Módulo I.2.3 Concepto de derivada de una función.

Existen magnitudes cuyo valor varia al modificarse el valor de otra, si se logra una expresión matemática que nos proporcione esta información tenemos una ***función***. En muchas ocasiones es necesario conocer no sólo los valores que va tomando la función, sino también la forma en la que se produce esa variación.

Pongamos un ejemplo: Un grupo de amigos deciden realizar una actividad de puenting, para lo que, además de conocer las características del lugar, necesitan preparar el material adecuado (por ejemplo las cuerdas). En este momento pueden surgir preguntas importantes como: ¿la resistencia de la cuerda depende de su longitud?, ¿en qué momento la cuerda deja de alargarse?, ¿depende este momento del grosor?. Los organizadores de esta actividad recomiendan que *"La medición de la cuerda también es clave, deben restarse 5 metros como mínimo sobre la altura del puente o soporte",* pero, ¿es siempre esto suficiente? damos por supuesto que el alargamiento de la cuerda depende del peso que soporta, pero ¿esta dependencia es siempre lineal?, o, ¿se alarga de forma diferente según la longitud de cuerda utilizada?. Podemos pensar que para responder a estas preguntas basta conocer una ecuación matemática que nos relacionara las variables longitud de la cuerda y peso que soporta, pero no nos basta saber que existe una variación, deberemos saber como es esa variación de la longitud para cada valor del peso.

¿Por qué es importante este concepto?

En Física también existen múltiples situaciones en las que nos interesa conocer como varía una función para cada valor de la variable independiente. Por ejemplo supongamos el movimiento de un tren cuando llega a una estación. Sabemos que tendrá que reducir su velocidad hasta pararse al final del andén, tenemos que saber como disminuye la velocidad para que el tren no se salga de la estación, es decir en función del espacio que debe recorrer. No es lo mismo que la disminución de la velocidad se empiece a producir antes o después de entrar en el anden

Cuestión 1
¿Qué conductor prefieres? el que frena muy cerca de la estación, u otro que empiece a frenar cuando la distancia es mayor. ¿por qué?

Cuestión 2
En competiciones deportivas de moto "GP" se alaba al piloto que hace "buenas apuradas de frenada" ¿por qué?

Cuestión 3
El émbolo de un motor de automóvil es empujado por una fuerza constante durante el proceso de compresión del combustible en su interior. La variación del volumen del gas, que se produce en el émbolo ¿es constante o variable? ¿por qué?.

Cuestión 4
Sabemos que en un imán, los polos del mismo nombre se repelen. Si queremos mantener separados dos imanes enfrentados por polos del mismo nombre ¿tendremos que realizar una fuerza? ¿dependerá de la distancia a la qué se encuentren?. Si

queremos disminuir esta distancia ¿tendremos que variar la fuerza que realizábamos?¿dependerá esta fuerza de la variación de la distancia entre los imanes?

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

Acabamos de comprobar que existen funciones, en las que cuando consideramos distintos incrementos de igual valor de la variable independiente, el incremento que experimenta la variable dependiente no siempre es el mismo, a pesar de que la variable independiente varíe la misma cantidad.

Esta situación nos plantea algunas situaciones en Física que hemos de resolver de manera especial. Por ejemplo, cuando tenemos un cuerpo cuya masa está repartida de forma no uniforme y queremos saber su densidad, al dividir la masa total por el volumen total obtenemos un valor al que podemos llamar densidad media, pero el valor obtenido no corresponde a la densidad de cualquier parte del cuerpo. Entonces tenemos que tomar volúmenes muy pequeños (diferenciales de volumen) y ver la masa de esa diferencial de volumen (diferencial de masa), podríamos así conocer la densidad de cada pequeña parte (o punto) del cuerpo.

