

**Grado en Ingeniería de Computadores
y Grado en Ingeniería Informática**

**Laboratorio de Física
Curso 2017/18**

**Seminario: Tratamiento de datos
experimentales**

Introducción

Cualquier magnitud susceptible de ser medida, tiene asociado un intervalo de error o de imprecisión, que llamamos error absoluto de la medida, que puede provenir de diferentes causas, como veremos a continuación.

Por tanto, la forma correcta de expresar el valor de una medida genérica, X , será:

$$X \pm \Delta X \text{ (unidades)}$$

donde X representa el resultado de la medida

ΔX representa el intervalo de error, o error absoluto

es decir, con ello quiere señalarse que el valor de X está comprendido entre los valores:

$X + \Delta X$ y $X - \Delta X$. Evidentemente debe estar expresado con sus unidades correspondientes (las mismas unidades para la medida que para su error absoluto).

El significado de ΔX es de imprecisión, no de equivocación!!

Las medidas pueden ser:

- **Directas** → las obtenidas en el laboratorio, utilizando para ello un aparato de medida.
Ej.: el espesor de una muestra paralelepédica puede obtenerse utilizando para ello una regla o un calibrador.
- **Indirectas** → no se miden directamente con los aparatos. Son obtenidas de forma indirecta, utilizando las expresiones matemáticas que ligan otras magnitudes. Por tanto, se *calculan* a partir de una ecuación, en la que pueden estar involucradas medidas directas, constantes, y otras medidas indirectas.

Ej.: la velocidad de un objeto puede obtenerse de forma indirecta. Supongamos que en el laboratorio observamos el movimiento rectilíneo uniforme de un cuerpo. Midiendo de forma directa la longitud recorrida (con una cinta métrica o una regla) y el tiempo empleado para recorrer dicha longitud (con un cronómetro) podemos obtener la velocidad del cuerpo utilizando la expresión matemática que liga las magnitudes anteriores:

$$v = \frac{L \rightarrow \text{directa}}{\Delta t \rightarrow \text{directa}} \rightarrow \text{indirecta}$$

Veamos a continuación, los errores asociados tanto a medidas directas como a medidas indirectas.

Errores de medidas directas

Errores sistemáticos → sobreestimación (subestimación) de las medidas (siempre en la misma dirección). Ejemplo: el error de cero en aparatos analógicos procedente de una mala calibración del aparato. Si se detecta, es posible corregirlo.

Errores aleatorios → al repetir el mismo experimento varias veces, se obtienen resultados diferentes; resultado, por ejemplo, del ruido térmico de los aparatos de medida, de la intervención directa de la persona que realiza el experimento, del cambio en las condiciones físicas en las que se realiza el experimento, etc. Puede minimizarse realizando muchas medidas, ¿cuántas?: tantas como las que hagan que el error aleatorio asociado sea del mismo orden que el error instrumental.

Errores instrumentales → debidos a la precisión finita de los aparatos de medida.

Determinación de los errores instrumentales

Precisión de un aparato: valor de medida más pequeño que es capaz de apreciar.

- **Medida analógica** → no existe un criterio único. Es posible utilizar como error instrumental la mitad de la precisión del aparato (regla, osciloscopio...). También puede emplearse, **y es la que se utilizará en el tratamiento de errores en este laboratorio de Física**, la propia precisión del aparato de medida

$$\Rightarrow \pm \Delta X \rightarrow \pm \text{la precisión del aparato de medida.}$$

- **Medida digital** → se utiliza como error instrumental la propia precisión del aparato (cronómetro digital, multímetro en opción de amperímetro con escala correspondiente; multímetro en opción de voltímetro con escala correspondiente, etc.)

$$\Rightarrow \pm \Delta X \rightarrow \pm \text{la precisión del aparato de medida.}$$

Concepto de error relativo:

$$\text{error relativo de una medida} = \left| \frac{\Delta X}{X} \right|$$

- Es un número adimensional
- Es la mejor expresión del grado de precisión de la medida
- Se suele expresar en % $\Rightarrow \left| \frac{\Delta X}{X} \right| 100\%$

Determinación de los errores aleatorios

Como se ha mencionado antes, la característica que presentan los errores aleatorios es que cuando se realiza varias veces la misma medida, cada vez se obtiene un valor diferente, es decir, los valores obtenidos se encuentran distribuidos en un cierto rango de medida. Cuánto más pequeña es la incertidumbre aleatoria, más pequeño es el rango de dispersión de los datos y, por tanto, más precisa llega a ser la medida.

