SISTEMAS DE COORDENADAS

Sistemas de coordenadas: cartesianas rectangulares. Cilíndricas. Esféricas

Sistemas de coordenadas

Otra aplicación importante de los productos entre vectores, es la posibilidad de situar un punto en el espacio con absoluta fiabilidad, lo cual como todos sabemos se lleva a cabo empleando un sistema de coordenadas. Para poder hablar de un sistema de coordenadas tenemos que empezar por situar un punto en el espacio que tomaremos como origen de coordenadas, a partir de ese punto, y según el sistema de coordenadas que utilicemos, daremos tres números en un cierto orden y con un significado específico, que llamamos coordenadas del punto en el sistema de coordenadas en cuestión. En aras a la sencillez vamos, a introducir en primer lugar las coordenadas cartesianas rectangulares

Coordenadas cartesianas rectangulares

Consideremos un punto "P" en el espacio, como se muestra en la figura 1, para definir su posición respecto del origen "O" podemos formar el paralelepípedo que definen los tres ejes coordenados con los puntos "O" y "P". De forma que la longitud de las aristas "P_x , P_y y P_z" definen, al considerarlas en su eje correspondiente, el punto "P" respecto del origen "O".

Lo que acabamos de decir, equivale a proyectar el punto "P" sobre el eje "Z", obteniendo así el punto "C" que nos define el segmento P_z , proyectar luego el punto "P" sobre el eje "X" y finalmente sobre el eje "Y", los que nos definirá los segmentos P_x y P_y (normalmente estas proyecciones se suelen realizar proyectando sobre el plano "XY" el punto "P" lo que define el punto "D", para después ser éste el que proyectamos sobre los dos ejes, definiendose los puntos "A" y "B" que nos determinan los segmentos P_x y P_y).

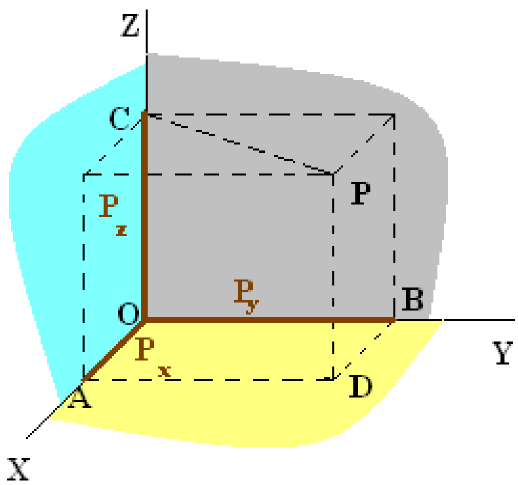

Figura 1
Representación en el espacio de un punto "P". Este punto queda definido por los segmentos P_x , P_y y P_z

Recordemos que el producto escalar de dos vectores es el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Si definimos el vector posición ($\vec{r}$) del punto "P" y unos vectores unitarios según los ejes al calcular los productos escalares de $\vec{r}$ por esos vectores unitarios, tendremos las proyecciones del vector posición sobre los tres ejes.

Así, como se muestra en la figura 2, si para el eje “Y” definimos un vector unitario $\vec{u}_y$ el producto $\left(\vec{r}\cdot\vec{u}_y\right)$, valdrá: el módulo de uno de los vectores $\left(\left|\vec{u}_y\right|=1\right)$ multiplicado por la proyección del otro (el vector $\vec{r}$) sobre él, que es el segmento $\overline{OB}$. Repitiendo la misma operación con los tres ejes coordenados, obtendremos los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OC}$ al considerar los vectores unitarios $\vec{u}_x$ y $\vec{u}_z$ según los ejes “X” y “Z” respectivamente, como se muestra en la figura 3.

