Corriente alterna

Notación compleja

Elementos pasivos en un circuito. Relación tensión - corriente

Resistencias (R): La relación encontrada en corriente continua entre entre la corriente que la atravesaba, el valor de la resistencia y la diferencia de potencial que aparecía entre sus extremos era la llamada ley de Ohm que se cumplía en cada instante de tiempo. Por tanto, está misma relación se cumplirá para cualquier tiempo del regímen variable, es decir, podremos escribir

$$v_R(t) = R\,i(t)$$

donde hemos utilizado letras minúsculas para referirnos a las magnitudes que varían con el tiempo y las mayúsculas para las que no dependen de él.

Condensador (C): En cualquier instante de tiempo se cumple que la relación entre su carga y la diferencia de potencial entre sus bornes viene dada por:

$$q(t) = C\,v_C(t)$$

y recordando que la intensidad es la derivada temporal de la carga, podemos poner:

$$q(t) = C\,v_C(t) \quad \xrightarrow{d/dt} \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad i(t) = C\frac{dv_C(t)}{dt} \quad [\mathrm{I\text{-}V_C}]$$

Autoinducción (L): Como pondremos de manifiesto en un tema posterior, cuando una corriente variable con el tiempo circula a través de una autoinducción L, se produce una f.e.m inducida que se opone a la variación de dicha corriente, dicha f.e.m. es:

$$\text{f.e.m.} = \varepsilon_L(t) = -L\frac{di(t)}{dt}$$

que puede ser considerada como una caída de potencial v_L, en extremos de L, de signo contrario, es decir,

$$v_L(t) = -\varepsilon_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\int v_L(t)\,dt \quad [\text{I-V}_\text{L}]$$

Cuando hablamos de corrientes variables con el tiempo; la presencia de condensadores y autoinducciones suponen, según se desprende de [I-V_C] e [I-V_L], relaciones entre las tensiones a las que están sometidas y las corrientes que los atraviesan, que ya no es tan sencilla como en el caso de las resistencias en corriente continua.

Notación compleja

En general, se denomina corriente alterna a aquella definida por magnitudes que varían de signo a medida que transcurre el tiempo. El caso más interesante es cuando la variación es armónica (cualquier otra variación puede expresarse como suma de variaciones armónicas) y las magnitudes son representables por funciones del tipo:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{o} \quad y(t) = Y_0 \,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

donde X_0 (Y_0) representan amplitudes , ω la frecuencia angular y ϕ la fase, de la magnitud armónica.

Para tratar magnitudes que varían con el tiempo armónicamente es útil trabajar en el dominio de los números complejos. Recordando

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\,\text{sen}\alpha = 1_{\underline{|\alpha}}$$

Es un número complejo de módulo unidad y fase α; y en general un número complejo arbitrario puede expresarse como

$$\hat{z} = z_0 e^{j\alpha} = z_0(\cos\alpha + j\,\text{sen}\alpha) = z_{0\underline{|\alpha}}$$

De todo lo anterior se desprende que las funciones con las que vamos a tratar

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{o} \quad y(t) = Y_0 \,\text{sen}(\omega t + \varphi)$$

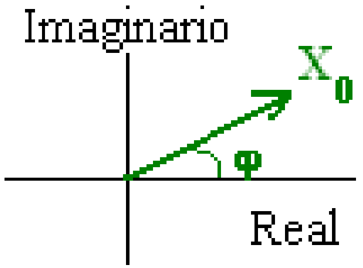
se puede representar como la parte real o la parte imaginaría de números complejos de módulos X_0 o Y_0 y fase ($\omega t + \varphi$)

$$x(t) = \Re\left\{X_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\right\} \quad \text{o} \quad y(t) = \Im\left\{Y_0 e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}$$

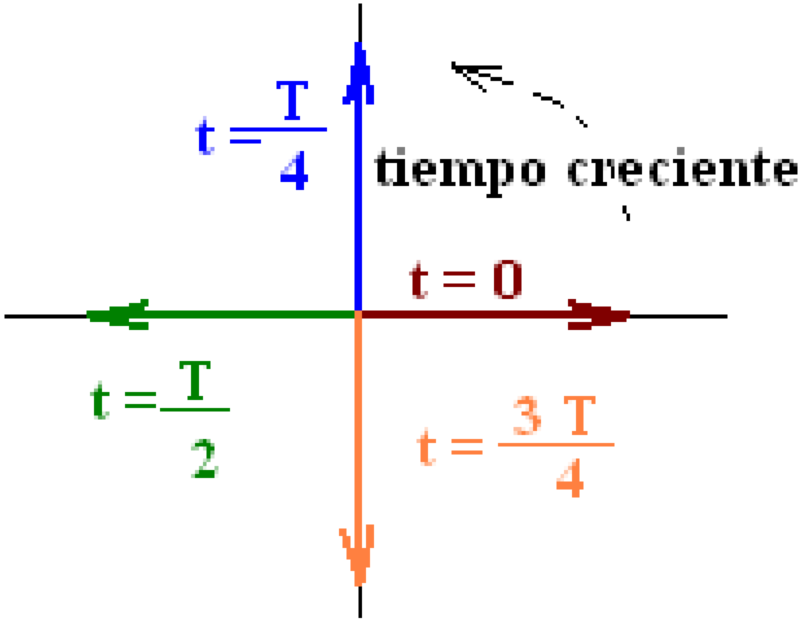
Las expresiones complejas anteriores se pueden reescribir como el producto de dos factores, uno dependiente del tiempo y el otro independiente del tiempo

