Tema IV: Corriente eléctrica

Corriente y densidad de corriente eléctrica. La ecuación de continuidad. Corriente de conducción. Ley de Ohm. Propiedades de conducción en los materiales: Conductores, semiconductores y aislantes. Circuitos de corriente continua. Leyes de Kirchoff. Teoremas del análisis de redes: superposición, Thevenin y Norton.

Bibliografía: "*Física*". Paul A. Tipler Ed. Reverté. *"Física Universitaria"*. Sears. Zemansky. Young Ed Addison-Wesley. *"La naturaleza de las cosas"*. Susan M. Lea. John Robert Burke Ed Paraninfo

Conocimientos previos: Nociones sobre los circuitos en corriente continua. Nociones sobre el fenómeno de la conducción eléctrica y el campo eléctrico.

Objetivos: Diferenciar elemento activos de pasivo en un circuito de corriente continua, desde el punto de vista energético. Conocer el significado de los parámetros que caracterizan los elementos de un circuito de corriente continua. Aplicar las leyes de los circuitos al análisis de los mismos. Fijar los conceptos de: densidad de corriente, campo eléctrico no conservativo, conductividad y resistividad. Dar información sobre los procesos de conducción en los distintos medios materiales.

Hasta ahora hemos tratado con cargas eléctricas en reposo, y hemos considerado los efectos que producían sobre otras cargas o asociaciones de cargas o el comportamiento de los campos que generaban. Vamos ahora a considerar cargas que se mueven para caracterizarlas y entender algunos de los efectos que producen y cuales son las causas que provocan ese movimiento.

Corriente y densidad de corriente eléctrica.

El movimiento de las cargas es lo que conocemos como corriente eléctrica, y el proceso por el que se transporta la carga se denomina conducción. Para caracterizar este fenómeno, se define la magnitud **intensidad de corriente**, como la velocidad a la que se transporta la carga por un punto dado en un medio conductor. Representa, por tanto, la variación neta de la carga en el tiempo en un punto dado

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

La unidad empleada para medir esta nueva magnitud, la intensidad, serán culombios/segundo, que recibe el nombre de amperio.

Consideremos un medio conductor con un solo tipo de portador de carga, cada uno de los cuales posee una carga q, decimos esto pues a lo largo del tema veremos que existen conductores que tienen varios tipos de portadores de carga, que contiene "n" de ellos por unidad de volumen y supondremos que todos tienen la misma velocidad $\vec{v}$. Para calcular la corriente que atraviesa una cierta superficie imaginaria "S" en su volumen, esto es la carga que pasa por ella en la unidad de tiempo, razonaremos de la siguiente manera.

Sea $\vec{S}$ el vector que caracteriza la superficie a través de la cual fluye la corriente (fig. 1). En el intervalo de tiempo Δ t, el espacio recorrido por cada portador es $v\,\Delta t$, luego las cargas que atravesarán la superficie en el intervalo Δt serán las contenidas inicialmente dentro del prisma oblicuo de la figura. El volumen del paralelepípedo será el producto escalar de los vectores superficie de la base y arista: $\vec{S}\cdot(\vec{v}\,\Delta t)$, por tanto, el número total (N) de partículas que se encuentran en este volumen será el producto del número de cargas por unidad de volumen del conductor "n" por el valor del volumen, es decir: $N = n\left[\vec{S}(\vec{v}\,\Delta t)\right]$, lo que supone una carga

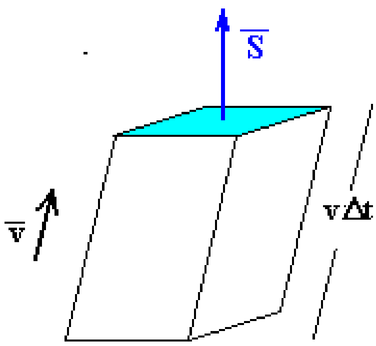

Figura 1
Los electrones contenidos en el paralelepípedo cuya área de la base es $\vec{S}$ y su arista $\vec{v}\cdot\Delta t$ atravesarán la superficie $\vec{S}$ en el tiempo Δt

$$Q = n\,q\,\vec{S}\,(\vec{v}\,\Delta t)$$

la corriente a través de la superficie será:

$$I(S) = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = q\,n\,\vec{S}\,\vec{v}$$

La expresión de I(S) está formada por una parte característica del medio conductor que hemos considerado (la carga que poseen los portadores, el número de ellos por unidad de volumen y lo fácil o difícil que es para esos portadores moverse en el volumen del conductor) $q\,n\,\vec{v}$ y por otra parte que la hemos fijado nosotros y es meramente geométrica, S. Para desglosar estas dos contribuciones introducimos una nueva magnitud, la densidad de corriente $\vec{J} = n\,q\,\vec{v}$, lo que nos permite escribir la intensidad en la forma

$$I = \vec{J}\cdot\vec{S}$$

La densidad de corriente la mediremos en amperios m^{-2}.

Para llegar a esta expresión, hemos considerado que las cargas atraviesan una superficie cualquiera "S". Si queremos que nuestro resultado sea más fiable, debemos considerar una superficie diferencial, pues cuanto más pequeña sea la superficie que analicemos, serán más ciertas todas las aproximaciones que hemos realizado, de forma que de manera más general debemos escribir:

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{s}$$

A pesar de todo, en la práctica es difícil aceptar que todos los portadores tengan la misma velocidad $\vec{v}$. Es más realista interpretar la densidad de corriente en la forma:

$$\vec{J} = n\,q < \vec{v} >$$

donde $< \vec{v} >$ es el valor medio de la velocidad de arrastre de los portadores.

Sabemos, que la intensidad es la variación temporal de la carga que atraviesa un conductor, lo que expresaremos por: $i(t) = \frac{dQ}{dt}$. Consideremos un volumen "τ" cualquiera en el interior de un conductor, en él existirá una carga $Q = \int_\tau \rho \, d\tau$, de modo que si por ese volumen circula una corriente podemos escribir $i(t) = \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \, d\tau$, donde la derivada total de la carga se tiene que transformar en derivada parcial al depender la densidad de carga también de la posición en la que nos encontremos.

Si en ese volumen queremos relacionar la intensidad de corriente que lo atraviesa, con la densidad de corriente escribiremos: $i(t) = -\oint_\Sigma \vec{J}\, d\vec{s}$, siendo "$\Sigma$" la superficie que cierra el volumen "τ" que estamos considerando, e indicando el signo negativo que el sentido del vector superficie es en todos los puntos hacia el exterior del volumen. La propiedad transitiva de la igualdad , nos permite obtener la **ecuación de continuidad**:

$$\oint_\Sigma \vec{J}\, d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_\tau \rho \, d\tau$$

siendo, como hemos dicho, τ el volumen limitado por la superficie Σ.

De la expresión anterior se desprende que si no existe variación temporal de la densidad de carga (por cada carga que sale del volumen entra una nueva) la densidad de corriente será una constante lo que se conoce como corriente estacionaria,.

Corriente de conducción. Ley de Ohm

Acabamos de introducir el concepto de corriente eléctrica como el movimiento a lo largo de una dirección de portadores de carga, generalmente electrones, en el volumen de un conductor. Está claro que si los electrones se mueven dentro del volumen de un conductor es porque existe una fuerza que los pone en movimiento en su propia dirección y aunque "choquen" con otros electrones o con los átomos que constituyen el material, mantienen esa velocidad promedio de la que hemos hablado. Según sabemos, un campo eléctrico ejerce sobre las cargas una fuerza en su dirección (será en el mismo sentido si son cargas positivas y en sentido contrario si son cargas negativas) podemos por tanto establecer una relación causa efecto entre el campo eléctrico y la corriente que aparece, que escribiremos de la forma:

$$\vec{J} = \sigma \, \vec{E}$$

que se conoce como ley de Ohm.

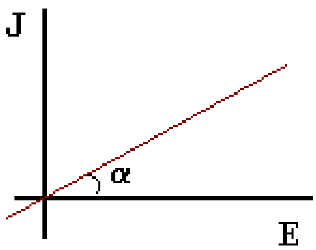

Figura 2
Si el conductor es lineal la densidad de corriente y el campo eléctrico tendrán una variación como la representada

La constante de proporcionalidad, que depende del conductor, la denominaremos conductividad del medio y se medirá en $\frac{A\ m^{-2}}{V\ m^{-1}}$ que se denomina siemens m^{-1} (la implantación del siemens como unidad de conductividad es menor, se sigue usando el $\Omega^{-1}\ m^{-1}$). Cabe esperar, que en el caso general la dependencia sea complicada, por lo que vamos a centrarnos en el caso más simple, aunque de gran significación práctica, los medios lineales homogéneos e isótropos.

- **Un medio lineal**, es aquel que presenta una relación lineal entre la densidad de corriente y el campo como la representada en la figura 2, lo que permite hablar de una conductividad σ cuyo valor, al ser independiente del campo, será $\sigma = \operatorname{tag}\alpha$.

- **Un medio es homogéneo** si presenta las mismas propiedades en todos sus puntos. En nuestro caso equivale a indicar que σ no depende de la posición.

- **Un medio es isótropo** si sus propiedades son las mismas en todas las direcciones, esto es, si no existen direcciones privilegiadas como ocurre, por ejemplo, en los materiales amorfos. En estas condiciones la conductividad es una magnitud escalar.

Por tanto para medios conductores lineales, homogéneos e isótropos, el parámetro que caracteriza macroscópicamente su comportamiento conductor, será la "constante" conductividad (σ).