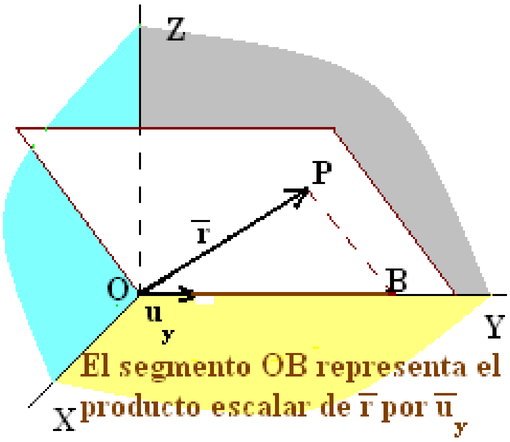

Figura 2

El segmento $\overline{OB}$ es la proyección del vector $\vec{r}$ sobre el eje “Y”

Los tres vectores que hemos definido, cumplen:

- Todos ellos son de módulo unidad.
- El producto vectorial de dos de ellos, en el orden adecuado, nos da como resultado el tercero de ellos (siguen una permutación circular)

$$\vec{u}_x \times \vec{u}_y = \vec{u}_z \,;\; \vec{u}_y \times \vec{u}_z = \vec{u}_x \,;\; \vec{u}_z \times \vec{u}_x = \vec{u}_y$$

Es decir, forman lo que se conoce como un *sistema ortonormal*.

Por tanto, un punto lo podemos definir en el espacio o por sus coordenadas o por las componentes del vector posición del punto respecto del origen, lo que nos da la posibilidad de expresar en coordenadas rectangulares un vector cualquiera.

En efecto, consideremos un vector cualquiera, como se muestra en la figura 4, del que conocemos sus proyecciones sobre los tres ejes, que hemos representado por r_x , r_y y r_z respectivamente, su producto por los vectores unitarios según los tres ejes dan lugar a tres vectores paralelos a los ejes cuya suma vectorial nos reproduce el vector original $\vec{r}$.

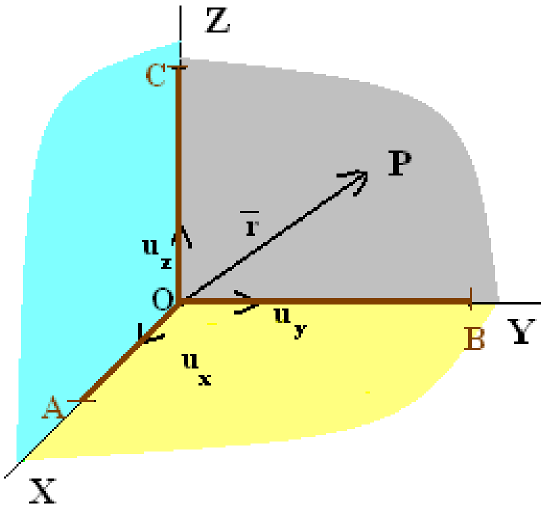

Figura 3

Los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ son los productos escalares del vector $\vec{r}$ por los vectores unitarios $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$ y $\vec{u}_z$ respectivamente

Por tanto, podemos escribir que $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y + \vec{r}_z$ o lo que es lo mismo, $\vec{r} = r_x\vec{u}_x + r_y\vec{u}_y + r_z\vec{u}_z$, siendo r_x , r_y y r_z las componentes cartesianas del vector $\vec{r}$.

Por tanto, la situación de un punto (P) en el espacio en coordenadas rectangulares queda definido por su vector posición $\vec{r}$, que es de la forma

$$\vec{r} = r_x\vec{u}_x + r_y\vec{u}_y + r_z\vec{u}_z$$

Una vez situados en el punto “P”, un desplazamiento infinitesimal que nos permita llegar a un punto muy próximo definido por el vector de posición $\vec{r} + d\vec{l}$, supone que la coordenada “X” aumenta en dx, lo que escribiremos como $dx\,\vec{u}_x$, la coordenada “Y” aumentará en dy, lo que escribiremos como $dy\,\vec{u}_y$, y por último la coordenada “Z” aumentará en dz, lo que escribiremos como $dz\,\vec{u}_z$. Por tanto el deslazamiento diferencial será de la forma

