<u>Tema VI: Circuitos de Corriente Alterna</u>

Elementos de circuito en corrientes variables.- Régimen transitorio y estacionario de un circuito.- Empleo de la notación compleja. Impedancia de los elementos de circuito.- Asociaciones de elementos: impedancia equivalente.- Potencia en circuitos de corriente alterna.

Bibliografía: *"Física"* Paul A. Tipler Ed Reverté.

<u>Conocimientos previos</u>: tratamiento de circuitos de corriente continua. Nociones de números complejos.

<u>Objetivos</u>: Entender la diferencia entre corriente continua y corriente variable. Comprender la importancia de colocar como elementos de circuito en corrientes variables con el tiempo los distintos elementos pasivos.

<u>Introducción</u>

Hasta ahora, cuando hemos hablado de circuitos, entendíamos que la corriente que lo atravesaba era constante, es decir su valor no dependía del tiempo. Si pensamos en lo que ocurre cuando se conecta o desconecta el interruptor de un circuito, aunque éste sea tan simple como el mostrado en la figura 1, nos daremos cuenta que la corriente pasa de ser nula a tener un cierto valor constante o viceversa, lo que significa que existe un intervalo de tiempo en el que la corriente tiene que variar, es decir existe un régimen transitorio tanto en el cierre como en la apertura de un circuito por simple que éste sea. Pero no es ésta la única situación en la que nos encontraremos con circuitos en los que la coriente que circula por ellos sufre variación a lo largo del tiempo, el caso más común es el de circuitos de corriente alterna. Al estudio de estos dos casos vamos a dedicar el presente tema.

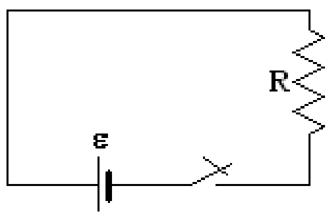

Figura 1

<u>Elementos pasivos de un circuito en corriente variable</u>

Cuando en corriente continua considerábamos una resistencia, encontramos que entre la corriente que la atravesaba, el valor de la resistencia y la diferencia de potencial que aparecía entre sus extremos se verificaba la ley de Ohm ($\Delta V = I \cdot R$) es decir, que en cada instante el producto de la intensidad por el valor de la resistencia nos daba el valor de la diferencia de potencial entre sus bornes. Esta relación, que como acabamos de decir se cumple instante a instante, se sigue verificando en corrientes variables y nos permite escribir

$$v_R(t) = R \cdot i(t)$$

que nos dice que la forma de variación de la intensidad y la diferencia de potencial es la misma (hemos reservado las letras minúsculas para las magnitudes que varían con el tiempo y las mayúsculas para las que no dependen de él).

Veamos que podemos decir de un condensador. Sabemos que en corriente continua, por un condensador no circula corriente, sólo mientras se esta cargando existe paso de cargas por el circuito al que está conectado. Lo que si es un hecho, es que en cada momento se verificará que su capacidad, su carga y la diferencia de potencial entre sus bornes se relacionan por: $q(t) = C \cdot v_C(t)$, lo que recordando que la intensidad es la derivada temporal de la carga, nos permite escribir:

$$i(t) \equiv \frac{d\,q(t)}{dt} = C\,\frac{d\,v_C(t)}{dt}$$

En forma análoga, en una autoinducción L, sabemos que una corriente variable con el tiempo, produce una f.e.m inducida que se opone a la variación de dicha corriente, cuyo valor es: $\varepsilon_L(t) = -L\frac{d\,i(t)}{d\,t}$, fuerza electromotriz, que considerada como caída de tensión será:

$$v_L(t) = -\varepsilon_L(t) = +L\frac{d\,i(t)}{d\,t}$$

Por tanto, cuando hablamos de corrientes variables con el tiempo, nos encontramos que la presencia de condensadores y de bobinas supone una relación entre las tensiones a las que están sometidas y las corrientes que los atraviesan, que ya no es tan sencilla como en el caso de las resistencias en corriente continua. Pasemos a ver como es el comportamiento de cada uno de estos elementos pasivos en el caso de corrientes variables con el tiempo.

Regímenes transitorio y estacionario

Diremos que un circuito ha alcanzado el régimen estacionario cuando sus magnitudes características se reproducen de forma idéntica a lo largo del tiempo, en esta situación se encuentra un circuito pasado un cierto tiempo desde que se conectó.

Como los fenómenos en la Naturaleza no se producen de forma brusca, hasta que se alcance el régimen estacionario, las magnitudes características del circuito irán variando para alcanzar su valor estacionario, es decir, el circuito estará en régimen transitorio.

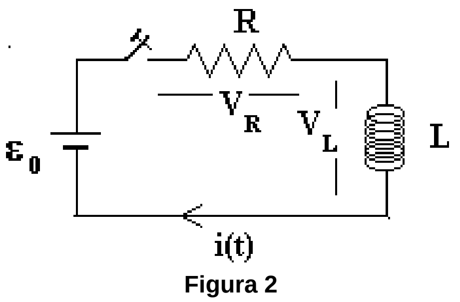

Figura 2
Esquema de un circuito R-L alimentado por un generador de c.c.

Veamos como ejemplo el circuito R-L de la figura 2, siendo "R" y "L" la resistencia y autoinducción equivalente del circuito que hemos alimentado por una pila de f.e.m "ε_0" que se conecta en t = 0

En cada instante, la tensión suministrada por el generador ε_0, se divide en caídas de tensión en la resistencia (v_R) y en la autoinducción (v_L).

$$\varepsilon_0 = v_R + v_L = i\,R + L\frac{d\,i}{d\,t}$$

La solución de esta ecuación (que se realiza con detalle en el apéndice 1), con la condición de corriente nula en el instante inicial [i(0) = 0] es:

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$$

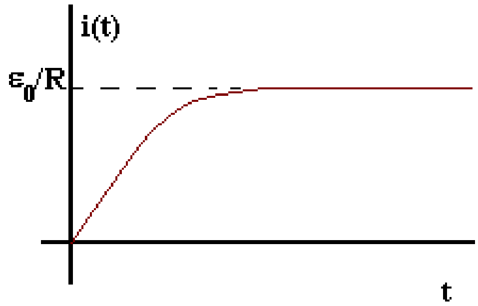

Figura 3
Variación con el tiempo de la corriente que circula por un circuito R-L al conectar, en t=0, un generador de c.c.

cuya representación gráfica se muestra en la figura 3.

