# Módulo I.2.2 Concepto de función de una o varias variables.

Se acepta que una persona aprende más cuanto más estudia. ¿Podemos decir que el aprendizaje es función del estudio?. Una determinada primavera está de moda el color amarillo, por lo que se vende más ropa de ese color.¿Podemos decir que la venta de la ropa de color amarillo está en función de la época del año? ¿Podemos decir que las ventas están en función del color?.

A menudo empleamos la palabra función para denotar que una cosa está relacionada con otra u otras. Sin embargo la expresión función así utilizada no nos permite conocer como variará una de las “cosas” (el aprendizaje o las ventas) al modificar la otra “cosa” (el estudio o el color).

## Definición de función

En Física son importantes las “cosas” que son medibles y pueden tener distintos valores (magnitudes) y en matemáticas reciben el nombre de ***variables***.

En general en Física las magnitudes van a resultar ser funciones de una o varias variables, como por ejemplo el volumen ocupado por un gas depende de la temperatura y de la presión del gas. La resistencia de un conductor va a depender del tipo de sustancia, la longitud del hilo y de su sección.

Por función entendemos la expresión matemática que nos permite relacionar el valor de una variable (***variable dependiente***) con el valor de aquellas magnitudes que influyen en el valor de esta (***variables independientes***).

## ¿Por qué es importante este concepto?

Examinemos el caso de una persona que pasea por una calle larga, está claro que se aleja más del lugar de partida cuanto más tiempo camine, como las dos magnitudes (espacio y tiempo) son medibles, podemos buscar una función que nos las relacione [$e = f(t)$].

La función matemática que relaciona espacio y tiempo, es diferente según las condiciones del paseo. Si empieza a ir más deprisa hasta llegar a correr, la expresión matemática del espacio recorrido es distinta que en el caso de ser la velocidad siempre la misma, pues el espacio recorrido (variable dependiente) dependerá ahora no sólo del tiempo sino también de la forma en que varíe la velocidad (aceleración), con lo que aparecen dos variables independientes [$e = F(t,a)$].

## Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Consideremos la ecuación de la recta en el plano $y = 2x + 4$. ¿Qué implica que la variable “x” valga “2”?. Operemos y tendremos $y = 8$ ¿qué información nos proporcionan estos dos números? que estamos en el punto (2, 8) del plano (fig 1). El conjunto de parejas de números nos determinan todos los puntos de la recta, como se muestra en la figura.

Supongamos que la ecuación anterior representa la velocidad del movimiento de un cuerpo que lleve mucho tiempo moviéndose con aceleración constante. La variable "y" representa la velocidad del cuerpo expresada en m/s y la variable "x" el tiempo que lleva el cuerpo moviéndose. Si observamos la figura, lo primero que nos salta a la vista es que en el eje de abscisas aparecen representados tiempos negativos *¿qué quiere decir esto? ¿es una inconsistencia y debemos "despreciar" los tiempos negativos?*. Si leemos con detenimiento la descripción de la situación que queremos representar, vemos que estamos hablando de un cuerpo que lleva <u>mucho tiempo</u> moviendose, luego es posible que se esté moviendo antes de que nosotros empecemos a contar tiempos.

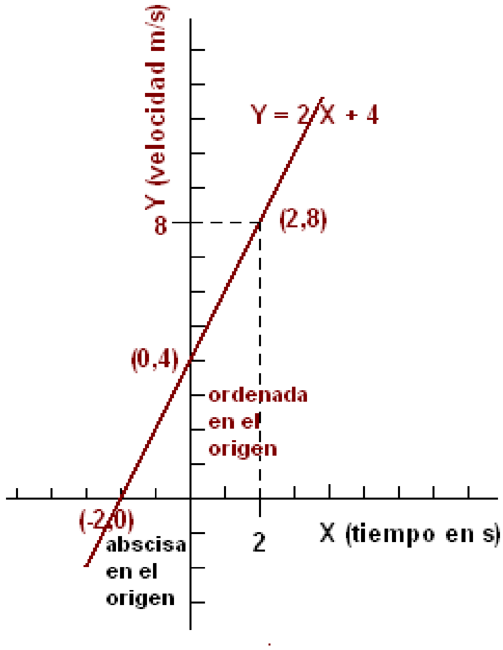


**Figura 1**

***Cuestión 1***
*¿Puede la figura 1 representar el crecimiento de un esqueje una vez plantado?*

Si en la figura, nos fijamos ahora en el eje de ordenadas nos encontramos con la posibilidad de velocidades negativas y positivas. La explicación es sencilla, hasta el instante en el que empezamos a contar tiempos (t = 0, punto de corte con el eje de ordenadas) el sentido de la velocidad era el contrario que el que tiene a partir de ese momento.