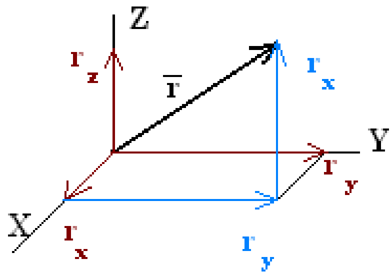

Figura 4
Componentes del un vector

$$d\vec{l} = dx\,\vec{u}_x + dy\,\vec{u}_y + dz\,\vec{u}_z$$

Los tres desplazamientos definen un volumen elemental de aristas “dx”, “dy” y “dz”, cuyo volumen será el volumen elemental expresado en estas coordenadas. Como según sabemos el volumen de cualquier paralelepípedo es el resultado del producto mixto de los vectores que son sus aristas y también conocemos que los tres vectores son perpendiculares entre sí, el producto mixto $\left[dx\,\vec{u}_x \times dy\,\vec{u}_y\right] \cdot dz\,\vec{u}_z$, que representa el volumen es el producto de los tres módulos, es decir:

$$d\tau = dx\,dy\,dz$$

que es la *expresión del volumen elemental en coordenadas rectangulares.*

Como no siempre la geometría del problema se resuelve con comodidad con las coordenadas rectangulares, se emplean otro tipo de coordenadas, las más empleadas son las cilíndricas y las esféricas.

<u>Coordenadas cilíndricas</u>

El estudio de campos en los que la simetría juega un papel importante, lo cual es cierto en el momento en el que tengamos que realizar un cálculo, puede ser conveniente expresar las magnitudes que entran en juego de una forma distinta a el sistema que hemos empleado hasta ahora (coordenadas rectangulares).

Así, si tenemos un problema en el que la simetría viene dada por una dirección de privilegio y las propiedades de nuestra magnitud se repiten a lo largo de ella, nos resultaría más fácil trabajar con la magnitud si la pudiéramos describir por planos perpendiculares a un eje de esa dirección. Es decir, un punto cualquiera del espacio lo definimos por la distancia al eje (*coordenada radial* ρ) y por la distancia del punto de corte de la perpendicular al eje que pasa por el punto hasta el origen de coordenadas (*coordenada en altura* “z”), que desde luego estará en el eje. Ya tenemos el punto en un plano a una cierta altura y a una distancia del eje, es decir dentro de una circunferencia en ese plano y para dejarlo definido sólo nos

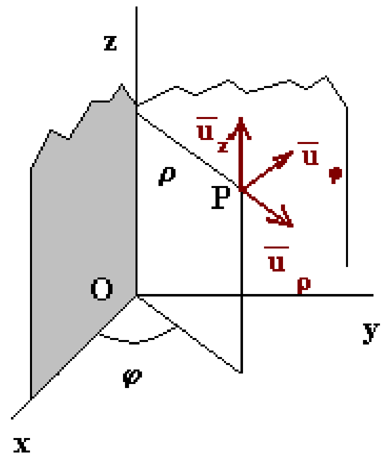

Figura 5
Sistema de coordenadas cilíndricas

hace falta un ángulo (*coordenada azimutal* "φ") y para definirlo un origen de ángulos. Ese es el sistema de coordenadas cilíndricas cuyos vectores unitarios según las coordenadas $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\varphi$ y $\vec{u}_z$ tomados en este orden, son un sistema de referencia ortonormal, es decir cumplen:

$$\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_z\,;\ \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_z = \vec{u}_\rho \ \text{ y } \ \vec{u}_z \times \vec{u}_\rho = \vec{u}_\varphi$$

A partir de un plano en el que definimos un origen y un eje que pasa por él, un punto "P" estará definido si conocemos la distancia al eje (su coordenada radial ρ), la altura sobre el eje desde el origen (su coordenada en altura "z") y el ángulo que tenemos que recorrer para llegar hasta él (su coordenada azimutal φ). El punto P vendrá definido por el vector

$$\vec{r} = \rho\ \vec{u}_\rho + z\,\vec{u}_z$$

Observemos que el ángulo φ no aparece explícitamente en el segundo miembro; está dado por la orientación del vector unitario $\vec{u}_\rho$.

