CONCEPTOS DE RADIÁN Y ESTEREORRADIÁN

El radián. Ángulos sólido: El estereorradián

Concepto de radián

Para introducir el concepto de ángulo sólido y de su medida, el estereorradián, vamos a recordar el significado y la medida de otra magnitud plana, ya conocida, el ángulo plano y su medida el radián, que por su similitud nos ayudarán a entender estos dos conceptos de la Geometría en el espacio.

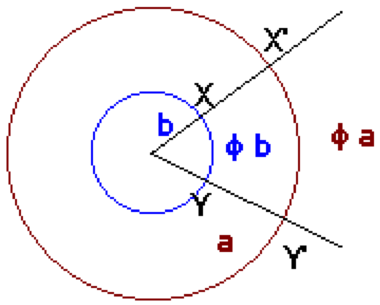

Figura 1
Representación de un único ángulo ϕ , que define dos arcos de distinta longitud en dos circunferencias de distinto radio.

Todos sabemos que el tramo de circunferencia comprendido entre dos puntos cualesquiera, recibe el nombre de arco. Su longitud dependerá del radio de la circunferencia a la que pertenece. Consideremos los arcos XY y X'Y' que se muestran en la figura, la longitud de ambos es distinta y como sabemos su valor es el del radio multiplicado por el ángulo expresado en radianes: $XY = b \cdot \phi$ y $X'Y' = a \cdot \phi$.

Como recordamos, la razón está en la definición de radián como: "el ángulo que sustenta un arco de longitud un radio". A un arco cuya longitud sea toda la circunferencia, es decir $2\pi\ r$, le debe corresponder un ángulo cuyo valor sea 2π . Por tanto, para caracterizar un ángulo cualquiera dividimos la longitud del arco que limita entre el radio de la correspondiente circunferencia a la que pertenece, de forma que el ángulo " ϕ " es la relación entre el arco $\overset{\frown}{X'Y'}$ y el radio "a", o entre el arco $\overset{\frown}{XY}$ y el radio "b" $\left(\phi = \dfrac{\overset{\frown}{X'Y'}}{a} = \dfrac{\overset{\frown}{XY}}{b} \right)$.

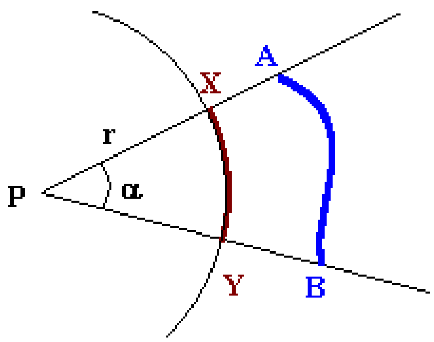

Figura 2
El ángulo α , con el que vemos la figura "AB", está definido por el arco XY y el radio de la circunferencia a la que pertenece

Cuando queremos saber el ángulo " α " que tenemos que abarcar para ver una línea cualquiera desde un punto "P" determinado (ver figura 2 del apéndice), trazamos una circunferencia de radio "r" y centro en "P" y los radios, o sus prolongaciones, que pasan por los extremos de la línea que queremos ver ("A" y "B" en la figura) nos definen los puntos "X" e "Y" del arco correspondiente. La relación entre la longitud del arco "XY" y el radio nos da la medida del ángulo α :

$$\alpha = \frac{\overset{\frown}{XY}}{r}$$

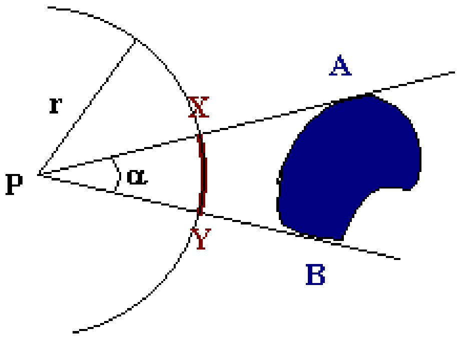

Figura 3
El ángulo α desde el que vemos la figura plana se define por los dos puntos extremos visibles desde "P"

Naturalmente si queremos saber el ángulo abarcado desde un punto determinado "P" por una figura plana (figura 3 del apéndice), la situación será la anterior considerando la línea definida por los extremos visibles desde "P" del perímetro de la figura plana.

Por tanto en el plano quien define los valores de los ángulos son siempre líneas, pues en el plano desde un punto sólo vemos líneas.