La mejor estimación del valor de la medida corresponde al valor promedio de los datos obtenidos y el error asociado está relacionado con la distribución de los valores alrededor de este valor promedio.

$$\langle X \rangle = \bar{X} = \frac{1}{N} (X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$$

La distribución que describe la dispersión de los datos está definida por un término estadístico conocido como desviación estándar: σ . Para llegar a su expresión, pensemos que la desviación de la medida i -ésima respecto del valor medio es: $d_i = x_i - \bar{x}$.

Esta desviación es igualmente probable que sea positiva o negativa y, por tanto, cuando se sume a todos los datos puede dar como resultado un valor cero. La desviación promedio, $\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i$,

es entonces cero y, por tanto, no puede ser usada como representativa de la dispersión de los datos alrededor del valor medio. Por eso se trabaja con el promedio de las desviaciones al cuadrado, ya que la suma ahora de $(d_i)^2$ ya no es cero aunque lo sea la desviación promedio. Así se introduce el concepto de **varianza de la muestra**, σ_{N-1}^2 , como la suma de los cuadrados de las desviaciones sobre el conjunto de datos de la muestra. Por tanto, la **desviación estándar** se define como:

$$\sigma_{N-1} = \sqrt{\frac{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_N^2}{N-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}}$$
$$\sigma_{N-1}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2}{N-1}$$

Y, de igual forma, la **varianza** = σ_{N-1}^2 , es decir, el cuadrado de la desviación estándar.

- **Error asociado al valor promedio.** El error o incertidumbre asociada al valor medio obtenido del conjunto de datos se llama **error estándar**, que viene a representar la desviación estándar de la propia media. Cuando el número de medidas implicado en calcular el valor medio aumenta, este valor medio está mejor definido. De igual forma, la precisión con que la media puede estar determinada está relacionada con el número de medidas usadas para calcularla.

El **error estándar**, ϵ , se calcula a partir de la expresión: $\epsilon = \frac{\sigma_{N-1}}{\sqrt{N}}$

Por tanto, cuando en una experiencia de laboratorio hay que tener en cuenta los errores aleatorios, la forma correcta de expresar la medida y el error correspondiente es:

$$\bar{X} \pm \epsilon \text{ (unidades)}$$

Errores de medidas indirectas

Denotaremos, de forma genérica, como Y a cualquier medida indirecta.

En general, una medida indirecta la calculamos a partir de una función

$$Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N)$$

donde $X_1, X_2 \dots X_N$ son magnitudes que se miden directa o indirectamente.

Es lógico pensar, que la magnitud Y , obtenida a partir de otras magnitudes $X_i, i = 1 \dots N$, que tienen asociado su error absoluto, ΔX_i , tenga también asociado su error absoluto correspondiente, ΔY .

Veamos cómo podemos determinar el error absoluto asociado a medidas indirectas. Si $X_1, X_2 \dots X_N$ son medidas cuyos errores absolutos (conocidos) son:

$$\begin{aligned} X_1 &\rightarrow \pm \Delta X_1 \\ X_2 &\Rightarrow \pm \Delta X_2 \\ &\dots \\ X_N &\Rightarrow \pm \Delta X_N \end{aligned}$$

y Y es $Y = f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_N) \Rightarrow$

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| \Delta X_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right| \Delta X_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_3} \right| \Delta X_3 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_N} \right| \Delta X_N = \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial f}{\partial X_i} \right| \Delta X_i$$

Justificación:

Como Y es función de varias variables ($X_1, X_2 \dots X_N$) \Rightarrow

$$dY = \frac{\partial f}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} dX_2 + \frac{\partial f}{\partial X_3} dX_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_N} dX_N$$

Sustituyendo el diferencial “d” por “Δ” la expresión anterior queda:

$$\Delta Y = \frac{\partial f}{\partial X_1} \Delta X_1 + \frac{\partial f}{\partial X_2} \Delta X_2 + \frac{\partial f}{\partial X_3} \Delta X_3 + \dots + \frac{\partial f}{\partial X_N} \Delta X_N$$

Ahora bien, cada una de las derivadas parciales anteriores puede tomar, al calcular su valor, un valor positivo o bien negativo, pudiéndose entonces llegar al absurdo de que con errores no nulos asociados a cada una de las magnitudes de las que depende Y , se llegue por “compensación” a que ΔY sea nulo. Para evitar esto, se toman los valores absolutos de las derivadas parciales anteriores. Así, la expresión final que permite determinar el error absoluto de cualquier magnitud indirecta Y es:

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| \Delta X_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right| \Delta X_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_3} \right| \Delta X_3 + \dots + \left| \frac{\partial f}{\partial X_N} \right| \Delta X_N$$

Esta expresión, permite determinar ΔY cualquiera que sea la función Y .

