ÁLGEBRA VECTORIAL

Operaciones con vectores: suma, diferencia y productos con vectores. Algunas aplicaciones geométricas de los productos entre vectores

La existencia de magnitudes que no van a quedar definidas con el conocimiento de la cantidad y de las unidades en las que expresamos dicha cantidad, lleva a introducir las magnitudes vectoriales. Está claro que cuando decimos: “han transcurrido tres minutos” sabemos que nos referimos a un intervalo temporal, cuyo valor es de tres minutos, no son tres horas, ni cinco minutos, ni tampoco tres segundos. La expresión del valor de la cantidad (con la unidad correspondiente) nos informa de la magnitud a la que hacemos referencia y de la importancia de la cantidad que estamos considerando.

Sin embargo, cuando nos dicen que un automóvil ha conseguido una media de 109 km/h, podemos decir que ha ido bastante deprisa, la cantidad y la unidad empleada nos permite decir eso, pero ¿ha llegado a Málaga? o ¿llegó a Toledo? ¿partió de Barcelona? o ¿inició su recorrido en Madrid?. La velocidad es una de esas magnitudes que para quedar bien definidas, necesitamos conocer, desde luego su valor (que para que tenga todo su significado debemos conocer la unidad de medida empleada), pero también, tanto la dirección de la que hablamos, como el sentido de la misma (no es lo mismo ir de vacaciones, que volver de ellas).

Las magnitudes que quedan caracterizadas con el conocimiento de la cantidad y su unidad, las llamamos magnitudes escalares, mientras que las magnitudes que para quedar definidas necesitamos conocer, además de la unidad empleada, tres números que nos expresen de alguna forma, su valor (módulo) su dirección y su sentido las llamaremos magnitudes vectoriales.

Como de todos es conocido el tratamiento de las magnitudes escalares, vamos a acercarnos, un poco, al manejo de las magnitudes vectoriales.

Operaciones con vectores

Vamos a dedicar este apartado al repasar las operaciones básicas con vectores suponiendo que el lector no tiene suficientes conocimientos sobre las mismas.

Por vector vamos a entender un segmento orientado, se caracterizará por su *módulo* (que es una medida de su longitud), su *dirección* (que es el conjunto de líneas paralelas al segmento) y por su *sentido* (que es el dado por la orientación que hemos tomado). Para trabajar con números reales nos valía con conocer su valor, es decir un número, para trabajar con vectores vamos a necesitar conocer tres características que de alguna manera nos puedan dar su módulo, su dirección y su sentido. Esta será pues una complicación que tendrán los vectores, siempre que tengamos que identificar un vector necesitaremos utilizar o muchas palabras o tres números de los que podamos obtener el módulo la dirección y el sentido del mismo.

Para referirse en un texto un vector se emplea indistintamente o la letra que lo representa escrita en **negrita** (el vector "a" lo escribiremos **a**) o con una flecha o un segmento colocados sobre la letra $\vec{a}$, dejando la escritura en *cursiva*, o sin características especiales, para los escalares o los módulos de los vectores. Nosotros emplearemos, generalmente la flecha sobre la letra para los vectores y la letra, generalmente griega o mayúscula, sin características específicas para los escalares.

Vamos a realizar un repaso de las operaciones con vectores y de las propiedades de las mismas, utilizando básicamente ideas geométricas que por su facilidad de visualización ayudarán a una mejor comprensión de los conceptos que manejaremos.

Suma de vectores

Por suma de dos vectores entendemos otro vector que resulta al unir el origen del primero de los sumandos con el extremo de último de ellos. Por la propia definición de suma, cada vez que realicemos esta operación estamos dibujando un paralelogramo con los dos vectores (sería mas correcto hablar de ellos y sus equipolentes), y tomando la diagonal del mismo como suma de los vectores. Esta claro, que la diagonal será la misma con independencia del orden que usemos para dibujar el paralelogramo, luego la suma de vectores será *conmutativa*.

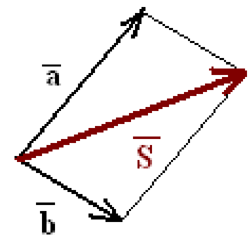

Figura 1
Representación de la suma de dos vectores

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

Por otro lado, si queremos que se nos repita un vector al sumarlo con otro, este otro tendrá que ser simplemente un punto. Es decir *existe el elemento neutro para la suma* o vector nulo ($\vec{0}$) tal que

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

que se caracterizará por tener de módulo cero.

