Tema 4 Magnetismo en el vacío (I)

Física (780000)

Grados en Ingeniería de Computadores (VT) e Ingeniería Informática (XM) Curso 2017/2018 – Primer Cuatrimestre



Magnetismo. Polos magnéticos

- Las primeras nociones históricas sobre la existencia del magnetismo derivaron de las observaciones de los fenómenos de atracción y repulsión del hierro por ciertos minerales (imanes permanentes, ya conocidos por los antiguos griegos en el siglo VII a.C.)
- Igualmente se comprobó que una aguja magnetizada tiende a orientarse en dirección Norte-Sur, debido a la existencia de un campo magnético terrestre (fundamento de la brújula)

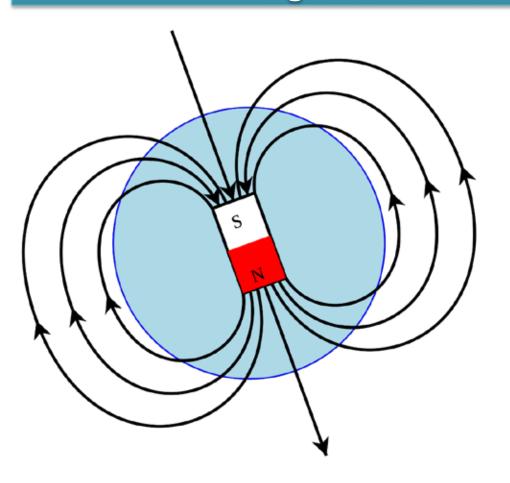




Magnetismo. Polos magnéticos

- Las primeras nociones históricas sobre la existencia del magnetismo derivaron de las observaciones de los fenómenos de atracción y repulsión del hierro por ciertos minerales (imanes permanentes, ya conocidos por los antiguos griegos en el siglo VII a.C.)
- Igualmente se comprobó que una aguja magnetizada tiende a orientarse en dirección Norte-Sur, debido a la existencia de un campo magnético terrestre (fundamento de la brújula)
- Existen dos tipos de polos magnéticos. Polos iguales se repelen y polos diferentes se atraen, pero a diferencia de lo que ocurre con las cargas, no es posible aislarlos (un imán partido por la mitad sigue constando de dos polos)
- Desde el siglo XIX, se comprobó que el magnetismo guarda estrecha relación con las cargas en movimiento, comprobándose la existencia de fuerzas magnéticas entre corrientes

Magnetismo. Polos magnéticos

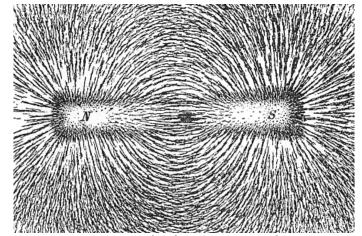


¡Actualmente el polo norte geográfico de la Tierra es un polo sur magnético! (el polo norte de una aguja imantada apunta al norte geográfico, que tiene polaridad magnética opuesta)

El campo se definirá más adelante, pero es interesante presentar el concepto de polos magnéticos:

Polo norte magnético: líneas de campo salientes

Polo sur magnético: líneas entrantes



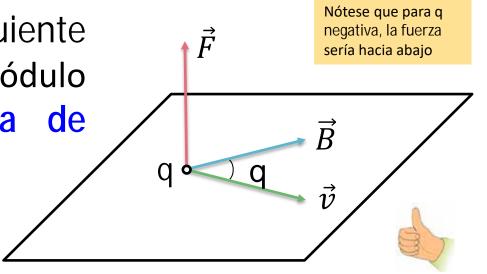
Visualización de las líneas de campo de un imán permanente usando limaduras de hierro

Cargas en movimiento: fuerza de Lorentz

- Los campos magnéticos se suelen caracterizar por el campo vectorial \vec{B} conocido también como vector inducción magnética, que en muchas ocasiones es mencionado simplemente como "campo magnético"
- La evidencia experimental muestra que una carga q moviéndose a una velocidad \vec{v} en el seno de un campo magnético \vec{B} experimenta una fuerza \vec{F} conocida como fuerza de Lorentz que cumple:
 - Es directamente proporcional a q y a $|\vec{v}|$
 - Está dirigida en perpendicular al plano que contiene a \vec{v} y a \vec{B} ,
 - Desaparece cuando \vec{v} y \vec{B} son paralelos
 - Se hace máxima cuando \vec{v} y \vec{B} son perpendiculares
 - Se invierte si cambiamos el signo de la carga