En el estado estacionario, cuando el tiempo transcurrido es muy grande $(t \to \infty)$ se cumple: $i(\infty) = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\infty}\right)$, es decir: $i(t \to \infty) = \frac{\varepsilon_0}{R}$, lo que supone que la corriente que circula por el circuito no varía con el tiempo, con lo cual $L\frac{di}{dt} = 0$ y la caída de tensión se efectúa sólo en la resistencia, sin que influya la presencia de la autoinducción (despreciando la resistencia de la misma).

Veamos que ocurre en el transitorio. Al conectar la batería, se producirá el paso de una corriente, con lo que en la bobina aparecerá una f.e.m. inducida que se opondrá a que tenga lugar esa variación, razón por la que la corriente no llega al máximo de forma instantánea. Desde el punto de vista numérico, está claro que el valor del exponente del número "e", va a influir en el tiempo que la corriente tarde en alcanzar el valor estacionario. Ese exponente contiene la relación L/R, que tiene las dimensiones de un tiempo y se denomina (τ) tiempo propio del circuito: $\tau = \frac{L}{R}$. En el instante $t = \tau$ la corriente, toma el valor: $i(\tau) = \frac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-1}\right)$ que es siempre la misma fracción del valor final de la corriente, lo cual justifica el nombre de "propio" para ese tiempo que viene definido por la relación entre la autoinducción y la resistencia del circuito, que son dos características del mismo.

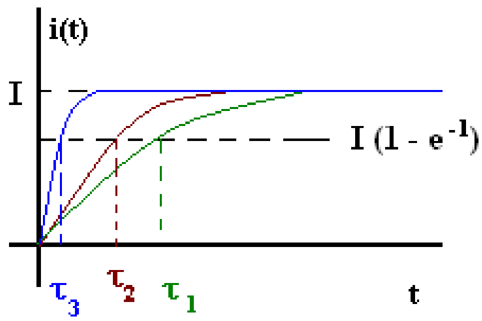

Figura 4
Representación de tres sistemas cuyos tiempos propios van disminuyendo de valor. Como $\tau_1 \succ \tau_2 \succ \tau_3$ el sistema "1" tarda más en alcanzar el estado estacionario que el "3"

Consideremos tres circuitos cuya intensidad en estado estacionario "I" sea la misma. Hemos definido el tiempo propio "τ" como la relación entre la autoinducción y la resistencia $\tau = \frac{L}{R}$, supongamos los tiempos propios de los tres circuitos cumplen: $\tau_1 \succ \tau_2 \succ \tau_3$, eso significará que el tiempo que tarda el circuito "1" en alcanzar el régimen estacionario es mayor que lo que tarda en logralo el tercero de los circuitos (figura 4) pues cuando se cumple que $t = \tau$ la intensidad que pasa por cada circuito es la misma fracción de la intensidad en estado estacionario, concretamente es $\left(1 - \frac{1}{e}\right)$ veces el valor final de la intensidad estacionaria, ya que hemos dicho que se cumple que: $i(\tau) = I\left(1 - e^{-1}\right)$

Otro ejemplo de régimen transitorio lo encontramos en el fenómeno de descarga de un condensador. Supongamos que tenemos un condensador cargado por estar unido a una batería como se muestra en la figura (5 - a) y sustituimos la pila por una resistencia como se muestra en la figura (5 - b) el condensador se descargará a través de la resistencia, por lo que aparecerá una corriente variable con el tiempo, i (t), sabemos que en el instante inicial el condensador tendrá una carga $Q = \varepsilon \cdot C$ y que transcurrido un cierto tiempo el condensador quedará descargado. Vamos a analizar con detalle el fenómeno.

Cuando el condensador está cargado aparece entre sus bornes una diferencia de potencial V_C que será igual a la fuerza electromotriz de la pila $\varepsilon = V_C$, al descargarse se tendrá que verificar también que la suma de las diferencias de potencial entre los elementos del circuito será igual a la fuerza electromotriz actuante, en este caso ninguna, luego se verificará:

$$V_C + V_R = 0 .$$

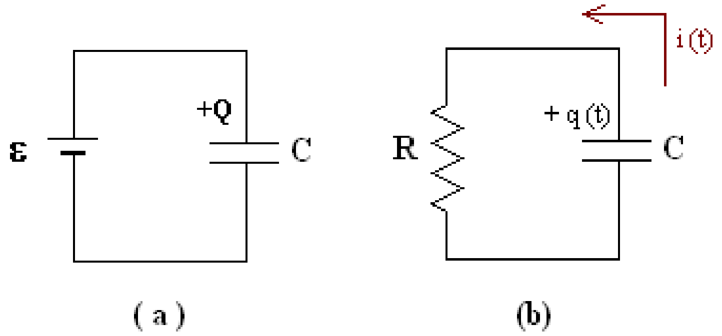

Figura 5
(a) El condensador conectado a una pila adquiere una carga "Q". (b) Al sustituir la pila por una resistencia, el condensador se descargará a su través.

Sabemos que en cada instante en la resistencia se cumple $V_R = R \cdot i(t)$, y en el condensador $C \cdot V_C = q(t)$, sustituyendo los respectivos valores de la diferencias de potencial en la ecuación anterior obtenemos: $R \cdot i(t) + \frac{1}{C} q(t) = 0$, lo que recordando la relación existente entre la intensidad que recorre un elemento de circuito y la carga que lo atraviesa nos permite escribir: $\frac{dq}{dt} R + \frac{1}{C} q = 0$, luego $\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} q$ o lo que es lo mismo: $dq = \left(-\frac{1}{R \cdot C} q\right) dt$, separando variables obtenemos: $\frac{dq}{q} = -\frac{1}{R \cdot C} dt$.

