Módulo I. 2. 4 Concepto de integral

Frecuentemente necesitamos medir superficies. Por ejemplo para saber el coste de un revestimiento, como los precios vienen dados por metro cuadrado, debemos calcular la superficie a revestir para saber la cantidad de material necesario. La superficie es una magnitud que no se mide directamente, realizamos una medida indirecta, midiendo otras magnitudes más simples (longitudes) y calculando el valor de la superficie mediante operaciones matemáticas como productos o sumas. Como ejemplos de áreas sencillas tenemos: el área del cuadrado (lado al cuadrado), la del rectángulo (producto de dos lados desiguales), la del triángulo (un medio de la base por la altura), o la del círculo (π por el radio al cuadrado).

Por que es importante este concepto

Cuando la figura cuyo área queremos conocer no es una figura sencilla recurrimos a descomponerla otras figuras de área fácilmente calculable. en partes cada una de las cuales sea una figura conocida.

Cuestión 1
Calcular la superficie de la figura 1: lo primero que tenemos que hacer es descomponer la figura en otras cuya superficie sea fácil de calcular. En la figura 2 la tenemos descompuesta en un semicírculo, cuatro rectángulos y cuatro triángulos rectángulos, cuyas áreas son fácilmente calculables midiendo longitudes.

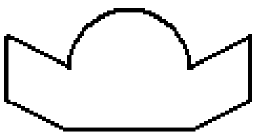


Figura 1

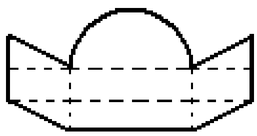


Figura 2

Cuestión 2.
Calcular la superficie del piso de una iglesia de planta de cruz latina sabiendo que la nave longitudinal es un rectángulo de 80 m de longitud por 20 de anchura rematada por un ábside semicircular, y la nave transversal es otro rectángulo de 60 metros de longitud por 20 de anchura cuyos dos brazos están rematados por capillas semicirculares.

Un problema más complejo se nos plantea cuando la figura de la que queremos calcular el área no se puede descomponer de una manera tan fácil en figuras de área conocida. En este caso tendremos que recurrir a otro tipo de operaciones que dan lugar al establecimiento de una nueva operación matemática denominada ***integral de una función***, que nos va a permitir, entre otras cosas, calcular áreas de figuras con contornos "extraños" si conocemos la ecuación representada por la línea que determina el contorno.

Relación con conocimientos previos.

Supongamos representada la función $y = f(x)$ que aparece en la figura 3, y queremos conocer el área encerrada entre la curva y el eje "x". Dado que la curva no es una semicircunferencia es bastante complicado. Veamos como podemos ir aproximandonos sucesivamente a ese área. Si dibujamos varios rectángulos con base en el eje "X" cuya altura venga marcada por el corte con la curva y sumamos todas sus áreas, obtenemos una aproximación al área encerrada por la curva y el eje.

Para mejorar la aproximación haremos más estrechos los rectángulos definidos de la misma manera y así sucesivamente. A medida que hacemos los rectángulos más estrechos, la diferencia entre el área encerrada por la curva y la suma de las áreas de todos los rectángulos se hace menor, de manera que cuando esta base es una diferencial (d x) podemos decir que

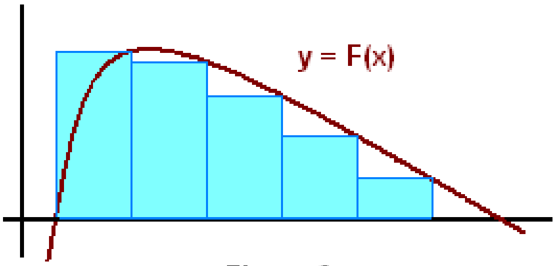


Figura 3

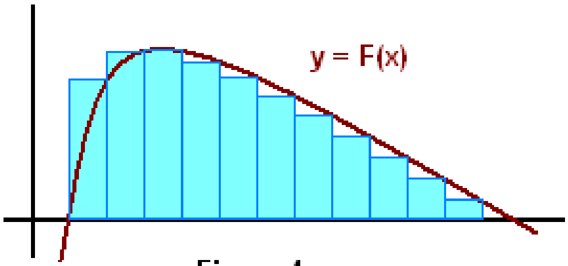


Figura 4

cada rectángulo tiene una diferencial de superficie (d S) igual al producto de su base d x por el valor que toma la coordenada “Y” en ese punto. $dS = y \cdot dx = f(x)\,dx$

Definición de integral de una función.

