DERIVADAS

Derivadas parciales. Diferencial de una función de varias variables. Derivada direccional

Derivadas parciales

Un caso que merece una mención especial es el cálculo de la derivada de una función, según una coordenada (al fin y al cabo una dirección), es lo que conocemos como derivada parcial de una función. Conceptualmente dará igual que la función sea escalar o vectorial (ya sabemos que si la función es vectorial lo que estamos diciendo será aplicable a cada coordenada, y tendremos que repetirlo para las otras).

Empezaremos por el caso más fácil de representar, que tengamos una función escalar que depende de dos variables $\lambda = \lambda(x, y)$ [como puede ser la altura de una montaña en función de su longitud y latitud geográfica], de la que nos interesa saber su variación según la dirección del eje "X", y después su variación según el eje "Y".

Por simplicidad, vamos a trabajar con un punto concreto P(a,b), para generalizar lo que obtengamos, tendremos que considerar que lo que obtenemos para el punto P es válido para cualquier otro punto de la función $\lambda = \lambda(x, y)$, pues al punto P no le vamos a poner ninguna condición concreta sólo que sea un punto del plano en el que esté definida la función, es decir exigimos que P sea un punto cualquiera del plano "XY" y que esté definida $\lambda(a, b)$ [en el ejemplo que hemos puesto, que el punto de coordenadas (a,b) esté debajo de la montaña].

Como se ve en la figura 1, la función es representable en tres dimensiones, el plano horizontal (XY) contendrá a las variables independientes y en el eje vertical representamos la función. La variación en la dirección del eje "X" en el punto "P" se verá mejor, si trazamos un plano perpendicular al eje "Y" que pase por "P" (plano y = b), de esta manera obtenemos una figura plana, en ese plano y = b.

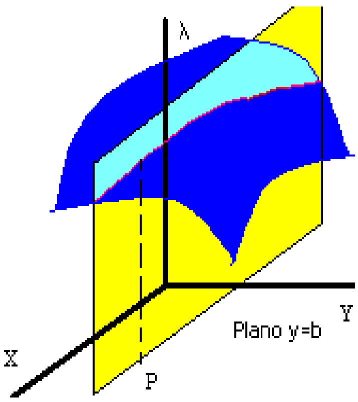

Figura 1
La función será la superficie pintada en azul, el plano, amarillo, corta la superficie en la línea roja

La situación con la que nos encontramos ya es conocida para nosotros, pues tenemos una función en el plano (X, λ) ver figura 2, en el que podemos calcular el cociente entre la variación de λ , y la variación de la variable independiente en este caso "X" ese cociente incremental (que en el ejemplo es negativo) será lo que llamaremos derivada parcial de λ respecto x, y lo representaremos por:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \lambda}{\Delta x} \right)_{y=\text{constante}}$$

De nuevo, como en geometría plana, la derivada nos da información sobre la variación de la función en el punto que nos interesa (en este caso proyección del punto P sobre el eje"X"). Gráficamente vemos que es "lenta" pues es necesario un gran intervalo Δa (en la variable independiente) de variación en la coordenada "X" para obtener una pequeña variación $\Delta\lambda$ de la función, además vemos que esta variación es negativa; es decir que la pendiente de la función es negativa y pequeña, que son las informaciones que podemos obtener de cualquier derivada "total" de una función, en una dimensión [y = f(x)] en un punto.

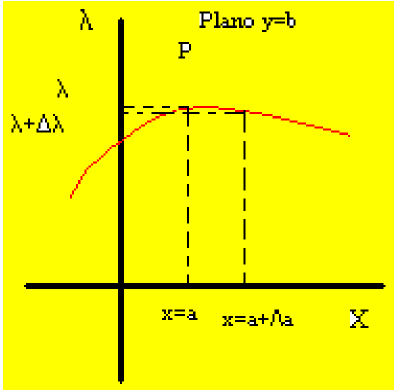

Figura 2

Para saber la variación de la función $\lambda = \lambda(x,y)$ en el punto "P" según la dirección del eje "Y", debemos actuar como en el caso anterior, es decir cortaremos la función por un plano perpendicular al eje "X" que pase por el punto "P", el plano x = a (ver figura 3).

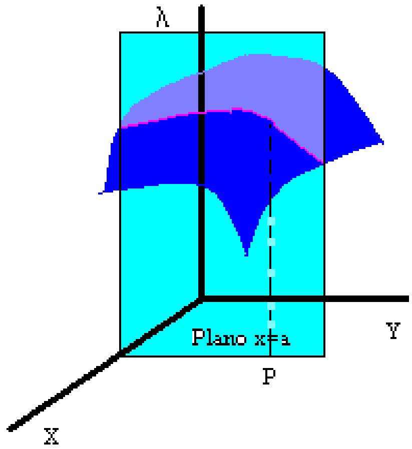

Figura 3

En ese plano, el punto en el que queremos calcular la derivada será el punto [b, $\lambda(b)$]. Al aumentar el valor de la variable independiente "b" en Δb, vemos que la función "λ" pasa de valer $\lambda(b)$ a valer $\lambda(b+\Delta b)$, que, en la figura 4, de nuevo es una cantidad menor.