Lo que ocurre es que, a la vista del tipo de función $f(X_1, X_2 \dots X_N)$, es posible determinar de forma más rápida ΔY , utilizando estrategias como las que se presentan más adelante.

Ejemplos de aplicación:

Ejemplo 1. Si $R = \frac{D}{2} \rightarrow Y \equiv R; \quad X \equiv D; \quad f \equiv \frac{D}{2}$

$$\Rightarrow \Delta Y \equiv \Delta R = \left| \frac{\partial f}{\partial X} \right| \Delta X = \left| \frac{\partial (D/2)}{\partial D} \right| \Delta D = \frac{1}{2} \Delta D$$

En general, si $Y = a X_1$, donde a es una constante

$$\Rightarrow \Delta Y = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| \Delta X_1 = |a| \Delta X_1$$

Ejemplo 2. Si $R_{\text{equivalente}} = R_1 + R_2 \rightarrow Y \equiv R_{\text{equivalente}}; \quad X_1 \equiv R_1; \quad X_2 \equiv R_2; \quad f \equiv R_1 + R_2$

$$\Rightarrow \Delta Y \equiv \Delta R_{\text{equivalente}} = \left| \frac{\partial (R_1 + R_2)}{\partial R_1} \right| \Delta R_1 + \left| \frac{\partial (R_1 + R_2)}{\partial R_2} \right| \Delta R_2 = \Delta R_1 + \Delta R_2$$

En general, si $Y = a + X_1 + X_2 - X_3 - X_4$, donde a es una constante

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| \Delta X_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right| \Delta X_2 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_3} \right| \Delta X_3 + \left| \frac{\partial f}{\partial X_4} \right| \Delta X_4 = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \Delta X_3 + \Delta X_4$$

Ejemplo 3. Si $v = \frac{L}{t} \rightarrow Y \equiv v; \quad X_1 \equiv L; \quad X_2 \equiv t; \quad f \equiv \frac{L}{t}$

$$\Delta Y \equiv \Delta v = \left| \frac{\partial (L/t)}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial (L/t)}{\partial t} \right| \Delta t = \left| \frac{1}{t} \right| \Delta L + \left| -\frac{L}{t^2} \right| \Delta t = \frac{1}{t} \Delta L + \frac{L}{t^2} \Delta t$$

Resulta más cómodo en este caso (fijarse que la medida indirecta es un cociente entre magnitudes), calcular primero el error relativo de v .

Planteémonos calcular el error relativo de v , donde su error absoluto es

$$\Delta v = \frac{1}{t} \Delta L + \frac{L}{t^2} \Delta t \Rightarrow \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta v}{L/t} = \frac{t \Delta v}{L} = \frac{t}{L} \left(\frac{1}{t} \Delta L + \frac{L}{t^2} \Delta t \right) = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta t}{t},$$

es decir, se ha encontrado que el error relativo de la medida indirecta es la suma de los errores relativos de las magnitudes de las que depende a través de la expresión de v .

Puesto que es más corto y sencillo calcular el error relativo que el absoluto, la estrategia recomendada es:

- 1- calcular el error relativo $\rightarrow \frac{\Delta v}{v}$
- 2- calcular el error absoluto a partir del error relativo: multiplicando el error relativo por el valor de la medida $\rightarrow \Delta v = \frac{\Delta v}{v} v$

En general, si $Y = a \frac{X_1 X_2}{X_3 X_4}$, donde a es una constante

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta X_1}{X_1} + \frac{\Delta X_2}{X_2} + \frac{\Delta X_3}{X_3} + \frac{\Delta X_4}{X_4}$$

calculándose entonces el error absoluto como $\Delta Y = \frac{\Delta Y}{Y} |Y|$

En general, si $Y = a \frac{X_1^{c_1} X_2^{c_2}}{X_3^{c_3} X_4^{c_4}}$, donde a, c_1, c_2, c_3 y c_4 son constantes, se llegaría a

$$\frac{\Delta Y}{Y} = |c_1| \frac{\Delta X_1}{X_1} + |c_2| \frac{\Delta X_2}{X_2} + |c_3| \frac{\Delta X_3}{X_3} + |c_4| \frac{\Delta X_4}{X_4}$$

Estrategia general para determinar ΔY a la vista de los resultados parciales que se han ido encontrando.

