Módulo I.3.4 Concepto de “Producto vectorial de dos vectores”. “Áreas y Volúmenes”.

¿Por qué es importante este concepto?

Vamos a ver dos ejemplos en los que aunque apliquemos la misma fuerza se obtienen resultados deferentes.

Para abrir la puerta de un ascensor *¿que resulta más eficiente empujar en el centro de la puerta, al lado de la bisagra o en el extremo opuesto a esta?.* Es evidente que cuando menos esfuerzo realizamos es si colocamos la mano lo más lejos posible de la bisagra. Podemos decir que con la misma fuerza obtenemos distinta “cantidad” de resultado según la posición en la que apliquemos la fuerza.

Existen ventanales cuya hoja puede abrirse hacia el que tira (como un tragaluz) o que gira como una ventana ordinaria sobre sus bisagras, según cuales sean los goznes sobre los que gira. Aunque nosotros realicemos siempre la misma fuerza y la apliquemos en el mismo punto, su posición respecto de las bisagras o de los goznes es distinta. En este caso el resultado obtenido es diferente no sólo en “cantidad” sino también en dirección de movimiento. El efecto (el giro) lo podemos representar por un vector, que depende de la fuerza y de la posición en la que esta se aplica respecto del eje de giro.

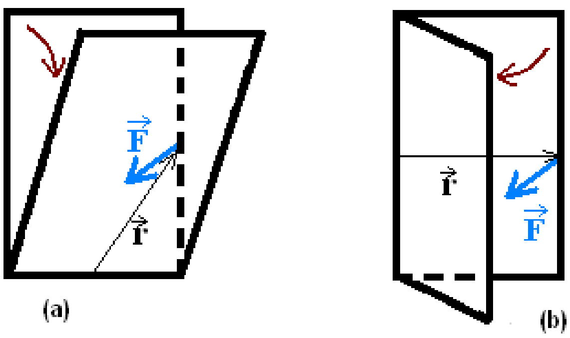

Figura 1
Esquema del resultado obtenido por la misma fuerza cuando la referencia fija del giro (gozne) es un eje horizontal (a) o vertical (b)

Como este, existen otros casos en los que el resultado de operaciones con vectores se puede representar por otra magnitud vectorial, lo que nos lleva a definir el producto vectorial de dos vectores.

Producto vectorial de dos vectores

Se define producto vectorial de dos vectores como otro vector, de dirección perpendicular al plano definido por los vectores, sentido el de avance de un tornillo que gire del primer vector (multiplicando) sobre el segundo (multiplicador) por el camino más corto y módulo el área del paralelogramo formado por los dos vectores (figura 2):

$$\vec{P} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$$

Cuestión 1
¿Cuánto valdrá el producto vectorial de dos vectores paralelos?

Cuestión 2
¿Qué se obtiene al multiplicar un vector vectorialmente por el mismo?

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Como sabemos, un vector libre lo podemos considerar aplicado en cualquier punto del espacio, siempre que se mantengan su módulo, dirección y sentido.
Como consecuencia siempre que tengamos dos vectores, si uno de ellos es libre, podemos hacer coincidir sus orígenes y a partir de ellos formar un paralelogramo.

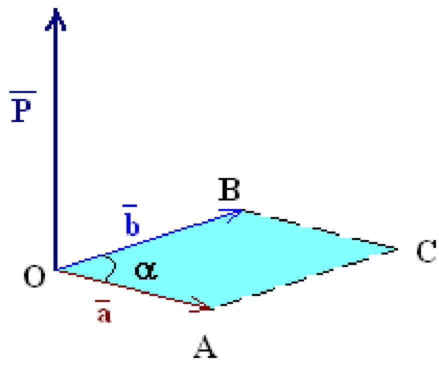

Figura 2

Como el área del paralelogramo definido por los vectores (la figura 2), es la longitud de los lados por el seno del ángulo que forman (tal vez se recuerde mejor que el área del triángulo $\overset{\Delta}{OAB}$ es el $\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\mathrm{sen}\alpha$, por lo tanto el rectángulo tiene el doble de área) el módulo del producto vectorial de dos vectores será:

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \mathrm{sen}\alpha$$

Cuestión 3
¿Se obtiene el mismo resultado si cambiamos el orden de los factores en el producto vectorial de dos vectores?

Por la propia definición de producto vectorial de dos vectores ***no puede existir elemento neutro*** para el producto, pues no puede existir ningún vector, aunque su módulo sea unitario, que nos reproduzca el vector original, pues por definición el producto vectorial es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

De la imposibilidad de existir el elemento neutro respecto del producto vectorial, se desprende que ***no puede existir elemento inverso de un vector***, lo que supone que ***no existe la división entre vectores***.

Una aplicación importante del producto vectorial es la posibilidad de asignar carácter vectorial a las superficies y otra calcular volúmenes.

Vector superficie

Cualquier superficie, plana o alabeada, se puede considerar como la suma de infinitos paralelogramos elementales, en cada uno de ellos podemos considerar los dos vectores elementales que definen dos lados contiguos. El producto vectorial de estos dos vectores será un vector perpendicular a la superficie elemental y de módulo su área, que representa vectorialmente la superficie (***vector superficie***)

$$d\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$$

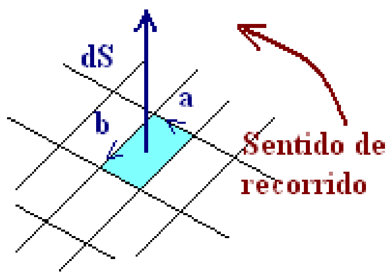

Figura 3
El producto de “a” por “b”, si los consideramos como vectores, da un sentido de recorrido a la superficie del paralelogramo elemental considerado.