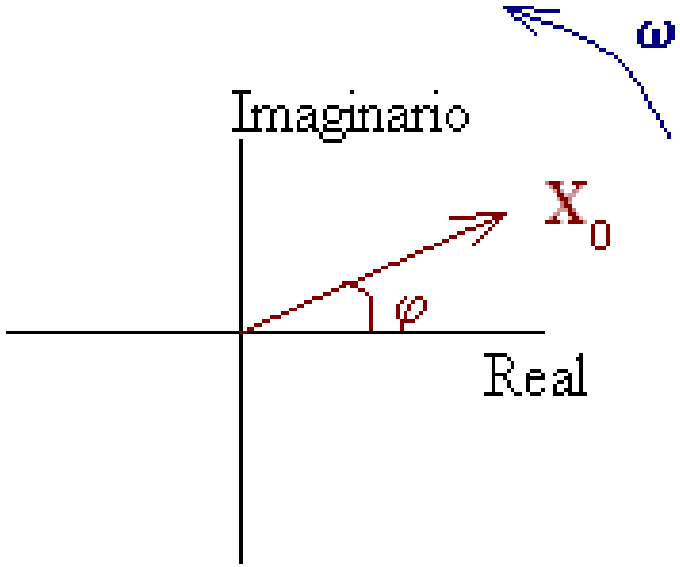
$$X_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = X e^{j\omega t} \quad \text{o} \quad Y_0 e^{j(\omega t+\varphi)} = Y_0 \; e^{j\varphi} e^{j\omega t} = Y\, e^{j\omega t}$$

Los términos *X* o *Y* son complejos de módulo constante e igual a X_0 o Y_0 y fase φ, y se llaman *FASORES*, mientras que $e^{j\omega t}$ es un complejo de módulo 1 y fase variable con el tiempo.



Esta es la denominada “representación fasorial” de una magnitud armónica. Un fasor *X* o *Y* que gira con velocidad angular ω en el plano complejo. Para un instante genérico dado nuestro fasor ocupará una posición en el plano complejo y podemos hacer abstracción de la dependencia temporal. La simplificación así obtenida, se puede mantener en tanto se cumpla que la respuesta del circuito sea de la misma frecuencia que impone el elemento activo o generador.





Multiplicación y división de complejos en forma polar

El resultado de multiplicar (dividir) complejos en forma polar, es otro complejo cuyo módulo es el producto (cociente) de los módulos y cuyo argumento es la suma (resta) de sus argumentos. Es decir, dados los complejos

$$z_1 = r_1 e^{j\phi_1} \quad \mathrm{y} \quad z_2 = r_2 e^{j\phi_2}$$

Entonces

$$z_P = z_1 \cdot z_2 = re^{j\phi} \quad / \quad r = r_1 \cdot r_2 \quad \mathrm{y} \quad \phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$z_C = \frac{z_1}{z_2} = re^{j\phi} \quad / \quad r = \frac{r_1}{r_2} \quad \mathrm{y} \quad \phi = \phi_1 - \phi_2$$

Derivación e integración en el tiempo de variables exponenciales

La utilidad de la notación exponencial introducida, se pone de manifiesto en la simplificación que su uso representa en el cálculo de derivadas e integrales. Así, para calcular la derivada temporal de la magnitud genérica que hemos definido, tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(X_0 \cos\left(\omega t + \varphi\right)\right) = -X_0 \omega \operatorname{sen}\left(\omega t + \varphi\right) = X_0 \omega \cos\left(\omega t + \varphi + \pi / 2\right) \quad [1]$$

$$\frac{d}{dt}\left(X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}\right) = jX_0 \omega e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega X \, e^{j\omega t} \quad [2]$$

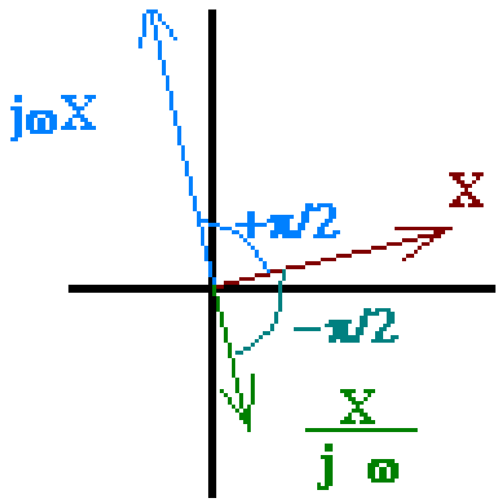
La parte real de [2] me da precisamente el valor de [1]

Así pues en notación fasorial, el derivar una magnitud armónica con respecto al tiempo, equivale simplemente a multiplicarla por jω .

De la misma forma para la integral temporal de una magnitud armónica, se tiene

$$\int x(t)\,dt = \int X_0 \cos(\omega t + \varphi)\,dt = \frac{X_0}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t + \varphi) = \frac{X_0}{\omega}\cos(\omega t + \varphi - \pi/2) \quad [3]$$

$$\int X_0 e^{j(\omega t+\varphi)} dt = \frac{X_0}{j\omega} e^{j(\omega t+\varphi)} = \frac{X}{j\omega} e^{j\omega t} \quad [4]$$



La parte real de [4] me da precisamente el valor de [3]

Al igual que antes, en notación fasorial, la integración de una magnitud armónica con respecto al tiempo, equivale simplemente a dividirla por jω .

