PEC 1. 20 de Noviembre de 2015

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sean a y b enteros positivos coprimos. Entonces

$$a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \pmod{ab}.$$

c) Para cualesquiera enteros a, b y c, $mcd(a + cb, b) = mcd(a, b)$.

2.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica

$$30x + 70y + 42z + 105t = 1.$$

Probar que no existe ninguna solución (x, y, z, t) tal que $x \cdot y \cdot z \cdot t = 0$.

3.- *(1,5 ptos.)* En este problema asumimos, sin demostración, el siguiente resultado:

Proposición: Sea p un número primo y $M_p = 2^p - 1$ su correspondiente número de Mersenne. Entonces, todo factor primo q de M_p verifica

$$q \equiv 1 \ (mod\ p) \text{ y } q \equiv \pm 1 \ (mod\ 8).$$

Utilizar el resultado anterior para probar que $M_{13} = 8191$ es primo.

4.- *(1,5 ptos.)* Demostrar que si a es un entero coprimo con 210, $a^{12} - 1$ es divisible por 210.

5.- *(1,5 ptos.)* Construir un cuerpo con 125 elementos.

PEC 2. 13 de Enero de 2016

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x,y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x,y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

b) La matriz hessiana de la función $f(x,y) = 6x^3 - x^2y + y^2$ en el punto $(1,0)$ es

$$d^2 f(1,0) = \begin{pmatrix} 36 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, $(1,0)$ es mínimo relativo de f.

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $f(x,y) = (x^3 + 3y^2 + xy)e^{1-x^2-y^2}$.

a) Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $f(x,y)$ en el punto $(-1,1)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

b) Calcular la derivada direccional de $f(x,y)$ en $(-1,1)$ en la dirección determinada por el vector $\mathbf{v} = (2,3)$.

4.- *(3 ptos.)* Sea la función $f(x,y) = y^3 + x^2y + 2x^2 + 2y^2 - 4y - 8$.

a) Encontrar y clasificar sus extremos relativos.

b) Determinar los puntos donde $f(x,y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Examen Extraordinario. 20 de Junio de 2016

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sea m un natural distinto de cero y a un entero positivo menor que m, $a < m$, no coprimo con m. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \equiv 0 \ (mod\ m)$.

c) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x, y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Veintitrés viajeros hambientros se adentran en un bosque en el que encuentran 63 pilas iguales de plátanos y siete plátanos más sueltos, de tal forma que pueden dividirse todos los plátanos en partes iguales. ¿Cuántos plátanos había en cada pila? Encontrar TODAS las posibles respuestas a la pregunta anterior.

3.- *(2 ptos.)* Sea p un número primo mayor o igual que once y sea r un número natural entre uno y nueve $(1 \leq r \leq 9)$. Consideremos la sucesión de números naturales (en base diez)

$$r, rr, rrr, rrrr, \ldots$$

Probar que p divide a infinitos términos de la sucesión.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

5.- *(1 ptos.)* Consideremos la función $g(x, y) = (x^2 + y^2)e^{sen(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x, y)$ en el punto $(1, 0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Calcular y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = (x^2y - x - 1)^2 + (x^2 - 1)^2.$$

PEI 1. 25 de Noviembre de 2016

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Si $a \equiv b \ (mod \ n)$, entonces $mcd(a, n) = mcd(b, n)$ para cualesquiera enteros a y b y cualquier entero positivo n.

c) Para cualquier primo p, 4 no es generador de $\mathbb{Z}_p^*$.

2.- *(1,5 ptos.)* Encontrar el menor entero positivo a para el que la ecuación diofántica

$$1001x + 770y = 10^4 + a$$

tiene solución. Resolver la ecuación diofántica para dicho entero a.

3.- *(1,5 ptos.)* Considérese el siguiente sistema de congruencias lineales:

$$\begin{cases} 2x \equiv 6 & (\text{mod } 14) \\ 7x \equiv 19 & (\text{mod } 24) \\ 2x \equiv -1 & (\text{mod } 63) \end{cases}$$

Se pide:

a) Transformarlo en uno equivalente de la forma:

$$\begin{cases} x \equiv a & (\text{mod n}_1) \\ x \equiv b & (\text{mod n}_2) \\ x \equiv c & (\text{mod n}_3) \end{cases}$$

b) Una vez hecho esto, resolverlo en el caso de que tenga solución.