Ángulo sólido: Estereorradián

Vamos a establecer las situaciones análogas en el espacio. Cualquier punto del espacio, lo podemos considerar como el centro de una superficie esférica que lo rodea, la cual estará caracterizada por su radio. Si desde el punto miramos hacia el infinito empleando algún artefacto que limite nuestro campo de visión, veremos una porción de esa superficie esférica. Si ahora consideramos una superficie esférica de mayor radio y miramos al infinito en las mismas condiciones que antes, veremos una porción de superficie esférica de mayor tamaño, como se esquematiza en la figura 4. Si observamos la figura con detenimiento, veremos que las dos superficies que divisamos desde "P" (cuyos vértices hemos llamado VXYZ y V'X'Y'Z') se corresponden con el corte de cada superficie esférica con una pirámide de base cuadrangular de vértice en "P". Definimos como *ángulo sólido*, el ángulo del vértice de la pirámide desde el que vemos ambas superficies.

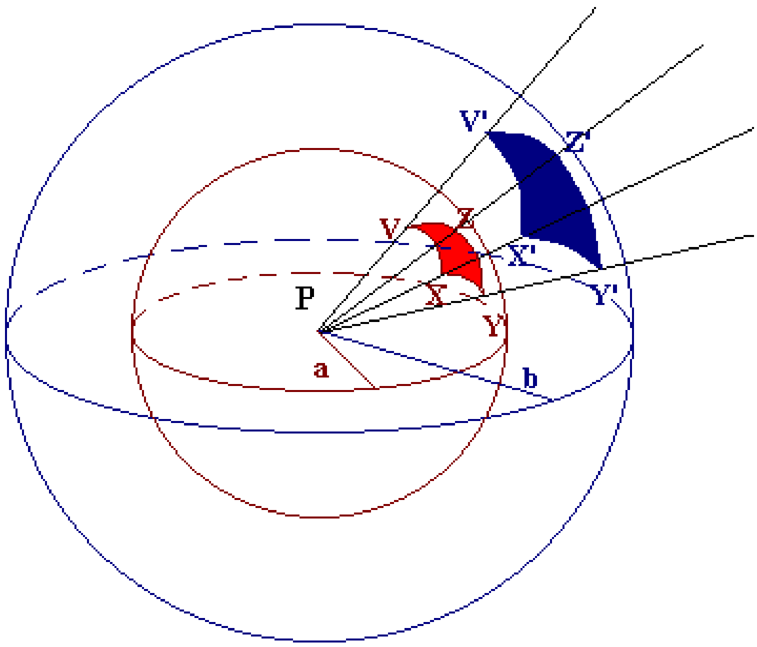

Figura 4
Representación del ángulo sólido subtendido en "P". Se puede apreciar que las superficies limitadas por él en las dos superficies esféricas son distintas, correspondiendo la mayor a la de mayor radio.

Para medir ese ángulo sólido que acabamos de definir, seguiremos un proceso similar al empleado en plana, compararemos la superficie que vemos (la VXYZ o la V'X'Y'Z') con el radio de la esfera a la que pertenece. Realmente si queremos hacer las cosas bien debemos comparar superficies con superficies, igual que en geometría plana comparamos lineas con líneas, luego la medida de cada superficie será la del cuadrado del radio de la esfera correspondiente. Luego el ángulo sólido Ω desde el que divisamos ambas superficies medirá:

$$\Omega = \frac{S_{VXYZ}}{a^2} = \frac{S'_{V'X'Y'Z'}}{b^2}$$

Recordando que el área de la superficie esférica es $S_{Es} = 4\,\pi\,r^2$ nos damos cuenta que a toda la superficie esférica le corresponderá un ángulo sólido de 4π estereorradianes, siempre que definamos un **estereorradián** como **el ángulo sólido desde el que se ve una superficie de área igual al cuadrado del radio de la esfera**.

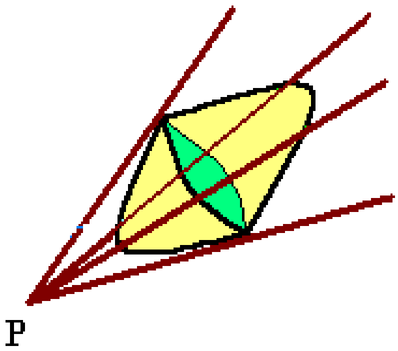

Figura 5
Desde "P" la figura la vemos como la superficie transversal que hemos resaltado

De manera similar a como decíamos para el plano, si queremos saber el ángulo sólido desde el que se "divisa" desde un punto un volumen cualquiera, debemos tener en cuenta que los cuerpos a estos efectos es como si fueran opacos, es decir para nuestro razonamiento, el cuerpo observado queda definido por la superficie externa que divisamos, que es realmente una sección transversal de la figura.