Tema 3: Energía del campo electrostático

Conocimientos previos. Energía mecánica. Energía de una carga en un campo electrostático. Energía electrostática de una distribución discreta de cargas. Energía electrostática de una distribución continua de cargas. Energía electrostática de un conductor cargado. Densidad de energía del campo electrostático.

Bibliografía: J. Reitz, F. Milford, R. Christy "Fundamentos de la Teoría Electromagnética" Ed. Addison-Wesley Iberoam

Conocimientos previos: Los conceptos básicos de trabajo y energía que nos da la Mecánica clásica

Objetivos: Afianzar los conceptos de trabajo realizado por un campo, y de energía potencial de un campo conservativo así como el concepto de energía propia de un campo o un sistema.

Conocimientos previos. Energía mecánica

En Mecánica aprendimos que el trabajo realizado por una fuerza para ir de un punto a otro, era el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento, de forma que si la fuerza es un vector de un campo de fuerzas, el trabajo realizado para desplazarse de un punto a otro del campo es igual a la circulación del vector campo (fuerza en este caso) a lo largo de la curva que determina la trayectoria seguida. Además sabemos que si esa circulación no depende de la curva seguida, decimos que el **campo de fuerzas es conservativo,** de forma que se puede definir una nueva magnitud, que llamamos energía potencial, cuyo valor coincide con el trabajo realizado por el campo de fuerzas cambiado de signo, así podemos hablar de energía potencial asociada a la posición. Cuando nos desplazamos en contra del campo, aumenta la energía potencial, mientras que un desplazamiento, entre los mismos puntos, producido por las fuerzas que definen el campo hace que la energía potencial disminuya en la misma cantidad.

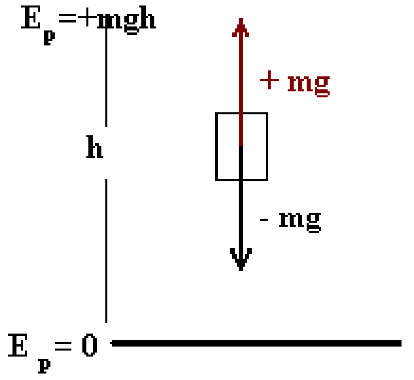

Figura 1
El trabajo realizado por la fuerza que ejercemos nosotros (en rojo en la figura) aumenta la energía potencial de la masa. Por el contrario el movimiento espontáneo, gracias a la fuerza realizada por el campo (en negro) disminuye la energía potencial de la masa

Tal vez el ejemplo más claro, por estar muy unido a nuestra experiencia cotidiana, sea el de levantar una masa una cierta altura. El campo de fuerzas gravitatorio que actúa sobre la masa "m", tiene en cada punto un valor de $-m\vec{g}$ (va dirigida hacia abajo). Si levantamos una masa "m" **en contra del campo gravitatorio** , el trabajo se realiza en contra del campo, por lo que el "trabajo realizado por el campo" es negativo y la masa aumenta su energía potencial.

Por el contrario cuando el cuerpo cae, lo hace por la acción del campo, el trabajo lo realiza el campo (trabajo positivo) y disminuye la energía potencial.

En total podemos decir que el trabajo realizado por el campo es igual a la variación de energía potencial cambiada de signo.

Trabajo realizado por el campo	=	- Trabajo realizado por nosotros
Trabajo realizado por el campo	=	- Variación de la energía potencial
Trabajo realizado por nosotros	=	+ Variación de la energía potencial

Con estas ideas, vamos a estudiar en primer lugar el valor del trabajo realizado al desplazar una carga en un campo eléctrico y posteriormente calcularemos el trabajo necesario para formar una distribución de cargas, lo que nos permitirá saber la energía que se almacena en el campo eléctrico, e introducir el concepto de energía del campo eléctrico y ver donde se encuentra.

