejercida por una corriente, vamos a calcular lo que ocurrirá con una espira que se encuentre en un campo magnético. Por sencillez de cálculo vamos a suponer que tenemos una espira rectangular de lados "a" y "b" recorrida por una corriente "I", que se encuentra en un campo magnético de inducción $\vec{B}$. Supondremos que la normal a la espira forma un ángulo θ con el campo, como se muestra en las figuras 6 y 7

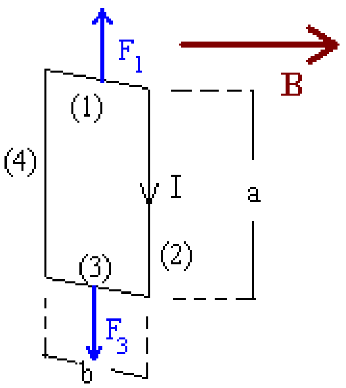


Figure 6
Representación de una espira rectangular en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ horizontal, que forma un cierto ángulo con el vector superficie de la espira.

Apliquemos a cada uno de los lados de la espira la relación general que hemos obtenido. Para el lado "1", tendremos que: $\vec{F}_1 = I\left[\vec{l}_1 \times \vec{B}\right]$, análogamente para el lado "3" tendremos: $\vec{F}_3 = I\left[\vec{l}_3 \times \vec{B}\right]$. Ambas fuerzas serán del mismo módulo, con la misma recta de acción pero de sentidos opuestos, luego su resultante será nula: $\vec{F}_1 + \vec{F}_3 = \vec{0}$.

Para los lados "2" y "4" tendremos: $\vec{F}_2 = I\left[\vec{l}_2 \times \vec{B}\right]$ y $\vec{F}_4 = I\left[\vec{l}_4 \times \vec{B}\right]$, cuyos módulos también serán los mismos, pero los vectores no estarán en la misma línea. La resultante será nula, pero no el momento resultante, su módulo será:

$\left|\vec{M}_R\right| = \left|\vec{l}_1 \times \vec{F}_2\right| = \left|\vec{l}_1\right| \cdot \left|\vec{F}_2\right| \cdot \operatorname{sen}\theta$ el módulo de la fuerza será: $\left|\vec{F}_2\right| = I\left|\vec{l}_2\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$ pues el campo es normal el lado "2", luego: $\left|\vec{M}_R\right| = \left|\vec{l}_1\right| \cdot \left(I\left|\vec{l}_2\right| \cdot \left|\vec{B}\right|\right) \cdot \operatorname{sen}\theta$.

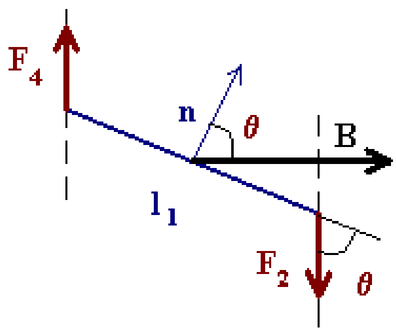


Figure 7
Representación de la espira de la figura 6, vista desde arriba (visión azimutal) en la que se representan las fuerzas sobre los lados verticales y la normal a la superficie de la espira $\vec{n}$

Como $\left|\vec{l}_1\right| = b$ y $\left|\vec{l}_2\right| = a$ el producto anterior lo podemos escribir como $\left|\vec{M}_R\right| = I\,a\,b\,B\,\text{sen}\,\theta$.

El vector superficie de la espira será: $\vec{S} = (a\,b)\,\vec{n}$, siendo $\vec{n}$ un vector normal a la espira y cuyo sentido venga dado por el de circulación de la corriente. Teniendo en cuenta los sentidos de los vectores que intervienen en la expresión del módulo del módulo del momento, podemos escribir: $\vec{M}_R = I\left[\vec{S}\times\vec{B}\right]$

Para una espira plana, el producto de su superficie por corriente que recorre la espira lo denominamos *momento magnético de la espira*: $\vec{m} = I\,\vec{S}$, que nos ayudará a caracterizar desde el punto de vista magnético a las corrientes cerradas.

Por tanto diremos que una espira en un campo magnético se ve sujeta a la acción de un par cuyo momento es: $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$

Como vemos, si una espira se encuentra en un campo magnético uniforme, este ejerce un par sobre ella que la trata de orientar, y que se anulará si el campo es paralelo al momento magnético. De la propia definición de momento magnético se desprende que sus unidades son: A m^2.

Problema 1.- Calcular el momento magnético asociado al movimiento orbital de un electrón, que gira en una órbita de radio "a_0", con una frecuencia ν.

Si el electrón gira con una frecuencia determinada, quiere decir que en cada segundo, pasa por cualquier punto de la órbita una carga de $q_e\,\nu$ *, lo que supone que como el área de la órbita, supuesta circular es* πa_0^2 *, el movimiento orbital equivale a un momento magnético de módulo:* $\underline{|\vec{m}| = \pi\,q_e\,a_0^2\,\nu}$

Como el movimiento de los electrones en las órbitas es asociable a un momento magnético, la acción de un campo magnético sobre la materia supondrá que las órbitas se verán orientadas por la acción de un campo magnético. Si consideramos un electrón que gire en una órbita de radio "a_0", sabemos que le podemos asociar un momento angular cuyo módulo será: $\left|\vec{l}\right| = \left|\vec{a}_0\times\left(m\vec{v}\right)\right|$, teniendo en cuenta que la velocidad será perpendicular al radio en cada momento y valdrá: $\omega\,a_0$, nos queda: $\left|\vec{l}\right| = m\,\omega\,a_0^2$. Como hemos visto (ver problema anterior) que el momento magnético asociado a la órbita es: $\left|\vec{m}\right| = \pi\,q_e\,a_0^2\,\nu$, podemos definir la relación entre el momento magnético y el angular, introduciendo la "razón giromagnética" $\gamma = \dfrac{\left|\vec{m}\right|}{\left|\vec{l}\right|}$, que en este caso valdrá:

$\gamma_0 = \frac{q_e}{2\,m_e}$. La razón giromagnética nos permitirá, conocido el valor del momento angular de un electrón en una órbita, asignarle un momento magnético asociado lo cual nos será de gran utilidad en el estudio del magnetismo de los medios materiales.