4.- *(1,5 ptos.)* Calcular los cuatro últimos dígitos de la expresión decimal de 7^{504}.

5.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación $x^2 + 2x + 4 = 0$ en Z_{196}.

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2016-2017

Examen Extraordinario. 16 de Junio de 2017

1.- *(1, 5 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Se tiene que: $x^2 \equiv y^2 (\text{mod } p)$ si, y sólo, si $x \equiv \pm y (\text{mod } p)$.

2.- *(2 ptos.)* Una cierta empresa fabrica tres productos A, B y C que vende a 590, 410 y 300 euros respectivamente. Calcular cuántas unidades de cada producto se vendieron en un día determinado sabiendo que:

- La recaudación por la venta de los productos fue de 32420 euros.
- Se vendieron más unidades de A que de B.
- El número de unidades de C vendidas fue mayor que 83.

3.- *(2 ptos.)* ¿Podemos asegurar que $147^{128} \equiv 1 \pmod{255}$? ¿Y que $51^{128} \equiv 1 \pmod{255}$? En caso de respuesta negativa a esta útima pregunta, calcular el resto de dividir 51^{128} entre 255.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-2) = -138, f'(-2) = -234, f(1) = 24, f'(1) = 72, f''(1) = 92, f'''(1) = 540.$$

5.- *(1 ptos.)* Dada la función $g(x, y) = \sqrt{8x^2 + y^2} + xy^2$, calcular el valor máximo de la derivada direccional en el punto $A(2, 2)$. Indicar un vector en la dirección en que esa derivada direccional es máxima.

6.- *(2 ptos.)* Sea la función de dos variables $f(x, y) = 2+xy$. Hallar, razonadamente, los valores máximos y mínimos absolutos de la función $f(x, y)$:

a) con la condición $x^2 + 4y^2 = 25$

b) con la condición $x^2 + 4y^2 \leq 25$.

PEI 1. 17 de Noviembre de 2017

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todos los elementos no nulos del anillo $\mathbb{Z}_5[x]/(x^8 + x^6 + 3)$ poseen inverso.

b) Sean n y r enteros positivos. Entonces

$$n \equiv r \ (mod\, 6) \implies 4^n \equiv 4^r \ (mod\, 7).$$

c) Sean $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, a y α números enteros y p un número primo. Entonces,

$$f(a + \alpha p) \equiv f(a) + \alpha p f'(a) \ (\mathrm{mod}\ p^2),$$

donde $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

2.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación diofántica:

$$13x + 30y + 42z = 12$$

3.- *(1,5 ptos.)* Los generales chinos contaban sus soldados alineándolos varias veces en filas de distinto tamaño, contando los soldados sobrantes y calculando el total a partir de esos soldados sobrantes. Si un determinado general chino mandaba 1200 soldados al comienzo de una batalla y, al final de la misma, le sobraban tres soldados cuando los alineaba de cinco en cinco, tres si los alineaba de seis en seis, uno si lo hacía de siete en siete y no le sobraba ninguno si los alineaba de once en once, ¿cuántos soldados comandados por el citado general murieron en la batalla?

4.- *(1,5 ptos.)* Un número compuesto n se dice que es un número de Carmichael si $b^{n-1} \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ n)$ para todo entero positivo b coprimo con n. ¿Es 561 un número de Carmichael?

5.- *(1,5 ptos.)* Resolver la ecuación $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_{75}$.

PEI 2. 18 de Enero de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Consideremos $n+1$ puntos en $\mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, con todos los x_i distintos dos a dos, y supongamos que el correspondiente polinomio interpolador tiene grado n. Sea, ahora, (x_{n+1}, y_{n+1}) un nuevo punto con x_{n+1} distinto a todos los x_i anteriores. Entonces, el polinomio interpolador para los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n), (x_{n+1}, y_{n+1})$ tiene grado $n+1$.

b) Sea $f(x, y, z) = a_1x + a_2y + a_3z$ una función en tres variables con algún a_i $(i = 1, 2, 3)$ distinto de cero y sea $D \subset \mathbb{R}^3$ un conjunto cerrado y acotado. Entonces, el máximo y mínimo absolutos de f en D se alcanzan en la frontera de D.

c) Sea $f(x, y)$ una función definida en un entorno reducido de $(0, 0)$, es decir, definida en $B((0, 0), \varepsilon) \setminus \{(0, 0)\}$ para algún $\varepsilon > 0$. Entonces, si todos los límites radiales de f en $(0, 0)$ son iguales a L se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = L.$$