Energía de una carga en un campo electrostático

Supongamos una carga eléctrica que puede desplazarse en una región del espacio en la que existe un campo eléctrico. Si una carga se encuentra en un punto en el que existe un campo electrostático, se verá sometida a la acción de una fuerza de valor: $\vec{F} = q\,\vec{E}(\vec{r})$, siendo $\vec{E}(\vec{r})$ el valor del campo en el punto en el que se encuentra la carga "q". Al desplazar la carga, dado que el campo electrostático es un campo conservativo, el trabajo que realizaran las fuerzas eléctricas no dependerá del camino que sigamos, de forma que si $\vec{r}_A$ y $\vec{r}_B$ son los vectores de posición de los puntos inicial y final del recorrido, el trabajo valdrá: $W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F}\cdot d\vec{l}$. ,

$$W_{A\to B} = \int_{r_A}^{r_B} (q\,\vec{E})\cdot d\vec{l} \;=\; q\int_{r_A}^{r_B} \vec{E}\cdot d\vec{l} \,.$$

En esta expresión, la integral cambiada de signo corresponde a la diferencia de potencial entre los puntos "A" y "B". Por tanto podemos decir que el **"trabajo realizado por las fuerzas del campo, para llevar la carga desde el punto "A" hasta el punto "B" coincide con el producto de la carga, por la diferencia de potencial entre los puntos, cambiado de signo**": $\left[W_{A\to B}\right]_{campo} = -\left(V_B - V_A\right)q$, o lo que es lo mismo, la variación de energía potencial al mover una carga del punto A al B vale: $\Delta E_p = \left(V_B - V_A\right)q$. Es decir la variación e energía potencial al mover una carga del punto A al B es igual a la variación de potencial multiplicada por el valor de la carga. Lo que nos permite dar un significado físico a la magnitud matemática que es el potencial del que deriva el campo, como variación de energía potencial por unidad de carga. Este hecho va a ser de gran importancia a la hora de calcular, en situaciones simples, la variación de energía de las cargas.

Vamos a sacar conclusiones de las expresiones matemáticas que hemos obtenido. Sabemos que el sentido del campo eléctrico es hacia los potenciales decrecientes, luego una carga positiva que se encuentre en un campo eléctrico, se verá sometida a la acción de una fuerza dirigida hacia los potenciales decrecientes. Es decir que el campo tenderá a mover las cargas positivas hacia los potenciales decrecientes, que corresponden a puntos con menor energía potencial.

Si la carga es negativa, la fuerza será opuesta al sentido del campo, por tanto el campo tenderá a mover a las cargas negativas hacia los puntos de mayor potencial, ya que en estos puntos una carga negativa tendrá menor energía potencial de la carga (mayor valor absoluto pero de signo negativo).

Hasta aquí hemos hablado de variación de energía potencial, si queremos hablar de energía potencial de una carga en un punto del campo tendremos que establecer un origen en el que la energía potencial sea cero. Por otra parte, estamos relacionando esta variación con la variación de potencial entre los puntos del campo. Podemos pensar que igual que si no existen cargas el infinito podemos hablar de potencial nulo en el infinito, también podremos poner en el infinito el origen de energía potencial. En este caso, el trabajo que realizarán las fuerzas del campo, para enviar al infinito una carga positiva será el producto del potencial en el punto por el valor de la carga, lo que significa que si nosotros traemos desde el infinito una carga positiva unitaria, debemos realizar un trabajo, contra las fuerzas del campo, igual al valor del potencial eléctrico en el punto. De ahí, que en algunas ocasiones se defina el potencial eléctrico en un punto, como el trabajo necesario para traer desde el infinito hasta el punto una carga unitaria.

Energía (potencial) electrostática de una distribución discreta de cargas

En primer lugar, vamos a aclarar lo que entenderemos por energía electrostática de un sistema de cargas. Siempre que hablamos de un sistema y de su energía, estamos hablando de la energía potencial que por el mero hecho de existir ese sistema, y no otro, con su forma y distribución, se puede liberar en un momento dado. Está claro, que si se puede liberar una cierta energía, es porque esa energía se ha invertido en conseguir que la distribución tenga esa forma y composición. Por tanto, en valor absoluto, la energía que se libera tiene que ser igual a la empleada para formar la distribución.

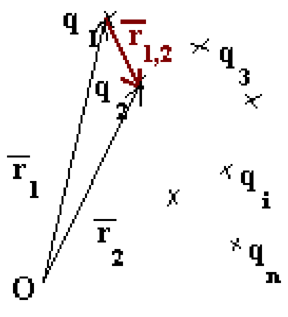

Figura 2
Cada carga de la distribución ocupa el lugar definido por su vector posición.