Fuerzas entre corrientes: Ley de Biot y Savat.

El estudio de las fuerzas ejercidas por un campo magnético sobre una carga en movimiento nos ha permitido obtener la fuerza que ejerce un campo magnético sobre una corriente, por otro lado hemos indicado que la sistematización del estudio del magnetismo tiene como puntal importante las experiencias de Oersted, que observó que el paso de corrientes por hilos conductores suponía la desviación de una brújula colocada un las cercanías de los hilos. Este hecho, supone que el paso de corriente por un conductor da lugar a la aparición de un campo magnético, por tanto, si ponemos dos corrientes suficientemente cercanas debe aparecer entre ellas un fuerza.

Supongamos dos circuitos “C_1” y “C_2”, recorridos por intensidades I_1 e I_2, como se muestra en la figura 8. Si analizáramos la fuerza que el elemento del primer circuito $d\vec{l}_1$, ejerce sobre otro elemento $d\vec{l}_2$ del segundo circuito, encontraríamos:

- El módulo de la fuerza será proporcional al valor de las intensidades de las dos corrientes, y la longitud del tramo considerado en cada circuito: $\left|d^2\vec{F}_{1,2}\right| \propto I_1\, I_2 \left|d\vec{l}_1\right| \left|d\vec{l}_2\right|$

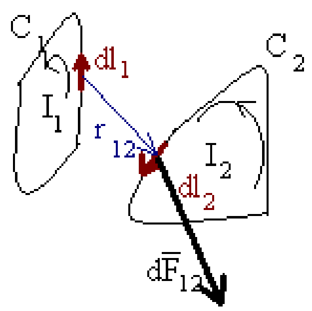


Figure 8
Fuerza sobre un elemento de corriente del circuito “2", por la acción de otro elemento de corriente del circuito “1".

- El módulo de la fuerza es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los dos elementos de corriente: $\left|d\vec{F}_{1,2}\right| \propto \frac{1}{r_{1,2}^2}$

-La fuerza es nula para los elementos de corriente $d\vec{l}_2$ que son perpendiculares al plano definido por $d\vec{l}_1$ y el vector posición: $\left|d\vec{F}_{1,2}\right| \equiv 0$ si $d\vec{l}_2$ es $\perp$ al plano ($d\vec{l}_1$, $\vec{r}_{1,2}$).

Estas condiciones se pueden expresar matemáticamente diciendo:

$$d^2\vec{F}_{1,2} = K_M\, I_1\, I_2\, \frac{d\vec{l}_2 \times \left[d\vec{l}_1 \times \vec{u}_{1,2}\right]}{r_{1,2}^2}$$

La expresión anterior introduce una nueva constante “K_M” cuyo valor dependerá del sistema de unidades. Para que la expresión sea homogénea, la constante debe tener unidades, que serán las de una fuerza dividida por el cuadrado de la intensidad de corriente. En el Sistema Internacional, la constante la escribimos como: $K_M = \frac{\mu_0}{4\pi}$, y su valor es 10^{-7} N A^{-2}.

Por tanto la fuerza sobre un elemento de corriente en el circuito “2” debida a la existencia de una corriente en el circuito "1" será: $d\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2\, d\vec{l}_2 \times \oint_{C_1} \frac{\left[\left(I_1\, d\vec{l}_1\right)\times\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)\right]}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$.

Si recordamos la expresión que hemos obtenido para la fuerza que se ejercía sobre un elemento de corriente que se encuentra en un campo magnético $d\vec{F} = I\left[d\vec{l} \times \vec{B}\right]$, y observamos la expresión que acabamos de obtener, vemos que son idénticas si hacemos:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{\left(I_1\, d\vec{l}_1\right)\times\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$$

Que será la expresión de la inducción magnética creada por una corriente "I_1" en un punto definido por la posición $\vec{r}_2$.

Vamos a aplicar lo que acabamos de obtener al calculo de la inducción magnética creada por un hilo recto indefinido por el que circula una corriente "I", a una distancia "ρ" del mismo.

Si consideramos un elemento de longitud en el hilo, como se muestra en la figura 9, generará un campo de inducción $d\vec{B}$ de valor: $d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{u}_r}{r^2}$ siendo $\vec{u}_r$ un vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{r}$. El producto vectorial del elemento de hilo por el vector unitario nos da que la inducción será entrante en el papel, y el módulo será: $dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl\, \text{sen}\,\theta}{r^2}$.

De la figura se desprende que: $\text{sen}\,\theta = \cos\alpha = \frac{\rho}{r}$, $\text{tag}\,\alpha = \frac{l}{\rho}$, para ver el hilo completo es mejor emplear el ángulo α luego será el que empleemos en la integración. De lo anterior se obtiene que: $dl = \frac{\rho}{\cos^2\alpha} d\alpha$.

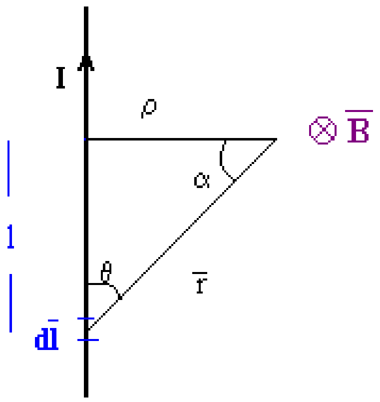


Figure 9

Sustituyendo en la expresión del diferencial de la inducción obtenemos:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\frac{\rho\, d\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\alpha}{\left(\frac{\rho}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{1}{\rho} \cos\alpha\, d\alpha$$

Para obtener el módulo de la inducción tendremos que integrar la expresión anterior. La variable de integración es el ángulo α desde el que tenemos que conseguir ver el hilo completo, es decir desde que valga $-\pi/2$ hasta $+\pi/2$.