***Cuestión 2***
*¿Puede la figura 1 representar el crecimiento de una persona en sus primeros meses de vida, suponiendo que creciera de forma lineal?. Si la respuesta es afirmativa razonarla, si es negativa explicar qué representará cada eje y en qué se medirían, y que parte de la figura será aprovechable.*

Esta función nos ha permitido establecer una aplicación entre el conjunto de valores de la velocidad del cuerpo y el conjunto de valores del tiempo de forma que cada punto de la gráfica nos proporciona información sobre la velocidad que lleva el cuerpo en un instante determinado, sea este anterior o posterior al momento en el que hemos empezado a cronometrar.

La gráfica nos proporciona más información:

- En primer lugar, el término independiente, en este caso "4" nos da el valor de la función (velocidad o variable dependiente) cuando la variable independiente (tiempo) es "0", en la representación gráfica se denomina ordenada en el origen.

- Por otra parte la abscisa en el origen (valor de la variable independiente para y = 0) nos indica el instante en el que la variable dependiente (la velocidad del cuerpo) ha cambiado de signo (el sentido de la velocidad es distinto al que tenía).

***Cuestión 3***
*La ecuación* $l = 50 + 0{,}1\left|\vec{F}\right|$ *representa la longitud de un muelle en función de la fuerza aplicada para alargarle. ¿Qué significado tiene "50"? Si en vez de 0,1 el coeficiente del*

*módulo de la fuerza fuese 3 ¿en qué se diferenciarían los muelles?¿existiría alguna diferencia entre muelles si en la ecuación el termino independiente es 100 en vez de 50?*

En la figura 2 se representan las velocidades de dos cuerpos que se mueven desde hace mucho tiempo y en los dos casos empezamos a contar el tiempo cuando ambos cuerpos llevan la misma velocidad 4 m/s, *pasados "2" segundos ¿siguen teniendo los dos cuerpos la misma velocidad?*

Los coeficientes de la variable independiente son respectivamente "2" y "1", se observa que a mayor coeficiente mayor inclinación de la recta, por tanto este coeficiente nos da información sobre la rapidez de variación de la variable dependiente respecto de la independiente y se denomina pendiente de la recta. En este caso nos da información sobre la rapidez con la que varía la velocidad del cuerpo con el tiempo (aceleración).

***Cuestión 4***
*Determinar la ecuación de la función que relaciona las variables T(dependiente) y M (independiente) sabiendo, que es lineal, y que cuando la variable independiente toma los valores 5 y 10, la variable dependiente toma los valores 52 y 92 respectivamente.*

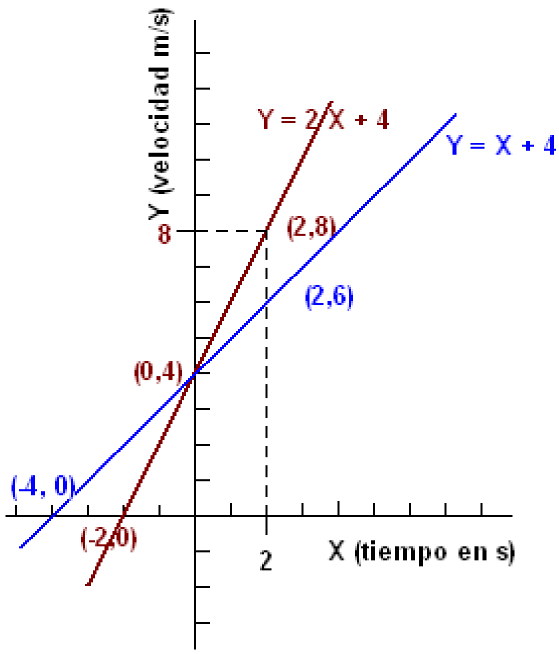

**Figura 2**

Acabamos de ver un ejemplo de ***función lineal***, que es aquella en la que el exponente de la variable independiente es la unidad, veamos ahora el caso de otros tipos de funciones.