Cargas en movimiento: fuerza de Lorentz

• Las observaciones citadas se pueden resumir en la siguiente ecuación que describe el módulo y dirección de la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$



 Si la velocidad y el campo B forman un ángulo q, el modulo de la fuerza de Lorentz será:

$$|\vec{F}| = q|\vec{v}||\vec{B}|sen \theta$$

Unidades de B

 La unidad de B en el sistema internacional es el Tesla (T).
 Se define 1 T como un campo tal que una carga de 1 C moviéndose con v = 1 m/s experimente una fuerza de 1 N

$$1 T = 1 N \cdot s \cdot C^{-1} m^{-1} = 1 N A^{-1} m^{-1}$$

 Un campo de 1 T es bastante grande, por lo que habitualmente se emplean submúltiplos del tesla para medir campos cotidianos. Otra unidad muy habitual es el Gauss (G), que es la unidad de B en el sistema cgs y se relaciona con el tesla por:

$$1 G = 10^{-4} T$$

Por ejemplo el campo magnético terrestre en España es del orden de 40 mT (se puede medir de forma aproximada con un simple *smartphone*)

Cargas en movimiento: fuerza de Lorentz

Ejercicio: Un electrón pasa sin desviarse a través de dos placas plano-paralelas en las que existe un campo eléctrico de 3000 V/m y un campo magnético cruzado de 1,4 G. Si las placas tienen 4 cm de longitud y se sitúa una pantalla en vertical a 30 cm de ellas, calcular la desviación que sufre el electrón respecto a su eje de entrada en la pantalla al interrumpir el campo magnético. (masa del electrón: 9.11·10⁻³¹ kg)

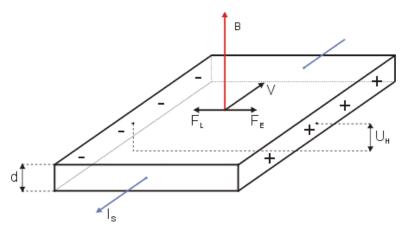
Solución:

Velocidad del electrón a lo largo del eje: 2.14·10⁷ m/s

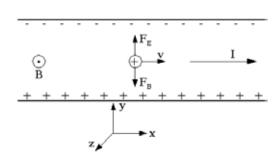
Desviación vertical al alcanzar la pantalla: 15 mm

Ejemplo práctico: Efecto Hall

- Si un conductor transportando corriente es sumergido en un campo magnético, los portadores experimentarán la fuerza de Lorentz
- Dicha fuerza provocará una concentración de carga en una cara del conductor



Múltiples aplicaciones tecnológicas, por ejemplo sensores magnéticos en smartphones



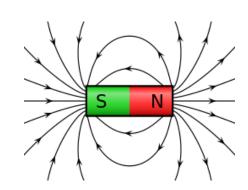
Ejemplo: campo B hacia fuera del papel, intensidad hacia la derecha

- Si los portadores son positivos: v hacia la derecha, F hacia abajo, la carga se concentra abajo
- Portadores negativos: v hacia la izquierda, F hacia abajo, la carga también se concentraría abajo

La polarización positiva o negativa de la cara inferior del conductor por efecto Hall dependerá de la naturaleza de los portadores

Líneas de campo magnético

- Al igual que con el campo eléctrico, podemos trazar líneas del campo magnético B
- De forma semejante a lo que vimos para el campo E, el vector B en todo punto es tangente a las líneas de campo. La densidad de líneas es proporcional al módulo de B (líneas mas separadas significan campo menos intenso y líneas más juntas significan campo más intenso)
- Dado que no existen monopolos magnéticos, las líneas de campo magnético siempre forman bucles cerrados (emergen del polo N y acaban en el polo S). Esto es una diferencia importante con respecto a las líneas del campo eléctrico
- Otra diferencia importante con el campo eléctrico es que las líneas del campo B son perpendiculares a la fuerza magnética sobre una carga puntual (en el caso del campo eléctrico, las líneas de campo eran paralelas a la fuerza)