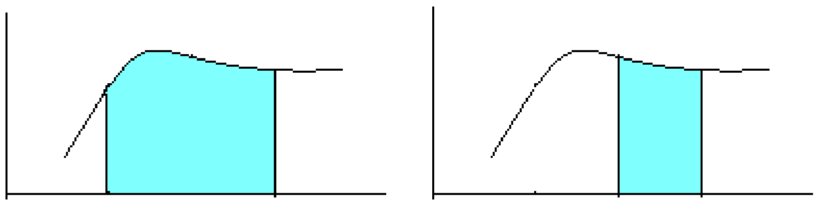
Para una función y = f(x), el área total encerrada por la curva que representa la función y el eje de las “X”, en un cierto intervalo será la suma de todas las diferenciales de superficie $dS = y \cdot dx = f(x)\,dx$.

Esta suma de infinitos términos, siguiendo al terminología de Riemann, la llamamos integral definida de una función entre dos puntos (los valores de x que delimitan el área considerada)

$$S = \int_a^b f(x).dx$$

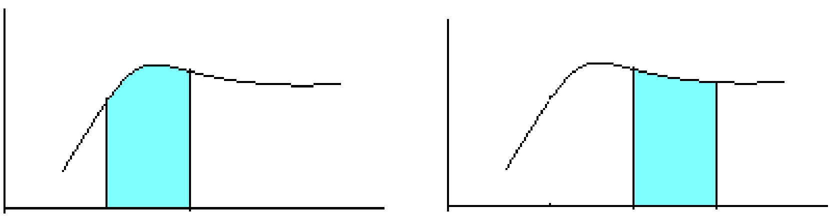
Dada una función ¿que ocurrirá con su integral al modificar los limites de integración?

Parece inmediato pensar que cambiará el valor de la integral, ya que cambia el área encerrada entre la curva, el eje “x” y las ordenadas correspondientes a los límites de la integral.

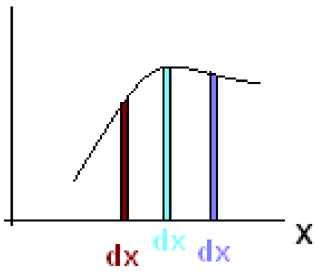


¿Que ocurrirá si manteniendo el tamaño del intervalo de integración, modificamos su posición?

Como puede observarse en la figura, también en ese caso cambia el área encerrada, luego cambia la integral, ya que estamos considerando una porción de función diferente.



Si tomamos ahora intervalos iguales muy pequeños (dx) y vamos modificando su posición a lo largo del eje "X", para cada posición de "dx", tendremos un valor de la integral distinto, es decir dependiente de la posición "X"



Podemos así definir una nueva función de "X" igual al valor de la integral en cada punto $F(x) = \int f(x)\,dx$, que llamaremos ***integral indefinida*** de la función f(x)

Relación entre derivada e integral de una función

Partamos de la definición de derivada de la función F(x), que sabemos que es $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x}$. Si F(x) es la integral de la función y = f(x) el incremento de F(x) será el área de un rectángulo de base Δx y altura f(x), por tanto $\Delta F = f \cdot \Delta x$, luego en la definición de derivada nos encontramos que: $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = f(x)$, luego para cualquier valor de "x" la derivada de la integral de una función nos da la función. A la función F(x) la llamamos función primitiva de la f(x)

Según acabamos de decir al derivar la función primitiva F(x) (integral indefinida) de una función f(x) obtenemos la misma función.

¿Qué ocurre si a una función primitiva le sumamos una constante?
Como la derivada de una constante es cero obtenemos la misma función f(x). En consecuencia, la función primitiva de f(x) es su integral indefinida F(x) más cualquier constante.

¿Qué significado tiene esta constante?
La constante aparece como un término independiente, luego afecta a que la curva se desplace, paralelamente a sí misma, hacia arriba o hacia abajo. Por tanto tenderemos una familia de curvas "paralelas" cuya derivada es la misma, luego todas son primitivas de la función f(x).

Para resolver un problema concreto, si su solución nos viene dada por la integral de una función, no basta con identificar toda la familia de funciones primitivas, será necesario identificar la solución adecuada mediante la determinación del valor la constante adecuada. Este valor vendrá determinado por las condiciones iniciales del problema.

