1.- Una esfera metálica de radio R_1 tiene una carga $Q_{em} = +Q$ y está rodeada concéntricamente por una corteza conductora esférica, de radio interior R_2 y radio exterior R_3, cargada con una carga $Q_{cc} = -Q$. Determine

a) la densidad superficial de carga sobre la superficie externa de la corteza conductora,

b) el campo eléctrico en puntos de región $R_1 < r < R_2$ y en puntos de la región $r > R_3$, donde r es la distancia al centro de la esfera metálica,

c) tomando origen de potenciales en el infinito, calcule el potencial eléctrico en cualquier punto de la región $R_1 < r < R_2$, y la diferencia de potencial entre la esfera metálica y la corteza conductora,

d) razone qué procesos se producen si conectamos a tierra la corteza esférica conductora.

SOLUCIÓN

El sistema presenta distribuciones superficiales de carga con simetría esférica, por lo que los campos eléctricos son radiales y tienen el mismo módulo en cualquier punto que esté a la misma distancia del centro común de las distribuciones de carga; la aplicación de la ley de Gauss sobre una superficie esférica de radio r nos permite escribir

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_r = \frac{k\, q_{enc,SE(r)}}{r^2}\vec{u}_r \qquad [1.1]$$

a) Sean $Q_2 = Q(R_2)$ y $Q_3 = Q(R_3)$ las cargas sobre las superficies interna y externa de la corteza. El campo eléctrico en el interior de la corteza conductora es nulo, por lo que aplicando la ley de Gauss sobre una superficie esférica totalmente incluida en la corteza y tan cerca como queramos de la superficie interna, de [1.1] se deduce que

$$q_{enc,SE(r\to R_2)} = Q + Q_2 = 0 \quad \to \quad Q_2 = -Q\,.$$

Como la corteza tiene una carga total $Q_{cc} = -Q$, entonces

$$Q_2 + Q_3 = Q_{cc} \quad \to \quad Q_3 = Q_{cc} - Q_2 = -Q - (-Q) = 0 \quad \to \quad \sigma_3 = \sigma(R_3) = 0\,.$$

b) Si $R_2 < r < R_3$, la carga encerrada es la de la esfera metálica, $q_{enc,SE(R_2<r<R_3)} = Q_{em} = Q$ y de [1.1]

$$\vec{E}(R_2 < r < R_3) = \frac{k\,Q}{r^2}\vec{u}_r\,.$$

Si $r > R_3$, la carga encerrada es la de la esfera metálica y la de la corteza conductora,

$$q_{enc,SE(r>R_3)} = Q_{em} + Q_{cc} = Q - Q = 0 \quad \to \quad E(r > R_3) = 0\,.$$

c) El potencial, respecto al infinito, debido a una distribución superficial de carga uniforme de forma esférica de radio R y carga total Q, tiene la forma

$$\varphi(r < R) = \frac{kQ}{R} \;\; \text{y} \;\; \varphi(r > R) = \frac{kQ}{r} \qquad [1.2].$$

Aplicando el principio de superposición a los potenciales debidos a las distribuciones de carga de la esfera metálica y de la corteza conductora, tenemos que

$$\varphi(R_1 < r < R_2) = \frac{kQ}{r} + \frac{k(-Q)}{R_2} = kQ\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2}\right] \text{ (V)}$$

$$\varphi_{em} - \varphi_{cc} = \varphi(R_1) - \varphi(R_2) = kQ\left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right] \text{ (V)}$$

d) De [1.2] se deduce que el potencial de la corteza conductora (recordar que cualquier conductor en equilibrio es un volumen equipotencial) es nulo $\varphi(R_2 < r < R_3) = kQ/r + k(-Q)/r = 0$, por lo que al conectar a tierra la corteza conductora no tiene lugar ningún proceso de transferencia de carga ya que se unen puntos que están al mismo potencial, en consecuencia, el sistema de cargas queda invariable.

2.- Se dispone de condensadores de placas plano paralelas. Uno de estos condensadores de capacidad C_1 = 20 pF se conecta a una fuente de tensión que suministra un voltaje $\varphi_0 = 39$ V. En paralelo con dicho condensador se conecta una asociación serie de dos condensadores de capacidades C_2 = 15 pF y C_3 = 30 pF.

a) Determine la carga de cada condensador y la diferencia de potencial entre extremos del condensador C_2.

Se desconecta la fuente de tensión del sistema de condensadores. A continuación se separan las placas del condensador C_3 hasta una distancia igual a 3 veces la distancia original; en estas condiciones calcule los nuevos valores de

b) la carga de cada condensador,

c) las diferencias de potencial entre extremos de cada condensador.