Recordando que al valor intermedio de la carga y por tanto variable con el tiempo, lo hemos representado por "q" [en vez de utilizar q(t)], al considerar el instante inicial y uno cualquiera intermedio, tenemos: $\int_Q^q \frac{dq}{q} = \int_0^t -\frac{1}{RC}\,dt$, es decir, $[\ln q]_Q^q = -\frac{1}{RC}[t]_0^t$, o lo que es lo mismo: $\ln q - \ln Q = -\frac{1}{RC}t$, es decir, $\ln\left(\frac{q(t)}{Q}\right) = -\frac{1}{RC}t$, recordando la definición de logaritmo neperiano, obtenemos: $\frac{q(t)}{Q} = e^{-\frac{1}{RC}t}$, de donde:

$$q(t) = Q\,e^{-\frac{1}{RC}t}$$

que nos da la variación de la carga del condensador con el tiempo.

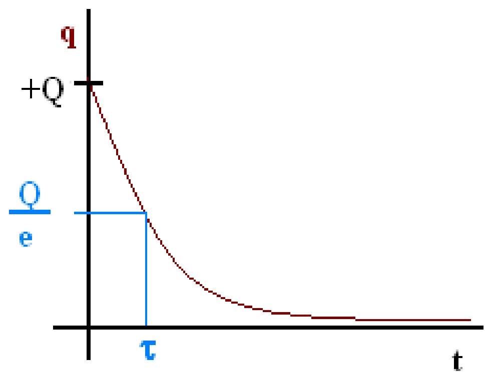

Figura 6

El exponente de la función que hemos obtenido $\frac{1}{RC}$, tiene las dimensiones de la inversa de un tiempo (se recomienda al alumno que lo compruebe) por ello al producto "RC" se le conoce como tiempo propio del circuito, pues ese producto cuyo valor sólo depende del circuito que estemos considerando es tal que cuando ha transcurrido un tiempo $\tau = RC$, la carga del condensador ha pasado a ser $\frac{1}{e}$ veces la carga "Q" que tenía inicialmente el condensador, como se puede apreciar en la figura 6.

Empleo de la notación compleja para el tratamiento de las corrientes alternas sinusoidales

En general, se denomina corriente alterna a aquella definida por magnitudes que varían de signo a medida que transcurre el tiempo. El caso más interesante es cuando la variación es armónica (cualquier otra variación puede expresarse como suma de variaciones armónicas) y las magnitudes son representables por funciones del tipo:

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

donde X_0 es la amplitud, ω la frecuencia angular y φ la fase, de la magnitud armónica.

Vamos a introducir una técnica matemática de gran utilidad para la trabajar con magnitudes que varían con el tiempo armónicamente. Recordando que $e^{j\alpha} \equiv \cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$ y como $\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha$ se puede escribir como: $1\cdot(\cos\alpha + j\,\mathrm{sen}\,\alpha)$, vemos que $e^{j\alpha}$ un número complejo de módulo unitario y fase α.

De todo lo anterior se desprende que la función que queremos representar $(x(t) = X_0\cos(\omega t + \varphi))$ se puede representar como la parte real de un número complejo de módulo X_0 y fase $\omega t + \varphi$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{X_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}\right\}$$

significando "Re" la parte real de la magnitud compleja entre corchetes.

La expresión $X_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}$ la podemos escribir como el producto de dos exponenciales: $\left(X_0\, e^{j\varphi}\right)\cdot e^{j\omega t}$ una dependiente del tiempo y la otra no, lo que leeremos diciendo que el número complejo $X_0\, e^{j\varphi}$ está multiplicado por la exponencial $e^{j\omega t}$, que es un número complejo de módulo unitario y fase dependiente del tiempo. Haciendo $X = X_0\, e^{j\varphi}$, podemos escribir $x(t) = \mathrm{Re}\left\{X\, e^{j\omega t}\right\}$.

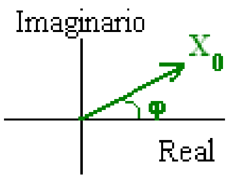

Figura 7

El término X es un complejo de módulo constante e igual a X_0 y fase φ, como se representa en la figura 7. Veamos el significado de la segunda exponencial.

El término $e^{j\omega t}$ es un número complejo de módulo unitario y fase ωt (recordar lo escrito más arriba para $e^{j\alpha}$), es decir mientras su módulo permanece inalterable su fase va variando con el tiempo, veamos como. Consideremos algunos instantes notables

Para "t = 0" obtenemos e^0, que es un complejo de módulo "1" y fase nula. Si transcurre el tiempo hasta que $t = \frac{T}{4}$, como $j\omega t = j\frac{2\pi}{T}\frac{T}{4} = j\frac{\pi}{2}$, obtenemos $e^{j\frac{\pi}{2}}$, es un complejo de módulo "1" y fase $\frac{\pi}{2}$. Al seguir aumentando el valor del tiempo transcurrido llegamos a $t = \frac{T}{2}$, como $j\omega t = j\frac{2\pi}{T}\frac{T}{2} = j\pi$, obtenemos $e^{j\pi}$, es un complejo de módulo "1" y fase π. En el instante $t = \frac{3T}{4}$, como $j\omega t = j\frac{2\pi}{T}\frac{3T}{4} = j\frac{3\pi}{2}$, obtenemos $e^{j\frac{3\pi}{2}}$, es un complejo de módulo "1" y fase $\frac{3\pi}{2}$, por último cuando el tiempo transcurrido es $t = T$, como $j\omega t = j\frac{2\pi}{T}T = j\,2\pi$, obtenemos $e^{j\,2\pi}$, es un complejo de módulo "1" y fase de nuevo nula. Es decir, que a medida que aumenta el tiempo, la representación del complejo de módulo unitario $e^{j\omega t}$ va girando dentro del plano complejo. Por tanto la representación de cualquier función multiplicada por $e^{j\omega t}$ será la de la función incluida en un plano complejo que gire con velocidad angular ω.

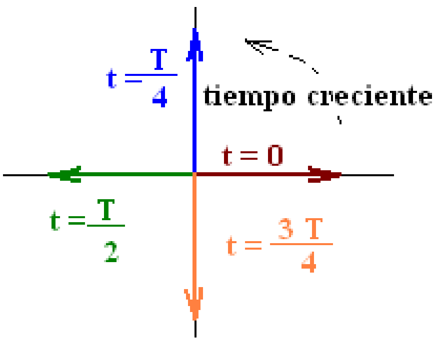

Figura 8

Representación del complejo $e^{j\omega t}$ al aumentar el tiempo

El producto de ambos complejos, lo podemos representar por un lado un complejo de módulo X_0 que forma un ángulo " φ " con el eje real, pero contenido en un plano complejo que gira con velocidad angular " ω ".