Por tanto en este plano también, el valor de la función diminuye al aumentar el valor de la variable independiente, lo que nos indica que la derivada parcial de la función "λ" con respecto de "y" manteniendo "X" constante, que será el cociente de $\lambda(b+\Delta b)$ entre Δy, será negativa.

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y} = \left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]_{x=cte} = \left[\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta\lambda}{\Delta y}\right]_{x=cte}$$

Cuyo significado geométrico es el de la pendiente de la línea tangente a la curva en ese punto.

Hemos calculado como varía la función $\lambda = \lambda(x,y)$ en el punto P(a,b) cuando se mantienen constante o la variable "x" o la variable "y". Al ser particularizado para el punto en cuestión, la variación de λ con "x" (manteniendo "y" constante e igual a "b") nos dará un número; y para la variación con "y" (manteniendo "x" constante e igual a "a") otro número.

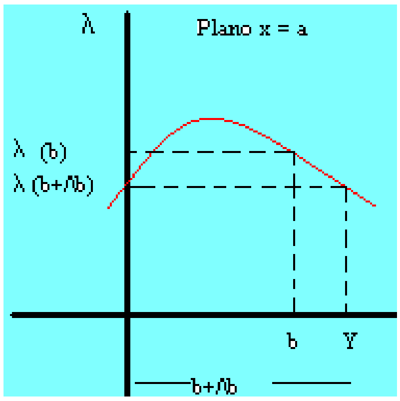

Figura 4

Como es lógico, si trabajamos a x=cte (por ejemplo x=a) pero para cualquier valor de "Y", lo que obtendremos, será una función que nos representará la variación de $\lambda(x,y)$ en el plano x = a. Luego $\left[\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right]_{x=a}$ es una función de una variable que nos informa de la variación de la superficie tridimensional $\lambda(x, y)$ [representada en azulón en las figuras], cuando cortamos esta superficie por el plano x = a [plano azul claro], y la $\left[\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right]_{y=b}$ es una función de una variable que nos dice como varía la superficie tridimensional cuando la cortamos por el plano y = b [plano amarillo].

La generalización de lo que hemos dicho será hacer que x vaya tomando los valores 0,1,2,3,... , todos los números reales, es decir que se convierta en parámetro. Luego la $\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_{x=cte}$ será una función que representa la variación de la función original $\lambda = \lambda(x, y)$ en cada plano x=cte.

Por la propia definición, podemos calcular las derivadas parciales sucesivas de la función $\lambda = \lambda(x, y)$, si bien tendremos que especificar que variable vamos manteniendo constante, y lo denotaremos por: $\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}\right)_{y=cte}$, $\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial x\partial y}\right)$ manteniendo constante primero la variable "y" después la variable "x", y así sucesivamente.

Cuando queramos saber la variación total de la función $\lambda(x, y)$, deberemos saber como varía λ con "X" cuando "Y" es constante, después como varía λ con "Y" cuando "X" es constante multiplicar cada "variación" por lo que nos "movemos" en la dirección correspondiente y esa será la variación total de la magnitud λ. Para expresar en términos matemáticos, lo que acabamos de decir escribimos: $d\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)_{y=cte} dx + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)_{x=cte} dy$ que será la expresión de la diferencial de una función de dos variables.

Si la magnitud que debemos estudiar es una función vectorial $\vec{a} = \vec{a}(x, y)$, hemos de tener en cuenta que para estar perfectamente definida en cada punto debemos conocer su módulo su dirección y su sentido, lo que como ya hemos dicho varias veces supone que tendremos tres funciones escalares, y para cada una de ellas podremos hablar de la derivada parcial respecto de cada una de las variables independientes.

Funciones de tres o más variables

Acabamos de analizar el caso de una magnitud escalar que es función de dos variables independientes, que por comodidad de representación hemos supuesto las coordenadas del punto en el plano, y a su vez hemos empleado las coordenadas rectangulares por entender que son con las que el lector se encuentra más familiarizado.

Pasemos ahora a considerar magnitudes que son función de tres o más variables. Esta situación se dará con relativa frecuencia en Física, pues existen una gran cantidad de fenómenos en los que la magnitud que los caracteriza depende de la posición, y no es nada raro encontrarnos con magnitudes que dependen del espacio y del tiempo.

El mayor de los problemas, es entender algo en el espacio de cuatro dimensiones (situación que tendremos si, por ejemplo, queremos describir la presión en un punto de nuestra atmósfera) pues si tenemos la función $\xi = \xi(x, y, z)$ y queremos representarla, necesitaríamos poder dibujar un espacio en el que existieran las coordenadas “X” “Y” “Z” y “ ξ ”, es decir cuatro coordenadas.