## Función cuadrática

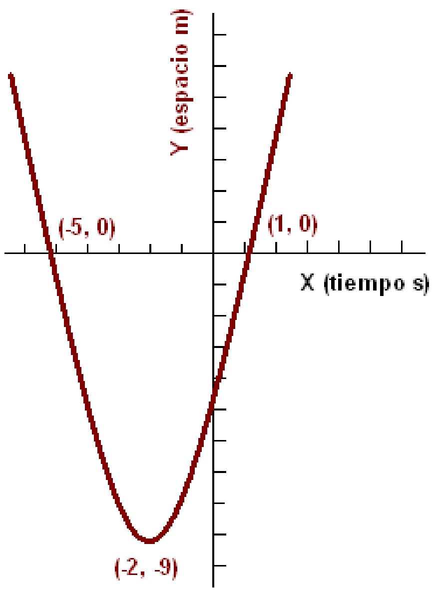

**Figura 3**

Si el exponente de la variable independiente es "2", como en: "y = $x^2$ + 4x - 5", la función se denomina cuadrática o de segundo orden.

Veamos que puntos importantes nos encontramos en la representación gráfica.

En primer lugar la variable dependiente ahora es nula en dos ocasiones para "x = -5" y para "x = 1".

La función presenta un mínimo, que obtendremos calculando su primera derivada (y' = 2x+4) e igualándola a cero, con lo que obtenemos "x = -2" (para saber que es mínimo sustituimos "-2" en la segunda derivada, en este caso y'' = 2, y si el resultado es positivo, +2>0, la función tiene un mínimo en el punto) sustituyendo en la función nos da el punto (-2, -9) en el que se encuentra el mínimo.

Supongamos que esa función nos da el espacio recorrido por el cuerpo del ejemplo anterior que se movía con aceleración constante.

## Otras funciones de interés

**Función proporcional inversa**
Muchos fenómenos físicos son representable por funciones del tipo $y = \frac{k}{x}$, figura 4. Un ejemplo típico es la variación entre presión y volumen ocupado por un gas, es decir las magnitudes varían de forma inversamente proporcional, la representación gráfica en este tipo de ecuaciones es una hipérbola equilátera que es asíntota a los dos ejes.

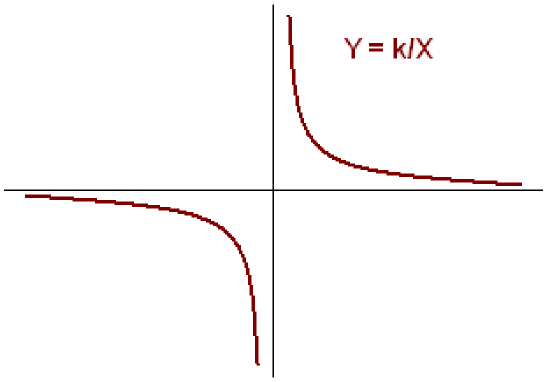


**Figura 4**

**Función exponencial**

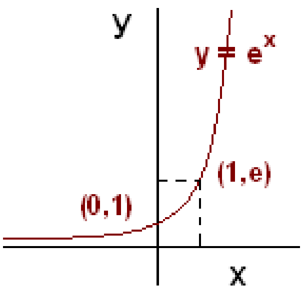


**Figura 5**

Otra función que se presenta con frecuencia es la función exponencial. De ellas la más común es aquella en la que la base es el número "e", $y = e^{a\,x}$.

Como puntos notables de esta familia de funciones tenemos:

- El corte con el eje de ordenadas (0,1). Que es común con todas las exponenciales, sea cual sea su base.
- Y el punto en el que la abscisa es la unidad, pues según sea el valor de la ordenada en ese punto (que viene fijado por el valor de "a") nos dará información sobre lo "rápido" o "lento" que crece el fenómeno que estamos estudiando.

## Función de varias variables

Cuando el valor de una magnitud depende de más de una variable independiente decimos que es una función de varias variables, por ejemplo el volumen que ocupa un gas depende de su presión y de su temperatura. Para conocer esta función (en este caso el volumen) debemos analizar como influyen en ella las variaciones de cada variable independiente por separado, considerando constantes las demás.

Es decir la variación total del volumen de un gas será: la variación que experimente el volumen del gas al variar la presión multiplicada por la variación de la presión manteniendo constante la temperatura más la variación que experimente el volumen del gas al variar la temperatura multiplicada por la variación de dicha temperatura manteniendo constante la presión