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{1}{\rho} \cos\alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} I \left[\operatorname{sen}\alpha\right]_{-\pi/2}^{+\pi/2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho}$$

Luego la inducción magnética generada por el hilo en un punto cualquiera del espacio será:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \vec{u}_\varphi$$

Si queremos generalizar el resultado que hemos obtenido hasta ahora para el campo creado por un hilo conductor, que era $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{C_1} \frac{\left(I_1 \, d\vec{l}_1\right) \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$, pensemos en términos de densidad de corriente. El producto de la intensidad por el elemento de corriente, es expresable como $\left(\vec{J} \cdot d\vec{s}\right) d\vec{l}$, el paralelismo entre el vector densidad de corriente y el elemento de longitud nos permite escribir: $\vec{J}\left(d\vec{s} \cdot d\vec{l}\right) = \vec{J} \, d\tau$ sustituyendo lo anterior en la expresión de la inducción tenemos: $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times \vec{u}}{R^2} d\tau'$ que nos da la expresión del vector inducción magnética debida a una densidad de corriente.

Vamos a ver un caso interesante de fuerzas entre corrientes, es el de la fuerza entre dos hilos rectilíneos paralelos por los que circula una corriente.

Consideremos dos hilos paralelos separados una distancia ρ por los que circulan corrientes I_1 e I_2 en el mismo sentido, como se muestra en la figura 10. Según hemos calculado, el hilo "1" creará en la posición del hilo "2" un campo magnético de inducción: $\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi \rho} \vec{u}_\varphi$, según sabemos sobre un elemento de longitud $d\vec{l}_2$ del hilo "2" aparecerá una fuerza: $d\vec{F}_{1,2} = I_2 \left[d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)\right]$.

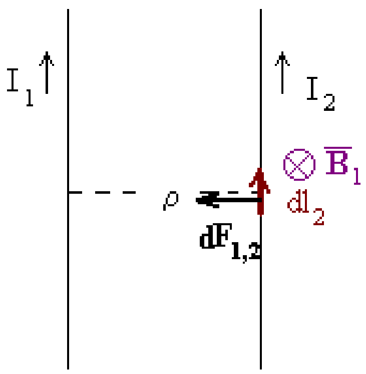


Figure 10

Como los vectores inducción y longitud son perpendiculares, el módulo del producto será el producto de los módulos y el sentido hacia el otro hilo, por tanto el módulo de la fuerza será:

$dF_{1,2} = I_2 \, dl_2 \, B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 I_2}{\rho} dl_2$, es decir aparece una fuerza por unidad de longitud de módulo:

$$\frac{dF_{1,2}}{dl_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{\rho}$$

Esta expresión, que nos da la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos conductores, ha sido utilizada para *definir el amperio como unidad fundamental del Sistema Internacional*. Diremos que un amperio es la corriente estacionaria que cuando circula por cada uno de dos conductores rectilíneos indefinidos y paralelos separados la distancia de un metro, da como resultado la fuerza de $2 \times 10^{-7}\ \mathrm{N/m}$.

Definido así el amperio, el culombio resulta ser la cantidad de carga transportada por una corriente uniforme de intensidad un amperio, que fluye durante un segundo.

Ecuaciones del campo magnético: Ley de Ampère.

Vamos a obtener algunas propiedades del campo magnético. Empezaremos calculando la circulación del vector inducción magnética en un caso sencillo, para generalizarlo después.

Consideraremos un hilo conductor rectilíneo infinito por el que circule una corriente "I", se generará un campo magnético de inducción: $\vec{B} = \frac{\mu_0\, I}{2\pi\, r}\,\vec{u}_\varphi$, cuyas líneas de campo serán circunferencias contenidas en planos perpendiculares al hilo, de radio "r" con centro en puntos del hilo. Tomaremos pues como línea sobre la que calcular la circulación una circunferencia de radio "a", como se muestra en la figura 11.

La circulación será: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_C B\cdot dl$, pues los vectores inducción y desplazamiento serán vectores paralelos. Como el valor del módulo de la inducción es constante en todos los puntos de la circunferencia, la circulación será: $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}\oint_C dl$ = $\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{a}(2\pi a) = \mu_0 I$. Luego para este caso sencillo tenemos: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$.

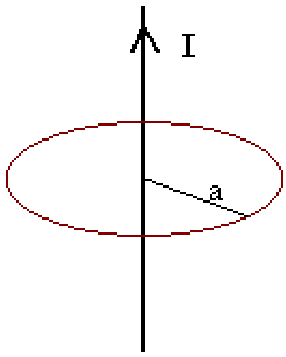


Figure 11

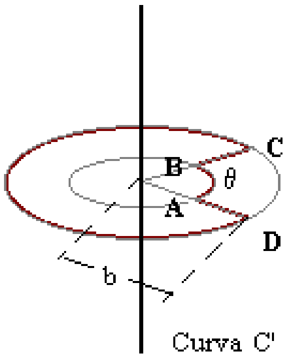


Figure 12

Vamos a ver si la curva es un poco más complicada que ocurre. Emplearemos ahora como línea cerrada la formada por dos arcos de circunferencia de amplitud θ y $2\pi - \theta$, y radios "a" y "b" respectivamente, unidos por los tramos de radios que definen los arcos, como se muestra en la figura 12. La circulación a lo largo de C' será:

$$\oint_{C'} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_B^C \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_D^A \vec{B}\cdot d\vec{l}.$$