Si suponemos que el observador se encuentra girando solidario con el plano complejo (como nosotros lo estamos con la Tierra) la variación temporal que supone el giro, podemos no tenerla en cuenta, siempre que todas las magnitudes que intervengan en el problema tengan la misma dependencia temporal (se muevan con la misma velocidad angular).

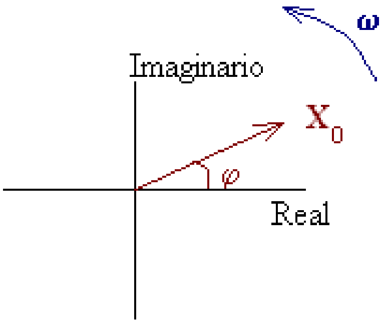

Figura 9
Representación fasorial de una magnitud armónica.

Esta es la denominada "representación fasorial" de una magnitud armónica. En ella se hace abstracción de la dependencia temporal, fijándose sólo en el complejo de módulo X_0, y fase φ respecto a un origen dado. La simplificación así obtenida, se puede mantener en tanto se cumpla que la respuesta del circuito sea de la misma frecuencia que impone el elemento activo o generador, lo cual permite hacer abstracción de la dependencia temporal, que de otra forma se arrastraría siempre en forma equivalente en todas las ecuaciones.

Para mejor comprender la utilidad de la notación exponencial introducida, veamos la simplificación que su uso representa en el cálculo de derivadas e integrales, operadores que se presentan frecuentemente en el comportamiento de circuitos con corriente variable. Así, para calcular la derivada temporal de la magnitud genérica que hemos definido, tendremos:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[X_0 \cos(\omega t + \varphi)\right] = -X_0\, \omega\, \mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

Por otra parte, empleando la notación compleja:

$$\frac{d}{dt}\left[X_0\, e^{j(\omega t+\varphi)}\right] = j\omega\, X_0\, e^{j(\omega t+\varphi)} = j\omega\, X\, e^{j\omega t}$$

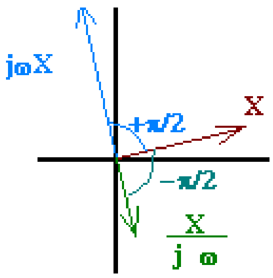

Figura 10
Representación de un fasor, su derivada y su integral temporales

cuya parte real es precisamente el valor de la $\frac{dx}{dt}$.

Así pues en notación fasorial, el derivar una magnitud armónica con respecto al tiempo, equivale simplemente a multiplicarla por $j\omega$. De la misma forma se demuestra que la integral temporal de una magnitud armónica, equivale a dividir por $j\omega$.

Hemos visto que la derivada temporal de un fasor X es otro fasor $j\omega$ X, cuyo módulo es ω veces el de X y la fase se ve aumentada en $\pi/2$ respecto de la del fasor original (multiplicar por j en el plano complejo equivale a rotar $\pi/2$ en sentido positivo). Análogamente, la representación de $\int x\, dt$

será. el fasor $X/(j\omega)$, cuyo módulo es ω veces menor que el de X y cuyo argumento es $\pi/2$ menor que el de X, como se representa en la figura 10. Como resumen de la notación fasorial, podemos escribir:

Magnitud	Representada por
$x(t)$	X
$\frac{d\,x(t)}{d\,t}$	$j\omega X$
$\int x(t)\,dt$	$\frac{X}{j\omega} = -j\frac{X}{\omega}$

Impedancia de los elementos de un circuito

Veamos ahora el comportamiento de los elementos de circuito en el caso particular de corriente alterna sinusoidal, con ayuda de la notación introducida. Definiremos "impedancia de un elemento pasivo" como la relación entre la tensión a la que está sometido y la corriente que lo recorre. En general dependerá de la naturaleza del propio elemento y de la frecuencia de la señal que lo atraviesa.

Para una resistencia hemos visto que: $v_R(t) = R\,i(t)$, que en notación fasorial podemos escribir como: $V_R = R\,I$, por lo que la impedancia correspondiente, Z_R, será:

$$Z_R = \frac{V_R}{I} = R$$

que es un número complejo de módulo "R" y fase nula, es decir un número real positivo.

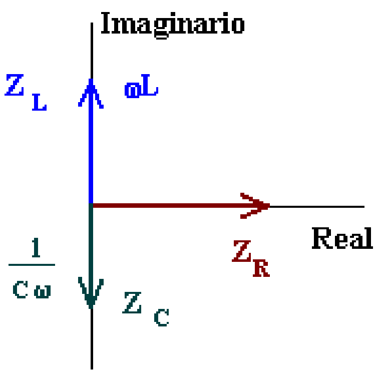

Figura 11
Representación en el plano complejo de las impedancias de una resistencia, una autoinducción y un condensador.

Pasemos al caso de los elementos denominados reactivos, es decir, autoinducciones y capacidades. En el caso de una autoinducción L, hemos visto que en términos de diferencia de potencial, la relación entre la corriente que lo atraviesa y la tensión entre sus extremos es: $v_L(t) = L\frac{d\,i(t)}{dt}$, teniendo en cuenta que para los fasores la derivada temporal es multiplicar por $j\omega$ nos permite escribir: $V_L = (j\omega L)\,I$ y la impedancia correspondiente será:

$$Z_L = j\omega L\,.$$

que es un número complejo de módulo "ωL" y fase $+\frac{\pi}{2}$, es decir, un número imaginario puro positivo.

En el caso de una capacidad C, sabemos que la relación entre la diferencia de potencial que aparece entre sus extremos y la carga que adquiere es: $\left[v_c(t)\right]\cdot C = q(t)$, lo que escrito en términos de intensidad es: $v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$, de donde teniendo en cuenta que en notación fasorial la integral temporal equivale a dividir por $j\omega$, nos permite escribir: $V_C = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{j\omega}\right) I$, luego, la impedancia será:

$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -\frac{j}{\omega C}.$$

que es un número complejo de módulo $\frac{1}{\omega C}$ y fase $-\frac{\pi}{2}$, es decir, un número imaginario puro negativo.

