Módulo I.3.3 Concepto de “Producto escalar de dos vectores”. “Proyección”.

Está claro que cuando decimos: “han transcurrido tres minutos” sabemos que nos referimos a un intervalo temporal, cuyo valor es de tres minutos, no son tres horas, ni cinco minutos, ni tampoco tres segundos. La expresión del valor de la cantidad (con la unidad correspondiente) nos informa de la magnitud a la que hacemos referencia y de la importancia de la cantidad que estamos considerando.

Sin embargo, cuando nos dicen que un automóvil ha conseguido una media de 109 km/h, podemos decir que ha ido bastante deprisa, la cantidad y la unidad empleada nos permite decir eso, pero ¿ha llegado a Málaga? o ¿llegó a Toledo? ¿partió de Barcelona? o ¿inició su recorrido en Madrid?. La velocidad es una de esas magnitudes que para quedar bien definidas, necesitamos conocer, desde luego su valor y la unidad de medida empleada, pero también, tanto la dirección de la que hablamos, como el sentido de la misma.

Las magnitudes que quedan caracterizadas con el conocimiento de la cantidad y su unidad, las llamamos ***magnitudes escalares***, mientras que las magnitudes que para quedar definidas necesitamos conocer, además de la unidad empleada, tres números que nos permiten conocer las tres características del vector: su módulo, su dirección y su sentido las llamaremos ***magnitudes vectoriales***.

¿Por qué es importante este concepto?

Para arrastrar un vagón de un tren por la vía, ¿qué resulta más eficiente? hacerlo con la fuerza roja o con la fuerza negra de la figura 1. La respuesta es evidente con la roja ¿por qué? porque el desplazamiento y la fuerza tienen la misma dirección, y en el caso de la negra sólo la componente paralela a la vía produce movimiento.

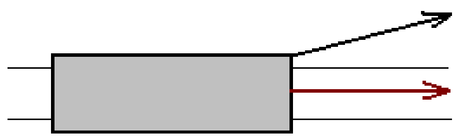

Figura 1

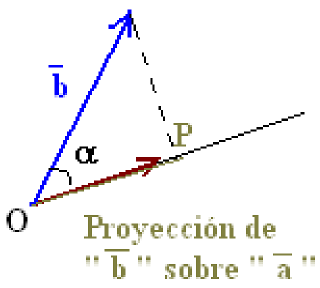

Figura 2

Existe una operación matemática entre vectores (producto escalar) que relaciona la dirección y el sentido de ellos, permitiéndonos entre otras cosas, calcular la proyección de un vector sobre otro.

Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores es un escalar cuyo valor es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ $\equiv (\vec{a} \cdot \vec{b})$

En la figura 2 se ve que la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección definida por $\vec{a}$, es el segmento OP cuyo valor es igual al módulo del vector $\vec{b}$ multiplicado por el coseno del ángulo que forman las direcciones de los vectores.

$$(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| \cdot \overline{OP} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

Por tanto, el producto escalar de dos vectores se puede calcular multiplicando el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

> ***Cuestión 1***
> *¿Qué se obtiene al multiplicar un vector escalarmente por si mismo?*

El producto escalar de vectores nos permite introducir las coordenadas cartesianas y las coordenadas de un vector, con lo cual podremos trabajar con vectores empleando únicamente escalares.

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Todos sabemos sumar dos vectores gráficamente en el plano con lo que obtenemos la diagonal del paralelogramo que forman, no es difícil generalizar este concepto a varios vectores aún cuando estos se encuentran en el espacio. A partir de este conocimiento vamos a:

- Multiplicar un vector por un escalar.
- Definir vector unitario.
- Proyectar un vector sobre una dirección.
- Obtener la expresión de un vector en coordenadas.
- Realizar operaciones con vectores a partir de sus coordenadas.

Producto de un vector por un escalar

Si un vector lo sumamos con el mismo varias veces, es decir lo ponemos a continuación de si mismo varias veces, el resultado será otro vector de la misma dirección y sentido que el original cuyo módulo será igual a tantas veces el módulo del vector como le hemos repetido. Por similitud con la multiplicación de números reales, a esa operación la llamaremos ***producto de un escalar*** (λ) ***por un vector*** $(\vec{a})$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\lambda a}$$

Siendo $\overrightarrow{\lambda a}$ un vector de módulo $\left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, paralelo al vector $\vec{a}$ y de sentido el del vector $\vec{a}$ si $\lambda > 0$ y opuesto al de $\vec{a}$ si $\lambda < 0$.