Dada su importancia, vamos a calcular los elementos de longitud correspondientes a los cambios infinitesimales en las coordenadas de un punto. Si las coordenadas "φ" y "z" del punto P permanecen constantes, mientras ρ aumenta en $d\rho$, entonces P se desplaza $d\vec{r} = d\rho\ \vec{u}_\rho$. Por otra parte, si ρ y z se mantienen constantes y ahora φ varía en $d\varphi$, entonces el desplazamiento de P es $d\vec{r} = \rho\, d\varphi\, \vec{u}_\varphi$. Finalmente, para ρ y φ constantes, la variación dz implica $d\vec{r} = dz\ \vec{u}_z$. Para incrementos arbitrarios $d\rho$, $d\varphi$, dz, la variación del vector de posición es

$$d\vec{r} = d\rho\ \vec{u}_\rho + \rho\ d\varphi\ \vec{u}_\varphi + dz\ \vec{u}_z$$

y su módulo será

$$dr = \left[(d\rho)^2 + (\rho\ d\varphi)^2 + (dz)^2\right]^{1/2}$$

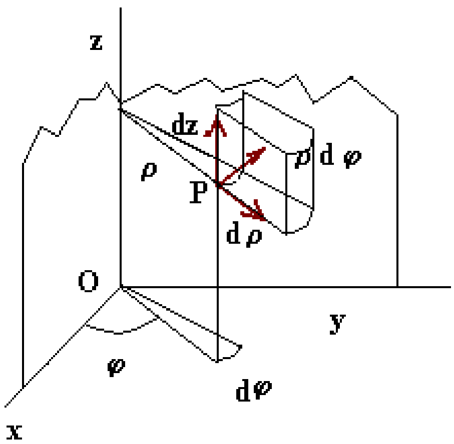

Figura 6
Elemento de volumen en coordenadas cilíndricas

La figura 6 muestra el elemento de volumen cuyos lados son los elementos de longitud correspondientes a los incrementos infinitesimales en las coordenadas del punto P de la figura 5. El volumen infinitesimal, que de nuevo podemos calcular por el producto triple de los tres desplazamientos infinitesimales que son sus aristas nos da:

$$d\tau = \rho\ d\rho\ d\varphi\ dz$$

que es la expresión del *elemento de volumen en coordenadas cilíndricas*

Coordenadas esféricas

En algunas ocasiones las propiedades del sistema que queremos estudiar, dependen de la distancia a un punto y de la orientación respecto del mismo, en estos casos puede ser útil el empleo de las coordenadas esféricas.

En coordenadas esféricas la posición de un punto P se especifica por la distancia al origen "r" (coordenada radial), el ángulo " θ " entre el eje "Z" y el radio vector y por último por el ángulo azimutal " φ " En el punto P los vectores unitarios son los indicados en la figura 7 $\vec{u}_r$, lleva la dirección del radio vector y sentido hacia P, $\vec{u}_\theta$, es perpendicular al radio vector en el plano que contiene el eje z y el radio vector, y $\vec{u}_\varphi$ es perpendicular a ese plano (igual que en coordenadas cilíndricas el vector posición $\vec{r}$ y el unitario en su dirección $\vec{u}_r$, los denotaremos indistintamente así o por $\vec{\rho}$ y $\vec{u}_\rho$).