Movimiento de una carga en un campo magnético

- A partir de la fuerza de Lorentz se puede comprobar que una carga q en un campo magnético en general describirá una trayectoria helicoidal
- La carga cambia de dirección pero no gana energía (los campos magnéticos no realizan trabajo sobre las cargas)

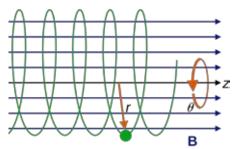
Velocidad de la carga $\vec{v} = \overrightarrow{v_{\perp}} + \overrightarrow{v_{\parallel}}$

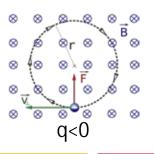
La componente paralela al campo $\overrightarrow{v}_{\parallel}$ no sufre fuerza de Lorentz

La componente perpendicular al campo $\overrightarrow{v_{\perp}}$ sufrirá una fuerza que provoca que la carga describa órbitas circulares de radio r tal que:

$$F = qv_{\perp}B = m \cdot a = \frac{mv_{\perp}^2}{r}$$

 $\Rightarrow r = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ radio de Larmor
 $\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v_{\perp}} = \frac{2\pi m}{qB}$ periodo ciclotrón
 $\Rightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$ frecuencia ciclotrón





Fuerza magnética sobre un hilo de corriente

- Una corriente I está constituida por cargas en movimiento. Si la sumergimos en un campo magnético, cada una de ellas experimentará la fuerza de Lorentz de forma que habrá una fuerza neta sobre el conductor
- Sea un hilo recto de longitud L por el que circula una intensidad I. Si la sección del hilo es S y hay n portadores de carga por unidad de volumen, cada uno con velocidad v y carga q, la fuerza neta sobre el hilo será:

$$\vec{F} = q_{total}(\vec{v} \times \vec{B}) = q \cdot n \cdot S \cdot L (\vec{v} \times \vec{B})$$

 Como vimos en el tema anterior, la corriente que circula por el hilo viene dada por I = n·q·S·v, de modo que si expresamos L como un vector según la dirección de v podemos reescribir:

$$\vec{F} = I \ (\vec{L} \times \vec{B})$$

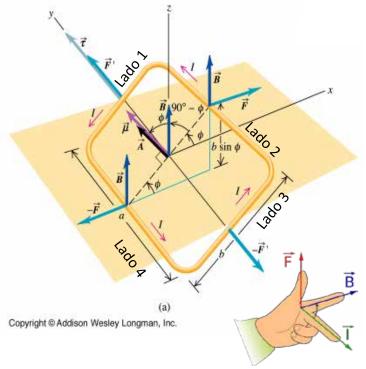
• En términos generales, por ej. si el hilo no es recto o B varía, solo podemos escribir la ecuación anterior para tramos infinitesimales del cable, con longitud dl, los cuales experimentan una fuerza dF dada por:

$$d\vec{F} = I \left(d\vec{l} \times \vec{B} \right)$$

 $Id\vec{l}$ = elemento de corriente

Fuerza magnética sobre una espira de corriente

 Consideremos ahora una espira rectangular. Podemos tratar por separado los 4 lados como hilos de corriente para hallar la fuerza neta al sumergirla en un campo B que forma un ángulo f con la normal a la espira (ver figura)



Las fuerzas sobre los lados 1 y 3 son iguales y de sentido opuesto. Se cancelan y además no ejercen momento sobre la espira

Las fuerzas sobre los lados 2 y 4 son iguales y de sentido opuesto. También se cancelan pero ejercen un par sobre la espira que provocará su giro

