DESARROLLO EN SERIE DE TAYLOR

Desarrollo en serie de Taylor

Si tenemos una función de una variable F(x) definida en un intervalo y con "n" derivadas sucesivas en ese intervalo, conocido el valor de la función F(a) en un punto "x = a" del intervalo la función, podemos escribir que:

$$F(x) = F(a) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=a} \cdot (x-a) + \frac{1}{2!}\left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=a} \cdot (x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{d^nF}{dx^n}\right)_{x=a} \cdot (x-a)^n + \varepsilon$$

donde " ε " es el error que se comete al parar el desarrollo en el término enésimo, que es menor que una cierta cantidad que también establece el teorema.

$\varepsilon = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} F^{(n+1)}(x^*)$, siendo x^* un punto del intervalo y representando por $F^{(n+1)}$ la derivada (n+1)-ésima de la función

El interés de este teorema en aplicaciones físicas está en que muchas veces tenemos que considerar un incremento pequeño de la variable ("x - a" pequeño), de forma que sólo es necesario tomar unos pocos términos para tener una representación satisfactoria de la función. Cuando se toman únicamente los dos primeros términos se dice que es una aproximación de primer orden o lineal; cuando se mantiene hasta el tercero, una aproximación cuadrática o de segundo orden y así sucesivamente.

Veámoslo con un ejemplo: Supongamos que conocido el valor del logaritmo neperiano de 2 (de valor ln2 = 0,69314718), queremos conocer el valor del logaritmo neperiano de un número cercano.

Como la función logarítmica [y = ln(x)] esta definida y tiene infinitas derivadas en el entorno del valor x = 2, podemos realizar un desarrollo en serie de la función para conocer el valor del logaritmo neperiano de un número cercano a "2", como puede ser 2,05. Según hemos escrito más arriba, necesitaremos conocer las derivadas sucesivas de la función, en este caso la función logaritmo neperiano:

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \; ; \; \frac{d^2}{dx^2}\left[\ln(x)\right] = -\frac{1}{x^2} \; ; \; \frac{d^3}{dx^3}\left[\ln(x)\right] = +\frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3} \; ; \; \frac{d^4}{dx^4}\left[\ln(x)\right] = -\frac{6x^2}{x^6} = -\frac{6}{x^4}$$

luego el valor de ln 2,05 será:

$$\ln 2{,}05 = \ln 2 + \left(\frac{1}{x}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{x^2}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{x^3}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2)^3$$

$$+\frac{1}{4!}\left(-\frac{6}{x^4}\right)_{x=2} \cdot (2{,}05-2)^4 + \ldots$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$\ln 2{,}05 = \ln 2 + \frac{(2{,}05-2)}{2} - \frac{(2{,}05-2)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(2{,}05-2)^3}{3\cdot 2^3} - \frac{(2{,}05-2)^4}{4\cdot 2^4} + \ldots$$

que operando nos permitirá calcular con mayor o menor aproximación el neperiano del número deseado.

Para aclarar lo que acabamos de decir y teniendo en cuenta que la función que hemos considerado (la función logaritmo neperiano) está tabulada, podemos mirar el valor en el punto que estamos calculando el neperiano (el punto x = 2,05) con lo que obtenemos como “valor exacto” de la función en el punto (ln 2,05 = 0,71783979). Podemos ahora comparar los resultados del desarrollo en serie con el “valor exacto”. Para ello vamos a construir una tabla cuya primera columna sea cada término del desarrollo en serie, la segunda columna será el valor de cada uno de los términos del desarrollo, en la tercera el valor que tendremos del ln 2,05 si detenemos el desarrollo en serie en ese término y por último, en la cuarta columna, escribiremos la diferencia entre el “valor exacto” y el calculado empleando el término considerado.

Término	**Valor del término**	**Suma de cada término con los anteriores**	**Diferencia respecto del valor tabulado**
ln 2	0,69314718	0,69314718	$2{,}46 \times 10^{-2}$
$\frac{(2{,}05-2)}{2}$	$2{,}5 \times 10^{-2}$	0,71814718	$-3{,}07 \times 10^{-4}$
$\frac{(2{,}05-2)^2}{2\cdot 2^2}$	$-3{,}125 \times 10^{-4}$	0,71783468	$5{,}11 \times 10^{-6}$
$\frac{(2{,}05-2)^3}{3\cdot 2^3}$	$5{,}208333 \times 10^{-6}$	0,71783989	$-9{,}57 \times 10^{-8}$
$\frac{(2{,}05-2)^4}{4\cdot 2^4}$	$-9{,}765625 \times 10^{-8}$	0,71783979	$1{,}91 \times 10^{-9}$

Observando la tabla podemos comprobar que la aproximación de primer orden nos proporciona un valor del logaritmo neperiano de 2,05 que sólo difiere del “verdadero” en $-3{,}0 \times 10^{-4}$, es decir en la cuarta cifra significativa y la aproximación de segundo orden nos acerca al valor “verdadero” con una coincidencia de las cinco primeras cifras significativas, de ahí que con la aproximación lineal o con la cuadrática se obtengan resultados suficientemente buenos en muchos casos.

Es cierto que el grado de linealidad de la función va a ser un factor determinante a la hora de decidir el número de términos a considerar, de ahí la importancia de poder conocer de una manera rápida el error que se comete al detener el desarrollo de Taylor en un término concreto, nuestras necesidades de precisión marcarán hasta que término debemos considerar.

