Actividad I. 1 3 Análisis de dimensiones de magnitudes y fórmulas

En la factura de la energía suministrada por la compañía eléctrica nos hablan del número de Kwh gastados, nosotros sabemos que la energía se mide en julios. ¿vale el kwh como unidad de energía?

¿Por qué es importante este concepto?

Situaciones como las anteriores nos las encontramos en diversos momentos del desarrollo de los contenidos de Física.

> *Por ejemplo: En una clase de Física el profesor pregunta cuales son las unidades del campo eléctrico. Un alumno responde que Newtons partido por culombio (N/C) y otro que Voltios partido metro (V/m). ¿Cual de los dos tiene razón? ¿Cómo podemos determinar cual de los dos alumnos anteriores tiene razón?*.

Sabemos que la mayor parte de las magnitudes que estudiamos se miden a partir de ***unidades derivadas*** de otras, que son las correspondientes a las llamadas ***magnitudes fundamentales*** que son la longitud (L), la masa (M), el tiempo (T), la intensidad de corriente eléctrica (I), a las que se añaden la temperatura absoluta, la intensidad luminosa y la cantidad de materia.
Por tanto, el procedimiento más seguro para determinar si estas dos unidades corresponden a la misma magnitud, será determinar si derivan de las mismas magnitudes fundamentales, y de la misma forma.

Conexión con conocimientos previos y expectativas.

En el caso de la pregunta anterior veamos cuales son las dimensiones de cada una de las unidades, en función de las magnitudes fundamentales, que iremos señalando en mayúsculas. El Newton es una unidad de fuerza, y por tanto es masa por aceleración (f = M.a), la masa ya es una unidad fundamental y la aceleración es una velocidad partido por un tiempo $\left(f = M \cdot v \cdot T^{-1}\right)$. Aún debemos tener en cuenta que la velocidad es una longitud partido por un tiempo $\left(v = L \cdot T^{-1}\right)$. En total, las dimensiones de la fuerza son $M \cdot L \cdot T^{-2}$, que escribiremos $\left[F\right] = M.L.T^{-2}$. Por otra parte como la fuerza que un campo eléctrico ejerce sobre una carga es $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$ y el culombio es intensidad de corriente por tiempo, $\left(\left[Q\right] = I \cdot T\right)$ tenemos que:

$\left[E\right] = \dfrac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = M \cdot L \cdot I \cdot T^{-3}$, que es su ***"ecuación de dimensiones"***.

Si nos vamos a la segunda respuesta , el metro es unidad fundamental de longitud y el voltio es energía por unidad de carga, como la energía es trabajo, es decir fuerza por espacio, en total tenemos fuerza por espacio partido por carga y por longitud

$\left[E\right] = \frac{\left[F\right] \cdot L}{\left[Q\right] \cdot L} = \frac{\left[F\right]}{\left[Q\right]} = \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{I \cdot T} = M \cdot L \cdot I \cdot T^{-3}$, expresión idéntica a la anterior. si bien podíamos haberlo comprobado viendo que ambas unidades corresponden a una fuerza por unidad de carga.

Análisis de dimensiones.

Método de análisis que permite determinar la expresión de una magnitud derivada en función de las magnitudes fundamentales, y por consiguiente permite determinar si en una ecuación todos los sumandos son homogéneos (tienen las mismas dimensiones), y lo mismo con los dos miembros de la ecuación.

> ***Cuestión 1***.
> *Determinar la ecuación de dimensiones de la energía potencial mecánica*.

Análisis de dimensiones de una fórmula.