$$F_2 = F_4 = IaB$$

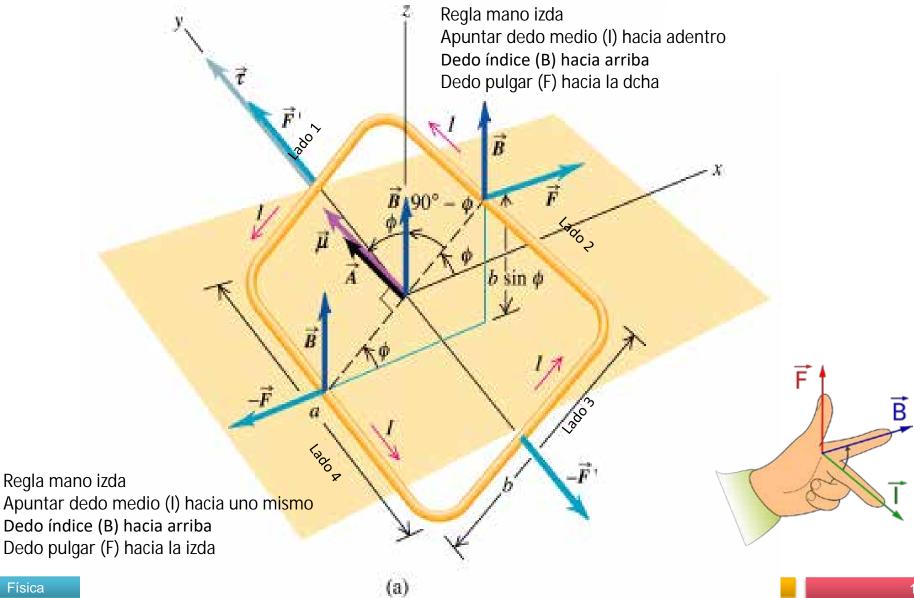
$$M = M_2 + M_4 = IaB \frac{b}{2} \sin \phi + IaB \frac{b}{2} \sin \phi$$

$$M = IabB \sin \phi = ISB \sin \phi$$

 Siendo S=a·b el área de la espira. Supongamos ahora que en vez de una sola espira tenemos N espiras superpuestas (espira con N vueltas). El módulo del momento total será:

$$M = NISB \sin \phi$$





Fuerza magnética sobre una espira de corriente

• Basándonos en el resultado anterior, podemos definir un nuevo vector llamado momento magnético $\vec{\mu}$ dado por:

$$\vec{\mu} = NIS\vec{n}$$

siendo \vec{n} un vector unitario normal a la superficie de la espira.

Las unidades de mson A·m²

• De este modo, el momento se puede expresar como:

$$\overrightarrow{\mathbf{M}} = \overrightarrow{\mu} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}$$

El resultado obtenido para la espira rectangular se puede generalizar a cualquier otra forma geométrica: una espira de corriente sumergida en un campo magnético sufre un momento que trata de reorientarla, haciendo que ésta gire. El momento solo se anula si el campo B y el momento magnético de la espira son paralelos (es decir, si el campo B es perpendicular a la espira)

^{*(}nótese la analogía con el comportamiento de un dipolo eléctrico sumergido en un campo eléctrico E: el momento dipolar tiende a alinearse con el campo)

Fuerza magnética sobre una espira de corriente

Ejercicio: Una espira rectangular de 5,40 ' 8,50 cm está formada por 25 vueltas de cable. La espira transporta una corriente de 15 mA. Calcular el par de fuerzas que se ejerce sobre la espira cuando se le aplica un campo magnético uniforme de valor 0,350 T paralelo al plano de la espira. Determinar el momento magnético de la espira.

Solución:

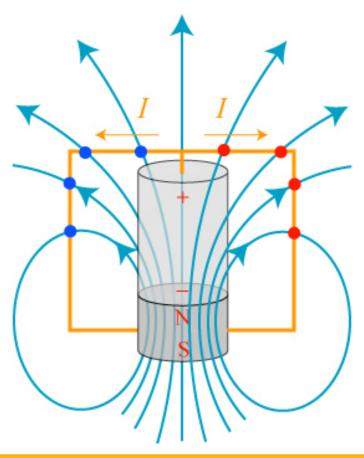
Momento magnético: 1.72·10⁻³ A·m²

Momento ejercido sobre la espira: 6.02·10⁻⁴ N·m

Ejemplo de fuerzas sobre espiras: motor homopolar

https://www.youtube.com/watch?v=yUToL9WAK8I

https://www.youtube.com/watch?v=LcyqJWvZioM



Campo creado por cargas en movimiento

- Las cargas en movimiento no solo sufren el efecto de los campos magnéticos (fuerza de Lorentz) sino que además ellas mismas son fuentes de campo magnético
- El campo \vec{B} creado por una carga que se mueve con velocidad \vec{v} , evaluado en una posición \vec{r} , viene dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{q}}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \overrightarrow{u_r}}{r^2} = \frac{\mu_0 \mathbf{q}}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$$