En los tramos BC y DA, la inducción, que será tangencial, es perpendicular al desplazamiento, que es radial; por tanto las dos integrales son nulas. En los otros tramos, los dos vectores (inducción y desplazamiento) son paralelos, quedando por tanto: $\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_A^B B \cdot dl + \int_C^D B \cdot dl$, como las inducciones son de módulo constante en cada arco, y de valores: $\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a}$ y $\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b}$ respectivamente, tendremos que calcular la integral del arco en cada caso, cuyos valores son: $(\theta\, a)$ y $(2\pi - \theta)\, b$, por tanto:

$$\oint_{C'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{a} \ (\theta\, a) + \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{b} \ (2\pi - \theta)\, b = \frac{\mu_0\, I\, \theta}{2\pi} + \frac{\mu_o\, I\, (2\pi - \theta)}{2\pi} = \mu_0\, I\, .$$

Encontramos de nuevo, que la circulación a lo largo de esta curva es proporcional a la corriente que circula por el hilo. Con la estructura de curva que hemos tomado nos podemos acercar a la forma de cualquier curva cerrada todo lo que queramos, y sin la necesidad de que el hilo este en el centro de la curva. Dado por otro lado, que el campo, por venir de una expresión integral, tiene que cumplir el principio de superposición, se generalizará la expresión anterior y diremos que la circulación del vector inducción magnética a lo largo de una curva cerrada cualquiera es siempre proporcional a la corriente que se encierre.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\, I_{encerrada}$$

Que es la expresión del teorema de Ampère en forma integral.

Vamos a aplicar el teorema de Ampère al calculo de la inducción magnética creada por un solenoide. Un solenoide no es otra cosa que una asociación de espiras del mismo radio recorridas por la misma corriente. La inducción magnética a la que darán lugar, será la suma de los vectores campo debidos a cada espira lo que supondrá un campo uniforme, intenso en el volumen encerrado por el solenoide, cuyas líneas se cerraran en el exterior del solenoide, con lo que la inducción magnética en la superficie externa del solenoide será prácticamente nula.

Esta propiedad de los solenoides, va a ser la que aprovechemos para elegir la línea sobre la que calcular la circulación de la inducción. Vamos a tomar un rectángulo uno de cuyos lados esté en el volumen del solenoide; su paralelo, muy cercano a la superficie externa del mismo y los otros dos perpendiculares a las líneas de campo, como se muestra en la figura 13. En la expresión del teorema de Ampère: $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\, I_{encerrada}$, debemos calcular cada uno de sus miembros. La circulación, será

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_P^Q \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_Q^R \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_R^S \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_S^P \vec{B} \cdot d\vec{l}\, .$$

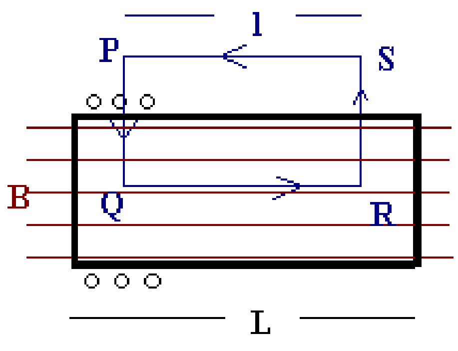


Figure 13
Esquema de un solenoide recto de “N” espiras y longitud “L”

En los tramos PQ y RS el vector inducción es perpendicular al vector movimiento, por tanto las integrales son nulas. En el tramo SP, como lo podemos dibujar todo lo cercano que queramos a la superficie externa del solenoide, la inducción será nula, luego lo será la integral. Por tanto queda: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_Q^R \vec{B}\cdot d\vec{l}$, en este tramo inducción y movimiento son paralelos, luego: $\int_Q^R \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_Q^R B\cdot dl$, como la inducción es uniforme nos que dará la integral del desplazamiento que valdrá “l”: $\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = B\, l$

Vamos a calcular el segundo miembro: $\mu_0\, I_{encerrada}$. Realmente calcularemos la corriente encerrada por el rectángulo. Si en la longitud total del solenoide (L) tenemos (N) espiras, en la longitud “l”, que es el lado largo del rectángulo, tendremos $\frac{N}{L}\, l$ espiras, lo que supone encerrar una corriente de: $\left(\frac{N}{L} I\right) l$, si igualamos los dos miembros de la ecuación, tendremos: B l = $\mu_0 \frac{N}{L} l$, lo que nos lleva a que la inducción magnética generada por un solenoide tiene por módulo: $B = \mu_0 \frac{N}{L} I$, siendo su dirección paralela al eje del solenoide y su sentido vendrá dado por el de avance de un tornillo que movamos en el sentido marcado por la corriente.

El flujo del campo magnético

Vamos ahora a expresar la otra propiedad importante del campo magnético, que es la inexistencia de polos magnéticos asilados. Nosotros la hemos podido poner de manifiesto si alguna vez se nos ha partido un imán, ya que lo que obtenemos por fractura de un imán son siempre dos imanes , y por mucho que los dividamos no conseguiremos un único polo magnético. Es decir las líneas de fuerza del campo magnético no salen de ningún lugar, entran y salen en cada cara. Al obtener la inducción creada por una espira o por un solenoide nos encontramos que las líneas de campo son cerradas. La inexistencia de fuentes de las líneas de campo, supone que el flujo del vector a través de una superficie cerrada cualquiera sea nulo, luego se cumplirá:

$$\oint_\Sigma \vec{B}\cdot d\vec{s} = 0$$

Que nos permite escribir la segunda expresión fundamental de la inducción magnética.

Las dos propiedades básicas de los campos magnéticos estacionarios, no dependientes del tiempo, son el teorema de Ampere, que al estudiar los fenómenos dependientes del tiempo tendremos que modificar y, su carácter solenoidal, o lo que es lo mismo que su flujo a través de una superficie cerrada cualquiera es cero, que es una de las cuatro ecuaciones fundamentales del electromagnetismo, conocidas como ecuaciones de Maxwell.