Estos tres vectores forman un sistema ortonormal de modo que cumplen:

$$\vec{u}_\rho \times \vec{u}_\theta = \vec{u}_\varphi \,;\ \vec{u}_\theta \times \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\rho \ \text{y} \ \vec{u}_\varphi \times \vec{u}_\rho = \vec{u}_\theta$$

Un punto "P" cualquiera en el espacio viene perfectamente definido por su vector posición $\vec{r} = r\,\vec{u}_r$ donde las coordenadas θ y φ están determinadas por la orientación del vector unitario $\vec{u}_r$. Por tanto, nuevamente, al considerar otro punto cualquiera los vectores unitarios no tienen la misma dirección.

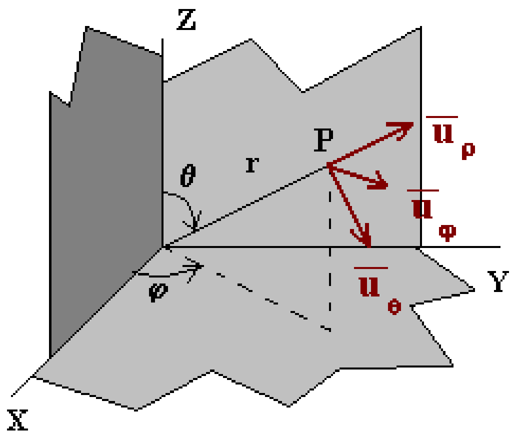

Figura 7
Sistema de coordenadas esféricas

Vamos a calcular los elementos de longitud correspondientes a los cambios infinitesimales en las coordenadas de un punto. Si las coordenadas θ y φ del punto "P" permanecen constantes, mientras ρ aumenta en $d\rho$, entonces P se desplaza $d\vec{r} = d\rho\,\vec{u}_\rho$. Por otra parte si ρ y φ constantes la variación $d\theta$ implica un desplazamiento $\rho\ d\theta\ \vec{u}_\theta$. Por último, para ρ y θ constantes y ahora φ varía en $d\varphi$, entonces el desplazamiento de P es $\rho\ \text{sen}\theta\ d\varphi\ \vec{u}_\varphi$. El elemento de longitud $d\vec{l}$, que corresponde a incrementos arbitrarios de las coordenadas, es

$$d\vec{l} = d\rho\ \vec{u}_\rho + \rho\ d\theta\ \vec{u}_\theta + \rho\ \text{sen}\theta\ d\varphi\ \vec{u}_\varphi$$

y su módulo

$$dl = \left[(d\rho)^2 + \rho^2 (d\theta)^2 + \rho^2\ \text{sen}^2\theta\ (d\varphi)^2\right]^{1/2}$$

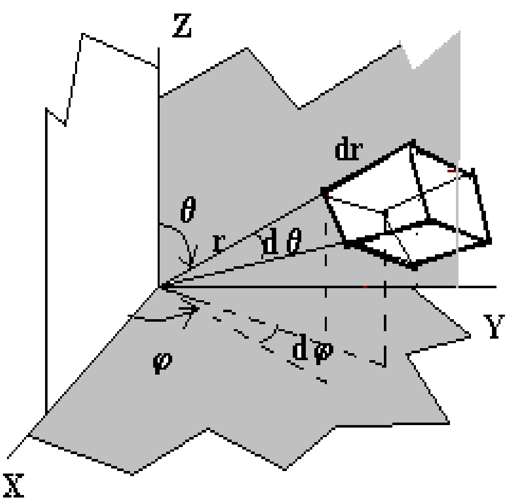

Figura 8
Elemento de volumen en coordenadas esféricas

El volumen elemental definido por los tres desplazamientos infinitesimales, que se representa en la figura 8, lo podemos calcular por el producto mixto de los tres vectores que definen los desplazamientos y vale:

$$d\tau = \rho^2 \, \mathrm{sen}\theta \; d\rho \; d\theta \; d\varphi$$

que es la expresión del *elemento de volumen en coordenadas esféricas*

Ya podemos por tanto definir un punto en el espacio, describir los desplazamientos elementales del mismo y calcular el volumen de un cuerpo cualquiera en los tres sistemas de coordenadas más comúnmente usados.