Si calculamos el valor del error que cometemos al parar el desarrollo en cada término, tomando por ejemplo como punto intermedio del entorno el valor x = 2,0125 obtenemos:

$$\varepsilon = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{d^5[\ln(x)]}{dx^5}\right)_{x=2,0125} = \frac{(2,05-2)^5}{5!}\cdot\frac{24}{2,0125^5} = 1,7\times10^{-9}$$

es decir el error previsto por este método aproximado ($1,7\times10^{-9}$) es del mismo orden de magnitud, y prácticamente el mismo número, que la diferencia que hemos obtenido de forma "exacta" entre el valor del desarrollo en serie y el "valor exacto" de la función.

Veamos cuál es la razón por la que una función continua y con "n+1" derivadas en un intervalo alrededor del punto "x = a" es expresable de la forma que acabamos de exponer y porque le exigimos esas condiciones. Para demostrar la igualdad que supone el desarrollo en serie de Taylor de una función en un intervalo, partimos de la derivada "n+1" de la función en el intervalo (que representaremos por $F^{(n+1)}(x)$), por tanto **debemos exigir a la función que tenga en el intervalo "n+1" derivadas,** lo que implica **que esté definida** en el intervalo. La derivada "n-ésima" la podemos obtener como la integral de la "n+1":

$\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,dx = \left[F^{(n)}(x)\right]_a^x = F^{(n)}(x) - F^{(n)}(a)$, donde $F^{(n)}(a)$ es el valor de la derivada enésima de la función particularizada para x = a, lo que nos da una constante.

Integrando de nuevo obtenemos:

$$\int_a^x\left[\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,dx\right]dx = \int_a^x\left[F^{(n)}(x) - F^{(n)}(a)\right]dx = \left[F^{(n-1)}(x)\right]_a^x - (x-a)\cdot F^{(n)}(a) =$$

$= F^{(n-1)}(x) - F^{(n-1)}(a) - (x-a)\cdot F^{(n)}(a)$, donde $F^{(n-1)}(a)$ es de nuevo una constante.

Realizando una tercera integral tenemos:

$$\int_a^x\left[\int_a^x\left[\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,dx\right]dx\right]dx = \int_a^x\int_a^x\int_a^x F^{(n+1)}(x)\,(dx)^3 =$$

$$= F^{(n-2)}(x) - F^{(n-2)}(a) - (x-a)\cdot F^{(n-1)}(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}F^{(n)}(a)$$

realizando n +1 integrales tendremos:

$$\underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}_{\leftarrow n+1 \rightarrow} F^{(n+1)}(x)\,(dx)^{(n+1)} =$$

$$= F(x) - F(a) - (x-a)\cdot F'(a) - \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) - \ldots - \frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a)$$

reordenando la expresión anterior obtenemos el desarrollo en serie de Taylor para funciones de una variable:

$$\underline{F(x) = F(a) + (x-a)\cdot F'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}F''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}F^{(n)}(a) + \varepsilon_n}$$

donde $\varepsilon_n = \underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}_{\leftarrow n+1 \rightarrow} F^{(n+1)}(x)\,(dx)^{(n+1)}$. Para calcular el valor del error que se comete al detener el desarrollo en serie en un orden de derivación determinado, debemos recordar las propiedades de las integrales múltiples nos permiten escribir:

$$\varepsilon_n = \underbrace{\int_a^x \int_a^x \cdots \int_a^x}_{\leftarrow n+1 \rightarrow} F^{(n+1)}(x)\,(dx)^{n+1} = \int_a^x F^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

Aplicando el teorema del valor medio de una función que nos dice:

$$\int_a^x g(x)\,dx = (x-a)\,g(x^*)$$

siendo x* un punto del intervalo [a, x].

Realizando n+1 integraciones obtenemos: $\underline{\varepsilon_n = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}F^{(n+1)}(x^*)}$

que será el valor del error en la aproximación realizada al detener el desarrollo en el término enésimo.

Naturalmente, el desarrollo en serie es una aproximación válida para conocer el valor de una función determinada en un punto, cuando se conoce, o se supone conocido, el valor de la función en un punto cercano. Es decir, cuando en todo el desarrollo que hemos realizado, hablábamos de el punto “x = a” y un punto genérico “x”, en la práctica, estamos diciendo que conocemos la función en x = a y queremos saber el valor de la función en “$a + \Delta x$”, con esta notación la expresión del desarrollo en serie será:

$$F(a+\Delta x) = F(a) + \left[F'(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x) + \frac{1}{2!}\left[F''(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x)^2 + \frac{1}{3!}\left[F'''(x)\right]_{x=a}\cdot(\Delta x)^3 +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left[F^{(n)}(x)\right]_{x=a} \cdot (\Delta x)^n + \varepsilon_n$$

De manera exactamente análoga se puede tratar una función de varias variables pero incluyendo las derivadas respecto a cada coordenada y las derivadas cruzadas correspondientes, lo que nos permite obtener:

$$F(a+\Delta x,\, b+\Delta y,\, c+\Delta z) = F(a,b,c) \;+$$

$$\left[\left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial x}\right)\cdot \Delta x + \left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial y}\right)\cdot \Delta y + \left(\frac{\partial F(x,y,z)}{\partial z}\right)\cdot \Delta z\right]_{\substack{x=a\\y=b\\z=c}} \quad +$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\cdot(\Delta x)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\cdot(\Delta y)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\cdot(\Delta z)^2 + \right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}\cdot(\Delta x)(\Delta y) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\cdot(\Delta x)(\Delta z) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z}\cdot(\Delta y)(\Delta z)\right]_{\substack{x=a\\y=b\\z=c}} + \ldots$$