- 1) Si Y se calcula a partir de sumas y restas de variables

$$Y = c_0 + c_1 X_1 + c_2 X_2 - c_3 X_3 - c_4 X_4, \text{ donde } c_i, i = 0..4 \text{ son constantes}$$

\Rightarrow calcular directamente el error absoluto de Y

$$\Delta Y = |c_1| \Delta X_1 + |c_2| \Delta X_2 + |c_3| \Delta X_3 + |c_4| \Delta X_4$$

- 2) Si Y se calcula a partir de productos y fracciones de variables elevadas a exponentes

$$Y = a \frac{X_1^{c_1} X_2^{c_2}}{X_3^{c_3} X_4^{c_4}} \text{ donde } a \text{ y } c_i, i = 1..4 \text{ son constantes}$$

⇒ calcular primero el error relativo

$$\frac{\Delta Y}{Y} = |c_1| \frac{\Delta X_1}{X_1} + |c_2| \frac{\Delta X_2}{X_2} + |c_3| \frac{\Delta X_3}{X_3} + |c_4| \frac{\Delta X_4}{X_4} \text{ y}$$

⇒ calcular el error absoluto, multiplicando al relativo por el valor de Y

- 3) Si Y resulta ser una combinación de productos, cocientes, sumas y restas de variables

$$Y = c_1 \frac{X_1}{X_2^{c_2}} - X_3 + X_4 X_5^{c_5} \quad (*)$$

⇒ resulta más apropiado para este caso seguir los siguientes pasos:

- definir $Y = Y_1 + Y_2 + Y_3$, donde $Y_1 = c_1 \frac{X_1}{X_2^{c_2}}$ $Y_2 = -X_3$ $Y_3 = X_4 X_5^{c_5}$
- calcular los errores $\Delta Y_1, \Delta Y_2, \Delta Y_3$ por el método 2)
- calcular ΔY , de acuerdo con la ecuación (*), a partir del método 1)

Escritura correcta de la medida y su correspondiente error

El objetivo ahora es aprender a expresar correctamente la medida con su error absoluto, es decir, si X es el valor medido (directa o indirectamente) de una magnitud y ΔX su error absoluto, la forma correcta de expresarlo, $X \pm \Delta X$ (unidades), debe tener en cuenta los siguientes pasos:

- 1.- Primero se trabaja con el error absoluto, ΔX .

Se toma para ΔX una sola cifra significativa (para ello se redondea si es necesario).

- 2.- A continuación, se trabaja con el valor obtenido para la medida, X .

Se toma para X el número de cifras necesarias para llegar a tener la misma precisión que la indicada por ΔX , es decir, se expresa la medida con el mismo número de cifras decimales que el error.

- 3.- Se escribe el resultado como $X \pm \Delta X$ (unidades). Si el resultado es un número muy pequeño o muy grande se hará uso del factor 10^a , colocando éste fuera del paréntesis.

Ejemplo 1: $X = 27.23678$ unidades y $\Delta X = 0.04325$ unidades

$$X = (27.24 \pm 0.04) \text{ unidades}$$

Ejemplo 2: $X = 5$ unidades y $\Delta X = 0.00473$ unidades

$$X = (5.000 \pm 0.005) \text{ unidades}$$

Ejemplo 3: $X = 7659876.4$ unidades y $\Delta X = 144.2789$ unidades

$$\Delta X = 0.1442789 \times 10^3 \text{ unidades y } X = 7659.8764 \times 10^3 \text{ unidades}$$

$$X = (7659.9 \pm 0.1) \times 10^3 \text{ unidades}$$

Ejemplo 4: $X = 0.00007659$ unidades y $\Delta X = 0.00000094$ unidades

$$\Delta X = 0.94 \times 10^{-6} \text{ unidades y } X = 76.59 \times 10^{-6} \text{ unidades}$$

$$X = (76.6 \pm 0.9) \times 10^{-6} \text{ unidades}$$

Representaciones gráficas

Las gráficas constituyen la forma visual de establecer la relación entre dos variables **Y** y **X**.