Resumiendo: La derivada temporal de un fasor X es otro fasor jω X, cuyo módulo es ω veces el de X y la fase se ve aumentada en π /2 respecto de la del fasor original (multiplicar por j en el plano complejo equivale a rotar π/2 en sentido positivo); mientras que la integral temporal de un fasor X es otro fasor X/(j ω), cuyo módulo es ω veces menor que el de X y cuyo argumento es π /2 menor que el de X (dividir por j en el plano complejo equivale a rotar π/2 en sentido negativo).

Impedancias

Veamos ahora el comportamiento de los elementos de circuito en el caso particular de corriente alterna sinusoidal, con ayuda de la notación introducida. Definiremos la "impedancia de un elemento pasivo" como *la relación entre la tensión a la que está sometido y la corriente que lo recorre*. En general dependerá de la naturaleza del propio elemento y de la frecuencia de la señal que lo atraviesa.

En lo que sigue supondremos que nuestros elementos son estimulados con señales armónicas de frecuencia ω y responden con magnitudes de la misma frecuencia. Para una ***resistencia*** hemos visto que: $v_R(t) = R\, i(t)$, que en notación fasorial podemos escribir como: $V_R = R\, I$, por lo que la impedancia correspondiente, Z_R, será:

$$Z_R = \frac{v_R}{I} = R$$

que es un número complejo de módulo "R" y fase nula, es decir un número real positivo.

Pasemos al caso de los ***elementos*** denominados ***reactivos***, es decir, ***autoinducciones*** y ***capacidades***. En el caso de una autoinducción L, hemos visto que en términos de diferencia de potencial, la relación entre la corriente que lo atraviesa y la tensión entre sus extremos es:

$$V_L = L\frac{di}{dt}$$

teniendo en cuenta que, para los fasores, la derivada temporal consiste en multiplicar por jω , tenemos que la impedancia correspondiente será:

$$v_L = L\frac{di}{dt} \quad \rightarrow \quad V_L = L\frac{dI}{dt} = Lj\omega I \quad \rightarrow \quad Z_L = \frac{V_L}{I} = j\omega L$$

que es un número complejo de módulo “ωL ” y fase + π/2, es decir, un número imaginario puro positivo.

En el caso de una capacidad C, sabemos que la relación entre la diferencia de potencial que aparece entre sus extremos y la carga que adquiere es:

$$v_c(t) = q(t)/C \quad \text{y} \quad q = \int i\,dt$$

que puesto en términos de intensidad de corriente se expresa

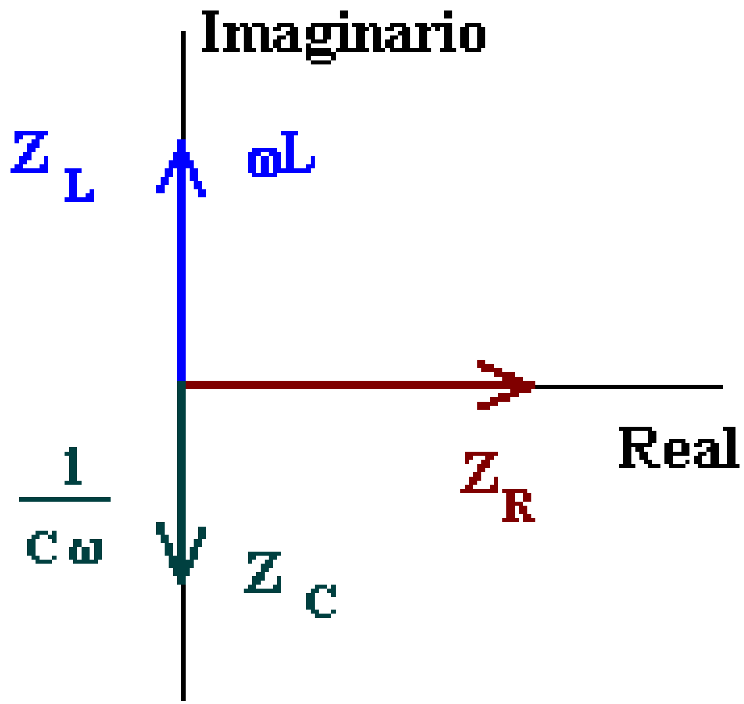
$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt \quad \rightarrow \quad V_c = \frac{1}{C}\int I\,dt$$

Y teniendo en cuenta que la operación de integración, en términos de fasores, consiste en dividir por jω, resulta para la impedancia

$$V_c = \frac{1}{C}\frac{I}{j\omega} \quad \rightarrow \quad Z_c = \frac{V_c}{I} = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}$$

que es un número complejo de módulo “ω C” y fase - π/2 , es decir, un número imaginario puro negativo.

Se observa que las impedancias de los elementos reactivos (condensadores y bobinas) son números imaginarios puros, mientras que la impedancia de las resistencias son números reales, lo cual, como veremos, viene directamente ligado con los consumos de energía que presentan estos elementos.