Vamos a dar una forma conocida a la Ley de Ohm que acabamos de escribir, para ello vamos a hacer uso de nuestra experiencia con los fenómenos de conducción, que seguro tiene que ver con la conducción de la corriente eléctrica doméstica. Consideremos un conductor filiforme, en él tanto el campo eléctrico como la densidad de corriente y el vector superficie tienen la misma dirección en todos los puntos, por tanto el producto escalar del vector densidad de corriente por el vector superficie transversal del hilo será el producto de los módulos, con lo que podemos prescindir del carácter vectorial de estas magnitudes y trabajar exclusivamente con sus módulos y los signos que correspondan. De la definición de intensidad obtenemos $I = \vec{J} \cdot \vec{S} = J\,S = \sigma\ E\ S$ $= \sigma \dfrac{\Delta V}{L} S$, Siendo ΔV a la diferencia de potencial que genera el campo eléctrico y "L" la longitud del hilo conductor. La expresión anterior $I = \sigma \dfrac{\Delta V}{L} S$ la podemos reordenar, separando las magnitudes que dependen del material del que esté constituido el conductor y obtenemos $I = \sigma \dfrac{S}{L} \Delta V$ de donde

$$\Delta V = \left(\frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \right) I$$

la magnitud entre paréntesis se conoce como resistencia del hilo conductor "R", que se medirá en ohmios. Todo ello nos permite escribir

$$\Delta V = R\ I$$

que se conoce como ley de Ohm para los circuitos eléctricos.

La resistencia del conductor que hemos introducido, normalmente se escribe como: $R = \rho \dfrac{L}{S}$, donde hemos introducido una nueva magnitud la resistividad del material " ρ " cuya unidad en el S.I. será (voltio metro)/ amperio, o simplemente ohmio metro ($\Omega \cdot m$). Esta claro que la resistividad "ρ" es la inversa de la conductividad "σ", y por tanto también lo serán sus unidades, de ahí que como ya hemos dicho más arriba aún hoy, es muy normal encontrarnos conductividades expresadas en ohmio^{-1}.m^{-1}, que muchas veces lo encontraremos escrito como mho.m^{-1}.

En general la resistividad (o la conductividad) depende de la temperatura de diferente forma, según sea la naturaleza del conductor, por eso se define el coeficiente térmico de la resistividad (en terminología inglesa, RTC), como:

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dT}$$

Si la resistividad <u>aumenta</u> con la temperatura, este coeficiente será positivo (resistencia PTC), como ocurre en los metales, y si <u>disminuye</u>, esto es, <u>si la conductividad disminuye cuando aumenta la temperatura</u>, el coeficiente será negativo (resistencias NTC), como ocurre en los semiconductores.

Normalmente, para metales, se toma una temperatura de referencia, T_0, y empleando el valor de la resistividad a esta temperatura, ρ_0, se utiliza

$$\alpha_0 = \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{d\rho}{dT}\right]_{T=T_0}$$

Para pequeñas variaciones, $T - T_0$, de la temperatura se puede considerar que la resistividad varía con la temperatura en la forma: $\rho = \rho_0\left[1+\alpha_0\left(T-T_0\right)\right]$. Para intervalos mayores se recurre a una expresión más general:

$$\rho = a + b\,T + c\,T^2 + \ldots$$

Problema 1.- La variación de la resistividad del cobre puro con la temperatura viene dada en la siguiente tabla. Calcular el coeficiente térmico de la resistividad para el cobre.

$\rho\times 10^8\ \Omega\times m$	T (K)
0,583	125
0,916	175
1,25	225
1,59	275

Tabla 1

Como no nos dan temperatura respecto de la que referir el coeficiente térmico, lo haremos respecto de la mayor, que es prácticamente el cero Celsius.

Al ser unos datos numéricos no podemos calcular la derivada de la resistividad respecto de la temperatura, debemos por tanto hacerlo como el incremento de la resistividad dividido por el incremento de la temperatura para dos valores de esta. Tomando los valores correspondientes a las temperaturas 275 K y 125 K, tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{\rho_{275}}\left[\frac{\Delta\rho}{\Delta T}\right] = \frac{1}{1,59\times 10^{-8}}\frac{1,59\times 10^{-8} - 0,583\times 10^{-8}}{275-125}$$

$= 4,22\times 10^{-3}\ K^{-1}$

Tomemos ahora las temperaturas 275 K y 175 K:

$$\alpha = \frac{1}{1{,}59 \times 10^{-8}} \frac{1{,}59 \times 10^{-8} - 0{,}916 \times 10^{-8}}{275 - 175} = 4{,}24 \times 10^{-3}\ K^{-1}$$

Tomando ahora la pareja de datos que nos falta tenemos:

$$\alpha = \frac{1}{1{,}59 \times 10^{-8}} \frac{1{,}59 \times 10^{-8} - 1{,}25 \times 10^{-8}}{275 - 225} = 4{,}28 \times 10^{-3}\ K^{-1}$$

Como vemos el resultado es el mismo en los tres casos (la diferencia, en el caso más desfavorable, es del orden de 8 centésimas en 4 unidades, es decir de 8 en 400, del 2%).

En los semiconductores, como su conductividad varía con la temperatura de forma exponencial según una ley del tipo $\sigma = \sigma_0\, e^{-\frac{\varepsilon_A}{kT}}$, los resultados serán completamente distintos, si bien la mecánica de cálculo y los principios empleados serán idénticos, obteniendose resultados como una mayor conductividad al aumentar la temperatura.

Propiedades de conducción en los materiales: Conductores, semiconductores y aislantes

Pasemos ahora al estudio microscópico de la conducción. Sabemos que la corriente se puede entender como el arrastre por un campo eléctrico de unos “portadores" de carga como son los electrones (conductores electrónicos como metales y semiconductores) o los cationes y aniones (conductores iónicos como por ejemplo los electrolitos y los gases ionizados).

En ausencia de campo los portadores están sometidos a un movimiento totalmente desordenado consecuencia de la agitación térmica (los portadores se van a comportar como las moléculas de un gas, que tienen una energía cinética promedio que depende de la temperatura absoluta, pero su dirección y sentido están distribuidos totalmente al azar) Al aplicar un campo eléctrico un portador de carga “q” y masa “m” estará sometido a una aceleración:

$$a = \frac{F_{electrica}}{m} = \frac{q\,E}{m}$$

siendo ahora la velocidad de cada portador suma de dos términos, el correspondiente a la agitación térmica, v_{ter}, que por ser totalmente al azar no dará lugar a un transporte neto de carga en ninguna dirección, y la velocidad de arrastre por el campo, v_{arr}, que por ser ordenada (en la dirección del campo eléctrico aplicado) dará lugar a una corriente eléctrica de densidad, en su misma dirección cuyo valor será:

$$J = n\, q\, v_{arr}$$

Si el portador no está sometido a ningún tipo de oposición al movimiento ordenado, su velocidad, y en consecuencia la corriente, aumentará con en tiempo, $v_{arr} = a\ t$. Sin embargo, sabemos que al aplicar una batería a un conductor se produce una corriente estacionaria, cuyo valor nos lo da la ley de Ohm, de forma instantánea prácticamente y que este valor se mantiene mientras el campo se mantenga constante. Para resolver esta aparente contradicción se aceptó como aproximación la existencia del tiempo de relajación “ τ ” que es una característica del proceso de frenado u oposición al movimiento de arrastre de los portadores y que permite poner:

$$v_{arr} = a\,\tau = \frac{q\,E}{m}\tau$$

siendo en consecuencia

$$J = \frac{n\,q^2}{m}\tau \cdot E$$

Para materiales isótropos el tiempo de relajación coincide con el tiempo libre medio entre colisiones.

Introducido el tiempo de relación τ como parámetro característico a escala microscópica de un medio conductor, vemos a introducir ahora otro parámetro, la movilidad "μ" de un portador que definimos como la relación entre la velocidad estacionaria de arrastre que adquiere y el módulo del campo que actúa sobre el mismo.

$$v_{arr} = \mu\,E$$

resultando la relación entre ambos parámetros microscópicos

$$\mu = \frac{q}{m}\tau$$

La movilidad en el S.I. se mide en $m^2\ V^{-1}$ s. Conviene hacer notar que la relación vectorial

$$\vec{v}_{arr} = \mu\,\vec{E}$$

implica que μ es negativa para portadores con carga negativa, y positiva para los portadores positivos.

Para terminar vamos a relacionar el parámetro macroscópico conductividad, con el microscópico movilidad, ya que recogiendo las últimas relaciones

$$\vec{J} = \sigma\,\vec{E} = n\,q\,\vec{v} = n\,q\,\mu\,\vec{E}$$

para conducción debida a un solo tipo de portador, resultando:

$$\sigma = n\,q\,\mu$$

Si tenemos varios tipos de portadores obtenemos:

$$\sigma = \sum_i n_i\,q_i\,\mu_i$$

Para el caso frecuente, de tener sólo dos tipos de portadores, de cargas iguales y opuestas, $q_-=-q_+$, tomando las movilidades en valor absoluto se tiene la expresión

$$\sigma = q_+(n_+\,\mu_+ + n_-\,\mu_-)$$

ya que el producto $q\,\mu$ es siempre positivo, tanto para portadores de carga positiva como negativa.

Problema 2.- Por un hilo de cobre pasa una densidad de corriente de 10^3 A/m^2. Suponiendo que cada átomo contribuye a la conducción con un electrón.

a) Calcular la velocidad de arrastre electrónica correspondiente a esta densidad de corriente.