Cuestión 5
Un coche realiza un viaje de un lugar de Madrid a un lugar de Barcelona distante 700 Kilómetros. Sale de Madrid a las 8:00 horas y llega a Barcelona a las 18 :00 horas ¿Podemos conocer cual a sido su velocidad media?. Además sabemos que el conductor paró dos horas para comer. ¿Altera esto la velocidad media del viaje?. Si paró en el punto medio del camino a las 13:00 horas. ¿Llevó siempre la misma velocidad?. ¿Podríamos conocer de una manera más precisa la velocidad que lleva en cada instante tomando intervalos de camino más pequeños?.

En casos como estos en los que queremos relacionar la variación de dos variables y no existe variación siempre igual, en lugar de hablar de incremento hablamos de diferenciales.

Cuestión 6
¿por qué no podemos tomar incrementos finitos para conocer la forma en que cambia una magnitud dependiente cuando varia la magnitud independiente?

Gráficamente también podemos observar fácilmente que si la función no es lineal, cuando tomamos un intervalo finito, lo que hacemos es sustituir un trozo de curva, correspondiente a la función, por una recta correspondiente a una función lineal que no es la que estábamos analizando. Esta función lineal está caracterizada por una pendiente que nos da información sobre como varia la variable dependiente en función de la independiente, y que podemos calcular mediante la tangente del ángulo que forma con el eje de la variable independiente, y por tanto es el cociente de dividir el incremento de la variable dependiente entre el incremento correspondiente de la variable dependiente, y nos dirá como variaría la variable dependiente en función de la independiente si la relación entre ellas fuera una relación lineal.

Está claro que esa sustitución nos proporciona una aproximación, pero no los valores reales. Si partimos el incremento de la variable independiente en dos iguales, obtendremos diferentes resultados en cada mitad, pero cada uno de esos dos valores será más próximo a la realidad ya que las dos secantes en conjunto se acercan más a la curva que cuando teníamos una sola.

Repitiendo esta operación, podemos sustituir la primera secante correspondiente al intervalo total por una linea quebrada que se va aproximando más y más a la curva a medida que disminuimos el tamaño del intervalo, como ocurre en los intervalos azul, rojo y verde de la figura 1, de forma que en cada punto podemos llegar a tener una tangente, como se representa en la figura 2.

La pendiente de la tangente en cada punto es la que nos va a determinar si la variación es más rápida o más lenta y se calcula como el limite del cociente " Δy " entre " Δx " cuando " Δx " en muy pequeño, es decir tiende a cero. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

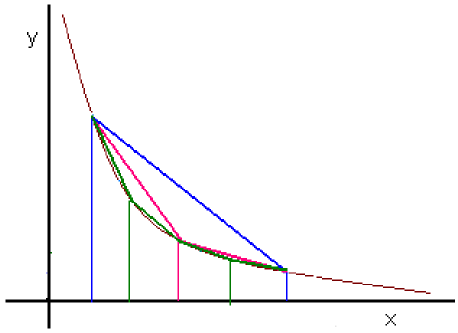

Figura 1

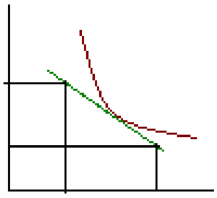

Figura 2

Esta claro que, si vamos haciendo este límite en todos los puntos de la línea que representa la función, vamos obteniendo un valor en cada punto, tendremos por tanto un valor del límite para cada valor de la variable independiente, que será otra función que denominamos derivada de la función. De forma que $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ y , dado que cuando " Δx " tiende a cero es una diferencial, y entonces " Δy " es también una diferencial se escribe $y' = \frac{dy}{dx}$

Conocimientos relacionados: cálculo de derivadas

Función	Derivada
y = K	y' = 0
y = a x	y' = a
y = x^2	y' = 2x
y = a x^n	y' = a n x^{n-1}
y = a/x^n = a x^{-n}	y' = a (- n) x^{-n-1}
y = a e^x	y' = a e^x
y = a e^{nx}	y' = a n e^{nx}
y = L x = ln x	y' = 1/x
y = sen x	y' = cos x
y = cos x	y' = - sen x
y = tag x	y' = - cotag x = 1/ $\cos^2$ x