Caída de tensión *versus* corriente

Veamos que información podemos obtener de lo que acabamos de escribir respecto a intensidad que recorre un elemento pasivo y la tensión que a parece entre sus bornes, empleando la notación fasorial. Sabemos que se debe cumplir la ley de Ohm para corriente alterna que nos dice que el fasor tensión es igual al producto del fasor intensidad por el número complejo que es la impedancia del elemento pasivo:

$$V = ZI \qquad [\text{L\_Ohm}]$$

Para ello, vamos a suponer que cada elemento es recorrido por una intensidad variable con el tiempo , $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ y vamos a calcular la tensión que aparece entre bornes en cada caso.

El fasor intensidad será $I = I_{0\underline{|0}}$

Resistencia

Consideremos el caso de una resistencia R, su impedancia (Z_R) se puede representar por el número complejo

$$Z_R = R_{\underline{|0}}$$

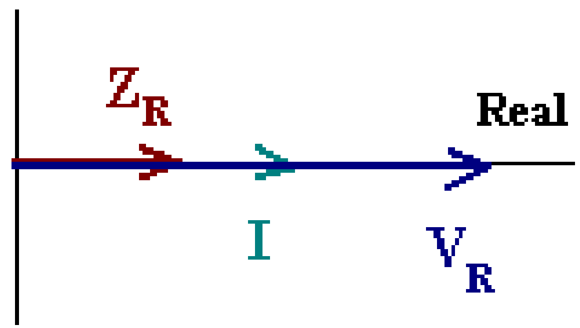
como se debe cumplir [L_Ohm], el fasor tensión en bornes de la resistencia tendrá: por módulo el producto de los módulos de la impedancia y de la intensidad y por fase la suma de las fases de ambos:

$$V_R = V_{0R\underline{|0}} \quad / \; V_0 = R\, I_0$$

Las variaciones temporales para la intensidad y la tensión serán, respectivamente,

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t) \qquad v_R(t) = I_0 R \cos(\omega t)$$

es decir, ambas están en fase.



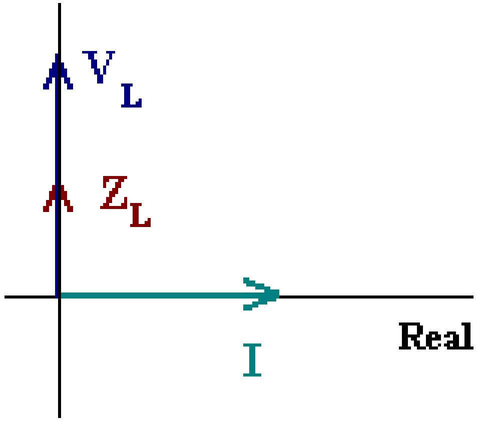
Autoinducción

Consideremos ahora una bobina de autoinducción L, su impedancia (Z_L) será el complejo

$$Z_L = X_{L|\underline{\pi/2}} \quad / \quad X_L = \omega L$$

De [L_Ohm], se obtiene para el fasor tensión en extremos de la autoinducción

$$V_L = Z_L I \quad \rightarrow \quad V_L = V_{0L|\underline{\pi/2}} \quad / \quad V_{0L} = \omega L I_0$$



Las variaciones temporales para la intensidad a su través y la tensión entre sus extremos serán

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$v_L(t) = I_0 \omega L \cos(\omega t + \pi/2) = X_L I_0 \cos(\omega t + \pi/2) = -X_L I_0 \text{sen}(\omega t)$$

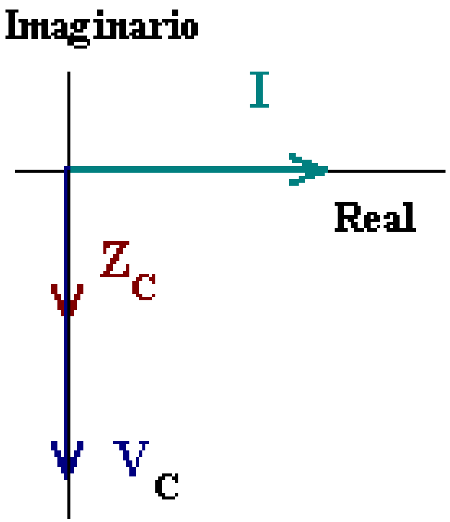
Lo que quiere decir que las magnitudes están desfasadas π/2 radianes; estando la tensión adelantada respecto a la intensidad de corriente

Condensador

Consideremos ahora un condensador de capacidad C, su impedancia (Z_C) será el complejo

$$Z_C = X_{c\underline{|-\pi/2}} \quad / \quad X_C = \frac{1}{\omega C}$$

De [L_Ohm], se obtiene para el fasor tensión en extremos del condensador



$$V_C = Z_C I \quad \rightarrow \quad V_C = V_{0C\underline{|-\pi/2}} \quad / \quad V_{0C} = \frac{1}{\omega C} I_0$$

Las variaciones temporales para la intensidad a su través y la tensión entre sus extremos serán