Cuestión 3
La aceleración de un cuerpo viene dada por la ecuación a = 2t+3. Calcular su velocidad a los 5 segundos después de comenzar a contar el tiempo sabiendo que cuando empezamos a contar el tiempo su velocidad era de 2 m/s

Como sabemos que la aceleración es la derivada de la velocidad, se cumplirá que $v(t) = \int a(t) \cdot dt = \int (2t + 3)\,dt = t^2 + 3t + C$. *Para determinar el valor de "C" tenemos en cuenta que para t = 0; v(0) = 2. Sustituyendo en la ecuación tenemos:* $2 = 0^2 + 3 \cdot 0 + C$ *, luego C = 2, la velocidad vendrá dada por* $v = t^2 + 3t + 2$ *.*

La velocidad a los 5 s será: $v(5) = 5^2 + 3 \cdot 5 + 2 = 42\ m / s$

Cuestión 4.
Dada la tabla de derivadas, escribir la correspondiente tabla de integrales de las funciones comunes.

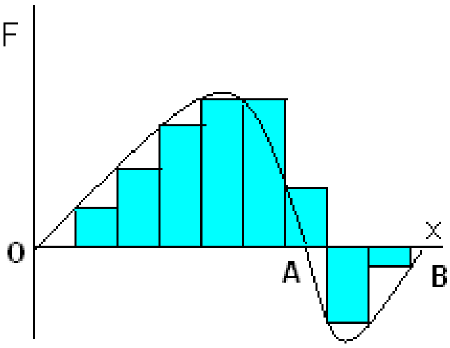
Función	Derivada	Integral
y = K	y' = 0	
y = a x	y' = a	
y = x^2	y' = 2x	
y = a x^n	y' = a n x^{n-1}	
y = a/x^n = a x^{-n}	y' = a (- n) x^{-n-1}	
y = a e^x	y' = a e^x	
y = a e^{nx}	y' = a n e^{nx}	
y = L x = ln x	y' = 1/x	
y = sen x	y' = cos x	
y = cos x	y' = - sen x	
y = tag x	y' = - cotag x = 1/ $\cos^2$ x	

Aplicación al cálculo del trabajo realizado por una fuerza constante.

Sabemos que cuando se aplica una fuerza a un cuerpo y este se desplaza, se define "trabajo realizado por la fuerza", como el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento producido $W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$

¿Que ocurrirá cuando la fuerza no es constante?.

Si la fuerza no es constante será función de la posición, que podemos considerar como variable independiente. Para cada desplazamiento diferencial podemos considerar la fuerza aplicada constante y calcular una diferencial de trabajo $dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$, el trabajo total vendrá dado por al "suma" de todos los productos diferenciales, es decir la integral $W = \int \vec{F}(x) \cdot d\vec{x}$



Veamos un caso "especial".

Supongamos que la fuerza que estamos considerando tiene siempre la misma dirección que el desplazamiento a que da lugar y cuyo módulo no es constante, de forma que incluso pueda cambiar de sentido. Como ocurre cuando un móvil es primero acelerado y después se le frena. En este caso el producto escalar es el producto de los módulos.

Si observamos el primer bucle de la curva de la figura, en el que la fuerza tiene un valor positivo (el móvil acelera) realizamos un trabajo que será $W = \int_{O}^{A} F \cdot dx$

Cuando la fuerza cambia de sentido, el móvil empieza a frenar, el trabajo que realizamos es negativo. En efecto si multiplicamos la fuerza (negativa) por el desplazamiento (positivo), el trabajo resulta negativo, y como se ve en la figura, el área encerrada por la curva y el eje de las x se encuentra por debajo de este eje.

En general, si consideramos todo el desplazamiento tendremos que sumar todas las áreas positivas (por encima del eje), sumar todas las áreas negativas (por debajo del eje) y sumarlas con su propio signo.

La integral definida de una función representa el área limitada por la gráfica de la función, con signo positivo cuando la función toma valores positivos y negativo cuando toma valores negativos (figura 7).

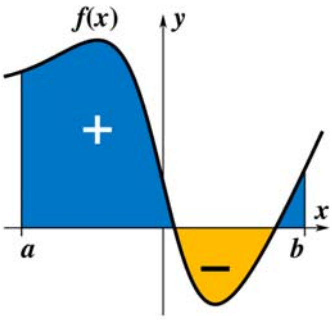


Figura 7