

1. Estudiar la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En caso de ser derivable en $x = 0$, encontrar la recta tangente.

2. Determinar los valores de a y b para que sea derivable en $x = -1$ la función

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2x & \text{si } x \leq -1 \\ ax^3 + b & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

En caso de ser derivable en $x = -1$, encontrar la recta tangente

3. Aplicando los teoremas de Bolzano y Rolle demostrar que

$x^2 = 18 \ln(x)$ tienen solución única en $[1, e]$

4. Diseñar una lata de 1 litro de capacidad que tenga la forma de un cilindro circular. Determinar las dimensiones para que la cantidad de materia prima sea mínima.

5. Inscribir el rectángulo de mayor área posible en el segmento parabólico limitado por la curva $y^2 = 8x$ y la recta $x = 6$.

6. Aplicando los teoremas de Bolzano y Rolle demostrar que $x^2 = 18 \ln(x)$ tienen solución única en $[1, e]$.

7. Sea $f(x) = x^3 - 3x + m$, justificar que $f(x)$ no tiene dos raíces diferentes en el intervalo $[-1, 1]$.

8. Prueba que la función $f(x) = x^2 - 2x + \cos(x)$ tiene al menos un mínimo relativo en el intervalo $(0, \pi)$.