El fenómeno de la inducción magnética. Leyes de Faraday y Lenz

Hasta ahora hemos visto los campos eléctrico y magnético como fenómenos sin conexión matemática alguna, es cierto que sabemos que ambos se generan por la existencia de cargas eléctricas, pero no hemos encontrado ninguna relación entre sus vectores campo. Vamos a encontrar esa relación que intuimos debe existir, pues el movimiento de las cargas quien produce el campo magnético, o lo que es lo mismo que nosotros veamos las cargas desde un sistema de coordenadas que se mueve respecto del suyo.

Hacia 1830 Michael Faraday en Inglaterra, y Joseph Henry en Estados Unidos realizaron una serie de experimentos que ponían de manifiesto la relación entre los fenómenos eléctricos y magnéticos. Supongamos que tomamos una bobina y la conectamos a un galvanómetro capaz de acusar el paso de corriente (fig 14), si acercamos un imán a la bobina veremos que el galvanómetro detecta paso de corriente, lo mismo ocurre cuando alejamos el imán, pero no es así cuando esta quieto, por muy cerca que mantengamos el imán y la bobina.

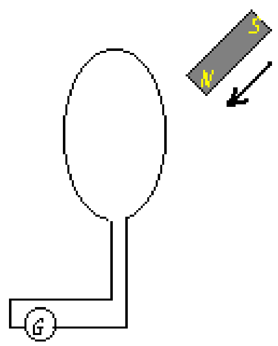


Figure 14
Al acercarse el imán se detecta paso de corriente por el galvanómetro

La observación del galvanómetro nos dirá que la corriente que circula cuando acercamos el imán a la bobina es de sentido contrario a la que atraviesa la bobina cuando se aleja el imán. Si ahora invertimos el imán, es decir acercamos el polo sur, la corriente será del mismo sentido que cuando alejábamos el polo norte con anterioridad. Es decir el movimiento relativo de los polos del imán respecto del circuito tiene importancia a la hora de generarse una corriente en el circuito, y no se establece corriente alguna por estar el imán quieto y cercano a las espiras.

Veamos otra experiencia curiosa, coloquemos dos circuitos eléctricos cercanos y en reposo uno respecto del otro, uno de ellos formado como antes, por una bobina y un galvanómetro y el otro formado por otra bobina conectada a una batería con un interruptor (fig 15). Si cerramos el interruptor observaremos, por un intervalo de tiempo muy corto, el paso de una corriente eléctrica en la otra bobina, la unida al galvanómetro, no observando después ninguna corriente en el circuito del galvanómetro, aunque tengamos cerrado el circuito de la batería. Sólo aparecerá de nuevo corriente en la segunda bobina cuando abramos de nuevo el circuito primero.

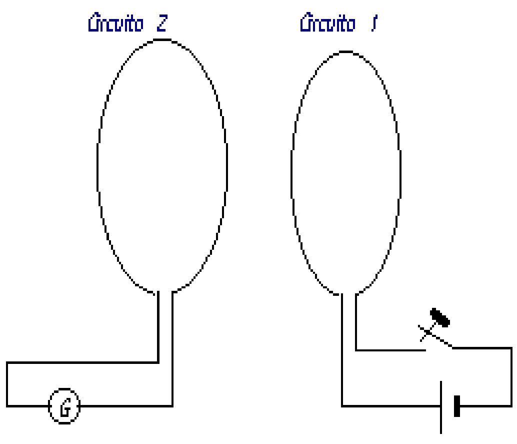


Figure 15
El galvanómetro del circuito "2", sólo detecta paso de corriente al abrir o cerrar el interruptor del circuito "1"

Faraday describe el experimento que acabamos de relatar como: "*Cuando se hizo el contacto, se produjo un efecto repentino y muy leve en el galvanómetro y también hubo un efecto semejante, muy leve, cuando se interrumpió el* *contacto con la batería. Pero cuando la corriente voltaica pasaba por la primera hélice, no se observaba ninguna alteración galvanométrica, ni se podía observar ningún efecto de inducción sobre la otra hélice, aun cuando se había comprobado que el poder activo de la batería era muy grande".*

¿Qué ha ocurrido en este segundo experimento?, las bobinas están en reposo una respecto a otra, ¿qué ha podido variar?. La respuesta no es tan trivial, intentemos seguir el fenómeno:

Al conectar el interruptor, por el primer circuito empieza a circular una corriente eléctrica que generará un campo magnético en sus proximidades, en consecuencia el segundo circuito se verá inmerso en un campo magnético que permanecerá constante en tanto se mantenga la corriente circulando por el primero de los dos circuitos. Al abrir de nuevo el interruptor del primer circuito el campo magnético creado por él desaparecerá, en consecuencia el segundo circuito dejará de estar inmerso en un campo magnético.

En el galvanómetro del segundo circuito podremos observar que no se detecta corriente alguna mientras el interruptor del primer circuito está abierto, en el instante en que se cierra el interruptor el galvanómetro del "circuito 2", acusará paso de una corriente inducida por un instante, dejando de circular después aunque el interruptor esté cerrado y la corriente pase por él, al abrir de nuevo el interruptor del "circuito 1", el galvanómetro de "2" detecta el paso de corriente inducida en sentido contrario al detectado en la primera ocasión (Fig 16).

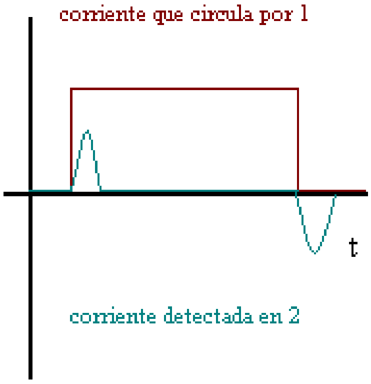


Figure 16

Sólo se acusa paso de corriente cuando existe un cambio en el valor del campo magnético que atraviesa el "circuito 2", que es lo mismo que ocurría en la experiencia del imán que hemos descrito anteriormente, pues por muy cerca que le mantuviéramos del circuito, si no lo movíamos no se detectaba paso de corriente.