Siendo μ_0 una constante llamada permeabilidad magnética del vacío, cuyo valor numérico es:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T m A}^{-1} = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N A}^{-2}$$

• <u>Para un elemento de corriente</u>, dado que $q = n \cdot q_{portador} \cdot S \cdot = I/v$, tendríamos que el campo creado es:

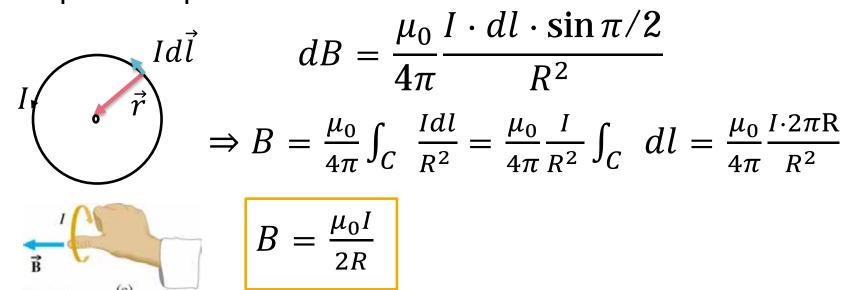
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

Ley de Biot-Savart

Ley de Biot-Savart

 Para calcular el campo B creado por un conductor completo, podemos integrar a toda la trayectoria a lo largo del conductor

<u>Ejemplo:</u> campo B creado por una espira circular C de radio R, para un punto situado en su centro:



El vector estará dirigido a lo largo del eje, con sentido dado por la regla del tornillo aplicada a $d\vec{l} \times \vec{r}$ (en el caso del dibujo: hacia fuera)

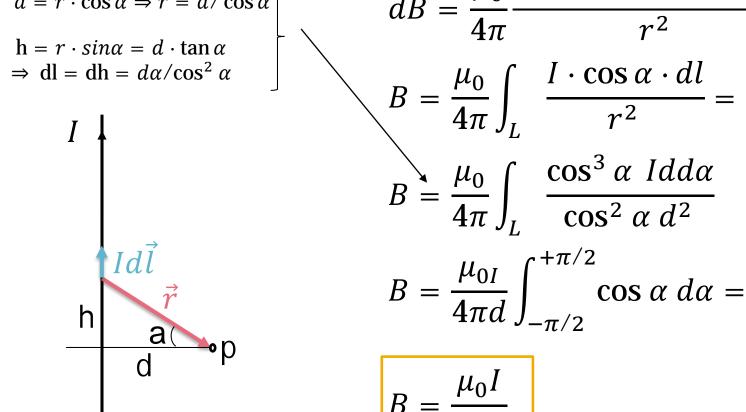
Ley de Biot-Savart

Ejemplo: campo B creado por una hilo recto L infinito, para un punto situado a cierta distancia d del hilo:

$$d = r \cdot \cos \alpha \Rightarrow r = d/\cos \alpha$$

$$h = r \cdot \sin \alpha = d \cdot \tan \alpha$$

$$\Rightarrow dl = dh = d\alpha/\cos^2 \alpha$$



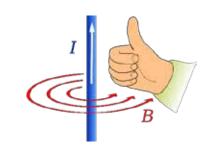
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot r \cdot \sin(\alpha + \pi/2)}{r^2}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{I \cdot \cos \alpha \cdot dl}{r^2} =$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_L \frac{\cos^3 \alpha \ Idda}{\cos^2 \alpha \ d^2}$$

$$B = \frac{\mu_{0I}}{4\pi d} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_{0I}}{4\pi d} \cdot 2$$

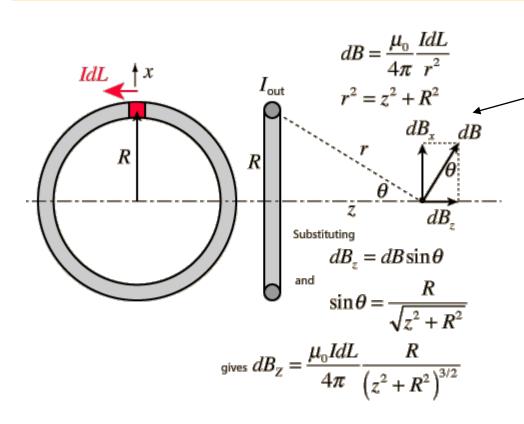
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$



El vector según la regla del tornillo aplicada a $d\vec{l} \times \vec{r}$ (hacia dentro)

Ejemplo: campo B en el eje de una espira circular

<u>Ejercicio</u>: Considere una espira circular de cable, de radio R, situada e el plano XY, por la que circula una corriente estacionaria I. Determinar el campo magnético en un punto P situado en el eje de la espira (Z) a una distancia z cualquiera del centro de la espira.



