Tema 2b

Energía electrostática (en el vacío y en conductores)

Física (780000)

Grados en Ingeniería de Computadores (VT) e Ingeniería Informática (XM)

Curso 2017/2018 – Primer Cuatrimestre

Universidad de Alcalá

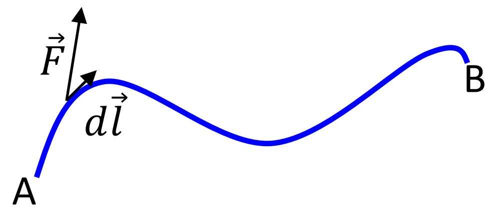
R. Gómez Herrero

Departamento de Física y Matemáticas

Introducción: Energía y trabajo (repaso)

- Trabajo realizado por una fuerza durante un trayecto AB:

$$W = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Ejemplo: fuerza constante según el eje X y desplazamiento de longitud $L = x_2 - x_1$ a lo largo de dicha dirección:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F \cdot dx = F \cdot (x_2 - x_1) = F \cdot L$$

- Si la fuerza corresponde a un campo conservativo, el trabajo no dependerá del trayecto escogido entre los puntos inicial y final → podemos definir energía potencial U tal que su diferencia entre los puntos inicial y final vale:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -W_{12}$$

Introducción: Energía y trabajo (repaso)

- Nótese el criterio de signos:

  <u>$W > 0 \Rightarrow \Delta U < 0$:</u> el campo de fuerzas está dirigido a favor del desplazamiento (el campo de fuerzas hace trabajo positivo) => la energía potencial disminuye

  <u>$W < 0 \Rightarrow \Delta U > 0$:</u> el campo de fuerzas está dirigido en contra del desplazamiento (hace un trabajo negativo) => la energía potencial aumenta

  <u>Ejemplo</u>: sea una masa m en un campo gravitatorio. La fuerza recibe el nombre de peso ($m \cdot g$). Si el cuerpo cae, el peso hace un trabajo positivo ($W>0$) y la energía potencial disminuye ($\Delta U < 0$). Si el cuerpo asciende en contra del campo gravitatorio, el peso hace un trabajo negativo ($W<0$) y la energía potencial aumenta ($\Delta U > 0$). Esa diferencia de energía puede aportarla por ejemplo una energía cinética inicial o provenir del trabajo de una fuerza externa F'. Dicha fuerza realizaría un trabajo $W' = -W = +\Delta U$

Energía potencial electrostática

- Sea una carga q en un campo electrostático. El trabajo realizado por el campo para recorrer un trayecto AB será:

$$\mathrm{W_{AB}} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \mathrm{q} \int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Como sabemos, la integral que aparece es la **circulación** del campo eléctrico, y al ser el campo conservativo, su valor es independiente del camino AB (solo depende de los puntos inicial y final) siendo posible definir un potencial V tal que:

$$V_B - V_A = -\int_{AB} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\Rightarrow W_{AB} = -(V_B - V_A)q$$

Energía potencial electrostática

- Es decir, podemos definir una energía potencial electrostática U tal que:

$$\Delta U_{AB} = (U_B - U_A) = (V_B - V_A)q$$

- Significado de V => ΔV corresponde a la diferencia de energía potencial electrostática por unidad de carga
  Unidades de V: Voltios (1 V = 1 J / C)
  Unidades de U: Julios (1 J = 1 N·m)

*También eV = $1.6 \cdot 10^{-19}$ J

- Tal como ya vimos, una carga positiva se mueve en sentido de V decreciente (tendencia natural a mínima energía potencial, al igual que ocurre en la gravedad).
- Una carga negativa se mueve en sentido de V creciente, como q<0 esto significa nuevamente mínima energía potencial (mayor valor absoluto, pero negativa).