Si en un determinado lugar del espacio se encuentran distintas cargas (q_i), cuya posición respecto de un origen viene desterminada por el vector ($\vec{r}_i$), será porque en un momento determinado, alguien las habrá colocado en el lugar que ocupan ahora.

Para calcular el valor de la energía que es necesaria para conseguir que las cargas están en las posiciones que ocupan en la distribución (energía electrostática de la distribución o energía propia del sistema de cargas), tendremos que conocer el trabajo que debemos realizar para traer desde el infinito cada carga y colocarla en el lugar que ocupa. Para traer la primera carga y colocarla en la posición que ocupa en la distribución final, no tendremos que realizar ningún trabajo (llamando W_1 a ese trabajo, tenemos $W_1 = 0$), pues al no existir todavía ninguna, no habrá que vencer fuerza alguna para colocarla en su lugar final.

Para traer la segunda carga q_2, como ya existe q_1, existe un campo eléctrico debido a ella, que dará lugar a la aparición de un campo de fuerzas que actuarán sobre la segunda carga, será necesario un trabajo igual al valor del potencial creado por la carga q_1 en el punto por el valor de la carga que situamos en él, es decir: $W_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}} q_2$, siendo $r_{1,2}$ el módulo del vector posición de la carga q_2 respecto de la posición de la carga q_1.

Para traer la tercera carga q_3, tendremos que tener en cuenta que al existir dos cargas q_1 y q_2, existe una distribución de potenciales de valor: $\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}}$; siendo r_{13} y r_{23} los vectores posición de la carga "q_3" respecto las cargas q_1 y q_2 respectivamente, por tanto el trabajo realizado para traer la tercera carga y colocarla en su posición final, será:

$$W_3 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{13}} q_3 + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{23}} q_3$$

En general, para traer la carga "i-ésima", como ya existen i-1 cargas, existirá en la posición definida por el vector r_i, lugar en el que queremos colocar la nueva carga, un potencial de valor:

$$V_i = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,i}} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{2,i}} + \ldots + \frac{q_{i-1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{i-1,i}},$$ lo que supondrá realizar un trabajo:

$$W_i = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_{1,i}} q_i + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{2,i}} q_i + \ldots + \frac{q_{i-1}}{4\pi\varepsilon_0 r_{i-1,i}} q_i\ .$$

Con lo que, en total, para traer las n cargas habrá que realizar un trabajo que vendrá dado por: $W_{total} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots + W_i + \ldots W_{n-1} + W_n$

Luego la energía potencial de la distribución, que será la suma de las energías necesarias para traer las distintas cargas hasta ocupar la posición final en la distribución, valdrá:

$$W_{total} = W_1 + W_2 + \ldots + W_i + \ldots + W_n$$

Si realizamos esta suma, podemos comprobar que en el último sumando aparecen todos los productos de las cargas por los potenciales de los puntos en los que se encuentran, en el sumando anterior falta el sumando procedente de la anteúltima carga y así sucesivamente.

Si ahora calculamos la energía necesaria para deshacer la distribución, utilizando la misma mecánica que hemos empleado para formar la distribución. Es decir primero llevaremos la carga q_1 desde su posición actual hasta el infinito, luego la segunda y así sucesivamente. El valor de la energía así obtenido, tiene que ser igual que el de la energía necesaria para formar la distribución, ya que no se puede perder, ni generar energía en el proceso.

En esta operación, el trabajo realizado por las fuerzas del campo, para llevar la primera carga desde su posición actual hasta el infinito, será igual al producto del potencial debido a todas las demás cargas en el punto ocupado por q_1, multiplicado por el valor de la carga. Es decir

$$T_1 = \frac{q_2}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{2,1}} q_1 + \frac{q_3}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{3,1}} q_1 + \ldots + \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{i,1}} q_1 + \ldots + \frac{q_{n-1}}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{n-1,1}} q_1 + \frac{q_n}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{n,1}} q_1$$

Para llevarnos la carga q_2, el trabajo será:

$$T_2 = \frac{q_3}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{3,2}} q_2 + \ldots + \frac{q_i}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{i,2}} q_2 + \ldots + \frac{q_{n-1}}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{n-1,2}} q_2 + \frac{q_n}{4\pi\,\varepsilon_0\, r_{n,2}} q_2,$$ pues ya no está presente la carga q_1 para generar potencial en la posición de q_2.