Se observa que las impedancias de los elementos reactivos (condensadores y bobinas) son números imaginarios puros, mientras que la impedancia de las resistencias son números reales, lo cual, como veremos, viene directamente ligado con los consumos de energía que presentan estos elementos.

Veamos que información podemos obtener de lo que acabamos de escribir respecto a intensidad que recorre un elemento pasivo y la tensión que a parece entre sus bornes, empleando la notación fasorial. Sabemos que se debe cumplir la ley de Ohm para corriente alterna que nos dice que el fasor tensión es igual al producto del fasor intensidad por el número complejo que es la impedancia del elemento pasivo:

$$V = I\,Z$$

Para aplicarlo, vamos a suponer que cada elemento es recorrido por una intensidad variable con el tiempo $i(t) = I_0 \cos\omega t$, y vamos a calcular la tensión que aparece entre bornes en cada caso.

El fasor intensidad (I) tendrá: $\left| \begin{array}{l} \text{modulo} = I_0 \\ \text{fase } \varphi_I = 0 \end{array} \right.$

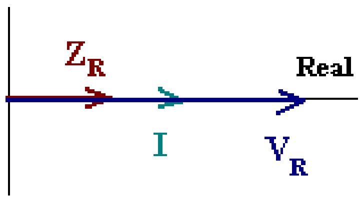

Figura 12
Representación de los fasores tensión e intensidad en una resistencia

Consideremos una resistencia R, su impedancia (Z_R) será el complejo de $\left| \begin{array}{l} \text{modulo} = R \\ \text{fase } \varphi_R = 0 \end{array} \right.$ como se debe cumplir la ley de Ohm, el fasor tensión en bornes de la resistencia tendrá: por módulo el producto de los módulos de la impedancia y de la intensidad y por fase la suma de las fases de ambos:

$$\left| \begin{array}{l} \mathrm{mod\,ulo}\left(V_R\right) = I_0 \cdot R \\ \mathrm{fase}\ \varphi_V = \varphi_I + \varphi_R = 0 \end{array} \right.$$ lo que gráficamente se representa en la figura 12.

Las variaciones temporales serán para la intensidad, la que hemos supuesto: $i(t) = I_0 \cos\omega t$ y para la tensión, como no existe variación de fase: $v(t) = V_R \cos\omega t$.

Consideremos ahora una bobina de autoinducción L, su impedancia (Z_L) será el complejo de $\left| \begin{array}{l} \mathrm{mod\,ulo} = \omega L \\ \mathrm{fase}\ \varphi_L = +\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$ para que se cumpla la y de Ohm el fasor tensión en bornes de la bobina tendrá por módulo el producto de los módulos de la intensidad y la impedancia inductiva y por fase la suma de ambos: $\left| \begin{array}{l} \mathrm{mod\,ulo}\left(V_L\right) = I_0 \cdot (\omega L) \\ \mathrm{fase}\ \varphi_V = \varphi_I + \varphi_L = \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$ lo que se representa gráficamente en la figura 13.

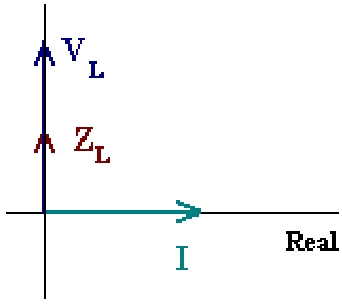

Figura 13
Representación de los fasores tensión e intensidad en una bobina

Las variaciones temporales serán para la intensidad serán de la forma:

$i(t) = I_0 \cos\omega t$ y para la tensión, como va desfasada en $+\dfrac{\pi}{2}$, $v(t) = V_L \cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ o lo que es lo mismo: $v(t) = -V_L \,\mathrm{sen}\,\omega t$.

Consideremos por último un condensador de capacidad C, su impedancia (Z_C) será el complejo de $\left| \begin{array}{l} \mathrm{mod\,ulo} = \dfrac{1}{\omega C} \\ \mathrm{fase}\ \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$ para que se cumpla la ley de Ohm, la tensión en bornes del condensador será un fasor de $\left| \begin{array}{l} \mathrm{mod\,ulo}\left(V_C\right) = I_0 \cdot \dfrac{1}{\omega C} \\ \mathrm{fase}\ \varphi_C = \varphi_I + \varphi_C = -\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right.$ lo que se representa en la figura 14.

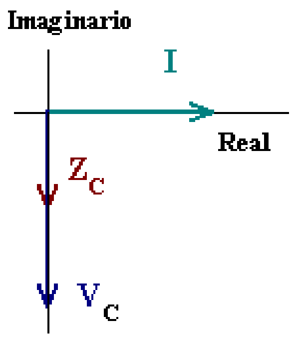

Figura 14
Representación de los fasores tensión e intensidad en un condensador

Las variaciones temporales serán para la intensidad, la que hemos supuesto: $i(t) = I_0 \cos\omega t$ y para la tensión, como va desfasada en $-\dfrac{\pi}{2}$, $v(t) = V_C \cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ o lo que es lo mismo:

$$v(t) = V_C \operatorname{sen} \omega t \quad .$$

Si queremos representar, en función del tiempo, lo que acabamos de obtener empleando fasores tendremos por ejemplo para una bobina, las variaciones temporales de la tensión y la intensidad que se muestran en la figura 15.

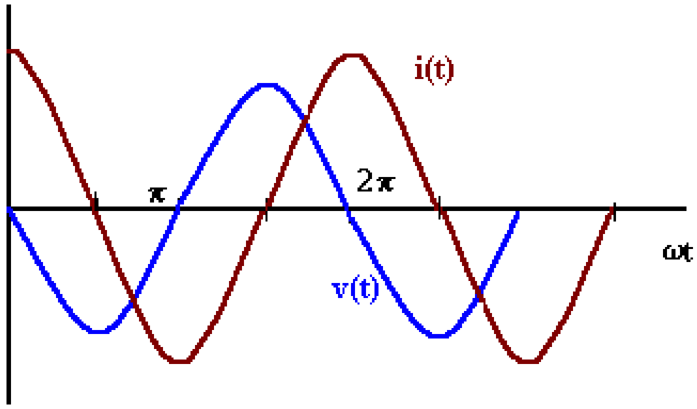

Figura 15
Representación de la variación temporal de la corriente que atraviesa una bobina y de la diferencia de potencial en bornes de la misma

Asociaciones de elementos: Impedancia equivalente

Hasta ahora nos hemos limitado al estudio de componentes puros; sin embargo, en un circuito los elementos se encuentran asociados entre sí y conviene introducir de forma análoga a como se hizo en corriente continua, la impedancia equivalente de una asociación.