La primera consecuencia que podemos sacar de todo lo anterior, es que lo importante no es el valor del campo en el que se encuentre la bobina que empleamos para detectar el fenómeno, quien produce la corriente inducida en ella es el cambio en el valor del campo.

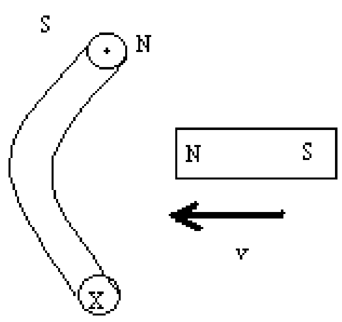


Figure 17
Esquema de un imán introduciéndose en una espira (de la que se ha representado sólo la mitad) en la que se induce una corriente

Heinrich F.E. Lenz, realizó un estudio del fenómeno desde el punto de vista de la conservación de la energía, lo que permite predecir el sentido de la corriente inducida. La ley de Lenz nos dice que: *"la corriente inducida aparece en un sentido tal, que se opone a la causa que la produce"*. Igual que en Mecánica empleando el principio de conservación de la energía hemos conseguido sacar conclusiones sobre el comportamiento de los sistemas sin necesidad de hacer un planteamiento completo del fenómeno, vamos a ver que consecuencia obtenemos al aplicar la conservación de la energía a esta situación.

Consideremos la primera experiencia que hemos comentado: si introducíamos el imán en la espira se producía una corriente inducida, ¿cuál es su sentido?.

Sabemos que una corriente que circula por una espira produce un campo magnético cuyas líneas de campo son cerradas en el espacio que la circunda, y resultan entrantes por una cara de la espira y salientes por la otra, las líneas de campo del imán saldrán de su polo norte (N) y se cerrarán en su interior al entrar en el mismo por su cara sur (S). Si, como prevé la ley de Lenz, la corriente inducida en la espira debe oponerse al movimiento del imán, "la cara norte de la espira" debe oponerse a la norte del imán, como indica la figura 17, para lo cual la corriente debe entrar por la parte baja del trozo de cable que se esquematiza en la misma, y salir por su parte superior.

Para conseguir introducir el imán tendremos que realizar una fuerza que empuje al imán, la ley de Lenz nos dice que la espira reaccionará generando una corriente que trate de impedir que introduzcamos el imán. Por el contrario si alejamos el imán el circuito reaccionará generando una corriente que trate de atraer al imán. De acuerdo con el principio de conservación de la energía el trabajo realizado sobre el sistema debe ser igual al de generación de la corriente si suponemos que no existen pérdidas caloríficas, por el paso de la corriente.

Los razonamientos de Lenz lo son para circuitos cerrados pues se habla siempre de intensidades inducidas. Si el circuito es abierto podemos pensar en lo que ocurriría si fuese cerrado con lo que llegaremos encontrar el sentido de la f.e.m. inducida que debe aparecer para que circule la corriente.

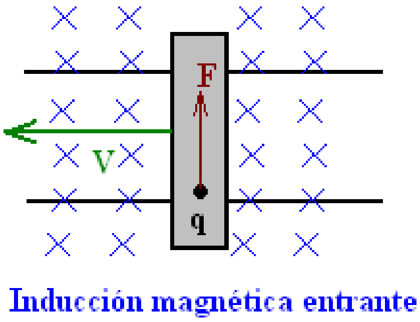


Figure 18
La barra metálica se desplaza sobre los carriles, en el seno de un campo magnético.

Para completar el estudio del fenómeno de la inducción, vamos a ver que ocurrirá se desplazamos una barra conductora, con velocidad constante de módulo "v", sobre unos carriles metálicos perpendicularmente a un campo magnético como indica la figura 18.

Como en el volumen del conductor existirán electrones libres, podemos decir que se mueven con la misma velocidad que el conductor, y por estar en un campo magnético se verán sometidos a la acción de la fuerza de Lorentz $\vec{F} = q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]$, que impulsará a los electrones a la parte superior de la barra, con lo que ésta quedará cargada negativamente en su parte superior y positivamente, por defecto de electrones, en su parte inferior. Como consecuencia de esta situación aparecerá en el interior del conductor un campo eléctrico que estabilizará el flujo de electrones, dado lugar a la aparición de una situación estacionaria cuando las fuerzas sobre los portadores sean iguales y opuestas.

$$\vec{F}_E = q\,\vec{E} = -\,\vec{F}_M = -\left(q\left[\vec{v} \times \vec{B}\right]\right);\ \vec{E} = -\,\vec{v} \times \vec{B}$$

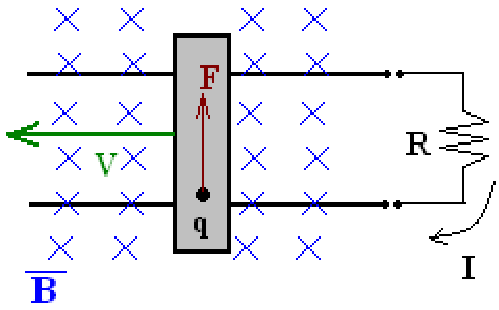


Figure 19
El movimiento de la barra metálica, provoca el paso de una corriente "I" por la resistencia "R"

La existencia en el interior del conductor de un campo eléctrico uniforme y paralelo al conductor, capaz de provocar de forma sostenida, el movimiento de los electrones por un posible circuito externo, da lugar a la aparición de una fuerza electromotriz de valor: $\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = -v\,B\,l$, capaz de generar una corriente si los raíles metálicos por los que se traslada el conductor se unen mediante una resistencia eléctrica como se muestra en la figura 19.