Normalmente, por lo que se opta, es por estudiar la función $\xi = \xi(x, y, z)$ primero cortada por el hiperplano (plano en el espacio de cuatro dimensiones) z = cte, luego cortada por y = cte y por último cortada por x = cte. Eso es exactamente lo que nos enseñan en la predicción del tiempo al representarnos las isobaras y decirnos que nos muestran la situación en capas medias de la atmósfera (ellos que tienen toda la información en capas bajas, medias y altas pueden hacer una mejor predicción y más prolongada en el transcurso de los días). Es más, al hablar de lo ocurrido a ese nivel (capas medias de la atmósfera) a lo largo del día anterior, nos tienen que mostrar una secuencia de imágenes (“cine”), superposición de las fotografías estáticas de lo ocurrido a las 8 horas, 9 horas, 10 horas... , así a lo largo de todo el día, (con terminología matemática cortes por planos t = 8h, t =9h, t = 10h ...) frente a la “foto estática” (esta es la situación al mediodía de hoy), para darnos la sensación de una dimensión más. La presión resulta ser función de la posición y del tiempo (cuatro dimensiones)

Por tanto, si la mecánica es trabajar con cortes de la función $\xi(x, y, z, t)$ por hiperplanos, nos encontramos con lo ya estudiado. Consideremos una función $\xi = \xi(x, y, z)$, de lo que acabamos de decir se desprende, que para conocer su variación en el espacio debemos analizar, en primer lugar lo que ocurre cuando z = cte después cuando y = cte y por último cuando es constante “x”. Debemos realizar un primer corte para z =0, lo que equivale a estudiar una función como la $\lambda(x, y)$ que ya hemos hecho en el apartado precedente. Luego el significado de las derivadas parciales será el mismo que el descrito con anterioridad, si bien ahora tendremos que expresar que dos variables independientes son constantes. Tendremos entonces:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\substack{y=cte \\ z=cte}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta x}\right)_{\substack{y=cte \\ z=cte}} \;;\; \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x=cte \\ z=cte}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta y}\right)_{\substack{x=cte \\ z=cte}} \;;\; \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{\substack{x=cte \\ y=cte}} = \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \xi}{\Delta z}\right)_{\substack{x=cte \\ y=cte}}$$

Si el diferencial de una función nos dice como es la variación de la función al considerar las tres dimensiones de las que depende y la derivada parcial nos dice que tipo de variación tenemos al considerar dos de ellas constantes, el diferencial de la función será la suma del tipo de variación según cada variable independiente multiplicada por “la cantidad” que varia esa variable:

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\substack{y=cte \\ z=cte}} dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x=cte \\ z=cte}} dy + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{\substack{x=cte \\ y=cte}} dz$$

La generalización a un mayor número de variables independientes supone indicar en cada caso cuales son las variables que se mantienen constantes, por ejemplo en el caso de la función $\xi = \xi(x, y, z, t)$, tendremos:

$$d\xi = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)_{\substack{y=cte\\z=cte\\t=cte}} dx + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)_{\substack{x=cte\\z=cte\\t=cte}} dy + \left(\frac{\partial \xi}{\partial z}\right)_{\substack{x=cte\\y=cte\\t=cte}} dz + \left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)_{\substack{x=cte\\y=cte\\z=cte}} dt$$

Si la magnitud es una función vectorial debemos, como ya hemos dicho en otras ocasiones, razonar de idéntica manera con las tres funciones escalares que nos darán el módulo la dirección y el sentido del vector correspondiente.

Derivadas direccionales

Supongamos ahora que necesitamos saber la variación según una dirección determinada del escalar, es decir su derivada direccional, según una dirección que forma un ángulo conocido con la normal a la superficie equiescalar en un punto.

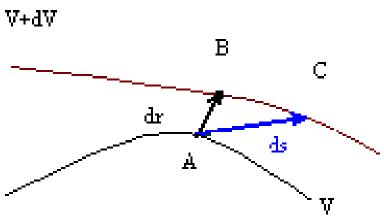

Figura 5

En la figura hemos representado dos líneas equiescalares “V” y “V+dV” de un campo, si en el punto “A” queremos conocer la derivada según la dirección “AC”, tendremos que la variación de la magnitud “V” (que es dV) será la derivada según la dirección “AC”, que representamos por $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{segun } \vec{u}_s}$, multiplicado por “lo que nos movemos” en esa dirección $ds = |d\vec{s}|$. Por otro lado sabemos que el gradiente , que tiene la dirección de la máxima variación, cumple que $dV = (\nabla V) \cdot d\vec{r}$, siendo $d\vec{r}$ el sentido del vector gradiente. Si llamamos “β” al ángulo que forman los vectores $d\vec{r}$ y $d\vec{s}$, podemos escribir: dV = $(\nabla V) \cdot ds \cdot \cos\beta$, ya que $d\vec{r}$ es la proyección de $d\vec{s}$ en la dirección de máxima variación.

Luego la derivada en la dirección definida por $d\vec{s}$ será: $\left(\frac{dV}{ds}\right)_{\text{segun } \vec{u}_s} = (\nabla V) \cdot \cos\beta$