Respecto de la situación anterior a la separación de las placas del condensador C_3 determine

d) la variación de energía electrostática almacenada en el condensador C_1,

e) la variación de la energía electrostática total del sistema de condensadores, indicando la causa de dicha variación.

SOLUCIÓN

a) Para la resolución del ejercicio se ha de tener en cuenta que en una asociación serie de condensadores todos ellos adquieren la misma carga, y la diferencia de potencial aplicada es la suma de las diferencias de potencial en cada uno de ellos. Así, las cargas en los condensadores 2 y 3 son iguales, es decir, $Q_2 = Q_3 = Q$ [2.1] y las caídas de potencial en ellos, ΔV_2 y ΔV_3, verifican $\varphi_0 = \Delta V_2 + \Delta V_3$ [2.2].

De las condiciones del ejercicio y de la relación entre capacidad, carga y diferencia de potencial en un condensador $Q = C\,\Delta V$ [2.3] se tiene

$$Q_1 = C_1\varphi_0 = 20 \cdot 39 = 780 \text{ pC}.$$

De [2.1], [2.2] y [2.3] se obtiene

$$C_2\Delta V_2 = C_3\Delta V_3 = C_3\left(\varphi_0 - \Delta V_2\right) \;\rightarrow\; \Delta V_2 = \frac{C_3}{C_2 + C_3}\varphi_0 = 26 \text{ V} \;\text{ y }\; Q_3 = Q_2 = C_2\Delta V_2 = 390 \text{ pC}.$$

Al desconectar la fuente de tensión la carga total del sistema debe permanecer invariable. Por otro lado, teniendo en cuenta que la capacidad de un condensador plano de área de placa S y separación entre ellas d viene dada por $C = \varepsilon_0\, S/d$, al separar las placas del condensador 3 hasta $d' = 3d$ su nueva capacidad se divide por 3, por lo que se tiene $C_3' = C_3/3 = 10$ pF.

b) La distribución de potenciales habrá cambiado, pero de modo que se ha de verificar que la diferencia de potencial entre extremos del condensador 1 debe ser igual a la suma de las diferencias de potencial entre los condensadores 2 y 3, es decir, $\Delta V_1 = \Delta V_2' + \Delta V_3'$ [2.4]. De igual modo, la distribución de cargas también habrá cambiado, de manera que $Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2$ [2.5]. De [2.4] y [2.5] se tiene

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \;\text{ y }\; \frac{Q_1'}{C_1} = Q_2'\left[\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3'}\right] \;\rightarrow\; Q_1 + Q_2 - Q_2' = Q_2' C_1 \frac{C_2 + C_3'}{C_2 C_3'}$$

$$Q_1 + Q_2 = Q_2'\left[1 + C_1\frac{C_2 + C_3'}{C_2 C_3'}\right] \;\rightarrow\; Q_2' = C_2 C_3' \frac{Q_1 + Q_2}{C_2 C_3' + C_1\left(C_2 + C_3'\right)} = 270 \text{ pC}$$

$$Q_3' = Q_2' = 270 \text{ pC} \;\text{ y }\; Q_1' = Q_1 + Q_2 - Q_2' = 900 \text{ pC}.$$

c) Las nuevas diferencias de potencial son

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1'}{C_1} = 45 \text{ V};\; \Delta V_2' = \frac{Q_2'}{C_2} = 18 \text{ V};\; \Delta V_3 = \frac{Q_3'}{C_3'} = 27 \text{ V}.$$

d) La energía electrostática almacenada en un condensador de capacidad C cargado con carga Q es $U = Q^2/(2C)$ [2.6]. Teniendo en cuenta [2.6], la variación de energía electrostática en el condensador 1, $\Delta U_1 = U_1^F - U_1^I$ es

$$\Delta U_1 = U_1^F - U_1^I = \frac{1}{2}\frac{Q_1'^2}{C_1} - \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{C_1} = \frac{Q_1'^2 - Q_1^2}{2C_1} = 5040 \text{ pJ}.$$

e) De igual manera, la variación de energía del sistema $\Delta U_s = U_s^F - U_s^I$ resulta

$$\Delta U_s = U_s^F - U_s^I = \frac{Q_1'^2}{2C_1} + \frac{Q_2'^2}{2C_2} + \frac{Q_3'^2}{2C_3'} - \left[\frac{Q_1^2}{2C_1} + \frac{Q_2^2}{2C_2} + \frac{Q_3^2}{2C_3}\right] = 3510 \text{ pJ}.$$

Esta energía adicional proviene de la transformación en energía eléctrica de la energía mecánica necesaria para separar las placas del condensador 3.