Utilizando la conductividad observada (5.9×10^7 mho m^{-1}).

b) Calcular el tiempo medio de colisión para el electrón de cobre.

c) Si la temperatura es de 27º C. Comparar la velocidad térmica a esta temperatura con la obtenida en el primer apartado.
Peso atómico del cobre 63.6. Densidad del cobre 8.92 gr/cm^3. Número de Avogadro 6.02 × 10^{23}.Constante de Boltzmann 1.38 × 10^{-23} j K^{-1}

Datos

Apartado a)
Densidad de corriente (J) = 10^3 a m^{-2}
Carga de los portadores (electrones) q = 1.6 × 10^{-19} c
Peso atómico del Cu (M) = 63.6
Densidad del Cu (d) = 8.92 g cm^{-3} = 8.92 × 10^3 kg m^{-3}
Número de Avogadro (N_A) = 6.02 × 10^{23}

Sabemos que la densidad de corriente cumple: $\vec{J} = nq\langle\vec{v}\rangle$ *. Como nos hablan de un hilo conductor, los vectores densidad de corriente y superficie son dos vectores paralelos, lo que nos permite escribir: J = n q <v>. De la expresión anterior, conocemos: el valor de la densidad de corriente, la carga de los portadores y para poder calcular la velocidad de arrastre nos hace falta conocer el número de portadores por unidad de volumen de la muestra.*

Para calcular el número de portadores recordaremos que un mol de una sustancia tiene un número de moléculas iguales al número de Avogadro, como nos dicen que cada átomo de Cu contribuye a la conducción con un único electrón, el número de moléculas (que coincide con el de átomos al ser una molécula monoatómica) será a su vez el número de portadores.

Por tanto n (número de portadores / unidad de volumen) =número de átomos / unidad de volumen =

$$= \frac{numero\ de\ moleculas}{unidad\ de\ volumen} = \frac{numero\ de\ moles \times N_A}{unidad\ de\ volumen} = \frac{\frac{masa}{masa\ molecular} \times N_A}{unidad\ de\ volumen} = \frac{densidad}{masa\ molecular} \times N_A .$$

$$n = \frac{d}{M} \times N_A = 8.45 \times 10^{28} \text{ portadores m}^{-3}$$

Luego la velocidad <v> = $\frac{J}{nq}$ *= 7.4 × 10^{-8} m s^{-1}*

<u><v> = 7.4 × 10^{-8} m s^{-1}</u>

b) Conductividad (σ) = 5.9 × 10^7 mho m^{-1}

Sabemos que la conductividad es: $\sigma = nq\mu$ *, siendo* μ *la movilidad de los portadores, que está relacionada con el tiempo medio de colisión “* τ *”, por la expresión:* $\mu = \frac{q}{m}\tau$ *, por tanto:* $\tau = \frac{m\sigma}{nq^2}$ *= 2.5 × 10^{-14} s*

$$\underline{\tau = 2.5 \times 10^{-14}\ s}$$

c) Temperatura de la muestra T = 300 K

Sabemos que la temperatura de la muestra se refleja por la velocidad de los portadores y que se cumple que la energía *térmica del sistema es su energía cinética:* $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$ *; por tanto:* $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$ *, sustituyendo valores obtenemos:* $v_T = 1.18 \times 10^5\ m\ s^{-1}$

Que si la comparamos con la de arrastre debida a la conducción <v> = 7.4 × 10⁻⁸ m s⁻¹, observamos que existen ocho órdenes de magnitud de diferencia a favor de la velocidad térmica. ¿Cómo puede existir conducción si la velocidad térmica es mucho mayor que la de arrastre?. La respuesta es fácil si bien la velocidad al azar es mucho mayor, la de conducción al tener siempre en la misma dirección y sentido supone un fenómeno continuo.

Problema propuesto. *Calcular la conductividad de una disolución acuosa de cloruro sódico 0,1 N si las movilidades de los iones en disolución acuosa son 45,1 x* $10^{-5}\ cm^2\ s^{-1}\ V^{-1}$ *y 61.9x*$10^{-5}\ cm^2\ s^{-1}\ V^{-1}$ *para los iones sodio y cloruro respectivamente y se supone totalmente ionizado el soluto.*

Veamos con algún modelo sencillo como podemos explicar el comportamiento de los distintos materiales frente al fenómeno de la conducción, para lo que utilizaremos dos modelos dos formas de explicar la realidad, para poder entender comportamientos distintos de los distintos medios materiales. Empezaremos con el modelo del gas de electrones libres para metales, para continuar con los modelos de bandas energía que son más útiles a la hora de explicar el comportamiento de dieléctricos y semiconductores.

El modelo del gas de electrones para metales

Para interpretar la elevada conductividad que presentan los metales, Drude (1900) propuso considerar estos materiales dotados de una gran concentración de electrones libres en su interior, aunque ligados al metal, en el sentido de no tener energía suficiente para abandonar su volumen, aunque si pueden moverse libremente en él.

Este modelo, que se conoce como modelo del gas electrónico, da una explicación aceptable de la realidad sin hacer uso de la Física Cuántica. Se supone que mientras los electrones más externos se pueden mover por el material, los internos permanecen ligados a los núcleos formando una red de iones positivos fijos entre los que se mueven los electrones externos.

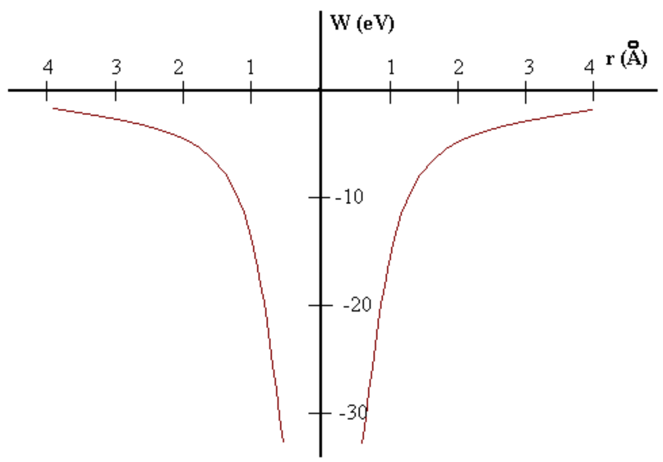

Figura 3
Distribución de la energía potencial del electrón en un átomo "hidrogenoide"

Veamos el razonamiento completo con un ejemplo para fijar ideas. Consideremos un metal monovalente como es el sodio cuyo número átomo es 11, la distribución de los once electrones de su corteza nos da una primera capa llena con dos electrones, una segunda llena con ocho electrones y una tercera capa en la que sólo existe un electrón, luego podemos considerar cada átomo de sodio como una carga positiva de 1 protón (suma de los +11 protones del núcleo con los -10 electrones de las capas internas) y un electrón girando en la órbita característica de la tercera capa. La visión "hidrogenoide" de este átomo polielectrónico (número atómico 11) consiste en considerar el electrón más externo (el décimo primero) y el ión positivo (carga +e) que supondremos fijo en el origen de coordenadas. La energía potencial de un electrón (carga -e) a una distancia "r" del ión positivo, situado en el origen, viene dada por el producto del valor del potencial debido al ión en "r", por la carga del electrón:

$$W = -\frac{e^2}{4\pi\, \varepsilon_0\, r}$$

Luego al energía potencial del electrón varía con la inversa de la distancia al núcleo, para cualquier dirección del espacio. Sustituyendo valores obtenemos:

$$W = -\frac{14{,}4}{r}\ \mathrm{eV}$$

donde la energía viene expresada en "eV" (electrón-voltios) para "r" en Angström

Si ahora consideramos dos átomos iguales a una distancia suficientemente corta, por ejemplo $4\overset{0}{\mathrm{A}}$, las curvas de energía potencial se superponen en la forma que se muestra en la figura 4.

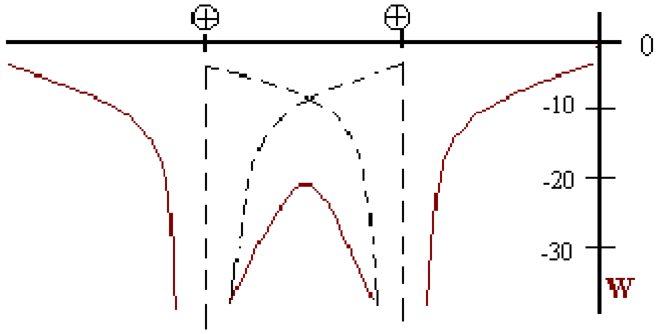

Figura 4
Distribución de la energía potencial de un electrón cuando están dos átomos hidrogenoides cercanos.

Considerando finalmente el sólido completo, tendríamos una distribución de energías como la que se muestra en la figura 5, obtenida como la superposición de las distribuciones de potencial debidas a los distintos "núcleos" situados en los puntos verdes de la figura.

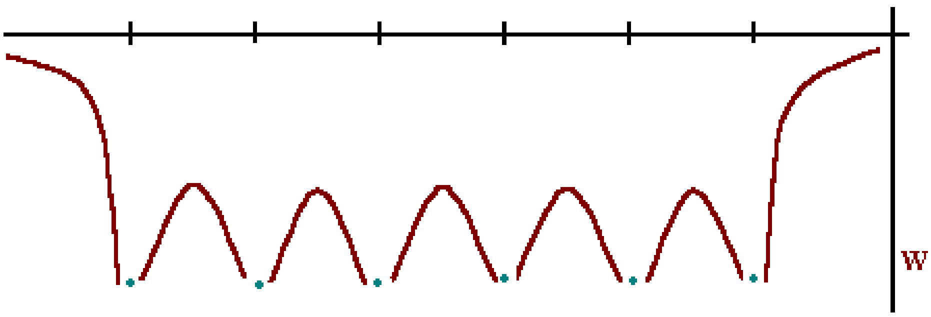

Figura 5
Distribución de energía potencial de los electrones en el seno de un metal.