Como ya se ha citado, las leyes de Kirchhoff estudiadas en los circuitos de corriente continua se generalizan de inmediato a los circuitos de corriente alterna sin más que tener en cuenta que debemos aplicarlas en cada instante.

No obstante, pasando a notación fasorial, el carácter lineal de las leyes de circuitos permite hacer también abstracción de la dependencia temporal y las leyes quedan formalmente invariables, cuando se aplican a los fasores.

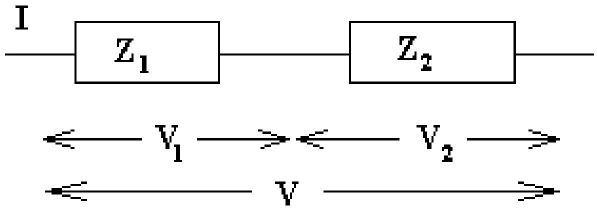

Figura 16
Esquema de dos impedancias conectadas en serie

Así, en una asociación en serie de dos impedancias Z_1 y Z_2 las leyes antedichas indican que la corriente i(t) es la misma en las dos impedancias y que la caída de tensión total v(t) es la suma de la caída en cada una de ellas, lo que expresado en términos de fasores equivale a que el fasor intensidad “I” es el mismo y los fasores diferencia de potencial cumplen:

$$V_1 + V_2 = V$$

Por tanto, la impedancia equivalente, será:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{V_1 + V_2}{I} = \frac{V_1}{I} + \frac{V_2}{I} = Z_1 + Z_1$$

"La impedancia equivalente de una asociación en serie es la suma de impedancias de cada uno de los elementos"

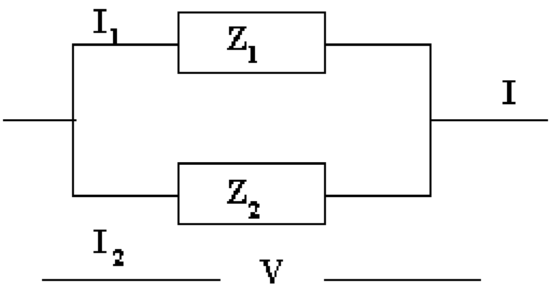

Figura 17
Esquema de dos impedancias conectadas en paralelo

De forma análoga, en una asociación en paralelo la tensión v(t) será la misma en las dos impedancias Z_1 y Z_2 y la suma de las intensidades que recorran cada una será la intensidad i(t) de la asociación, lo que en términos de fasores se escribirá diciendo que el fasor tensión "V" es único y los fasores intensidad cumplen:

$$I = I_1 + I_2$$

con lo cual:

$$\frac{I}{V} = \frac{1}{Z} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$$

Debemos subrayar que ahora las impedancias son en general números complejos, por lo que la suma de impedancias será la suma de los números complejos correspondiente que las representan y al hablar de la inversa de la impedancia, hablamos del complejo inverso de la misma.

En el caso de elementos en paralelo, conviene introducir la denominación de *"admitancia"* de un elemento o asociación que es la inversa de su impedancia:

$$Y = \frac{1}{Z}$$

con lo cual resulta, que: "La admitancia equivalente de una asociación paralelo es la suma de las admitancias de cada uno de los elementos".

Aplicación circuito R-L-C serie

Este circuito se encuentra frecuentemente en la practica; puede provenir, por ejemplo, de la asociación de un condensador y de una bobina en serie, llevando la bobina asociada no solo su autoinducción L sino también una resistencia R (la de los arrollamientos que la forman).

Las impedancias de cada elemento sabemos que son:

$$Z_R = R,\ Z_L = j\omega L,\ Z_C = -\frac{j}{\omega C}$$

Al estar los tres elementos en serie, la impedancia equivalente será

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

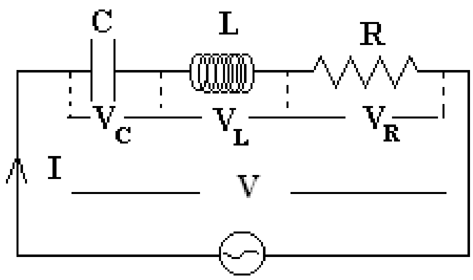

Figura 18
Esquema de un circuito R L C serie. La tensión "V" en bornes del generador será la suma de las caídas de tensión en los tres elementos

Si llamamos ξ y θ al módulo y al argumento de la impedancia, tendremos:

$$\xi = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\operatorname{tag}\theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Como podemos ver, tanto el módulo como la fase de la impedancia, varían con la frecuencia. En la figura 19 se ha representado la variación del módulo de la impedancia para los tres elementos puros (resistencia, bobina y condensador) y podemos observar que existe una frecuencia en la que coinciden los módulos de la impedancia debida a una bobina y a un condensador, como ambas impedancias son números imaginarios puros, pero de fase opuesta, eso quiere decir que existe una frecuencia en la que el circuito presenta una impedancia exclusivamente real, aunque esté compuesto por elementos reactivos. Esta frecuencia, denominada "frecuencia de resonancia ω_r" tiene una importancia grande, pues si el circuito entra en resonancia, absorberá mayor energía que otra frecuencia cualquiera (recordar lo que significaba resonancia de un oscilador armónico) Es decir, captará (sintonizará) mejor las señales emitidas a esa frecuencia que a cualquier otra. Como hemos dicho que en la resonancia, se ha de cumplir la igualdad de módulos de la impedancia capacitiva e inductiva, tendremos:

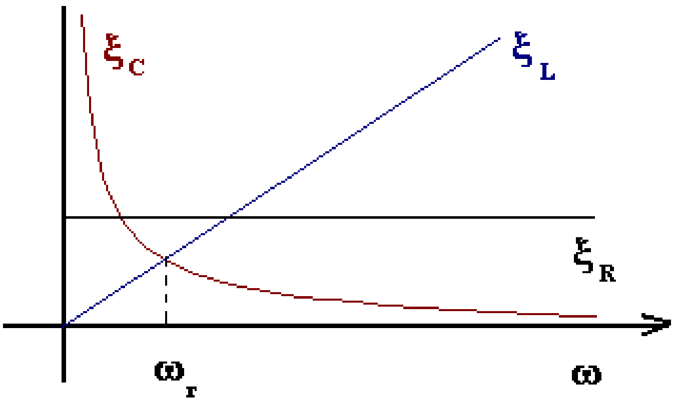

Figura 19
Representación de la variación con la frecuencia del módulo de la impedancia presentada por una resistencia ξ_R, una autoinducción ξ_L y un condensador ξ_c.

$$\omega_r L = \frac{1}{\omega_r C}$$

o bien

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{L\,C}}$$

y debido a que las fases de dichas impedancias son opuestas, resulta que la impedancia total del circuito es real e igual a R:

$$\text{para } \omega = \omega_r : \quad Z = R$$

o bien, en módulo y argumento:

$$\xi = R \quad \theta = 0$$

Gráficamente la variación de Z con ω la podemos representar (figuras 20 y 21) por:

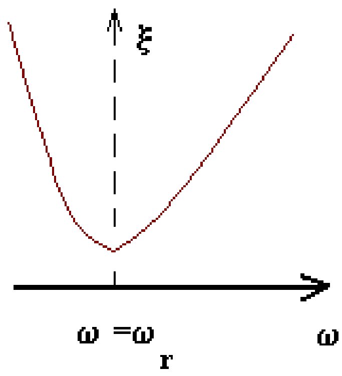

Figura 20
Representación de la variación con la frecuencia del módulo de la impedancia de un circuito R L C

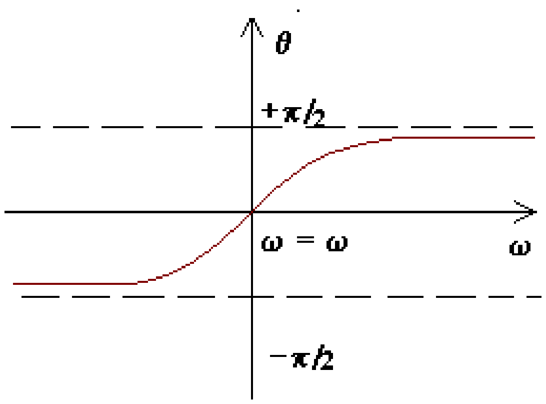

Figura 21
Representación de la variación con la frecuencia de la fase de la impedancia de un circuito R L C

Para frecuencias inferiores a ω_r resulta:

$$\omega\,L < \frac{1}{\omega\,C}$$

lo cual indica un comportamiento capacitivo $(\theta < 0)$.

A la frecuencia de resonancia ocurre que la impedancia es mínima y coincide con el valor de la resistencia. Si la resistencia es pequeña pueden fluir intensidades muy elevadas por el circuito.

A frecuencias superiores a la de resonancia ocurre que:

$$\omega\,L > \frac{1}{\omega\,C}$$

y el comportamiento es inductivo $(\theta > 0)$.

Si hablamos en términos de la intensidad que atraviesa el circuito serie (figura 18) al variar la impedancia del mismo variará la intensidad que lo recorre, pues, a cualquier frecuencia se tiene que cumplir la ley de Ohm $I = \dfrac{V}{Z}$, por tanto la intensidad que recorre el circuito, variará con la frecuencia, haciéndose máxima a la frecuencia de resonancia. Si tenemos en cuenta que la energía de la corriente está relacionada con la intensidad, esta energía será máxima en resonancia, como ya esperábamos.

Es también útil discutir el comportamiento del circuito con valores de la resistencia distintos; supuesto que la tensión alterna de alimentación sea fija (su amplitud se mantiene constante), al variar la frecuencia de la fuente, se presenta la situación representada en la figura 22.

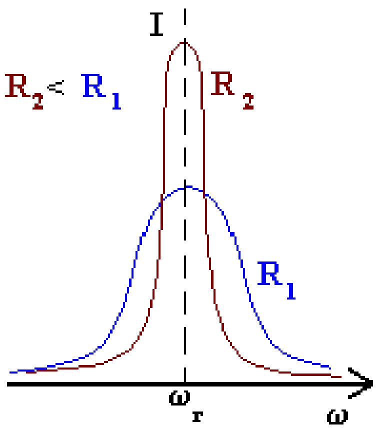

Figura 22
Variación del módulo del fasor intensidad en un circuito R L C serie

El circuito se hace tanto más "selectivo" cuanto menor es su resistencia, esto significa que existen valores de R para los que sólo pasan intensidades apreciables para frecuencias muy próximas a la de resonancia. Si al circuito se le aplica una señal que contiene mezcladas muchas frecuencias, la corriente toma valores elevados sólo para la frecuencia a que está "sintonizado" el circuito, o frecuencia de resonancia del mismo.

El comportamiento de un circuito R-L-C paralelo es semejante en todo al del circuito serie, sólo que intercambiado los papeles de impedancia por admitancia. Es la admitancia la que toma un valor mínimo en torno a la resonancia, punto en el cual se cancelan la Y_L con la Y_C; por tanto en este punto la impedancia es la impedancia paralelo, R_P , del circuito. La selectividad del circuito es tanto mayor cuanto mayor es la R_P, (es decir cuanto menor es la admitancia en la resonancia).

<u>Potencia en circuitos de corriente alterna</u>

Comencemos de nuevo tratando el caso más familiar, que es el de una resistencia. Si la resistencia es recorrida por una intensidad:

$$i(t) = I_0 \cos\omega t$$

entre sus extremos existirá una diferencia de potencial:

$$v(t) = R \cdot i(t) = R\, I_0 \cos\omega t = V_0 \cos\omega t$$

donde I_O y V_0 son denominados corriente y tensión "de pico".

En esta situación la potencia instantánea disipada en la resistencia será:

$$P_R(t) = i(t) \cdot v(t) = V_0\, I_0 \cos^2 \omega t$$

que toma siempre valores positivos. En la práctica es más significativa la denominada "Potencia media por ciclo", definida como:

$$\overline{P}_R = \frac{1}{T}\int_0^T P_R \, dt$$

siendo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ el período de la señal.