En los tres fenómenos que hemos descrito, se produce una corriente inducida, o lo que es lo mismo existe una f.e.m. inducida capaz de generar una corriente eléctrica, luego tenemos que encontrar lo que de común tienen las tres situaciones. En las dos primeras vimos que la variación del valor del campo magnético era la causa que generaba la corriente, pero en el tercer caso el campo magnético lo hemos supuesto constante en módulo dirección y sentido. Lo que sí ocurre en este tercer caso, es que la barra en su movimiento, si estuviera quieta no se produciría fuerza sobre los portadores, va "barriendo" más y más líneas de fuerza del campo magnético, como si aumentara no el valor del campo sino el área afectada por el fenómeno.

Como la magnitud que nos une un campo vectorial con el área a la que afecta, es el flujo; vamos a calcular el valor del flujo del campo magnético afectado en la experiencia. Si hemos dicho que la barra se mueve con velocidad constante de módulo "v" en un plano perpendicular al campo magnético, el flujo: $\phi = \int \vec{B}\, d\vec{s} = \int B\, ds = B \int ds$, la integral de la diferencial de superficie será la distancia entre los raíles multiplicada por el espacio (x) que haya recorrido la barra, que será velocidad por tiempo: $x = v\,t; \phi = B(l\,v\,t)$.

Si comparamos la expresión anterior con la que hemos obtenido para la f.e.m. inducida en la barra veremos que la una es la derivada temporal de la otra, es decir la velocidad de variación del flujo es quien nos da la f.e.m. y el signo menos era previsible por las consideraciones energéticas que siguiendo el razonamiento de Lenz hemos realizado, escribiremos que:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt}$$

en donde se resumen las dos leyes que rigen el fenómeno:

> Ley de Lenz: *"La variación del flujo magnético que enlaza a un circuito produce una f.e.m. que se opone a la variación del flujo en él"*
>
> Ley de Faraday: *"El valor de la f.e.m. coincide con la rapidez de variación del flujo magnético"*

De la definición de flujo, podemos ver que sus unidades serán las de la inducción multiplicadas por m^2, es decir o teslas x m^2, o simplemente Weber.

Vamos a rescribir la ecuación anterior empleando notación integral. El primer miembro de la ecuación, la fuerza electromotriz es la circulación del campo eléctrico, y el flujo es la integral de superficie del vector campo magnético siempre que la superficie esté soportada por la línea a la que se extiende la primera integral, sólo tendremos que encontrar la línea y la superficie apropiadas.

Para tener una imagen gráfica, consideremos la situación que acabamos de estudiar. La f.e.m. inducida la podemos escribir como: $\varepsilon = \int_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$, siendo "c" la barra conductora. El flujo lo hemos calculado sobre la superficie " Σ " soportada por la barra y definida por ésta en su movimiento, la variación del flujo será: $-\dfrac{d\phi}{dt} = -\dfrac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s}$.

Lo que nos permite escribir que

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_\Sigma \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

siempre que la superficie " Σ " esté soportada por la línea "C".

Coeficientes de inducción

Los coeficientes de inducción nos relacionan las ff.ee.mm. producidas en distintos circuitos, con las intensidades que recorren otros que están en sus cercanías, e incluso con la que recorre el propio circuito.

Sabemos que la ley de Biot y Savart nos da el valor de la inducción magnética creada por un elemento de corriente " $d\vec{l}$ " que se encuentra en un punto definido por $\vec{r}_1$, en un punto cualquiera del espacio definido por el vector $\vec{r}_2$: $\vec{B}_{2,1} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int_{C_1} \frac{\left(I_1\, d\vec{l}_1\right) \times \left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|^3}$. Esta expresión la podemos leer diciendo: la inducción magnética debida a un elemento de corriente en un punto cualquiera, depende del valor de la intensidad de la corriente, de la geometría del circuito (se integra sobre la línea que es el circuito "1"), y de la posición relativa entre el punto y el circuito. O lo que es lo mismo: la inducción magnética debida a un circuito de corriente en un punto cualquiera del espacio, depende del valor de la intensidad de la corriente y de la geometría propia del circuito y relativa del punto considerado respecto del circuito.

Supongamos que tenemos "N" circuitos rígidos (que los circuitos sean rígidos es la condición habitual de los circuitos eléctricos, por tanto no se quitará generalidad al razonamiento) distribuidos en una región del espacio. Si llamamos I_j a la corriente que circula por el circuito "j"; de lo que acabamos de decir se desprende, que si no variamos las condiciones geométricas de los circuitos, la inducción magnética creada por el circuito "j" en los distintos puntos del circuito "i" es proporcional al valor de la intensidad I_j; es decir: $\left|\vec{B}_{ij}\right| \propto I_j$. En consecuencia el flujo de la inducción magnética que atraviesa al circuito "i" debido a que por el "j" pasa corriente, será: $\phi_{ij} \propto I_j$. La constante de proporcionalidad dependerá exclusivamente de la geometría de los dos circuitos y de sus posiciones relativas y lo representaremos por M_{ij}.

Si queremos conocer el valor del flujo total que atraviesa el circuito “i”, tendremos que sumar las contribuciones de todos y cada uno de los circuitos presentes, incluyendo al propio circuito “i”, es decir: $\phi_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij}\, I_j$, donde M_{ij} dependerá exclusivamente de la geometría de los circuitos. Estos coeficientes que acabamos de introducir, son los coeficientes de inducción mutua entre cada pareja de circuitos, y representan las contribuciones al flujo de la inducción magnética que atraviesa un circuito dado debido a que está en presencia de varios. Naturalmente la propia corriente que circula por un circuito genera un campo cuyo flujo también hemos tenido en cuenta, y que corresponderá a los coeficientes de la forma Mii, que denotaremos por “L_i”, a los que llamaremos coeficientes de autoinducción.