Los electrones de conducción del metal serán los que tengan energías superiores a la correspondiente al "fondo" del pozo de potencial (valor de los máximos de potencial intermedios) por lo que se pueden mover libremente en el interior del metal. Para salir al exterior necesitarán tener la energía suficiente para superar la barrera de potencial que existe en la superficie, lo que se puede favorecer aportando energía al sistema, bien calentando (emisión termoeléctrica), bien iluminando (emisión fotoeléctrica), aplicando un campo. La situación en ausencia de toda perturbación, por ejemplo a 0°K y en la oscuridad, es como se muestra en el esquema de la figura 6.

El trabajo de extracción W_{ext} se define como la energía mínima para sacar un electrón del metal y la energía de Fermi W_F, que es la energía máxima que puede tener un electrón de conducción en el cero absoluto, por ejemplo en el sodio

$$W_{ext} = 2{,}3 \text{ eV}; \; W_F = 3{,}12 \text{ eV}$$

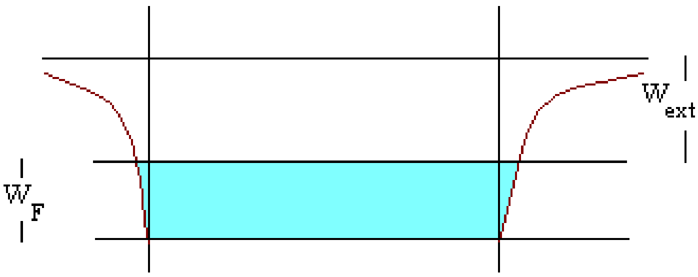

Figura 6
W_F intervalo de energías ocupado por electrones de conducción

El modelo de bandas de energía.

El modelo de bandas, responde a una teoría muy elaborada que ha servido de gran ayuda en la comprensión del comportamiento electrónico los materiales. Si bien su estudio detallado implica conocimientos de Física Cuántica, haremos una descripción del mismo empleando únicamente los conceptos más básicos que se deben poseer tras haber superado los estudios preuniversitarios.

Sabemos que en un átomo aislado sus electrones sólo pueden ocupar un cierto número de niveles de energía separados por grandes zonas de energías prohibidas que no pueden ser ocupadas como estados energéticos. Por eso cuando describimos la configuración electrónica de un átomo colocamos cada nuevo electrón de su corteza en un estado energético distinto ($1s^1$, $1s^2$, $2s^1$, $2s^1$, $2p^1$, $2p^2$ ...) y tantas veces como escribamos la configuración electrónica del mismo átomo tantas veces como escribiremos la misma estructura. Si consideramos un sólido, la proximidad entre átomos hace que se modifiquen ligeramente los valores de energía permitidos de forma que para cada posible “posición de un electrón aparecen varias posibles posiciones en los átomos contiguos que pueden ser ocupadas por los electrones de ambos átomos, por lo que decimos que los niveles energéticos en ambos átomos “se han desdoblado”. Como en un material la cantidad de átomos implicados es enorme, los desdoblamientos de los niveles permitidos forman bandas casi continuas de energías permitidas. Estos desdoblamientos dependen además directamente del solapamiento de las funciones de onda de los electrones, y serán tanto más importantes cuanto mayor sea la energía de los electrones, es decir, cuanto más externos sean.

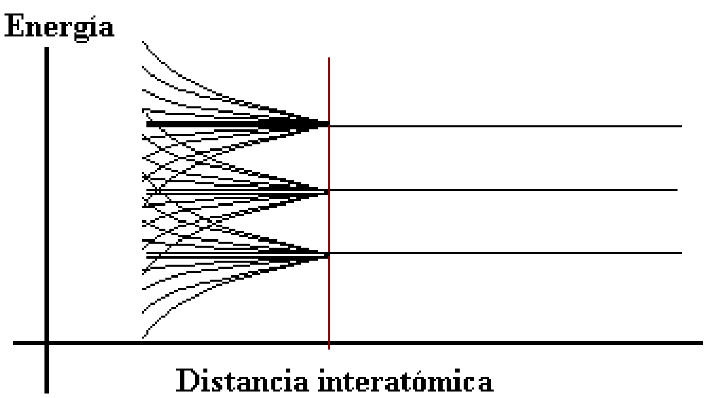

Figura 7
Representación esquemática de tres estados energéticos permitidos que se desdoblan al acercarse átomos iguales

Se encuentra como hecho real, que apoya esta visión simplificada, que la anchura de las bandas depende de las distancias interatómicas y no de la densidad de átomos. La densidad de átomos influye en el número de niveles de energía permitidos dentro de cada banda, y como la cantidad de átomos en un material es tan elevada, estas bandas son prácticamente continuas.

Estas bandas de energías permitidas están separadas por espacios de energías prohibidas. Como en la conducción los posibles portadores en los que estamos interesados sólo son los de energías superiores, normalmente nuestro interés estará centrado en las dos bandas superiores que son las denominadas Banda de Valencia (BV) y Banda de Conducción (BC).

Acabamos de ver que en una banda existen diferentes posibles valores energéticos y, por tanto, cada uno de estos valores puede estar ocupado por un electrón. Cuando cada valor posible está ocupado por un electrón decimos que la banda está llena. Cuando existen valor no ocupados , los electrones de una banda pueden moverse entre los diferentes niveles.

Es un hecho interesante a destacar que <u>si una banda está llena</u> (todos sus niveles energéticos están ocupados) esa banda <u>no contribuye a la conducción</u>.

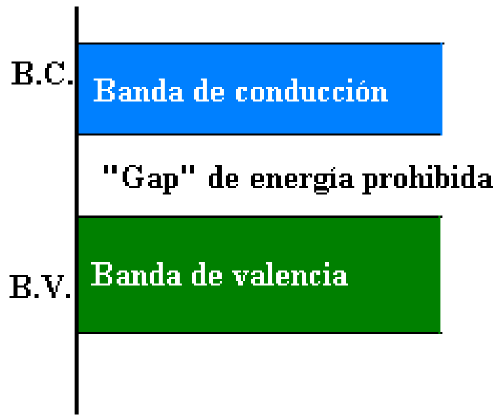

Figura 8
Esquema de bandas de energía para un aislador

En efecto, para que hubiera posibilidad de conducción por los electrones de esa banda, estos deberían tener la posibilidad de pasar a niveles de energía superiores, energía que adquirirían del campo eléctrico, pero si están todos los niveles ocupados y la siguiente banda de energía está separada por una energía que no se puede cubrir por el campo actuante (caso normal), la energía aportada por el campo se invierte toda en colisiones con la red y no se efectúa conducción.

En forma análoga una banda completamente vacía, por lo mismo, no puede aportar nada a la conducción, no hay electrones que puedan aumentar su energía y moverse. En contraposición una banda parcialmente llena, contribuye a la conducción, pues sus electrones están capacitados para saltar a niveles de energía superiores, adquiriendo la energía del campo eléctrico.

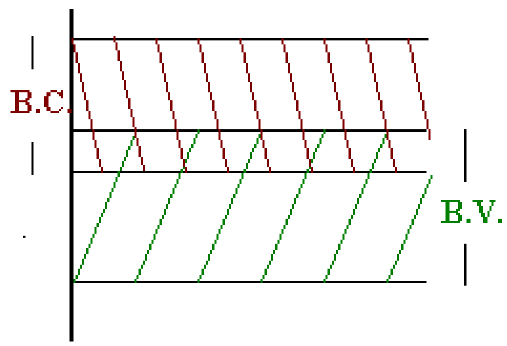

Figura 9
Esquema de bandas de energía de un conductor

Con todo esto a la vista, y fijándonos en las bandas de valencia y conducción, los esquemas correspondientes a un aislador y a un metal serían los representados en las figuras 8 y 9.

En un conductor se confundirían las bandas de valencia y de conducción, quedando en ésta estados permitidos no ocupados.

En un aislador la B. V. está completamente ocupada y la B.C. completamente vacía, existiendo entre ambas un salto ("gap") de energías prohibidas, E_g,

Semiconductores

Existen materiales denominados semiconductores, que a bajas temperaturas tienen un esquema de bandas equivalentes al de los aisladores, pero el "gap" de energías prohibidas E_g es pequeño, de forma que subiendo la temperatura, la energía térmica es capaz de hacer saltar algunos electrones de la banda de valencia a la de conducción, con lo que estos materiales conducen, aunque sólo sea pobremente, la electricidad.

La conducción en un semiconductor tendrá lugar por el movimiento de los electrones que han sido excitados energéticamente hasta la banda de energía originalmente vacía, o banda de conducción. Pero además, este salto del electrón provoca la aparición de un hueco, o defecto de un electrón, en la banda de valencia. La banda de valencia deja de estar totalmente llena y contribuye por tanto al proceso de conducción. Por esta razón para describir el fenómeno de conducción los portadores que tendremos que considerar serán: los electrones en la banda de conducción, y los huecos (ausencia de electrones en la banda de valencia por haber saltado a la banda de conducción) en la banda de valencia.