Y así sucesivamente. Podemos comprobar que los sumandos que ahora aparecen son los que faltaban en la suma anterior. En total sumando ambos trabajos tendremos

$$2\, W_{\text{distribución}} = W_{\text{total}} + T_{\text{total}},$$

y en la expresión total encontraremos "n" sumandos en cada uno de los cuales aparecen n-1 sumandos correspondientes a los productos de cada carga por el potencial creado en el punto en el que se encuentra por todas las demás cargas y en total se encuentra:

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q_2}{r_{2,1}} + \frac{q_3}{r_{3,1}} + \ldots \frac{q_i}{r_{i,1}} + \ldots \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,1}} + \frac{q_n}{r_{n,1}}\right] q_1$$

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,2}} + \frac{q_3}{r_{3,2}} + \ldots \frac{q_i}{r_{i,2}} + \ldots \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,2}} + \frac{q_n}{r_{n,2}}\right] q_2$$

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{q_2}{r_{2,3}} + \ldots \frac{q_i}{r_{i,3}} + \ldots \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,3}} + \frac{q_n}{r_{n,3}}\right] q_3$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,i}} + \frac{q_2}{r_{2,i}} + \ldots \frac{q_{i-1}}{r_{i-1,i}} + \frac{q_{i-1}}{r_{i-1,i}} + \ldots \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,i}} + \frac{q_n}{r_{n,i}}\right] q_i$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,n-1}} + \frac{q_2}{r_{2,n-1}} + \ldots \ldots \frac{q_i}{r_{i,n-1}} + \ldots \frac{q_n}{r_{n,n-1}}\right] q_{n-1}$$

$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\frac{q_1}{r_{1,n}} + \frac{q_2}{r_{2,n}} + \ldots \ldots \frac{q_i}{r_{i,n}} + \ldots \frac{q_{n-1}}{r_{n-1,n}}\right] q_n$$

Es decir, sumando: $2\,W_{distribución} = \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} V_{i,j} \cdot q_i$, y por tanto

$$W_{distribución} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} V_{i,j} \cdot q_i$$

que nos dice que la energía de la distribución es la semisuma de los productos de cada carga por el potencial creado en su posición por todas las demás.

Energía electrostática de una distribución continua de cargas.

Si la distribución es continua actuaremos como en otras ocasiones considerando la carga contenida en un volumen muy pequeño $d\tau'$ de la distribución, para poderlo considerar un punto, con lo que trataremos a esta carga como una carga "puntual" de valor $\rho\, d\tau'$, y después sumaremos la contribución de todas las cargas, operación que en caso de cargas continuas deberá ser una integral extendida a todo el espacio en el que se encuentren las cargas.

Por tanto, la energía total de la distribución será:

$$W_{distribución} = \frac{1}{2}\int_{\tau'} V(\vec{r})\,\rho(\vec{r})\,d\tau'$$

donde hemos llamado $V(\vec{r})$ al potencial en el "punto" que estamos considerando y que estará debido al resto de cargas y siendo τ' un volumen cualquiera que contenga a todas las cargas del sistema, no teniendo porque estar restringido al volumen que ocupan las cargas, pues si el volumen que tomamos contiene puntos sin carga la densidad de carga en esos puntos será nula.

La expresión anterior puede simplificarse en el caso en que las cargas están distribuidas en las superficies de conductores, de tal forma que si la densidad superficial de carga es σ, la expresión anterior se transforma en:

$$W_{distribución} = \frac{1}{2}\int_{S'} V\,\sigma\,ds'$$

siendo S' la suma de todas las superficies de los conductores.

Energía electrostática de un conductor cargado.