Esta operación presenta las siguientes propiedades

Existencia de elemento unitario	$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$
Existencia de elemento nulo	$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$
Distributiva respecto de la suma de escalares	$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$
Distributiva respecto de la suma de vectores	$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

Vector unitario

Naturalmente como dividir por un escalar es multiplicar por su inverso, si a un vector lo multiplicamos por el inverso de su módulo, que es un escalar, obtenemos un *vector unitario* (cuyo módulo es la unidad) en la dirección y sentido del vector dado. $\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \vec{u}$

Proyectar un vector sobre una dirección

Naturalmente si multiplicamos escalarmente un vector $\vec{b}$ por otro de módulo unidad $\left(|\vec{a}| = 1\right)$, tendremos $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = 1 \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha = |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$. Es decir, habremos obtenido la proyección de $\vec{b}$ sobre la *dirección definida* por la dirección del vector $\vec{a}$, lo que nos permite proyectar un vector sobre una dirección

> ***Cuestión 2***
> *¿Cuánto debe valer el producto escalar de dos vectores perpendiculares?*

Debemos recordar también que la ecuación de una recta en el espacio, escrita en la forma (ecuación continua de la recta) $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, nos está diciendo que está contenida en la misma dirección que el vector (l, m, n)

Coordenadas rectangulares

Consideremos un punto "P" en el espacio, como se muestra en la figura 3, para conocer su posición respecto del origen "O" definimos su ***vector de posición*** $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$

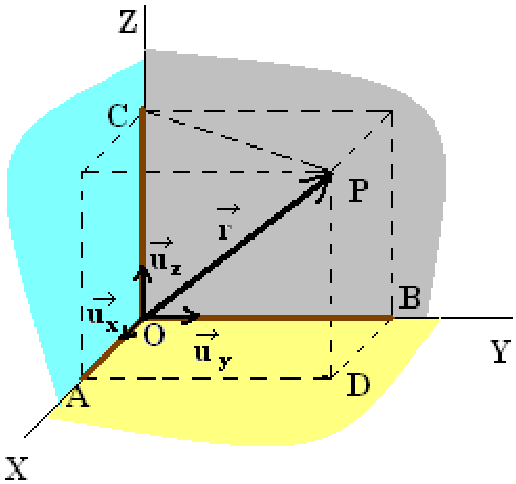

Figura 3

Recordemos que el producto escalar de dos vectores es el módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él. Si definimos unos vectores unitarios según los ejes $\left(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z\right)$ al calcular los productos escalares de $\vec{r}$ por estos tres vectores unitarios, tendremos las respectivas proyecciones del vector posición sobre los tres ejes.

$\vec{r} \cdot \vec{u}_x = \overline{OA} = r_x$, $\vec{r} \cdot \vec{u}_y = \overline{OB} = r_y$, $\vec{r} \cdot \vec{u}_z = \overline{OC} = r_z$

El vector $\vec{r}$ es la suma de los tres vectores formados al multiplicar cada uno de los tres vectores unitarios por la correspondiente proyección sobre cada eje:

$\vec{r} = r_x \cdot \vec{u}_x + r_y \cdot \vec{u}_y + r_z \cdot \vec{u}_z$

A los números r_x, r_y,r_z, los denominamos ***coordenadas del vector***.

Producto escalar en coordenadas rectangulares

Lo que acabamos de escribir nos permite obtener la forma del producto escalar de vectores en coordenadas rectangulares. Supongamos dos vectores: $\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z$, $\vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$ al multiplicarlos escalarmente, tendremos:

$\left(a_x \cdot \vec{u}_x + a_y \cdot \vec{u}_y + a_z \cdot \vec{u}_z\right) \cdot \left(b_x \cdot \vec{u}_x + b_y \cdot \vec{u}_y + b_z \cdot \vec{u}_z\right) = a_x \cdot b_x\left(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_x\right) + a_x \cdot b_y\left(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_y\right)$ $+ a_x \cdot b_z\left(\vec{u}_x \cdot \vec{u}_z\right) + a_y \cdot b_x\left(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_x\right) + a_y \cdot b_y\left(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_y\right) + a_y \cdot b_z\left(\vec{u}_y \cdot \vec{u}_z\right) + a_z \cdot b_x\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_x\right)$ $+ a_z \cdot b_y\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_y\right) + a_z \cdot b_z\left(\vec{u}_z \cdot \vec{u}_z\right)$. Sabemos que el producto escalar de un vector por sí mismo es su módulo al cuadrado y que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Cuestión 3

Justificar que $\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) = a_x\ b_x + a_y\ b_y + a_z\ b_z$

Cuestión 4.

Existe un vector "$\vec{v}$" que al multiplicarle escalarmente por un vector "$\vec{a}$" da como resultado el mismo vector "$\vec{a}$". Justifica si esta frase es verdadera o falsa.

Cuestión 5.

¿Que obtenemos al intentar multiplicar escalarmente tres vectores?

Conceptos adquiridos.

Producto escalar de dos vectores: Es el producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él

Proyectar sobre una dirección definida por una recta: Se toman los denominadores de la ecuación continua de la recta, que definen un vector de esa dirección, lo dividimos por su módulo obteniendo un vector unitario que multiplicamos escalarmente por el vector que queremos proyectar

Vectores perpendiculares: Siempre que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar tiene que ser cero.

Conceptos relacionados.

Trabajo realizado por una fuerza al desplazarse $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Diferencia de potencial entre dos puntos de un campo eléctrico: $\Delta V = \vec{E} \cdot d\vec{l}$