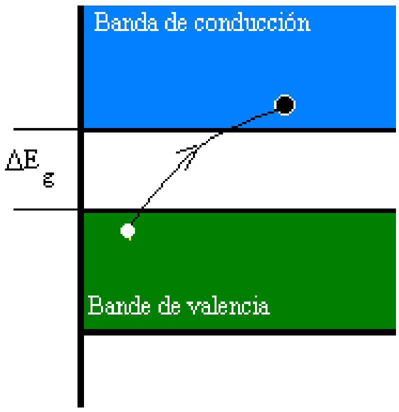

Figura 10
Esquema de la producción de un hueco en la banda de valencia

Conviene dejar bien claro, que el "hueco" no es una partícula eléctrica con existencia real, sino que es un concepto que introducimos para expresar de forma cómoda la conducción de carga eléctrica en la banda de valencia. En lugar de referirnos a los muchos electrones de la banda de valencia, nos fijamos en los pocos huecos que se han producido en ella. El "hueco" considerado como una partícula cargada vendrá caracterizado por una cierta masa que nos reflejará su respuesta dinámica a una fuerza externa como puede ser la aplicación de un campo eléctrico, y una carga que será igual en magnitud y de signo opuesto a la del electrón, ya que el hueco se desplazará en la dirección del campo (esto es los electrones "rellenan" el hueco moviéndose en sentido opuesto al campo por el signo negativo de su carga).

Los materiales que responden a este tipo de conducción se denominan semiconductores intrínsecos, como ejemplos de semiconductores intrínsecos tenemos:

1) "sustancias elementales" como son el Si y Ge (Grupo IV) y
2) "semiconductores compuestos" como el arseniuro de galio AsGa (compuestos III-V) o el sulfuro de cadmio, SCd (Compuestos II-VI).

Para terminar conviene indicar que en la práctica se puede conseguir modificar extraordinariamente la conductividad de un semiconductor impurificándolo con sustancias adecuadas en cantidades muy pequeñas.

Así por ejemplo, si añadimos a un semiconductor de silicio una pequeñísima concentración de As, material del grupo V, este átomo tiene un electrón en exceso con respecto al Si (grupo IV) lo que implica la aparición de niveles energéticos, los correspondientes al electrón extra, muy próximos a los permitidos en la banda de conducción del silicio por lo que es muy fácil que esos “electrones extra” pasen a esta banda, lo que representa un aumento de portadores n, o lo que es lo mismo que aumente el número de electrones que se pueden mover en la banda de conducción del silicio aumentando por tanto la conductividad. Este tipo de impurezas se llama *“tipo n”* por aumentar la concentración de electrones, o impurezas dadoras, porque ceden un electrón a la banda de conducción, o por exceso, ya que tienen un exceso de electrones respecto al material intrínseco.

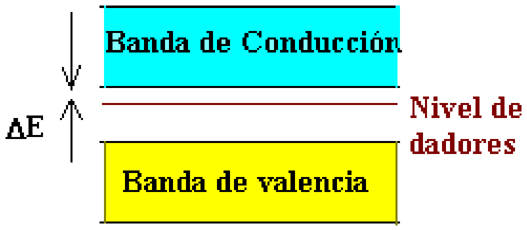

Figura 11

Del mismo modo, la adición de impurezas del grupo III (B, In, Ga) a un semiconductor intrínseco (Ge, Si) da lugar a un semiconductor extrínseco *“tipo p”*, por aumentar la concentración de huecos en la banda de valencia del semiconductor intrínseco. En este caso, los niveles energéticos que origina la impureza son muy próximos a la banda de valencia lo que permite que electrones de la banda de valencia pasen con facilidad a los estados energéticos vacíos y permitidos del nivel de aceptores dejando un hueco en dicha banda de valencia, que podrá ser ocupado por un nuevo electrón de esa banda al que el campo actuante le proporcione la energía suficiente. Lo que provoca una conducción por huecos en la banda de valencia.

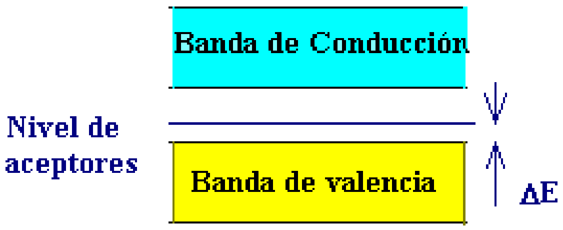

Figura 12

Estos semiconductores se denominan extrínsecos. La contribución del material con el que impurificamos la muestra (dopamos al semiconductor) es aumentar considerablemente la conductividad respecto del semiconductor intrínseco, ya que incorporación de estados energéticos permitidos muy próximos a la banda de valencia en el caso de impurezas aceptoras (semiconductores tipo p) o muy próximos a la banda de conducción en el caso de impurezas dadoras (semiconductores tipo n) permiten el movimiento en la banda de valencia de huecos o de electrones por la banda de conducción respectivamente.

Circuitos de corriente continua

Sabemos que la corriente eléctrica la podemos entender como el paso de portadores de carga que, con mayor o menor libertad, se puedan mover por un medio determinado debido a la fuerza que ejerce sobre ellos un campo eléctrico. Es claro entonces que un mismo campo eléctrico actuando sobre distintos medios producirá corrientes de distinta magnitud según la oposición o resistencia que oponga el medio al movimiento de los portadores de carga a su través. La primera consecuencia a que llegamos es que, debido a la "fricción" que va a oponer el medio al paso de los portadores, cierta cantidad de la energía eléctrica se va a convertir en energía calorífica, fenómeno comúnmente conocido como efecto Joule. Además de este tipo de energía, la energía eléctrica se puede convertir en otros tipos, como por ejemplo en energía mecánica si la corriente se aprovecha para mover un motor. A todos estos tipos de elementos que colocados en un circuito van a suponer un consumo de energía los denominaremos elementos pasivos y como elemento pasivo típico tenemos el caso de las resistencias.

Si por un circuito queremos que circule una corriente eléctrica estacionaria (mantenida en el tiempo) dado que en un circuito siempre existen elementos pasivos, lo que en lenguaje ordinario llamamos elementos que consumen energía eléctrica, es preciso que existan elementos que suministren energía eléctrica; a estos elementos los denominaremos elementos activos. El funcionamiento de estos dispositivos es el transformar otro tipo de energía en eléctrica. A continuación citamos varios ejemplos de estos elementos:

a) Intercambio de energía química en eléctrica. Dispositivos basados en este tipo de transformación son las pilas y baterías, elementos de gran aplicación en la producción de energía eléctrica.

b) Transformación de energía mecánica en eléctrica. La dinamo, por ejemplo, es un transductor de energía mecánica en eléctrica con gran interés también como generador de este tipo de energía; otro ejemplo lo constituye un micrófono, que transforma la energía de vibración (debida al sonido) en señales eléctricas. Este último dispositivo no es útil como fuente generadora de energía eléctrica que supla consumos de energía de otros elementos y se aplica a los fines específicos que todos conocemos.

c) Transformación de energía luminosa en eléctrica. Ejemplo típico lo constituyen las células fotoeléctricas.

d) Transformación de energía térmica en eléctrica. Como elemento que aprovecha directamente esta transformación tenemos por ejemplo el termopar, útil en termometría.

Dos conceptos básicos relativos respectivamente a los ya citados de elementos pasivos y activos son los de diferencia de potencial y fuerza electromotriz, que simbólicamente denotaremos por “V” y “ ε ” y que definimos a continuación.

Diferencia de potencial entre dos puntos de un elemento pasivo, es la energía que debido al paso de la unidad de carga a su través, se convierte de eléctrica en otra forma de energía.

Fuerza electromotriz de un elemento activo, es la energía que por el paso de la unidad de carga a través del elemento, se transforma de otro tipo de energía a energía eléctrica.

Lógicamente tanto “V” como “ ε ” vienen en las mismas unidades, a saber, el julio/culombio en el sistema internacional, unidad que normalmente se conoce como voltio. Según lo dicho anteriormente, la energía que se convierte en eléctrica al pasar una carga q a través de un elemento activo de fuerza electromotriz ε será “ $q \cdot \varepsilon$ ”. Análogamente, la energía eléctrica que se disipa en un elemento pasivo al pasar una carga q, si es V la diferencia de potencial entre los extremos del elemento, será “ $q \cdot V$ ”.

En la práctica es más útil sin embargo el concepto de potencia o variación con el tiempo de la energía, que vendrá dada por la variación con el tiempo de la carga, es decir por la intensidad, por la fuerza electromotriz o por la diferencia de potencial del elemento activo o pasivo. Así, la potencia eléctrica que da un elemento activo de fuerza electromotriz ε cuando suministra una corriente I será

$$P_{\text{suministrada}} = \varepsilon\, I \quad \text{(vatios)}$$

La potencia que se disipa en un elemento pasivo cuando entre sus extremos existe una diferencia de potencial V y se encuentra recorrido por una corriente I es

$$P_{\text{disipada}} = V\, I$$

Caracterización de los elementos de un circuito de corriente continua

Las magnitudes que se miden en un circuito son diferencias de potencial (o voltajes) e intensidades, y a través de estas magnitudes podremos caracterizar a un elemento. Así, si tenemos un elemento pasivo típico como es una resistencia, podremos ir conectando diferentes voltajes entre sus extremos, y midiendo las intensidades que producen, con lo cual se obtendrá un resultado como el reflejado en la figura 13.

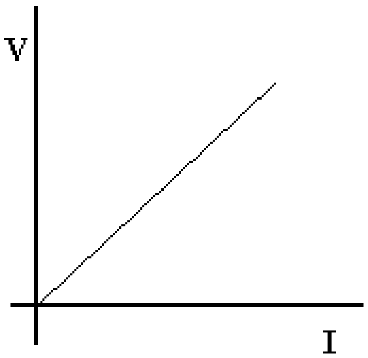

Figura 13
Diagrama I-V de un elemento pasivo ideal

Se observa que el diagrama V-I del elemento pasivo ideal representado, es lineal. Como parámetro que nos caracteriza a este elemento se define la resistencia que es el cociente entre la diferencia de potencial y la intensidad.

$$R = \frac{V}{I}$$

La unidad de resistencia en el Sistema Internacional, el voltio/amperio, que como ya sabemos se denomina ohmio.