Consideremos ahora un conductor suficientemente lejos de cualquier carga al que pretendemos cargar con una carga Q, para lo que necesitaremos realizar un cierto trabajo. Para calcular este trabajo consideremos un proceso de carga, de forma que el conductor va adquiriendo la carga deseada a partir de diferenciales de carga dq. En un momento cualquiera de este proceso el conductor tendrá una carga "q" por efecto de la cual adquiere un potencial V, si queremos aumentar su carga en "dq" tendremos que realizar un trabajo para vencer la repulsión de las cargas existentes, que vendrá dado por dW = V.dq , siendo V el potencial del conductor por efecto de la carga que anteriormente tenia. Este proceso continuará desde que el instante inicial, en el que el conductor no tenía ninguna carga hasta que adquiera la carga total Q, por tanto el trabajo total realizado será la suma de todos los diferenciales de trabajo, es decir:

$$W = \int_0^Q V \cdot dq$$

Ahora bien, para realizar esta integral hay que tener en cuenta que V depende de la carga con lo que debemos poner toda la expresión en función de una sola variable y constantes. Sabemos que en un conductor la relación entre la magnitud que relaciona la carga de un conductor y el potencial que adquiere por efecto de esa carga es la capacidad del conductor que es una constante para cada conductor puesto que sólo depende de su geometría. Por tanto podemos poner: $V = \frac{q}{C}$, con lo que la integral que nos da el trabajo quedará:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}\, dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{2}Q^2\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

siendo Q la carga total, si llamamos V al potencial final adquirido por la carga total Q, la expresión anterior la podemos escribir también como:

$$W_{conductor} = \frac{1}{2}Q\,V = \frac{1}{2}C\,V^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Densidad de energía del campo electrostático

Cuando tenemos un distribución de carga se crea un campo electrostático por lo que podemos hablar de energía potencial asociada al campo electrostático.

Para relacionar el valor de la energía con el campo creado por una distribución de carga, vamos a analizar el caso más sencillo de un campo homogéneo como el creado entre las placas de un condensador plano paralelo, y seguiremos un proceso análogo al seguido en el caso de un conductor cargado.

Partimos de un condensador descargado al que vamos añadiendo carga en cantidades diferenciales dq, (por ejemplo llevando carga desde una placa a la otra con lo que las dos van adquiriendo cantidades iguales de cargas de distinto signo). En un momento cualquiera del proceso cada una de las placas estará cargada con una carga “q” con lo que entre las placas del condensador existirá un campo eléctrico “E” y una diferencia de potencial “V” entre ambas placas, y seguimos el proceso desde que la carga de las placas es cero hasta la carga total Q.

Para llevar una carga “dq” desde una placa a la otra será necesario realizar un trabajo que dependerá de la carga a transportar y de la diferencia de potencial que exista en ese momento entre las placas: $dW = V \cdot dq$, y en total $W = \int_0^Q V.dq$. Para realizar esta integral hay que tener en cuenta que el potencial depende de la carga, luego es necesario realizar un cambio para que la expresión dependa de una sola variable. Al igual que en el caso del conductor podemos utilizar la capacidad del condensador para relacionar el potencial y la carga con lo que tendremos

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{1}{C}\frac{1}{2}Q^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}Q.V = \frac{1}{2}C.V^2$$

siendo Q y V la carga y la diferencia de potencial totales al finalizar el proceso de carga.

En el caso del condensador, como estamos intentando relacionar la energía con el campo electrostático y este es constante entre las placas del condensador, podemos poner $V = E \cdot d$ con lo que el trabajo queda

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}CE^2d^2 = \frac{1}{2}\frac{A\varepsilon}{d}E^2d^2 = \frac{1}{2}(A \cdot d)\,(\varepsilon \cdot E)\,E = \frac{1}{2}\tau\, DE$$

siendo D el valor del vector desplazamiento, E el del campo eléctrico existente entre placas y τ el volumen comprendido entre las placas del condensador que coincide con la región en la que existe el campo electrostático, por lo que es común definir la densidad de energía en el campo electrostático como $w = \frac{1}{2}D.E$

El calculo anterior le hemos realizado en una región del espacio en la que el campo era homogéneo, lo que nos ha permitido simplificar los cálculos. En el caso en que esto no suceda así tendremos que recurrir a un proceso matemático más complejo del que podemos obtener que, en general la energía del campo viene dada por: $W = \frac{1}{2}\int_{\tau'} \vec{D} \cdot \vec{E}\, d\tau$

y la densidad de energía del campo electrostático por $\omega = \frac{1}{2}\vec{D}\,\vec{E}$, pues su integral de volumen nos da la energía total.