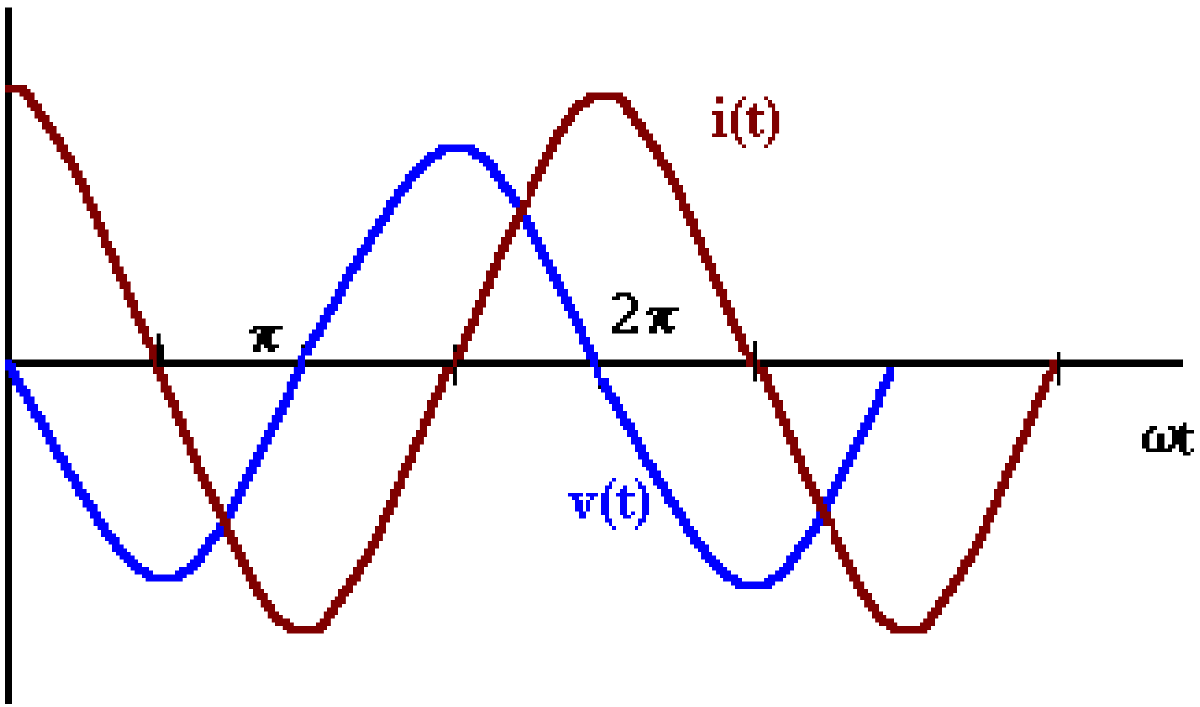
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

$$v_C(t) = I_0 \frac{1}{\omega C} \cos(\omega t - \pi/2) = X_C I_0 \cos(\omega t - \pi/2) = X_C I_0 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Lo que quiere decir que las magnitudes están desfasadas π/2 radianes; estando la tensión retrasada respecto a la intensidad de corriente.

Representación temporal

Si queremos representar, en función del tiempo, lo que acabamos de obtener mpleando fasores tendremos por ejemplo para una ***bobina***, las variaciones temporales de la tensión y la intensidad que se muestran en la figura



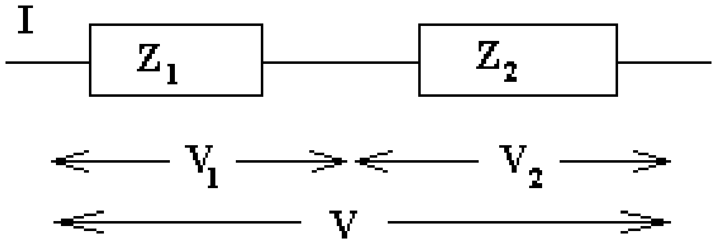
Asociación de impedancias

Las leyes de Kirchhoff estudiadas en los circuitos de corriente continua se generalizan de inmediato a los circuitos de corriente alterna sin más que tener en cuenta que debemos aplicarlas en cada instante. Pasando a notación fasorial, el carácter lineal de las leyes de circuitos ya que la derivación y la integración son operaciones lineales, permite hacer también abstracción de la dependencia temporal y las leyes quedan formalmente invariables, cuando se aplican a los fasores. Hay que tener en cuenta que las impedancias se representan mediante números complejos.

Asociación serie: Dado un conjunto de impedancias asociadas en serie,

$$\{Z_k\}_{k=1}^{N}$$

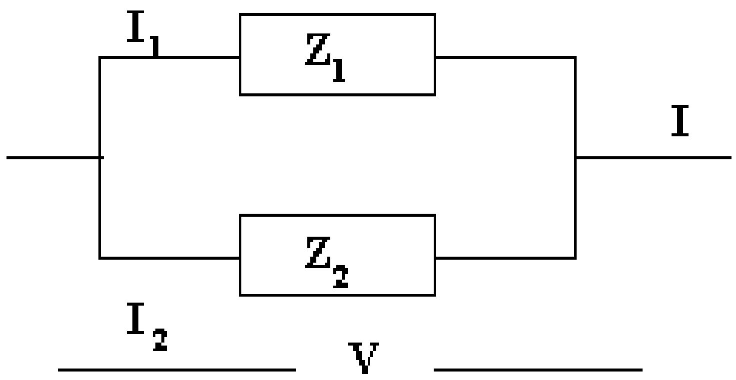
se demuestra, de la misma forma que lo hicimos con las resistencias en serie, que la impedancia equivalente Z_S, al igual que pasaba con las resistencias en serie, resulta ser:



$$Z_S = \sum_{k=1}^{N} Z_k$$

Asociación paralelo: Dado un conjunto de impedancias asociadas en paralelo,

$$\{Z_k\}_{k=1}^{N}$$



se demuestra, de la misma forma que lo hicimos con las resistencias en paralelo, que la impedancia equivalente Z_P, al igual que pasaba con las resistencias en paralelo, verifica la relación:

$$\frac{1}{Z_\mathrm{P}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{Z_k}$$