> *Al buscar la fórmula de la energía cinética de un sólido rígido que gira en torno a un eje hemos obtenido la siguiente expresión* $E_C = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$ *donde I es el momento de inercia del sólido y* ω *su velocidad angular. Tenemos dudas y queremos saber si la expresión es correcta.*

Un primer paso sería asegurarnos de la homogeneidad de la fórmula, es decir realizar el análisis de las dimensiones para asegurarnos que son las mismas en los dos miembros
El primer miembro es una energía, luego tiene las mismas dimensiones de un trabajo, es decir fuerza por espacio, tenemos $\left[E_C\right] = \left[F\right] \cdot L = M \cdot L \cdot T^{-2} \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$
En el segundo miembro nos encontramos el término ½, que es una constante procedente de integración, luego no tiene dimensiones, por tanto no es preciso considerarla. El resto es un momento de inercia, que por definición es el producto de las masas por las distancias al eje de giro al cuadrado, por el cuadrado de la velocidad angular que es ángulo girado por unidad de tiempo, como el ángulo no tiene dimensiones, tenemos:

$$\left[\frac{1}{2} I \cdot \omega^2\right] = M \cdot L^2 \cdot \left(T^{-1}\right)^2 = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$$

> ***Cuestión 2***
> *Demostrar que el impulso mecánico de una fuerza es igual a la variación del momento lineal del cuerpo que la recibe* $F.t = m.\left(v_2 - v_1\right)$

En realidad el análisis dimensional nos sirve para resolver situaciones más complejas, de las que tenemos un ejemplo muy sencillo en la siguiente situación:

> *Sabemos que la velocidad de salida de un líquido por un pequeño orificio practicado en la pared de un recipiente depende de la distancia vertical del orificio a la superficie libre del líquido (h) y de la aceleración de la gravedad (g), pero dudamos si depende o no de*

la densidad del líquido(d), y de cuales serían los exponentes de “h” y “g”.

Veamos como el análisis de dimensiones puede ayudarnos a resolver esta duda.
Si la velocidad de salida depende de estas tres variables, siempre podremos escribir la velocidad como una función de ellas. v = f(h,g d) y la correspondiente fórmula deberá ser homogénea. Analicemos las ecuaciones de ambos miembros
$\left[v\right] = L \cdot T^{-1}$ y por otra parte en el segundo miembro tendríamos una expresión del tipo:
$k \cdot h^a \cdot g^b \cdot d^c$ donde k es una constante y por tanto no tiene dimensiones, y a, b y c tres números que es preciso determinar con la condición de que la fórmula sea homogénea.
La ecuación de dimensiones del segundo miembro es

$$\left[h^a \cdot g^b \cdot d^c\right] = L^a\left(L \cdot T^{-2}\right)^b\left(M \cdot L^{-3}\right)^c = L^{a+b-3c} \cdot T^{-2b} \cdot M^c$$

por tanto, igualando ambas ecuaciones de dimensiones queda:
$L \cdot T^{-1} = L^{a+b-3c} \cdot T^{-2b} \cdot M^c$, e igualando los exponentes tenemos: c=0, luego no podemos tener dependencia de la densidad, además -2b = -1, con lo que b=½, es decir la gravedad aparece bajo una raíz cuadrada, y finalmente a+b-3c =1, es decir a = 1 - b = ½ , con lo que también la altura estará elevada al exponente ½, y por tanto la expresión total de la velocidad pedida será $v = k.\sqrt{h.g}$

Cuestión 3.
Determinar las dimensiones de la constante de gravitación universal

Conceptos adquiridos.

Magnitudes fundamentales. Son el menor número de magnitudes cuya combinación nos permite obtener todas las demás, que diremos dependen de ellas y son: la masa (unidad el kilo), la longitud (unidad el metro), el tiempo (unidad el segundo), la intensidad eléctrica (unidad el amperio), la temperatura absoluta (unidad Kelvin), la intensidad luminosa (unidad candela) y cantidad de mas (unidad mol).
Por ejemplo para medir el volumen de una habitación se miden sus dimensiones y se opera con ellas. De hecho el metro cúbico (m^3) se define como el volumen de un cubo de 1 m de lado. Para calcular una velocidad se miden espacios y tiempos, etc..

Ecuación de dimensiones. Expresión de una magnitud derivada en función de las magnitudes simples o fundamentales.

Homogeneidad de una fórmula. Es la condición de que todos los sumando y ambos miembros tengan las mismas dimensiones.