Fuente: http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/magnetic/curloo.html

Las componentes en el plano perp a z se cancelan, puesto que cada elemento de longitud tiene una contrapartida con en sentido contrario (ver dBx en el caso de la figura). Las dBz se suman.

Integrando a toda la espira (R y z son constantes):

$$B=B_{z} = \frac{\mu_{0}I \cdot 2\pi R \cdot R}{4\pi (z^{2}+R^{2})^{3/2}} = \frac{\mu_{0}IR^{2}}{2(z^{2}+R^{2})^{3/2}}$$

Si estamos muy lejos de la espira:

$$Z > R = B = B_z = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0 m}{2\pi z^3}$$

Siendo m el momento magnético de la espira: $m=\pi R^2\cdot I$

Fuerza entre dos elementos de corriente

- Si colocamos uno frente a otro dos elementos de corriente $I_1d\vec{l}_1$ e $I_2d\vec{l}_2$ las cargas en movimiento del segundo sufrirán el efecto del campo B creado por las cargas en movimiento del primero y viceversa.
- Recordando la fuerza sobre un elemento de corriente (transparencia 9): $d\vec{F_2} = I_2 \left(d\vec{l_2} \times \vec{B_1} \right)$ y sustituyendo el campo B por su expresión según la ley de Biot-Savart:

$$\mathbf{d}^{2}\overrightarrow{F_{2}} = I_{2}\left(d\overrightarrow{l_{2}} \times \frac{\mu_{0}}{4\pi} \frac{I_{1}d\overrightarrow{l_{1}} \times \overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}^{3}}\right) = \frac{\mu_{0}}{4\pi} I_{1}I_{2}d\overrightarrow{l_{2}} \times \frac{d\overrightarrow{l_{1}} \times \overrightarrow{r_{12}}}{r_{12}^{3}}$$

$$\mathbf{d}^{2}\overrightarrow{F_{2}} = \frac{\mu_{0}}{4\pi}I_{1}I_{2}d\overrightarrow{l_{2}} \times \frac{d\overrightarrow{l_{1}} \times \overrightarrow{u_{12}}}{r_{12}^{2}}$$

Fuerza entre dos elementos de corriente

<u>Ejemplo:</u> fuerza por unidad de longitud entre dos hilos infinitos de corriente separados por una distancia d.

El segundo hilo verá el campo B creado por el primero:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}F_2} = I_2 \left(\overrightarrow{d}\overrightarrow{l_2} \times \overrightarrow{B_1} \right)$$

Como vimos anteriormente (transparencia 17):

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

Sustituyendo y teniendo en cuenta que B₁ es perpendicular al hilo 2 en todos sus puntos:

$$\mathrm{d}F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 d I_2}{2\pi d}$$

La fuerza por unidad de longitud sobre el hilo 2 será:

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

La fuerza es atractiva si las intensidades van en la misma dirección

Definición de Amperio

El resultado del ejemplo anterior se puede utilizar para dar una definición experimental del Amperio (unidad de corriente S.I.):

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{dl_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

Podemos definir 1 A como aquella corriente tal que la fuerza por unidad de longitud entre dos hilos paralelos de corriente separados por una distancia de 1 m vale 2·10⁻⁷ N/m:

$$\frac{\mathrm{d}F_2}{dl_2} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \,\mathrm{T\,m\,A^{-1} \cdot 1 \cdot 1}A^2}{2\pi \cdot 1} = 2 \cdot 10^7 N/m$$

Flujo del campo magnético

 Las líneas del campo magnético son siempre trayectorias cerradas, por tanto el flujo del campo magnético B a través de cualquier superficie cerrada Σ es nulo, ya que todas las líneas salientes vuelven a cruzar la superficie como líneas entrantes

$$\phi = \oint_{\Sigma} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

(Ley de Gauss para el magnetismo)