En la práctica muchos elementos son lineales dentro de un rango grande de valores de V e I, mostrando no obstante un carácter no lineal para valores elevados de V, tal como se muestra en la figura 14.

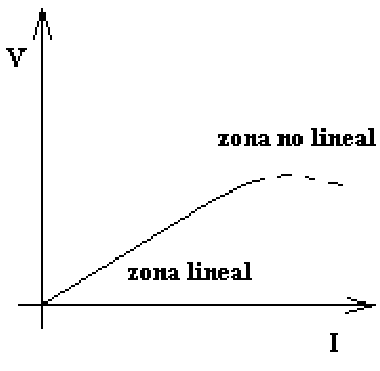

Figura 14
Diagrama I-V de un elemento pasivo real

Otros elementos que ya no son las resistencias usuales, aunque sean elementos pasivos en un circuito, muestran un carácter marcadamente no lineal, a lo cual se denomina normalmente comportamiento "no óhmico".

Otro dato que es preciso conocer para caracterizar un elemento pasivo (supongamos una resistencia de valor R para centrar ideas) es la potencia máxima que puede disipar debido a su geometría y constitución. Esta potencia máxima constituirá un límite para la tensión en bornes de la resistencia y la intensidad que va la a atravesar.

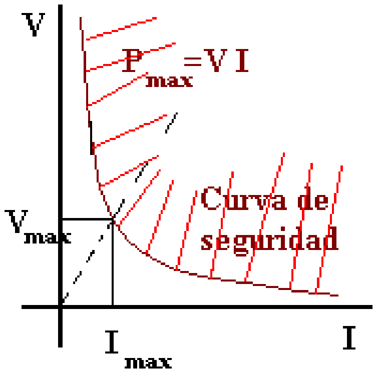

Figura 15

Según que el elemento se alimente con un generador de tensión fija V o que por él pase una intensidad fija I, la expresión de la potencia, P = VI, en conjunción con la ley de Ohm nos permite obtener dos expresiones duales para la potencia en función de los datos prefijados

$$P = V \cdot I = V\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{V^2}{R}$$

$$P = V \cdot I = (I \cdot R)\, I = I^2\ R$$

Debemos tener cuidado al usar estas expresiones, pues la primera de las ecuaciones la leeremos diciendo que la potencia que disipa una resistencia es inversamente proporcional a la resistencia y en la segunda que es directamente proporcional a la misma, por eso es mejor a la hora de afrontar un problema emplear la forma general (P = VI) y según las condiciones del mismo calcular la magnitud que desconozcamos con la ayuda de la ley de Ohm.

Así, por ejemplo, si de una resistencia, nos dan su valor R = 100 Ω y que puede disipar como máximo 1 vatio, la tensión máxima con que se puede alimentar será:

$$V = \sqrt{P \cdot R} = 10 \text{ voltios}$$

Análogamente, la intensidad máxima será:

$$I = \sqrt{\frac{P}{R}} = 0{,}1 \text{ amperio}$$

de forma que evidentemente el producto V I quede igual a 1 vatio.

El darnos la potencia máxima, nos permite dibujar una "curva de seguridad" V I = P_{max} = cte. en un diagrama I-V.

De forma que los puntos encima de la curva de la figura 15 (sección rayada) son prohibitivos en el sentido de peligrar el elemento (se fundirá). Si además conocemos el valor de la resistencia del elemento, la intersección de su curva característica (línea punteada) con la curva de seguridad nos dará los valores máximos de V e I con que se puede alimentar el elemento.

También los elementos activos precisan de caracterización. En el caso de una pila, por ejemplo, en principio basta con decir cuál es su fuerza electromotriz; en este caso, si el elemento es ideal, es decir, si entre sus extremos existe siempre una diferencia de potencial igual a la fuerza electromotriz del elemento independientemente de la intensidad que suministre, su diagrama I-V será el del elemento ideal de la figura 16.

Sin embargo es fácil comprender que un elemento de este tipo no puede existir dado que a valores muy altos de la intensidad, si la diferencia de potencial sigue siendo la fuerza electromotriz ε, el producto ε I, es decir, la potencia eléctrica que es capaz de suministrar la pila o batería, tendería a infinito. En el diagrama anterior se ha dibujado también la característica de un elemento real, que en el tramo inicial suele ser lineal. En este tramo se cumple que

$$V = \varepsilon - I \cdot r_i$$

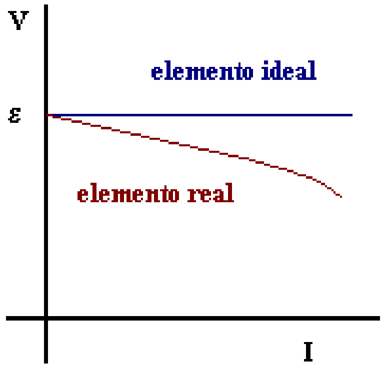

Figura 16
Representación del comportamiento de un generador de tensión

y a r_i se denomina resistencia interna del elemento, que cuanto más pequeña sea tanto más se aproximará al elemento ideal, al generador de tensión ideal. Recalquemos entonces que la fuerza electromotriz de un elemento activo es la diferencia de potencial que existe entre sus extremos cuando suministra intensidad nula.

$$\varepsilon = V\big|_{I=0}$$

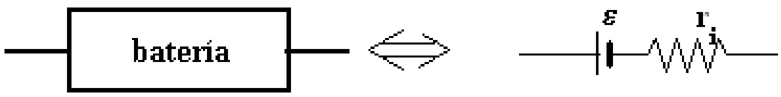

Figura 17

Todo ello debido, a que un elemento activo real hay que comprenderlo como asociación de un elemento activo ideal de fuerza electromotriz ε y de un elemento pasivo de resistencia r_i. Lo que representamos esquemáticamente en la figura 17.

También los elementos activos tienen un límite en la potencia suministrada, lo cual, en el caso de un generador de tensión, impone un límite en la intensidad que pueden suministrar.

Otro tipo de elemento activo cuyo uso no está tan generalizado como el de generador de tensión (batería o pila) y que se suele lograr a partir de transformaciones adecuadas de ellos o con elementos de estado sólido, son los generadores de intensidad, que dan una intensidad I prácticamente constante, independiente de la tensión que suministren. Su característica I-V sería la que se muestra en la figura 18.

Lógicamente, la resistencia interna de un generador de intensidad tiende a infinito en el caso ideal, a la inversa de lo que teníamos en el caso del generador de tensión cuya resistencia interna tiende a cero en el caso ideal.

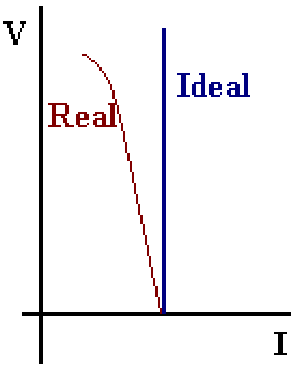

Figura 18
Representación del comportamiento de un generador de intensidad

Leyes de Kirchoff.

Como sabemos los elementos activos y pasivos se suelen conectar entre sí formando lo que denominamos circuito eléctrico. Si acabamos de decir que cualquier combinación que se nos ocurra de elementos activos y pasivos forma un circuito, será necesario imponer algún orden, en ese infinito horizonte, si queremos poder calcular cual es la intensidad que circula por un punto determinado o la caída de tensión que se produce entre dos puntos del circuito, es decir si queremos analizar el circuito.

Para ello, emplearemos los conceptos de nudo y malla:

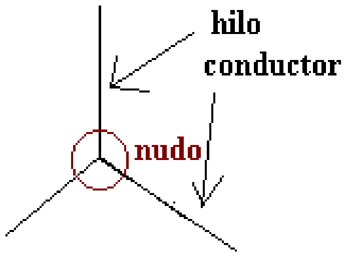

Figura 19

- Por nudo entendemos la intersección de 3 o más hilos conductores, denominando rama al conjunto de elementos que existen entre dos nudos consecutivos.

- Una malla es cualquier recorrido cerrado que se pueda realizar en un circuito sin pasar dos veces por el mismo punto.

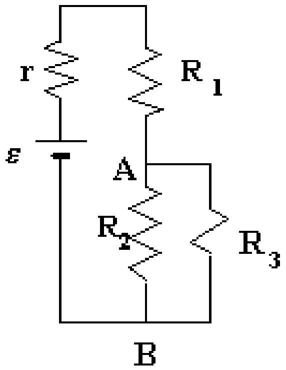

Figura 20

Así, si consideramos el circuito de la figura 20, que está formado por tres resistencias y una pila, en la que hemos considerado independientemente su resistencia interna, nos encontramos con la existencia de dos nudos los puntos "A" y"B", ya que sólo en ellos se encuentran tres hilos distintos, mientras que existen en él tres mallas distintas, pues son tres las distintas figuras cerradas distintas que podemos dibujar a partir del circuito que hemos considerado y que hemos representado en las figuras 21, 22 y 23.

Para relacionar las magnitudes características de un circuito, emplearemos las dos leyes de Kirchoff, una referida a los nudos y la otra a las mallas.