De las expresiones de la potencia instantánea y promedio, teniendo en cuenta que el valor medio de $\cos^2 \omega t$ es ½, resulta:

$$\overline{P}_R = \frac{V_0 \, I_0}{2} = V_{ef} \, I_{ef}$$

donde se ha introducido la tensión eficaz V_{ef} y la corriente eficaz, I_{ef}, relacionadas con los valores de pico por

$$V_{ef} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} \;\; y \;\; I_{ef} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

Además, teniendo en cuenta que $V_O = I_0 R$, se deducen las siguientes expresiones para la potencia media:

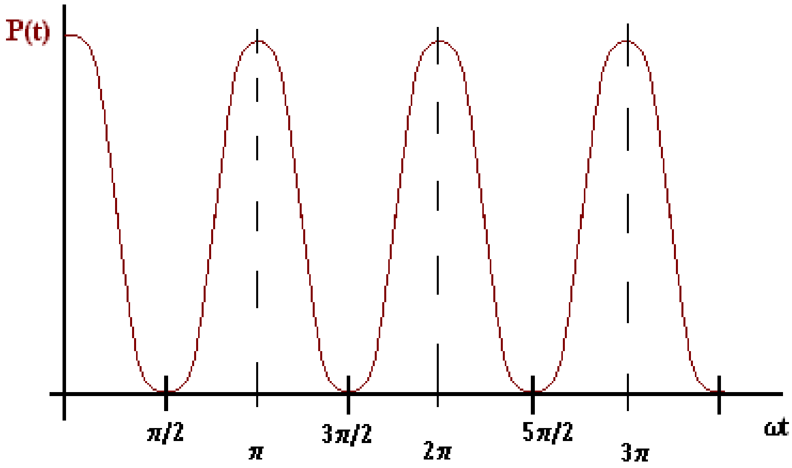

Figura 23
Representación de la potencia instantánea disipada en una resistencia.

$$\overline{P}_R = \frac{V_{ef}^2}{R} = I_{ef}^2 \, R$$

que nos dicen que la tensión e intensidad eficaces son la tensión e intensidad que deberían existir en una resistencia para que esta disipase la misma cantidad de energía por unidad de tiempo que se disipa en el circuito de alterna.

En un condensador o en una autoinducción, la corriente y la tensión están desfasadas en $\pi/2$; si una depende con $\cos\omega t$, la otra lo hará en la forma $\operatorname{sen}\omega t$ y la potencia instantánea tendrá una expresión de la forma: $P(t) = \pm P_0 \operatorname{sen}\omega t \cos\omega t$, siendo $P_0 = I_0 \cdot V_0$ (el signo dependerá de considerar un condensador o una bobina) es decir $P(t) = \pm P_0\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2\omega t\right)$.

A diferencia de lo que ocurre en una resistencia, la potencia toma alternativamente valores positivos y negativos; como el valor medio en un periodo del seno de un ángulo es nulo, se tiene que la potencia media disipada por ciclo en un condensador o en una autoinducción es nula:

$$\overline{P}_L = \overline{P}_C = 0$$

En los elementos denominados reactivos, en los que la corriente y la tensión están desfasadas en $\pi/2$, la potencia media disipada es nula, pues aunque la potencia instantánea es no nula toma alternativamente valores positivos y negativos equivalentes. Físicamente en estos elementos existe un flujo reversible de energía entre ellos y el generador que alimenta al circuito.

En el caso general, en el que exista un desfase φ entre la tensión y la intensidad, podemos descomponer ésta en dos componentes, una I_r paralela a la tensión y otra I_x en cuadratura con la misma.

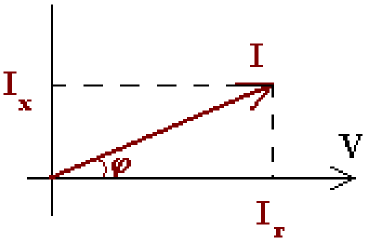

Figura 24

$$I_r = I\cos\varphi$$

$$I_x = I\,\mathrm{sen}\varphi$$

La componente en cuadratura, I_x, no contribuye a la potencia media disipada en el circuito, por ello se la denomina componente “reactiva” y solo contribuye a un trasiego reversible de energía entre el generador y el circuito. La otra componente, I_r, da una potencia media disipada

$$P = \frac{1}{2} V\, I_r = V_{ef}\; I_{ef}\; \cos\varphi$$

que es la responsable del suministro irreversible de energía entre el generador y el resto del circuito.

APÉNDICE 1

Sabemos que en cada instante, la intensidad de corriente que circula por el circuito, cumple: $\varepsilon_0 = R\,i + L\dfrac{di}{dt}$, que lo podemos escribir como: $L\dfrac{di}{dt} = \varepsilon_0 - R\,i$, o lo que es lo mismo: $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L}(\varepsilon_0 - R\,i)$; que escribimos como: $\dfrac{di}{dt} = \dfrac{1}{L}\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right)\varepsilon_0$, es decir: $di = \dfrac{\varepsilon_0}{L}\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right) dt$, separando variables escribimos: $\dfrac{di}{\dfrac{\varepsilon_0}{L}\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right)} = dt$, como la integral del primer miembro será igual a la integral del segundo, tenemos: $\int dt = \int \dfrac{di}{\dfrac{\varepsilon_0}{L}\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right)}$, hemos dicho que en el instante inicial (t = 0), la intensidad es nula, luego: $\int_0^t dt = \dfrac{L}{\varepsilon_0}\int_0^i \dfrac{di}{\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right)}$, la integral del segundo miembro es el logaritmo neperiano del paréntesis con las constantes adecuadas.

$[t]_0^t = \dfrac{L}{\varepsilon_0}\left[-\dfrac{\varepsilon_0}{R}\ln\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right)\right]_0^i$, luego: $t - 0 = \dfrac{L}{\varepsilon_0}\left(-\dfrac{\varepsilon_0}{R}\right)\left[\ln\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right) - \ln(1-0)\right]$, teniendo en cuenta que el logaritmo de la unidad es siempre cero, obtenemos: $t = -\dfrac{L}{R}\ln\left(1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i\right)$, que escrito en forma exponencial nos lleva a: $1 - \dfrac{R}{\varepsilon_0} i = e^{-\frac{R}{L}t}$, o lo que es lo mismo $i = \dfrac{\varepsilon_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}}\right)$