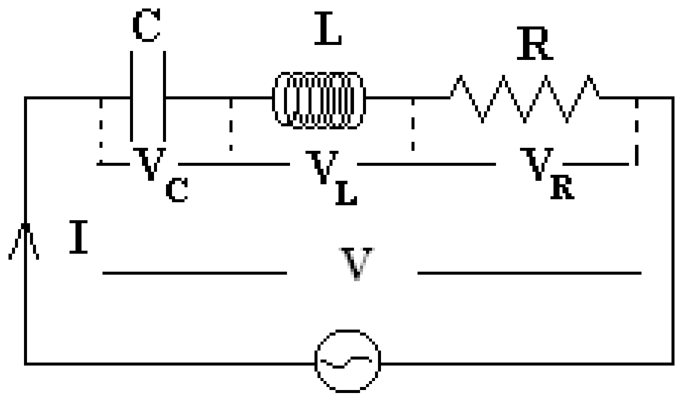
En el caso de elementos en paralelo, conviene introducir la denominación de *"admitancia"* de un elemento o asociación que es la inversa de su impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

con lo cual resulta, que: "La admitancia equivalente de una asociación paralelo es la suma de las admitancias de cada uno de los elementos".

Circuito serie R-L-C

Este circuito se encuentra frecuentemente en la practica; puede provenir, por ejemplo, de la asociación de un condensador y de una bobina en serie, llevando la bobina asociada no solo su autoinducción L sino también una resistencia R (la de los arrollamientos que la forman).



Las impedancias de cada elemento sabemos que son:

$$Z_R = R = \xi_R \quad ; \quad Z_L = j\xi_L = jX_L = j\,\omega L \quad ; \quad Z_c = \frac{1}{j\xi_C} = \frac{1}{jX_C} = -\frac{j}{X_C} = -\frac{j}{\omega C}$$

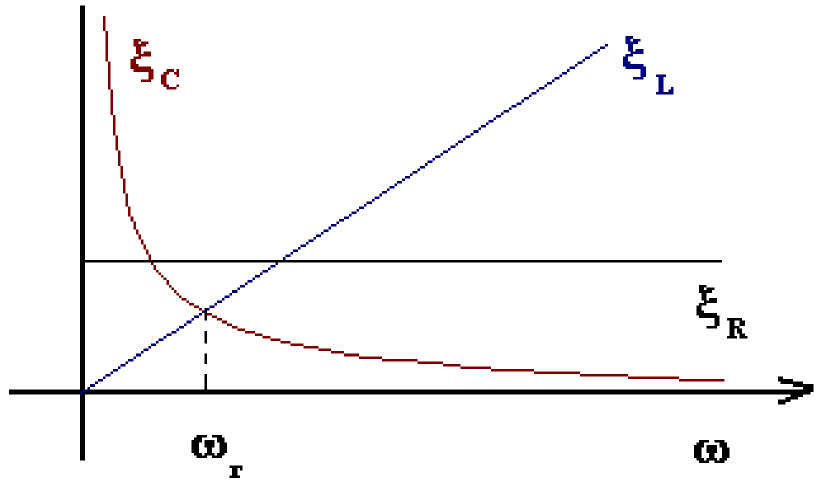
$$Z = Z_R + Z_L + Z_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z_0\, e^{j\theta} = \xi e^{j\theta}$$

donde.

$$Z_0 = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctan\left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}\right)$$

Como podemos ver, tanto el módulo como la fase de la impedancia, varían con la frecuencia. En la figura se ha representado la variación del módulo de la impedancia para los tres elementos puros (resistencia, bobina y condensador) y podemos observar que existe una frecuencia en la que coinciden los módulos de la impedancia debida a una bobina y a un condensador, como ambas impedancias son números imaginarios puros, pero de fase opuesta, eso quiere decir que existe una frecuencia en la que el circuito presenta una impedancia exclusivamente real, aunque esté compuesto por elementos reactivos.

Esta frecuencia, denominada "frecuencia de resonancia ω_r" tiene una importancia grande, pues si el circuito entra en resonancia, absorberá mayor energía que otra frecuencia cualquiera (recordar lo que significaba resonancia de un oscilador armónico); es decir, captará (sintonizará) mejor las señales emitidas a esa frecuencia que a cualquier otra.