Energía potencial electrostática: origen de potencial

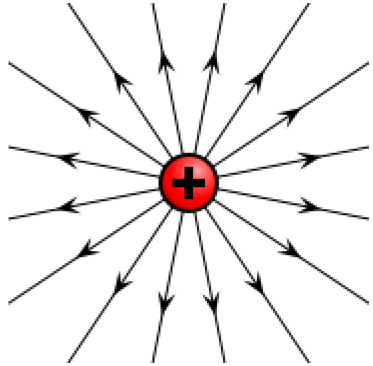
- Hasta ahora hemos hablado de diferencias de energía potencial
- Para definir la energía potencial electrostática en un punto podemos usar un nivel de referencia:
  - Si no hay cargas en el infinito: $V_\infty \rightarrow 0$ => Definimos V en un punto como la diferencia de potencial entre dicho punto y el origen de potencial V_∞
  - Análogamente definimos la energía potencial electrostática de una carga en un punto como la diferencia de energía potencial entre dicho punto y el origen de energía potencial situado en el infinito. Es decir, como el trabajo necesario para traer la carga desde el infinito hasta su posición actual. Nótese que con este criterio una carga negativa en una posición con potencial positivo tendría energía potencial negativa.

Energía potencial electrostática

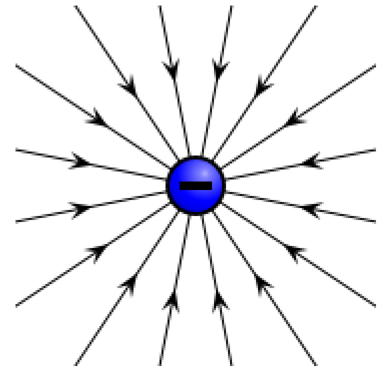
- Recordatorio de campo y potencial creados por cargas puntuales

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

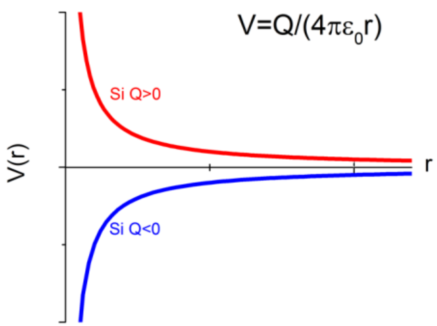
$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r}$$



Carga puntual positiva



Carga puntual negativa



Carga puntual positiva:

<u>Líneas de campo:</u> radiales hacia fuera. El módulo del campo decrece con el cuadrado de la distancia

<u>Lineas equipotenciales:</u> círculos concéntricos. El potencial decrece como el inverso de la distancia y es positivo en todo el espacio (tiende a infinito sobre la carga y a 0 en $r\rightarrow\infty$)

Carga puntual negativa:

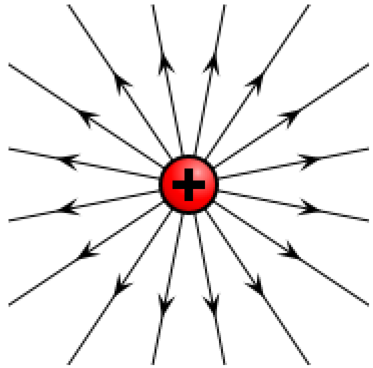
<u>Líneas de campo:</u> radiales hacia dentro. El módulo del campo decrece con el cuadrado de la distancia

<u>Lineas equipotenciales:</u> círculos concéntricos. El potencial decrece como el inverso de la distancia y es negativo en todo el espacio (tiende a menos infinito sobre la carga y a 0 en $r\rightarrow\infty$)

- Nótese que las líneas de campo van dirigidas de mayor a menor potencial en ambos casos
- Significado de V(r): trabajo por unidad de carga que hay que hacer contra el campo para traer la carga desde el origen de potencial hasta el punto r
- La tendencia natural de las cargas es moverse hacia la zona de menor energía potencial

Energía potencial electrostática

- Recordatorio de campo y potencial creados por cargas puntuales

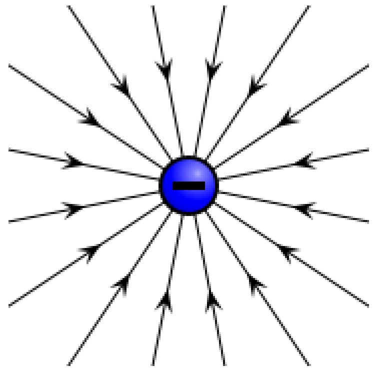


Carga puntual positiva

Si r →0, V →∞
Si r →∞, V →0
V>0 en todo el espacio

Una carga positiva q, tendría energía potencial positiva en todo el espacio, y su tendencia natural es alejarse del centro (reducir su energía potencial)

Una carga negativa tendría energía potencial negativa en todo el espacio, y su tendencia natural es acercarse al centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más negativa posible)