Para obtener el elemento neutro respecto de la suma a partir de un vector cualquiera tendremos que sumarle otro vector del mismo módulo dirección y sentido opuesto ($-\vec{a}$). Ese será el *vector opuesto* al dado, que cumplirá

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$$

De la definición se deduce que para realizar la suma de tres o más vectores, tendremos que sumar dos de ellos, y al vector que nos resulte sumarle el tercero y así sucesivamente. La suma de vectores tiene pues la propiedad *asociativa*

$$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$$

Diferencia de vectores

Como en el caso de números reales vamos a entender por diferencia de dos vectores sumar al minuendo el opuesto del substraendo. Por tanto

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

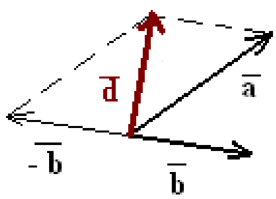

Figura 2
Representación de la diferencia de dos vectores

De la propia definición se desprende que la diferencia no puede ser conmutativa

Producto de un escalar por un vector

Si un vector lo sumamos con el mismo varias veces, es decir lo ponemos a continuación de si mismo varias veces, el resultado será otro vector de la misma dirección y sentido que el original cuyo módulo será igual a tantas veces el módulo del vector como le hemos repetido. Por similitud con la multiplicación de números reales, a esa operación la llamaremos producto de un escalar (λ) por un vector $(\vec{a})$

$$\lambda \cdot \vec{a} = \overrightarrow{\lambda a}$$

Siendo $\overrightarrow{\lambda a}$ un vector de módulo $\left|\overrightarrow{\lambda a}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, paralelo al vector $\vec{a}$ y de sentido el del vector $\vec{a}$ si $\lambda > 0$ y opuesto al de $\vec{a}$ si $\lambda < 0$.

Esta operación presenta las siguientes propiedades

Existencia de elemento unitario

$$1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$$

Existencia de elemento nulo

$$0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$$

Distributiva respecto de la suma de escalares

$$(\lambda + \mu) \cdot \vec{a} = \lambda \cdot \vec{a} + \mu \cdot \vec{a}$$

Distributiva respecto de la suma de vectores

$$\lambda \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$$

Naturalmente como dividir por un escalar es multiplicar por su inverso, si a un vector lo multiplicamos por el inverso de su módulo, que es un escalar, obtenemos un *vector unitario* (cuyo módulo es la unidad) en la dirección y sentido del vector dado.

$$\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} = \vec{u}$$

Los vectores, además de poderlos multiplicar por un escalar, también los podemos multiplicar entre sí, según que el resultado sea un escalar o un vector definimos los productos escalar o vectorial entre vectores.

Producto escalar de dos vectores

Por producto escalar de dos vectores entendemos el escalar cuyo valor sea el producto del módulo de uno de los vectores por la proyección del otro sobre él. Normalmente el producto escalar se denota por los dos vectores unidos por el punto de multiplicación dentro de un paréntesis curvo

Producto escalar de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b} \equiv (\vec{a} \cdot \vec{b})$

En la figura 3 se ve que la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección definida por $\vec{a}$, es el segmento OP cuyo valor es igual al módulo del vector $\vec{b}$ multiplicado por el coseno del ángulo que forman las direcciones de los vectores

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left|\vec{a}\right|\cdot\overline{OP} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$$

De la expresión que hemos escrito se obtiene inmediatamente:

$\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right) = \left|\vec{a}\right|^2$ lo que nos permite *calcular el módulo de un vector* cualquiera

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)}$$

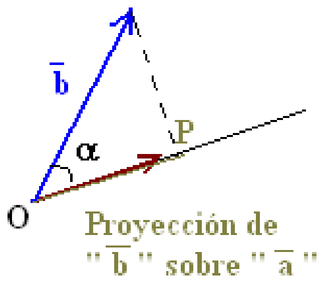

Figura 3
El segmento OP es la proyección del vector $\vec{b}$ sobre la dirección del vector $\vec{a}$

Por otra parte de la definición se obtiene que *el producto escalar de dos vectores perpendiculares tiene que ser nulo*, pues la proyección de un vector sobre una recta perpendicular a su dirección es un punto

$$\text{Si } \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = 0 \quad \Rightarrow \vec{a} \text{ es} \perp \text{ a } \vec{b}$$

Si este producto entre dos vectores nos da como resultado un escalar, *no puede existir elemento neutro para el producto escalar de dos vectores*, pues es imposible obtener el vector del que partimos al multiplicarlo escalarmente con otro. Por la misma razón no puede existir el producto escalar de tres vectores, pues el producto de los dos primeros produciría un escalar y el producto por un tercero, realmente sería el producto de un escalar por un vector.

Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial de dos vectores es otro vector, cuyo módulo es el área del paralelogramo formado por los vectores, su dirección es la de la perpendicular al plano definido por los vectores y su sentido el de avance de un tornillo que siga el giro del primer vector (multiplicando) sobre el segundo (multiplicador) por el camino más corto. Normalmente el producto vectorial de dos vectores lo representaremos por ambos vectores unidos por el "aspa" de multiplicación con ambos vectores encerrados en un corchete. Así el producto vectorial $\vec{P}$ de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, lo representaremos como

$$(\text{Producto vectorial de los vectores } \vec{a} \text{ y } \vec{b}) \equiv \vec{P} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$$

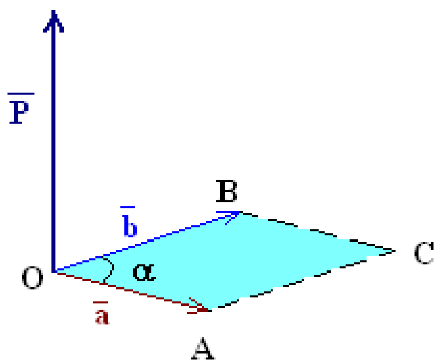

Figura 4
El vector producto vectorial $\vec{P}$ es perpendicular al plano definido por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$

Como el área del paralelogramo definido por los vectores (en la figura 4, el paralelogramo OBCA) es la longitud de los lados por el seno del ángulo que forman (tal vez se recuerde mejor que el área del triángulo $\widehat{OAB}$ es el $\frac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\,\text{sen}\alpha$, por lo tanto el rectángulo tiene el doble de área) el módulo del producto vectorial de dos vectores será:

$$\left|\vec{P}\right| = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\,\text{sen}\alpha$$

Si el sentido viene dado por el de avance de un tornillo que haga girar el multiplicando hacia el multiplicador por el camino más corto, implica que el producto vectorial *no puede tener la propiedad conmutativa.*

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$$

Por la propia definición de producto vectorial de dos vectores *no puede existir elemento neutro* para el producto, pues no puede existir ningún vector, aunque su módulo sea unitario, que nos reproduzca el vector original, pues por definición el producto vectorial es un vector perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

De la última afirmación se desprende que *no puede existir elemento inverso respecto de un vector*, lo que supone que *no existe la división entre vectores*.

Por otro lado, si el producto vectorial tiene por módulo el área del paralelogramo que definen los dos vectores, si dos vectores son paralelos no definen paralelogramo alguno, luego no tiene área. El producto vectorial de dos vectores paralelos es nulo.

$$\text{Si } \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] = \vec{0} \quad \Rightarrow \vec{a} \text{ es paralelo a } \vec{b}$$

El producto vectorial de vectores tiene la *propiedad distributiva respecto de la suma de vectores*

$$\left[\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})\right] = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right] + \left[\vec{a}\times\vec{c}\right]$$

Doble producto vectorial

El producto $\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$, se le conoce como doble producto vectorial. El lugar donde esté colocado el paréntesis tiene mucha importancia al definir un plano, y no otro, y la dirección del vector producto. Sabemos que el producto $\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$ está contenido en un plano perpendicular al definido por los dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$. Al multiplicar este producto vectorial por el vector $\vec{a}$, el nuevo producto vectorial tiene que dar como resultado un vector perpendicular al $\vec{a}$ y al vector $\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$, es decir, estará situado en el plano definido por los dos vectores $\vec{b}$ y $\vec{c}$, como se representa en la figura 6.