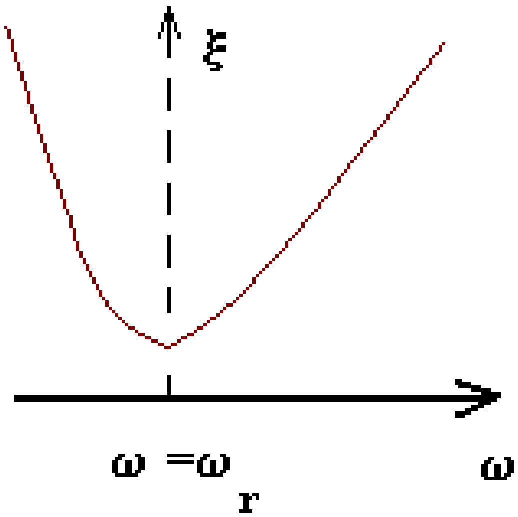
A esa frecuencia ω_r se cumplirá que

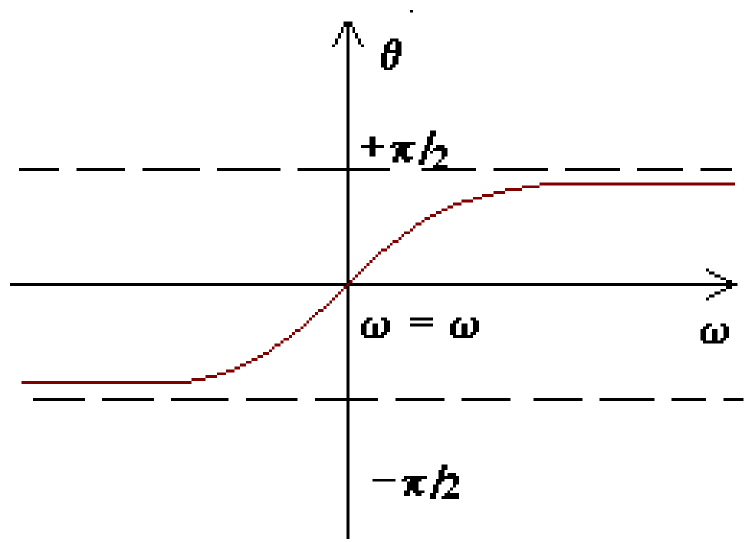
$$X_L = X_C \quad \rightarrow \quad \omega_r L = \frac{1}{\omega_r C} \quad \rightarrow \quad \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

En consecuencia a la frecuencia de resonancia se verifica que la impedancia total del circuito es real, es decir,

$$Z\left(\omega = \omega_r\right) = R = R\,e^{j0}$$

En las figuras que siguen se muestran las variaciones del módulo y la fase de la impedancia del circuito con la frecuencia:





Para frecuencias inferiores a ω_r resulta $X_L < X_C \quad \rightarrow \quad \omega L < \dfrac{1}{\omega C}$

y se dice que el circuito tiene carácter capacitivo ($\theta < 0$) .

A frecuencias superiores a la de resonancia ocurre que:

$$X_L > X_C \quad \rightarrow \quad \omega L > \frac{1}{\omega C}$$

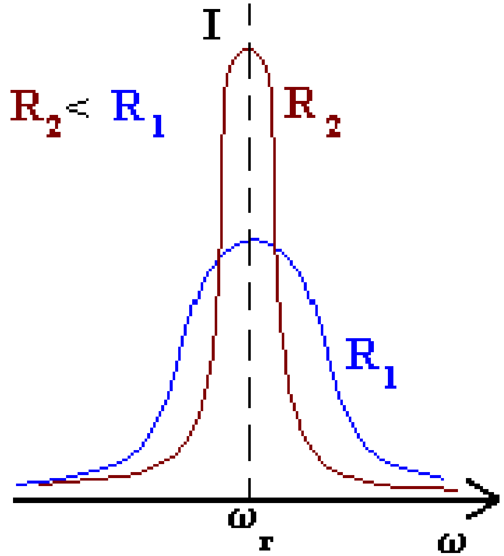
y se dice que el circuito tiene carácter inductivo ($\theta > 0$) .

Intensidad - Frecuencia

La intensidad que atraviesa el circuito serie depende de la frecuencia suministrada por el generador que, de acuerdo con la ley de Ohm, es

$$I = \frac{V}{Z}$$

siendo máxima a la frecuencia de resonancia del circuito; este valor máximo dependerá del valor de la resistencia como se muestra en la figura.



La mayor o menor anchura, y por tanto la "selectividad" del circuito depende de la relación entre la impedancia capacitiva o inductiva y la resistencia, evaluado a la frecuencia de resonancia. A mayor valor de este cociente más selectivo es el circuito lo que significa que sólo pasan intensidades significativas para frecuencias muy próximas a la de resonancia. Si al circuito se le aplica una señal que contiene mezcladas muchas frecuencias, la corriente toma valores elevados sólo para la frecuencia a que está "sintonizado" el circuito, o frecuencia de resonancia del mismo.

$$Q = \frac{\omega_r L}{R}$$

Potencias en un circuito de corriente alterna

Consideremos el caso más familiar, como es el de una resistencia. Si la resistencia es recorrida por una intensidad de la forma

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

entre sus extremos existirá una diferencia de potencial dada por

$$v_R(t) = R\, i(t) = RI_0 \cos(\omega t) = V_0 \cos(\omega t)$$

donde I_0 y V_0 son denominados corriente y tensión "de pico" o valores máximos de la corriente y tensión respectivamente