Como hemos dicho más arriba, si la superficie no es elemental tendremos que realizar la suma, discreta o continua, de todos los vectores superficie.

El sentido del producto vectorial dependerá del orden de los factores y por tanto del sentido en el que recorramos la superficie. Si la superficie encierra un volumen, tomaremos como sentido positivo el dirigido hacia fuera del volumen.

Cálculo de volúmenes

Otra aplicación directa del producto entre vectores es el cálculo del *volumen de un paralelepípedo*. Consideremos tres vectores que no sean coplanarios. Definirán un paralelepípedo, en general, no recto, cuya base podemos considerar son dos cualesquiera de ellos y el tercero será una de sus aristas laterales (figura 4).

Sabemos que el volumen (V) de un paralelepípedo es el producto del área del polígono base por la altura del prisma. Si consideramos dos de los vectores formando la base del paralelepípedo, su producto vectorial $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$ será un vector perpendicular a la base (es decir, paralelo a la altura del paralelepípedo) de módulo el área de la base. Como la altura es la proyección de la arista sobre la perpendicular a la base, la proyección de $\vec{c}$ sobre el producto vectorial $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]$, será la altura "h" del prisma, recordando que el producto escalar de vectores es una proyección tendremos que el volumen "V" será:

$$V = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] \cdot \vec{c}$$

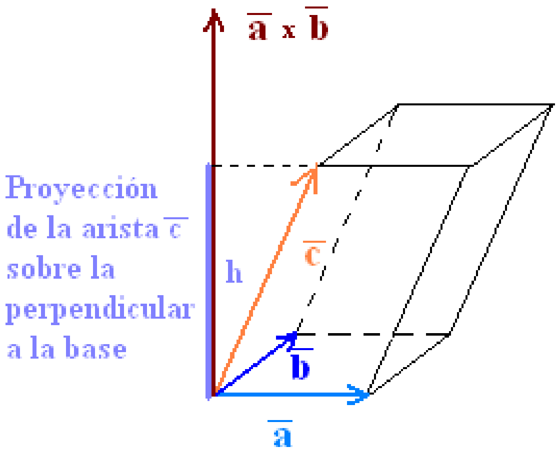

Figura 4

Por tanto, podemos asignar un vector a cualquier superficie, según el sentido en el que la recorramos y calcular el volumen de cualquier paralelepípedo como el producto mixto de sus aristas entendidas como vectores.

Expresión del producto vectorial por componentes.

Cuestión 4.
¿Cual es el producto vectorial de dos vectores unitarios?
Completar la siguiente tabla de doble entrada escribiendo en cada casilla el resultado de multiplicar vectorialmente el vector de la fila por el de la columna que determinan la casilla

Producto vectorial	$\vec{u}_x$	$\vec{u}_y$	$\vec{u}_z$
$\vec{u}_x$			
$\vec{u}_y$			
$\vec{u}_z$			

Cuestión 5

De acuerdo con los resultados obtenidos en la cuestión anterior, y sabiendo que el producto vectorial tiene la propiedad distributiva respecto a la suma, buscar la expresión del producto vectorial de los vectores:

$$\vec{a} = a_x\vec{u}_x + a_y\vec{u}_y + a_z\vec{u}_z\,,\ \vec{b} = b_x\vec{u}_x + b_y\vec{u}_y + b_z\vec{u}_z$$

Conceptos adquiridos

Producto vectorial de dos vectores: Es otro vector, de módulo el área del paralelogramo formado por los dos vectores, dirección perpendicular al plano definido por los vectores, sentido el de avance de un tornillo que gire desde el multiplicando al multiplicador por el camino más corto.

Vectores paralelos: Si dos vectores son paralelos, su producto vectorial tiene que ser cero.

La superficie como vector: Cualquier superficie puede representarse por un vector de módulo su área dirección la perpendicular a ella y sentido dependiente del sentido en el que se recorre su perímetro.

Cálculo del volumen de un paralelepípedo: Para calcular el volumen de un paralelepípedo consideraremos sus aristas como vectores, calculamos el producto vectorial de dos de ellas y ese producto lo multiplicamos escalarmente por la tercera arista.

Conceptos relacionados.

Momento de una fuerza. Como se señalaba al comienzo, en el caso de la puerta del ascensor, la fuerza necesaria para abrir la puerta es diferente según el punto en que se aplique. La existencia de puntos fijos condiciona el resultado de la acción de la fuerza y hay que tener en cuenta, además de su dirección sentido y módulo, la posición en la que se aplican.

Para tener en cuenta la posición de la fuerza respecto a los puntos fijos que condicionan el movimiento definimos el vector posición de la fuerza respecto a estos puntos. Llamaremos ***momento de la fuerza respecto al punto*** al producto vectorial del vector de posición por la fuerza $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$.

Cuestión 6

Calcular los distintos momentos de la misma fuerza de 50 N de módulo, aplicada perpendicularmente a la puerta a 0,1 y 0,5 y 0,8 m de los goznes de la puerta. Relacionar el módulo de los momentos obtenidos con la "eficiencia" a la hora de abrir la puerta.