Carga puntual negativa

Si r →0, V →-∞
Si r →∞, V →0
V<0 en todo el espacio

Una carga positiva q, tendría energía potencial negativa en todo el espacio, y su tendencia natural es acercarse al centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más negativa posible)

Una carga negativa tendría energía potencial positiva en todo el espacio, y su tendencia natural es alejarse del centro (reducir su energía potencial, haciéndola lo más cercana a cero posible)

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{qQ}{r}$$

Energía electrostática de una distribución discreta de carga

- Sean 3 cargas q_1, q_2, q_3. El trabajo necesario para traerlas del infinito a $\mathbf{r}_1$ sucesivamente será:

Primera carga. si no existe un campo previo, $W = 0$

Segunda carga. Se moverá en el potencial creado por la primera carga, por tanto:

$$W_2 = q_2 \cdot V = q_2 \cdot \frac{K_e q_1}{r_{12}}$$

Tercera carga. Se moverá en el potencial creado por la primera y segunda carga:

$$W_3 = q_3 \cdot V = q_3 \cdot \left(\frac{K_e q_1}{r_{13}} + \frac{K_e q_2}{r_{23}} \right)$$

Por tanto la energía potencial del sistema (trabajo necesario para traer las 3 cargas del infinito) será:

$$U = \frac{K_e q_2 q_1}{r_{12}} + \frac{K_e q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{K_e q_3 q_2}{r_{23}} = q_2 V_{12} + q_3 V_{13} + q_3 V_{23}$$

Energía electrostática de una distribución discreta de carga

- Generalización a un sistema de n cargas puntuales. Nótese que no hay términos del tipo $q_i \cdot q_i$ y que cada posible combinación $q_i \cdot q_j$ no aparece duplicada como $q_j \cdot q_i$

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} q_i \, V_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{K_e q_i q_j}{r_{ij}}$$

Si incluimos los términos duplicados en el sumatorio habrá que dividir entre dos el resultado:

$$\boxed{U = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} q_i \, V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{K_e q_i q_j}{r_{ij}}}$$

Energía electrostática de una distribución continua de carga

- Generalización a una distribución continua caracterizada por una densidad de carga ρ ocupando un volumen V del espacio donde existe un potencial V debido a la propia distribución:

$$U = \frac{1}{2}\int_V V(\vec{r})dq = \frac{1}{2}\int_V \rho(\vec{r})V(\vec{r})d\tau$$

- Análogamente, para una distribución superficial de carga con densidad σ en cierta superficie S:

$$U = \frac{1}{2}\int_S V(\vec{r})dq = \frac{1}{2}\int_S \sigma(\vec{r})V(\vec{r})ds$$

Energía electrostática de un conductor cargado

- Para un conductor cargado, podemos expresar la energía electrostática utilizando la capacidad, definida en el tema anterior. Supongamos que vamos añadiendo carga en elementos infinitesimales hasta alcanzar una carga total Q. El potencial V irá variando según V=q/C, por tanto:

$$W = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q dq = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Es decir, la energía potencial electrostática de un conductor cargado, se puede expresar como:

$$\boxed{U_{conductor} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} CV^2}$$

Energía electrostática de un condensador

- El desarrollo para un condensador de capacidad C, carga Q y diferencia de potencial ΔV es análogo:

$$U_{condensador} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q\Delta V = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2$$

- El trabajo necesario para cargar un conductor o un condensador puede interpretarse como el trabajo necesario para crear el campo eléctrico que éste produce
- En esos términos, podemos hablar de la energía electrostática almacenada en un condensador como la energía del campo electrostático

$$U_{condensador} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}(\Delta V)^2 = \frac{1}{2}\frac{\epsilon_0 A}{d}d^2E^2$$

Densidad de energía del campo electrostático

- Teniendo en cuenta que el volumen entre placas es A·d:

$$U_{condensador} = \frac{1}{2} V \epsilon_0 E^2$$

- Es decir, la energía por unidad de volumen del campo electrostático en el vacío se puede definir como:

$$\mathrm{u} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

- Este resultados es generalizable a cualquier otro sistema

Densidad de energía del campo electrostático

$$\mathrm{u} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2$$

$$\mathrm{U} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 \, d\tau$$

Recordemos que estos resultados son para el vacío. En temas posteriores veremos como se generaliza esta expresión a medios materiales, para lo cual será necesario definir la permitividad del medio, el vector desplazamiento eléctrico y el vector polarización