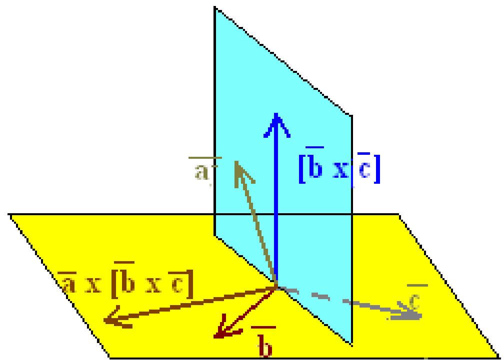

Figura 6

El vector $\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$ está contenido en un plano perpendicular al definido por ambos vectores. El vector $\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$ tiene que ser perpendicular tanto al vector $\vec{a}$, como al vector $\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$.

Se puede demostrar (lo que se deja al lector) que el doble producto vectorial puede expresarse como

$$\vec{a}\times\left[\vec{b}\times\vec{c}\right] = \vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\times\vec{c}=\vec{c}\times\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$$

lo que es evidente pues se realizan dos cambios en el orden de realizar la multiplicación, lo que supone un doble cambio de signo en el producto.

Algunas aplicaciones geométricas de los productos entre vectores

La primera aplicación a la que nos vamos a referir es la posibilidad de asignar *carácter vectorial a las superficies*. Hemos dicho que el producto vectorial de dos vectores tiene por módulo el área del paralelogramo que definen. Cualquier superficie, plana o alabeada, se puede considerar como la suma de infinitos paralelogramos elementales, cuyo área es el producto vectorial de los dos vectores elementales que podemos considerar son sus lados, lo que lleva consigo un sentido de recorrido del perímetro de cada superficie elemental. Por tanto el sentido del recorrido de una superficie abierta nos dirá el sentido del vector superficie correspondiente. Si la superficie encierra un volumen, tomaremos como sentido positivo el dirigido hacia fuera del volumen.

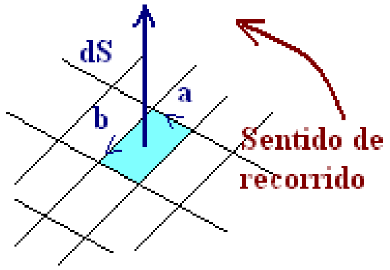

Figura 7
El producto de “a” por “b”, si los consideramos como vectores, da un sentido de recorrido a la superficie del paralelogramo elemental considerado.

Otra aplicación directa del producto entre vectores es el cálculo del *volumen de un paralelepípedo*. Consideremos tres vectores que no sean coplanarios. Definirán un paralelepípedo no recto, cuya base podemos considerar son dos de ellos y el tercero será una de sus aristas laterales.

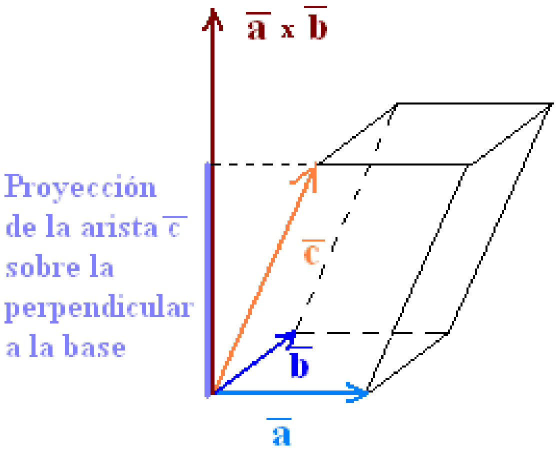

Figura 8
El volumen del paralelepípedo formado por los tres vectores es al área de la base por la altura (proyección de la arista sobre la perpendicular a al base)

Sabemos que el volumen (V) de un paralelepípedo es el producto del área del polígono base por la altura del prisma. Por definición de producto vectorial de dos vectores, éste es otro vector perpendicular a los mismos cuyo módulo coincide con el área del paralelogramo que forman. También hemos dicho que el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él, luego al multiplicar escalarmente el vector arista (en la figura 8 el vector $\vec{c}$) por el producto vectorial, en el orden adecuado, de los vectores base $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ obtenemos un escalar (el volumen “V”) cuyo valor será el módulo del vector área de la base por el segmento de perpendicular comprendido entre ambas bases del paralelepípedo (proyección de la arista sobre una perpendicular a las bases).

$$V=\vec{c}\cdot\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$$

Por tanto, podemos asignar un vector a cualquier superficie, según el sentido en el que la recorramos y calcular el volumen de cualquier paralelepípedo como el producto mixto de sus aristas entendidas como vectores.