- Cuando se dice “*representación gráfica de Y en función de X*” se quiere señalar que en el eje de ordenadas (eje vertical) deber representarse la variable **Y** y en el eje de abscisas (eje horizontal) la variable **X**.
- En cada eje debe señalarse **la magnitud** que se representa así como las **unidades** en las que están expresados los valores.
- Para representar los datos experimentales, debe dividirse, tanto el eje horizontal como el vertical, en **intervalos regulares** (uniformemente distribuidos), de forma que los puntos representados queden en la gráfica uniformemente distribuidos. Esto puede hacerse de la siguiente forma:
Si x_{\min} y x_{\max} son los valores mínimo y máximo que toma la variable **X** de los puntos a representar, entonces los valores mínimo y máximo del eje **X** deben tomarse un 5-10% menor y un 5-10% mayor que x_{\min} y x_{\max} respectivamente. De forma análoga se haría con el eje **Y**.
Por tanto, no es necesario que el corte de los ejes sea el punto (0,0). Sin embargo, en ocasiones es conveniente. **Todas las gráficas a representar en las distintas prácticas de este laboratorio de Física, se harán de esta forma (incluyendo el (0,0)).**
- Los símbolos utilizados para representar los puntos experimentales deben ser suficientemente claros.
- Los puntos experimentales **¡nunca!!** deben unirse mediante segmentos.

- Si hay errores asociados a las variables, deberían también representarse los puntos con sus correspondientes barras de error. No obstante, **en todas las gráficas a representar en las distintas prácticas de este laboratorio de Física, se omitirá hacerlas representando las barras de error de las variables.**

A la vista de la gráfica obtenida es necesario tener una idea del tipo de dependencia existente entre las variables representadas.

En el caso de existir una relación lineal entre Y y X, el siguiente paso es pintar la recta que mejor se ajuste a la nube de puntos experimentales. Si la dependencia entre las variables Y y X es lineal, responderá a la expresión $Y = a + bX$, donde **a** representa la ordenada en el origen y **b** la pendiente de la recta. El objetivo, por tanto, es encontrar los valores **a** y **b**. Para ello se proponen dos formas distintas de hacerlo.

➤ **Método 1.** Encontrar la ecuación de la recta (**a** y **b**) **a partir de la propia representación gráfica** de los datos experimentales. Para ello, se trazará con una regla una recta que “pase” de forma lo más próxima posible por el conjunto de puntos representados, esto es, tratando de compensar puntos “por encima” y puntos “por debajo”: pintar la recta que mejor se ajuste a la nube de puntos no significa que todos los puntos experimentales deban pertenecer a la recta pintada.

- **Determinación de la pendiente.** Se eligen dos puntos, (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , que pertenezcan a la recta dibujada. La pendiente de la recta será:

$$b = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1} \text{ (unidades)}$$

- **Determinación de la ordenada en el origen.** Prolongando la recta dibujada, la lectura en la gráfica del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas, dará directamente el valor de **a**.

$$a \text{ (unidades)} \rightarrow \text{valor de } Y \text{ para el cual } X = 0$$

En la propia representación gráfica se expresará la función $Y = a + bX$ con los valores de **a** y **b** determinados anteriormente (sin olvidar las unidades).

➤ **Método 2.** Ajuste por mínimos cuadrados. Para comprender en qué consiste el método, señalaremos los pasos claves para poder llegar a las expresiones de **a** y **b** que se apuntarán más adelante.

Dada una nube de puntos experimentales (x_i, y_i) $i = 1 \dots N$, correspondiente a dos variables X y Y entre las que se espera que exista una relación lineal, deseamos encontrar la ecuación de la recta que mejor ajusta globalmente al conjunto de puntos experimentales, $Y = a + bx$. Esa será la expresión que mejor represente la relación entre las dos variables. Por tanto, el objetivo es determinar la ordenada en el origen, **a**, y la pendiente de la recta, **b**, pues con estos dos parámetros la recta queda completamente determinada.