Al escribir ahora la ley de Faraday tendremos: $\varepsilon_j = -\frac{d\phi_j}{dt} = -\sum_{i=1}^{N} M_{ij}\frac{dI_i}{dt}$. Se puede demostrar que la matriz de coeficientes de inducción es simétrica, es decir que $M_{ij} = M_{ji}$. No es extraño que esto sea así pues los coeficientes de inducción, hemos dicho representaban la geometría relativa entre los circuitos.

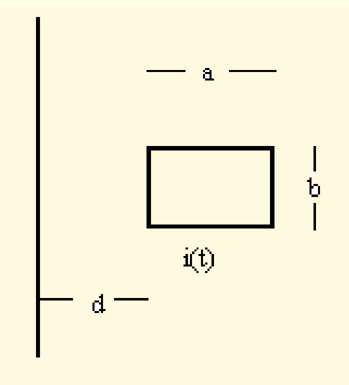
Naturalmente si consideramos un único circuito tendremos: $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}$.

De forma esquemática, si consideramos dos circuitos podemos escribir que los flujos que atraviesan ambos circuitos son de la forma:

$$\phi_1 = L_1 I_1 + M_{12} I_2$$
$$\phi_2 = M_{12} I_1 + L_2 I_2$$

Lo que nos permitirá calcular con facilidad la fuerza electromotriz inducida en uno de ellos una vez conocidos los coeficientes de inducción.

Por su definición, los coeficientes de inducción tendrán unidades que serán las del flujo divididas por las de la intensidad (Weber/amperio), o lo que es lo mismo las de una f.e.m. multiplicadas por las del tiempo y divididas por las de una intensidad (voltio x segundo/amperio), como el voltio dividido por amperio es ohmio, tenemos que las unidades de los coeficientes de inducción son ohmios x segundo que tiene nombre propio, “henrio”, en honor a Joseph Henry.



Problema 2.- Calcular la f.e.m. inducida en un hilo de longitud infinita, cuando por una espira rectangular de lados “a” y “b”, que diste “d” del hilo, circula una corriente: $i(t) = I\,\mathrm{sen}\,\omega t$.

Para calcular la f.e.m. inducida, deberíamos poder calcular la variación de flujo de la inducción magnética que atraviesa el hilo, pero definir el diferencial de superficie en el hilo no parece tarea fácil.

Sin embargo si acudimos a la definición de coeficiente de inducción mutua entre circuitos y de ahí calculamos la f.e.m. como: $\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -M\frac{dI}{dt}$,

Figure 1 de problemas

podremos resolver el problema. Calculemos el coeficiente de inducción mutua. Dada la simetría de los coeficientes dará lo mismo conocer el del hilo respecto el rectángulo que a la inversa. Vamos pues a suponer que por el hilo circula una corriente "I", como se muestra en la figura, y calcularemos el flujo que atraviesa el rectángulo.

Si la corriente es, por ejemplo, como la que se muestra en la figura, la inducción magnética será entrante en el papel en la zona en la que está el rectángulo. Para calcular el flujo que atraviesa el rectángulo, tomaremos un elemento de superficie en él, que esté a distancia "x" del hilo y tenga un espesor "dx". La inducción en todos los puntos del elemento de área será la misma y de módulo: $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}$ *, luego el flujo:*

$$\phi = \int_{rectangulo} \vec{B}\cdot d\vec{s} \quad = \int_{d}^{d+a} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{x}\left(b\cdot dx\right) \; = \frac{\mu_0\, I\, b}{2\pi}\, ln\left(1+\frac{a}{d}\right) .$$

El coeficiente de inducción mutua, como es la relación entre el flujo y la intensidad, valdrá: $M = \frac{\mu_0\, b}{2\pi}\, ln\left(1+\frac{a}{d}\right)$.

Como la f.e.m. inducida es: $\varepsilon \quad - M\frac{dI}{dt}$ *, nos queda:*

$$\varepsilon = -\frac{\mu_0\, b}{2\pi}\, ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\frac{d}{dt}\left(sen\,\omega t\right) \; = \left[-\frac{\mu_0\, b\, \omega}{2\pi}\, ln\left(1+\frac{a}{d}\right)\right] cos\,\omega t \; .$$

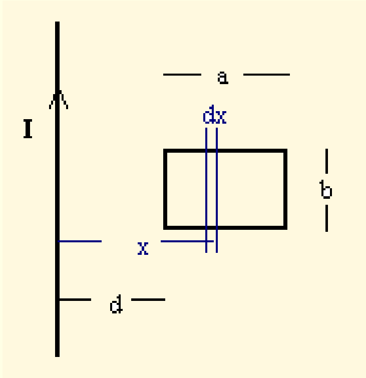


Figure 2 de problemas

La expresión entre corchetes, que es una constante, la podemos denotar por ε_0 *, tendremos que en el hilo se inducirá una f.e.m. dependiente del tiempo también de forma senoidal de la forma:*

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos \omega t$$

Veamos que influencia tiene la unidad que acabamos de introducir respecto de las unidades de la permeabilidad magnética. De la ley de Biot y Savart $\left[\vec{B}_{2,1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{C_1}\frac{\left(I_1\, d\vec{l}_1\right)\times\left(\vec{r}_2-\vec{r}_1\right)}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^3}\right]$ se desprende que las unidades de la permeabilidad son: Tesla x m/ amperio, el tesla es Weber m^{-2}, que multiplicado por el metro y dividido por amperio, nos queda: weber dividido por amperio = henrio, y m^{-2} multiplicado por metro "m"; luego las unidades de la permeabilidad del vacío "μ_0" serán henrio x m^{-1}.