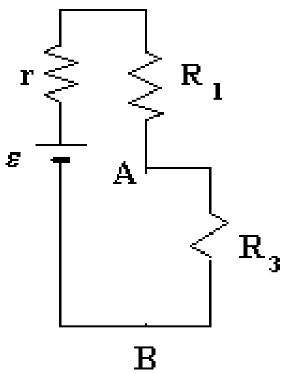

Figura 23

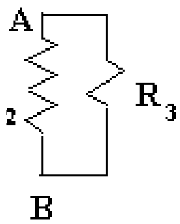

Figura 22

- La primera de ellas la ley de los nudos, nos dice: "la suma de todas las intensidades que concurren en un nudo ha de ser igual a cero".

$$\sum I_i = 0$$

Esto tiene que ser así, ya que si la suma es distinta de cero ($\sum I_i \neq 0$), en el nudo se ganaría o se perdería carga y ninguna de estas dos posibilidades es aceptable. Es decir: la carga eléctrica no se acumula en ningún sitio de la red, ya que la corriente es estacionaria y tampoco se puede perder.

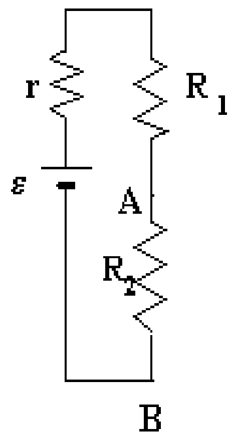

Figura 21

- La segunda, ley de mallas, dice: "para cada malla del circuito se cumple que la suma algebraica de las fuerzas electromotrices en una malla cualquiera de una red es igual a la suma algebraica de los productos R I en la misma malla":

$$\sum I_i\ R_i = \sum \varepsilon$$

La forma práctica de hacer un estudio de un circuito es la siguiente:

a) Asignamos un sentido arbitrario de circulación de la intensidad en cada rama del circuito.
b) Aplicamos la ley de nudos.

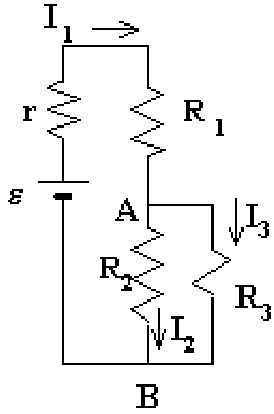

Figura 24

Cuando se aplica esta ley, se considera positiva la intensidad de una corriente si se dirige hacia el nudo y negativa si se aleja del mismo (también puede utilizarse el convenio contrario).

Para el nudo A: $I_1 - I_2 - I_3 = 0$; $I_1 = I_2 + I_3$

Para el nudo B sale exactamente igual, ya que no hay tantas ecuaciones como nudos. Si hay "n" nudos en la red se aplica la regla de los nudos a "n-1" de éstos. La aplicación de dicha regla al nudo enésimo no proporciona una ecuación independiente.

c) Aplicación de la ley de mallas.

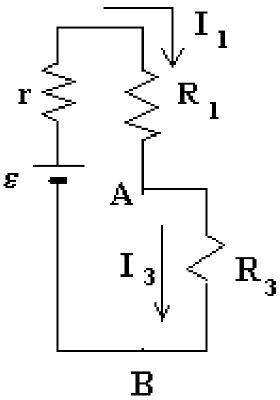

Figura 25

Elegimos un sentido arbitrario para "recorrer" la malla. El producto IR es positivo cuando la dirección de circulación de la intensidad que hemos decidido en a) coincide con la que hemos elegido para recorrer la malla y negativo en caso contrario.

Una fuerza electromotriz ε , será positiva cuando según la dirección que hemos elegido para recorrer la malla, entremos por la placa negativa y salgamos por la positiva. Es decir, que si suponemos que la pila es la única que existiera en el circuito, la corriente que genera va en el sentido que hemos elegido como positivo.

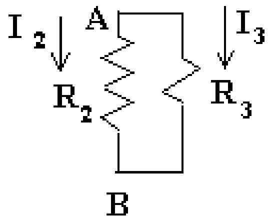

Figura 26

Lo que nos permite escribir para cada circuito:

El de la figura 25 $I_1\ r + I_1\ R_1 + I_3\ R_3 = \varepsilon$
El de la figura 26 $- I_2\ R_2 + I_3\ R_3 = 0$
El de la figura 27 $+ I_1\ r + I_1\ R_1 + I_2\ R_2 = \varepsilon$

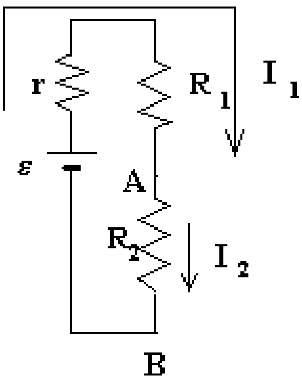

Figura 27

Pero esta ecuación no era necesario hallarla, ya que es la suma de las dos anteriores, luego tampoco hay tantas ecuaciones como mallas. Las mallas que son suma de otras mallas no dan información nueva sobre el circuito (una forma práctica de escribir el número correcto de ecuaciones de malla es: cada ecuación que escribamos tacharemos una rama del circuito, cuando ya no podamos dibujar una malla, ya tendremos todas las posibles ecuaciones de malla del circuito)

Para este circuito tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas que podemos resolver:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$+ I_1 r + I_1 R_1 + I_2 R_2 = \varepsilon$$
$$- I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0$$

De aquí podemos hallar las tres incógnitas: I_1, I_2 e I_3.

Ejemplo: el potenciómetro.

Este dispositivo tiene como objetivo la medida de la fuerza electromotriz de un generador cualquiera. Tendremos que medir la diferencia de potencial que suministra, sin pedir suministro de corriente. En esencia su funcionamiento consiste en conectar en oposición con la fuerza electromotriz que se quiere medir (ε_x) una tensión conocida y variable, de forma que justo cuando esta tensión vale ε_x la corriente que pasa por el circuito es nula.

Un esquema elemental del potenciómetro lo constituye el de la figura 28. En este esquema tenemos que:

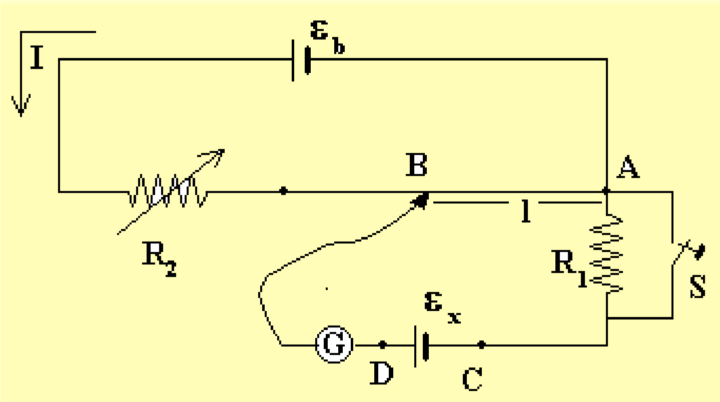

Figura 28
Esquema de un potenciómetro

1) ε_b es una batería de potencia suficiente para alimentar al circuito con estabilidad; su valor no necesita conocerse con precisión; R_2 es una resistencia que va a limitar el valor de I al orden de magnitud que deseemos.

2) AC es un hilo de resistencia uniforme (resistividad y sección constantes) B es un cursor móvil a lo largo del hilo con objeto de variar la resistencia entre los puntos A y B. Lógicamente se cumplirá que

$$R_{AB} = k.l$$

siendo k una constante y "l" la longitud del hilo uniforme comprendido entre los puntos "A" y "B".

3) G es un galvanómetro encargado de acusar cuando la corriente por la rama ACDB es nula; en este caso la corriente por BA coincide con I de acuerdo con la primera ley de Kirchoff.

4) Para equilibrar el potenciómetro, es decir para que por G no pase corriente, se deja inicialmente el interruptor S abierto con objeto de que la resistencia, R_1 proteja al galvanómetro; se varia el cursor B hasta que aproximadamente G no acuse paso de corriente. Se cortocircuita R_1 a través del interruptor S y se ajusta con mayor precisión el cursor B para anular la corriente que pasa por G.

Cuando se ha equilibrado el potenciómetro se cumplirá que

$$V_{BA} = I\, R_{AB} = I\,(k\,l)$$

y como por ACDB no pasa corriente, el punto D estará al mismo potencial que el B y el C al mismo que el A; es decir:

$$V_{BA} = V_{DC} = \varepsilon$$

El procedimiento normal de medida es por comparación de la fuerza electromotriz incógnita con otra patrón conocida que suele ser una pila Weston de cadmio. Ambas fuerzas electromotrices se colocarán lógicamente entre los puntos C y D y con la polaridad mostrada respecto a la polaridad de ε_b.

Si la pila patrón, de fuerza electromotriz ε_p, se equilibra con una longitud $l = l_p$, se tendrá:

$$\varepsilon_p = I\,k\,l_p$$

Si la fuerza electromotriz incógnita se equilibra con una longitud l_x, se tendrá:

$$\varepsilon_x = I\,k\,l_x$$

con lo cual:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_p \left(\frac{l_x}{l_p}\right)$$

Hemos querido dedicarle una atención especial al potenciómetro por dos razones. La primera, porque justifica la definición de fuerza electromotriz de una pila como la diferencia de potencial del generador cuando por él no pasa corriente, pues en la descripción que hemos realizado queda patente que se mide una diferencia de potencial aunque no existe paso de corriente por la pila desconocida. Por otro lado, obtener medidas de magnitudes por detección de nulo es el fundamento de todos los métodos de medida utilizando "puentes de medida", pues siempre es más fácil detectar que por una rama de un circuito no pasa corriente, que medir con precisión suficiente un valor determinado de la intensidad por la rama.

Teoremas del análisis de redes

Acabamos de introducir algunos conceptos de uso común al hablar de circuitos eléctricos, vamos a definir, de un modo sistemático, tanto los que acabamos de introducir como los que son de uso más frecuente en el análisis de redes.

Elemento de circuito: Es un componente indivisible con dos bornes o terminales. Como ejemplos una resistencia o una fuente, pila o batería.