La determinación de **a** y **b** se lleva a cabo por el método de mínimos cuadrados. Definimos

$$S = \sum_{i=1}^N [y(x_i) - y_i]^2$$

donde y_i representa el valor experimental del punto (x_i, y_i) obtenido experimentalmente y $y(x_i)$ representa el valor que le correspondería si ese punto, cuya abscisa es x_i , perteneciera a la recta ajustada. Así $y(x_i) = a + bx_i$. Por tanto,

$$S = \sum_{i=1}^N [a + bx_i - y_i]^2$$

La recta que mejor ajusta globalmente los puntos es aquella que minimiza la función S , es decir, es aquella cuyos parámetros a y b hacen que la dispersión entre los valores $y(x_i)$ predichos y los valores y_i experimentales es la menor posible (la mínima). Ello implica que debe minimizarse la función S respecto de los parámetros a y $b \Rightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 0$$

Estas condiciones permiten determinar las dos incógnitas, a y b , llegándose a las expresiones siguientes:

$$a = \frac{1}{N} \frac{\sum_{i=1}^N y_i \sum_{i=1}^N x_i^2 - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2}$$

Los errores absolutos de los parámetros a y b se calculan a partir de las siguientes relaciones:

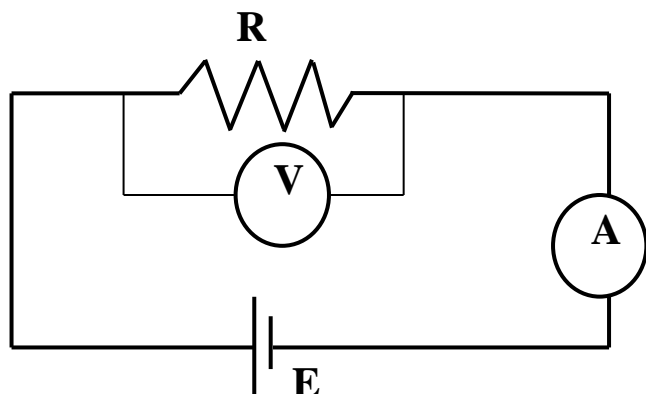
$$\Delta a = \left[\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \right]^{1/2} \alpha$$

$$\Delta b = \left[\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \right]^{1/2} \alpha$$

donde $\alpha = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i)^2}{N - 2} \right]^{1/2}$

La pendiente b de la recta puede estar relacionada con alguna magnitud física de interés, en cuyo caso, una vez conocido Δb , se determinará el error asociado a dicha magnitud por medio del método ya visto en la propagación de errores.

Ejemplo. En el laboratorio se han obtenido los siguientes valores experimentales para la intensidad de la corriente, I , que circula por un circuito (medida por el amperímetro A) y la diferencia de potencial, V , entre los bornes de R (medida con el voltímetro V).