2.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

3.- *(1,5 ptos.)* Estudiar la continuidad en $(0, 0)$, existencia de derivadas parciales de primer orden en $(0, 0)$ y diferenciabilidad en $(0, 0)$ de la función $f(x, y)$ dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

4.- *(3 ptos.)* Consideremos la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$.

a) Encontrar y clasificar sus extremos relativos.

b) Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, y \leq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Matemáticas Avanzadas (Ing. Informática. Grupo Mañana) Curso 2017-2018

Examen Final. 18 de Enero de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sea m un natural distinto de cero y a un entero positivo menor que m, $a < m$, no coprimo con m. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n \equiv 0 \ (mod\ m)$.

c) Sean $f(x, y)$ y $g(x, y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0, y_0) tales que: 1) el límite de $f(x, y)$ en (x_0, y_0) es igual a cero y 2) $g(x, y)$ está acotado en un entorno de (x_0, y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Veintitrés viajeros hambientros se adentran en un bosque en el que encuentran 63 pilas iguales de plátanos y siete plátanos más sueltos, de tal forma que pueden dividirse todos los plátanos en partes iguales. ¿Cuántos plátanos había en cada pila? Encontrar TODAS las posibles respuestas a la pregunta anterior.

3.- *(2 ptos.)* ¿Podemos asegurar que $146^{128} \equiv 1 \pmod{255}$? ¿Y que $51^{128} \equiv 1 \pmod{255}$? En caso de respuesta negativa a esta útima pregunta, calcular el resto de dividir 51^{128} entre 255.

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

5.- *(1 pto.)* Consideremos la función $g(x, y) = (x^2 + y^2)e^{sen(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x, y)$ en el punto $(1, 0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Calcular y clasificar los puntos críticos de la función

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz + x + y + z.$$

Examen Final. 22 de Junio de 2018

1.- *(2 ptos.)* Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas razonando adecuadamente la respuesta:

a) Todo polinomio en $\mathbb{Z}_m[X]$ tiene, a lo más, tantas raíces (en $\mathbb{Z}_m$) como su grado.

b) Sean $f(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, a y α números enteros y p un número primo. Entonces,

$$f(a+\alpha p) \equiv f(a) + \alpha p f'(a) \pmod{p^2},$$

donde $f'(x)$ denota la derivada de $f(x)$.

c) Sean $f(x,y)$ y $g(x,y)$ dos funciones definidas en un entorno de (x_0,y_0) tales que: 1) el límite de $f(x,y)$ en (x_0,y_0) es igual a cero y 2) $g(x,y)$ está acotado en un entorno de (x_0,y_0). Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0.$$

2.- *(2 ptos.)* Sea n un entero impar. Probar que la ecuación diofántica

$$nX + (n+2)Y = a$$

tiene solución para todo entero a. Calcular todas las soluciones para el caso $n = 999$ y $a = 7$.

3.- *(2 ptos.)* Doce piratas tratan de repartirse, a partes iguales, un botín de monedas de oro. Por desgracia, sobran seis monedas por lo que se desata una pelea en la que muere un pirata. Como al hacer de nuevo el reparto sobran dos monedas, vuelven a pelear y muere otro. En el siguiente reparto vuelven a sobrar dos monedas y solamente después de que muera otro es posible el reparto a partes iguales. Sabiendo que el número de monedas es mayor que dos mil y menor que tres mil, ¿cuántas monedas de oro componían el botín?

4.- *(1,5 ptos.)* Usar diferencias divididas para calcular el polinomio interpolador correspondiente a los siguientes datos:

$$f(-1) = 1, f'(-1) = 2, f(1) = 3, f'(1) = 4, f''(1) = 5, f'''(1) = 6.$$

5.- *(1 ptos.)* Consideremos la función $g(x,y) = (x^3+y^2)e^{cos(xy)}$. Calcular el valor de la derivada direccional máxima de $g(x,y)$ en el punto $(1,0)$ y decir cuál es la dirección en la que se alcanza dicho valor.

6.- *(1,5 ptos.)* Consideremos la función $f(x, y) = (x + y)^3 - 12xy$. Determinar los puntos donde $f(x, y)$ alcanza sus valores máximo y mínimo absoluto sobre el conjunto

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

.