Parámetro: Es la representación simbólica de los elementos de circuito. Una resistencia se representa por R, una pila o batería por ΔV, o, ε

Rama: Se construye mediante la unión de elementos de circuito de manera que el conjunto forma un dispositivo de dos terminales. Se supone que los elementos de circuito se conectan entre sí mediante conductores ideales, es decir sin resistencia.

Malla: Es una figura cerrada formada por la unión de ramas.

Nudo: Es el punto de unión de dos o más ramas, o el punto en el que concurren tres o más conductores.

Red: Es la interconexión de ramas y mallas. Frecuentemente se utiliza la palabra circuito con el mismo significado que red.

Red de parámetros concentrados: Es una red compuesta por elementos de circuito aislados, es decir, elementos que se comportan en la red de manera que cada componente se puede caracterizar por un solo parámetro, por ejemplo por su resistencia, por su capacidad o por su fuerza electromotriz.

Red de parámetros distribuidos: Es una red compuesta por elementos que no pueden ser caracterizados por un parámetro único y por tanto no se tratan analíticamente como componentes individuales separados. Un cable coaxial es un ejemplo de una red de parámetros distribuidos y se caracteriza por su resistencia por unidad de longitud, su capacidad por unidad de longitud y su autoinducción por unidad de longitud.

Potencial: También conocido como tensión, es la forma abreviada de hablar de diferencia de potencial entre dos puntos y en el análisis de circuitos es sinónimo de voltaje. Se suele representar la tensión por V o ΔV en el caso de corrientes continuas y por e o Δv en las variables. Cuando se trata de la fuerza electromotriz de una fuente se suele representar por ε

Generador de tensión: También conocido como fuente, es un dispositivo de dos bornes o terminales entre los que existe una tensión sin que circule corriente, es decir, la fuente es un elemento activo que mantiene la tensión en sus bornes.

La fuente de tensión es ideal, cuando la diferencia de potencial entre sus bornes es independiente de la corriente que suministra. Los generadores reales, tienen resistencia interna y se verifica que $\Delta V = \varepsilon - I \cdot r$

Generador de corriente: También conocido como fuente de corriente, se caracteriza por mantener una corriente entre sus terminales en ausencia de potencial entre ellos. Un generador de corriente es ideal cuando la corriente suministrada es independiente del potencial entre los terminales

Elemento lineal: Es todo elemento en el que la relación entre la intensidad que lo recorre y la tensión entre sus bornes es lineal, es decir, no depende del valor de la corriente ni de la tensión.

Circuito lineal: Es el compuesto exclusivamente por elementos lineales.

Rama activa: Es una rama en la que existe uno o más generadores y puede o no tener elementos pasivos como resistencias.

Rama pasiva: es aquella en la que sólo existen elementos pasivos, es decir, no tiene fuentes.

Tras esta revisión de los términos más usuales en el análisis de circuitos y de las leyes de Kirchoff, que son el fundamento de todo el análisis de circuitos, vamos a describir otros conceptos de uso común cuando se realiza el análisis de redes.

Principio de superposición

Si en una red lineal, existen dos o más fuentes, la intensidad que circula por el circuito será la suma de las intensidades que produciría cada generador si sólo existiera él en el circuito.

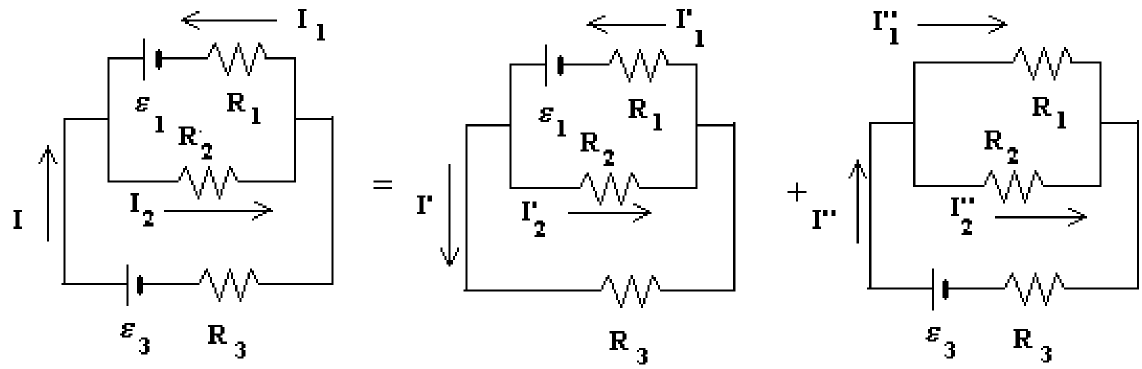

Figura 29

Así las intensidades que recorren el circuito de la izquierda de la figura 29, son la suma de las que recorren los dos circuitos de la derecha de la misma figura, es decir:

$$I = I`` - I'; \qquad I_1 = I'_1 - I``_1; \quad I_2 = I'_2 - I``_2$$

para calcular las intensidades en cada uno de los circuitos de la derecha, se cortocircuitan las fuentes pero se mantienen los valores de las resistencias internas de las mismas.

Resistencia de entrada de una red.

Supongamos que tenemos una red pasiva (por ejemplo un altavoz), de la que desconocemos las resistencias que la componen y como están conectadas entre sí, sólo está a nuestro alcance los dos bornes de conexión. Para caracterizar la red, emplearemos su resistencia de entrada, que podemos calcular alimentándola con un generador de fuerza electromotriz conocida “ ε ”, midiendo la intensidad “I” que recorre el generador tenemos que la resistencia de entrada (R_{in} o R_e) será

$$R_{in} = \frac{\varepsilon}{I}$$

Naturalmente si conocemos la distribución de elementos pasivos que componen el circuito, podemos calcular analíticamente la resistencia de entrada del circuito imaginándolo conectado a una batería de fuerza electromotriz conocida y calculando después la corriente que atravesaría la batería, el cociente entre ambas magnitudes nos dará la resistencia de entrada.

Teorema de Thevenin

Si el circuito del que disponemos es un circuito activo (como por ejemplo un amplificador) que debemos conectar a una resistencia de carga (por ejemplo un altavoz) se puede demostrar que el conjunto se comporta como un elemento activo (una pila en el caso de continua) y una resistencia en serie con el generador, que recibe el nombre de resistencia de salida (R_{aut}, R_0).

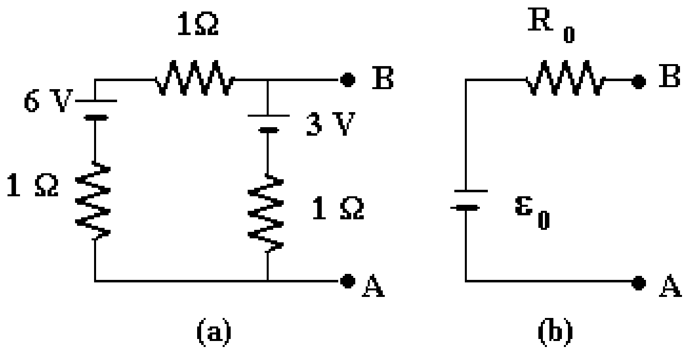

Figura 30
El circuito (b) representa el equivalente Thevenin del circuito (a)

En el circuito (a) de la figura 30, su equivalente Thevenin será el circuito (b) en el que la batería tendrá una fuerza electromotriz $\varepsilon_0 = 4\,\mathrm{V}$ y una resistencia interna o de salida del circuito de valor $R_0 = 0{,}6\ \Omega$.

Teorema de Norton

Acabamos de decir que un circuito activo cualquiera equivale a un generador de tensión y una resistencia en serie con él. Del mismo modo se puede establecer el equivalente Norton del circuito que será un generador de intensidad y una resistencia en paralelo, tales que ante una carga cualquiera suministren la misma intensidad que proporciona la red.

Teorema de la máxima transmisión de potencia.

Entre los múltiples teoremas relativos a circuitos vamos a detenernos en el de máxima transferencia de potencia, debido al interés que ofrece en el mejor aprovechamiento de la potencia disponible.

Una situación comúnmente encontrada es la reflejada en la figura 31 en la cual se tiene el generador equivalente del circuito de alimentación (de fuerza electromotriz ε con una resistencia interna R_i) que se "carga" con una resistencia R_c. Nos preguntamos: ¿qué valor ha de tener R_c para que el sistema alimentador (caracterizado por ε y R_i) suministre la máxima potencia?

En el circuito tendremos que la potencia suministrada a R_c sera:

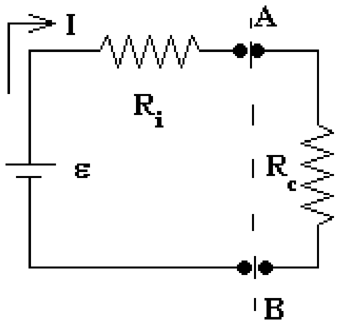

Figura 31

$$P_c = V_{AB}\, I = I^2\, R_c = \left(\frac{\varepsilon}{R_i + R_c}\right)^2 R_c$$

Como la variable cuyo valor pedimos es R_c, tendremos que la potencia será máxima cuando se cumpla que: $\dfrac{\partial P_c}{\partial R_c} = 0$ y $\dfrac{\partial^2 P_c}{\partial R_c^2} < 0$

Es fácil comprobar que el máximo aprovechamiento se cumple cuando: $R_c = R_i$

y en este caso la potencia disipada es

$$(P_c)_{max} = \frac{\varepsilon^2}{4\, R_c}$$

El lograr que $R_c = R_i$ se denomina, acoplar resistencias.