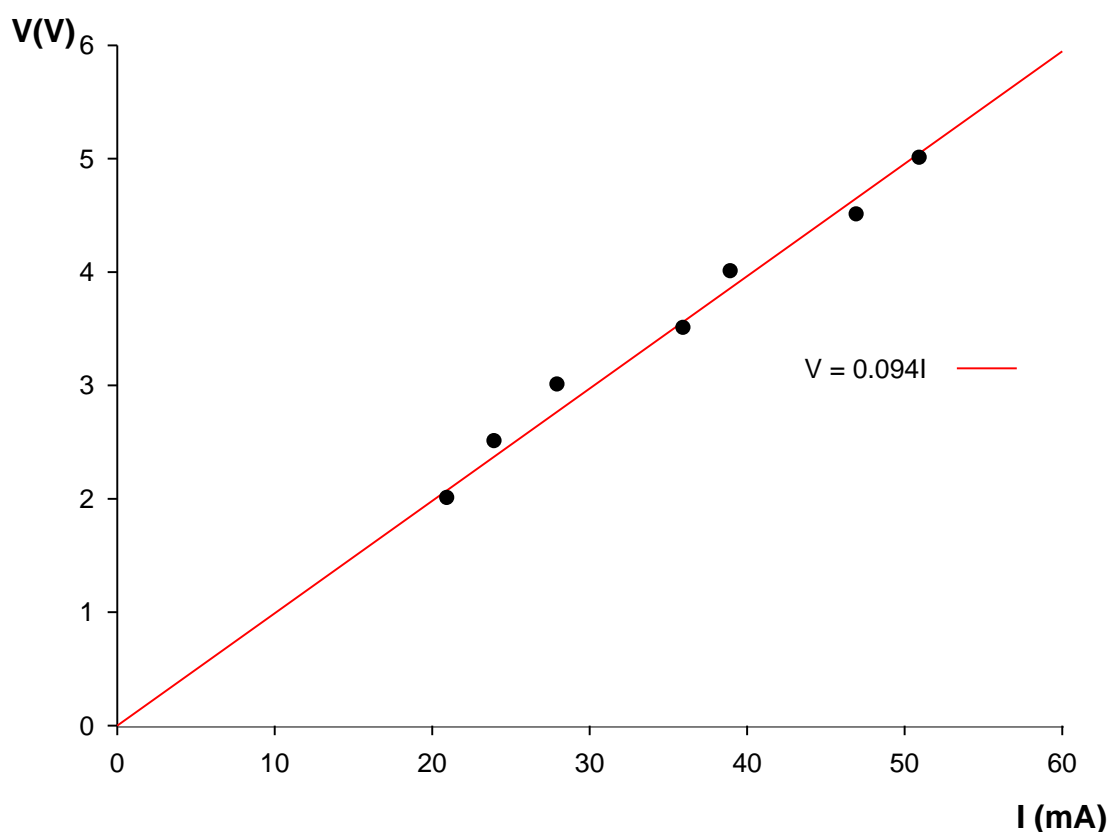


$I(\text{mA})$	$V(\text{voltios})$
21	2.0
24	2.5
28	3.0
36	3.5
39	4.0
47	4.5
51	5.0

Darse cuenta de que el error absoluto de la magnitud I (medida directa) es la precisión del aparato ($\pm 1 \text{ mA}$) y el error absoluto de la magnitud V (medida directa) es la precisión del aparato ($\pm 0.1 \text{ V}$).

- ❖ Según el **método 1** señalado anteriormente, a partir de la representación gráfica de los puntos experimentales se ha trazado la recta que ajusta globalmente a los puntos. Puesto que el experimento del laboratorio trata de comprobar la ley de Ohm ($V = RI$) en el circuito de la figura, hemos prolongado la recta haciendo que pase por el origen de coordenadas, como corresponde a la ley a representar ($V = RI$ corresponde a la ecuación de una recta de ordenada en el origen cero y de pendiente R cuando se representa V en función de I).

Representación gráfica de V en función de I



- ❖ Según el **método 2**, realizamos el ajuste por mínimos cuadrados. La mayoría de las calculadoras poseen incorporado el programa de regresión lineal. Si no es el caso, necesitamos obtener los distintos sumatorios que aparecen en las expresiones finales de **a** y **b**. De esta forma,

$x_i \equiv I \text{ (mA)}$	$y_i \equiv V \text{ (voltios)}$	$x_i^2 \text{ (V}^2\text{)}$	$x_i y_i \text{ (mAV)}$
21	2.0	441	42
24	2.5	576	60
28	3.0	784	84
36	3.5	1296	126
39	4.0	1521	156
47	4.5	2209	211.5
51	5.0	2601	255
$\sum x_i = 246$	$\sum y_i = 24.5$	$\sum x_i^2 = 9428$	$\sum x_i y_i = 934.5$

Utilizando las expresiones anteriores se obtiene:

$$a = 0.2005 \text{ V}$$

$$\Delta a = 0.18 \text{ V}$$

$$b = 0.0939 \text{ V/mA} = 93.9 \Omega$$

$$\Delta b = 0.0050 \text{ V/mA} = 5.0 \Omega$$

Por lo que el resultado final para los parámetros **a** y **b** debe expresarse

$$a = (0.2 \pm 0.2) \text{ V}$$

$$b = (94 \pm 5) \Omega$$

Como el error absoluto de **a** es tan grande como su valor, la recta que mejor ajusta los datos pasa, dentro de las incertidumbres experimentales, por el origen de coordenadas. Aunque teóricamente es de esperar una relación de simple proporcionalidad entre **V** e **I**, el ajuste a una recta con un término independiente **a** resulta aconsejable para corregir posibles errores experimentales sistemáticos que se manifiesten en una traslación global de los puntos experimentales a lo largo de uno de los ejes.

Nótese que como $V = RI$, la pendiente **b** ajustada es precisamente el valor de la resistencia **R** que mejor ajusta globalmente los datos:

$$R = (94 \pm 5) \Omega$$