La potencia instantánea disipada en la resistencia, que toma siempre valores positivos, será:

$$P(t) = i(t)\, v_R(t) = I_0 V_0 \cos^2(\omega t)$$

En la práctica es más significativa la denominada "Potencia media por ciclo", o simplemente valor medio de la potencia disipada, definida como:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T I_0 V_0 \cos^2(\omega t)\,dt = \frac{I_0 V_0}{T}\frac{T}{2} = \frac{I_0 V_0}{2} = I_{\mathrm{rms}} V_{\mathrm{rms}}$$

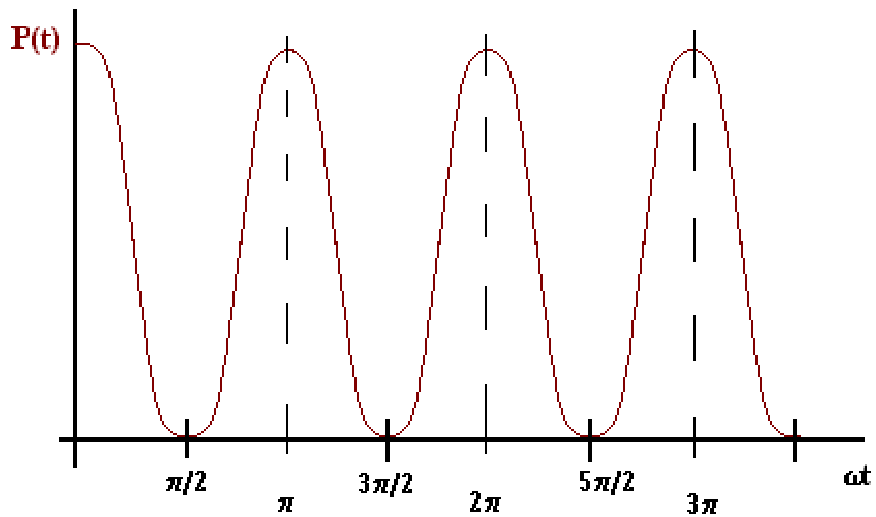
donde se ha introducido los términos tensión eficaz, V_{rms} (V_{ef}), y corriente eficaz, I_{rms} (I_{ef}), relacionadas con los valores pico por

$$I_{rms} \equiv I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad V_{rms} \equiv V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$$

La potencia media se puede escribir en términos de la resistencia en la forma

$$\langle P \rangle = I_{rms} V_{rms} = R I_{rms}^2 = \frac{V_{rms}^2}{R}$$

Lo que significa que los valores eficaces representan los valores en continua de la tensión e intensidad que deberían existir en la resistencia para que ésta disipase la misma cantidad de energía por unidad de tiempo que se disipa en el circuito de alterna.



En un condensador o en una autoinducción, la corriente y la tensión están desfasadas en π /2; si una varía en la forma cos (ωt) , la otra lo hará en la forma sen (ωt) y la potencia instantánea tendrá la forma

$$P_{L-C}(t) = \pm I_0 V_0 \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) = \pm P_0 \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)$$

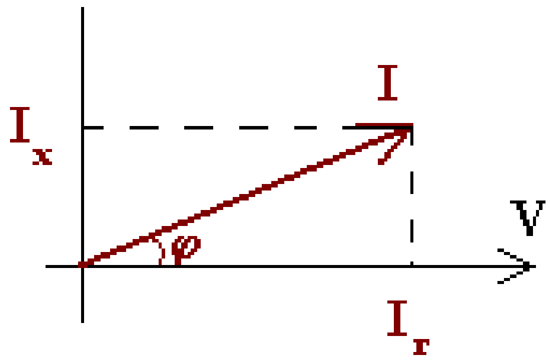
el signo dependerá de considerar si es un condensador o una bobina, pero en cualquier caso la potencia promedio será

$$\langle P_{L-C}\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P_{L-C}(t)\,dt = \pm\frac{P_0}{T}\int_0^T \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t)\,dt = \pm\frac{P_0}{2T}\operatorname{sen}(2\omega t)\Big|_0^T = 0$$

La potencia en estos casos, al contrario que en las resistencias, toma alternativamente valores positivos y negativos; como el valor medio en un periodo del seno de un ángulo es nulo, se tiene que la potencia media disipada por ciclo en un condensador o en una autoinducción es nula.

En los elementos, denominados reactivos, en los que la corriente y la tensión están desfasadas en π /2, *la potencia media disipada es nula*. Físicamente en estos elementos existe un flujo reversible de energía entre ellos y el generador que alimenta al circuito.

En el caso general, en el que exista un desfase φ entre la tensión aplicada y la intensidad que recorre el circuito serie, podemos descomponer esta última en dos componentes, una I_r paralela a la tensión del generador (en fase con ella) y otra I_x en cuadratura con la misma.



$$\begin{cases} I_r = I\cos\varphi \\ I_x = I\,\mathrm{sen}\,\varphi \end{cases}$$

La componente en cuadratura, I_x, no contribuye a la potencia media disipada en el circuito, por ello se la denomina componente "reactiva" y solo contribuye a un trasiego reversible de energía entre el generador y el circuito. La otra componente, I_r, da una potencia media disipada

$$\langle P\rangle = \frac{1}{2}V_0 I_{r0} = \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos\varphi = V_{rms} I_{rms} \cos\varphi$$

que es la responsable del suministro irreversible de energía entre el generador y el resto del circuito.