Circulación de B: Ley de Ampere

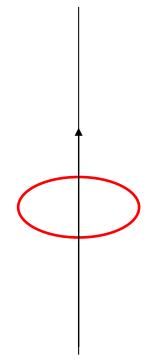
 La segunda ley básica del magnetismo se refiere al valor de la circulación del campo B. Para cualquier curva cerrada C que consideremos, la circulación de B es igual al producto de m por la corriente I encerrada por dicho trayecto:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$$

(Ley de Ampere)

Circulación de B: Ley de Ampere

Comprobemos que la ley de Ampere se cumple para el caso de un hilo infinito de corriente, considerando una circunferencia de radio R, perpendicular al hilo y centrada en él:



El campo en todos los puntos de la circunferencia vale: $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

La circulación será:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \mu_0 I$$

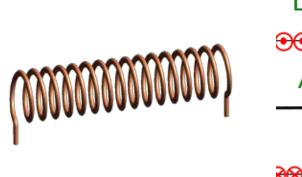
Que efectivamente coincide con lo enunciado en la ley de Ampere

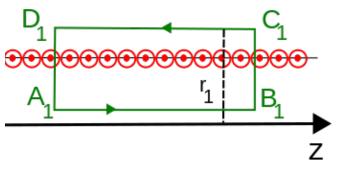
Esta prueba se puede generalizar a cualquier otro trayecto más complejo

Circulación de B: Ley de Ampere

La ley de Ampere se emplea en magnetismo de forma análoga a la ley de Gauss en electrostática, ya que permite calcular de forma simple el campo B para distribuciones de corriente que presentan suficiente simetría.

Ejercicio: Utilizar la ley de Ampere para hallar el campo magnético en el interior de un solenoide cilíndrico de longitud L que consta de N espiras circulares. Asumir que el campo cerca de la superficie exterior del solenoide es nulo y que el campo en su interior es uniforme.





Solución:
$$B = \frac{\mu_0 NI}{L}$$

Tema 4 (Apéndice) Magnetismo en el vacío Resumen de algunos casos particulares

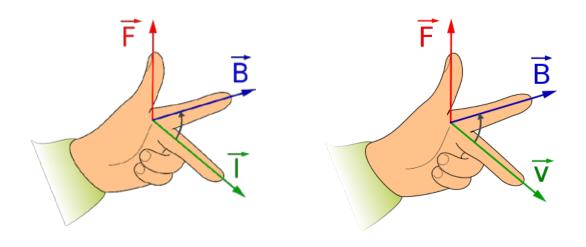
Física (780000)

Grados en Ingeniería de Computadores (VT) e Ingeniería Informática (XM) Curso 2017/2018 – Primer Cuatrimestre

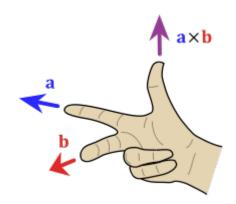


Recordatorio de reglas mnemotécnicas

Regla de la mano izquierda (Fleming). Nos permite obtener la dirección y sentido del resultado de un producto vectorial. Por ejemplo, de la fuerza sobre un conductor conocidas las direcciones y sentidos de la intensidad y el vector campo magnético o la fuerza de Lorentz conocida la velocidad y el campo magnético



Nótese que si se usa la mano derecha el orden sería al contrario (dedo índice para el primer vector del producto vectorial)

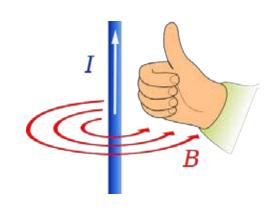


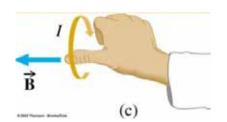
Recordatorio de reglas mnemotécnicas

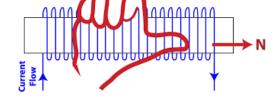
Regla del tornillo (mano derecha). Nos permite obtener la dirección de un vector resultante de un producto vectorial. El giro se debe realizar del primer al segundo vector del producto, y el pulgar indicará el sentido del resultado.

También permite obtener la dirección del vector campo magnético conocida la intensidad circulante en un hilo o la dirección del campo conocido el sentido de giro de la intensidad en un solenoide o espira









Norte magnético: líneas de B salientes Sur magnético: líneas de B entrantes

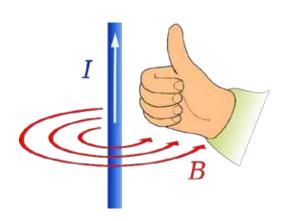
Nota: el polo norte geográfico de la Tierra actualmente tiene polaridad magnética sur, por ello el polo norte de una aguja magnética se orienta hacia el norte

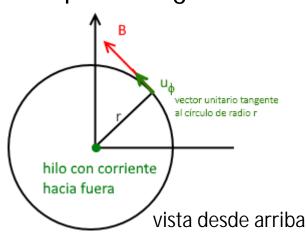
Campo creado por un hilo infinito de corriente

Campo magnético creado por un hilo infinito de corriente, evaluado en un punto a cierta distancia r

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u_{\varphi}}$$

 $d = distancia \ al \ hilo; \ I = intensidad \ que \ circula \ por \ el \ hilo$ Las líneas de campo son círculos alrededor del hilo El sentido del campo viene dado por la regla de la mano derecha





Campo sobre el eje de una espira circular

Campo magnético creado por una espira de radio R, evaluado en un punto P situado a cierta distancia z de su centro y situado sobre su eje

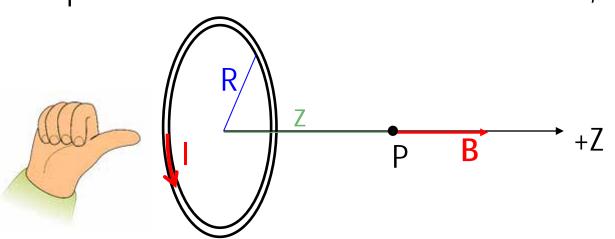
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{u_z}$$

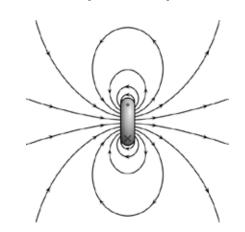
En el centro de la espira (z=0): $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{u}_z$

Muy lejos (z>>R):
$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} \overrightarrow{u_z}$$

La expresión es válida tomando +Z según la regla de la mano derecha aplicada a la intensidad circulante.

Si la espira tuviera N vueltas en vez de solo una, basta multiplicar por N.



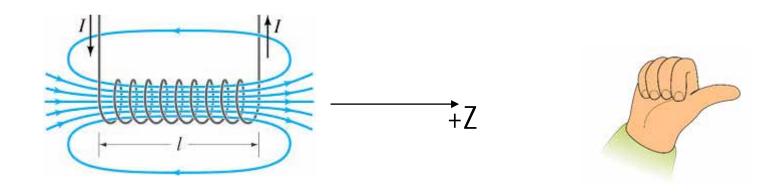


Campo en el eje de un solenoide cilíndrico

Campo magnético en el interior de un solenoide cilíndrico de longitud L con N espiras circulares por las que circula una intensidad I:

$$\vec{B} = \mu_0 n I \overrightarrow{u_z}; \quad n = N/L$$

El eje +Z está dirigido según el eje del solenoide, según la regla de la mano derecha aplicada a la intensidad circulante

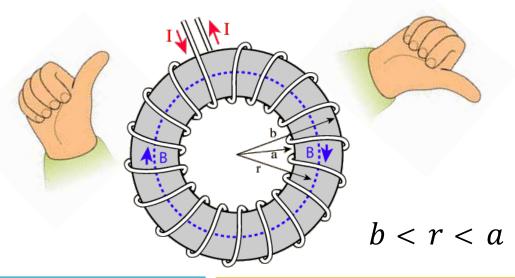


Campo en el eje de un solenoide toroidal

Campo magnético en el interior de un solenoide toroidal de radio medio r con N espiras circulares por las que circula una intensidad I:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \overrightarrow{u_{\varphi}}$$

El vector unitario $\overrightarrow{u_{\varphi}}$ es tangente al círculo de radio r y está dirigido según la regla de la mano derecha aplicada a la intensidad circulante



Fuerza entre dos hilos de corriente

Fuerza por unidad de longitud entre dos hilos de corriente separados por una distancia r

$$f = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi r}$$

Si el sentido de las dos corrientes es el mismo, la fuerza es atractiva, si el sentido es opuesto, la fuerza es repulsiva

