Instituto Federal do Pará – Campus Belém
Curso: Tecnologia em Análise e Desenvolvimento de Sistemas - TADS
Disciplina: Álgebra Linear
Professor: Anderson Portal Ferreira
Aluno(a):____ Data:___/___/____

MATRIZ

I) CONCEITO: È qualquer tabela de números dispostos em linha e colunas.

Exemplo:

Alimento	Gordura saturada em gramas	Colesterol em mg
Bife magro (100g)	2,7	56
Camarão (100g)	0,2	48
Carne de porco (100g)	3,2	80

II) REPRESENTAÇÃO: Existem três formas de indicar uma matriz: por parênteses ( ), colchetes [ ] ou barras duplas | | | |

Exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2,7 & 56 \\ 0,2 & 48 \\ 3,2 & 80 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 2,7 & 56 \\ 0,2 & 48 \\ 3,2 & 80 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{Vmatrix} 2,7 & 56 \\ 0,2 & 48 \\ 3,2 & 80 \end{Vmatrix}$$

III) FORMA GENÉRICA: A = (aij) m x n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1}n \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2}n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ am_1 & am_2 & am_3 & amn \end{pmatrix}$$

m → número de linhas
n → número de colunas

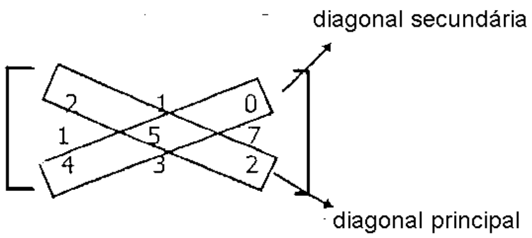
i ∈ {1, 2, 3, … , m} → i indica a posição do elemento na linha.
j ∈ {1, 2, 3, … , n} → indica a posição do elemento na coluna.

m x n → tipo da matriz

Se liga:

- Se o número de linhas é igual ao número de colunas, diz-se que a matriz é quadrada. Neste caso, a matriz possui duas diagonais:
  - Diagonal Principal: Se i = j;
  - Diagonal Secundária: Se i+j = n+1; sendo n a ordem da matriz.

Exemplc



Matriz do tipo 3 x 3 ou matriz quadrada de ordem 3.

Se o número de linhas é diferente do número de colunas diz-se que a matriz é *retangular.*

Exemplo: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Compor as matrizes:
   a) A = (aij) 2 x 3, tal que aij = $i^2 + j^2$
   b) B = (bij) 2 x 2, tal que bij = $\begin{cases} i - j, \text{se } i < j \\ 2j, \text{se } i = j \\ i + j, \text{se } i > j \end{cases}$

2. Na primeira fase da copa do mundo de 1998, realizada na França os resultados do grupo A são exibidos na tabela:

PAÍSES	Vitórias	Empates	Derrotas
Brasil	2	0	1
Escócia	0	1	2
Marrocos	1	1	1
Noruega	1	2	0

Pede-se:
a) Escreva a matriz correspondente a tabela.
b) Calcule o valor da soma dos elementos $a_{21} + a_{43}$ da referida matriz.

IV) IGUALDADE MATRICIAL: Duas matrizes A = (aij) m x n e B = (bij) m x n são iguais se, e somente se, aij = bij, ∀ i ∈ {1, 2, 3, … , m} e ∀ j ∈ {1, 2, … , n}.

EXERCÍCIO PROPOSTO

1. Calcule x e y nas igualdades abaixo:
   a) $\begin{pmatrix} x^2 - 1 & 2x \\ y^2 & 5y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} x + y \\ 2x - y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$

V) MATRIZES ESPECIAIS:

a) **Matriz Linha**: É aquela que possui uma única linha
Exemplo: $[-2, 0, 5]_{1x3}$

b) **Matriz Coluna**: É aquela que possui uma única coluna.

$$\textbf{Exemplo: } \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}_{3x1}$$

c) **Matriz Oposta**: Chama-se oposta de uma matriz A e indica-se por (-A) à matriz obtida trocando-se os sinais de todos os elementos da matriz A.

Exemplo: Se A = $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, então –A = $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$

d) **Matriz Transposta**: Chama-se transposta de uma matriz A e indica-se por A^t, à matriz obtida trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas.

Exemplo: Se A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 5 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$, então A^t= $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

Se liga:

☞ $(A^t)^t = A$

e) **Matriz Nula**: É aquela que possui todos os elementos iguais a zero.

Exemplo: $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Representação: 0 → matriz nula.

f) **Matriz Diagonal**: É uma matriz quadrada que os elementos situados fora da diagonal principal são todos iguais a zero.

Exemplo: $\begin{bmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

g) **Matriz Identidade**: É uma matriz diagonal em que os elementos situados na diagonal principal são todos iguais a um.

Exemplo: a) $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Chama-se matriz simétrica a uma matriz quadrada A tal que $A = A^t$. Calcule x, y e z de modo que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & x-2 & y+4 \\ 3 & 5 & z+1 \\ 0 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ seja simétrica.

2. Se $A = -A^t$ diz-se que a matriz é anti-simétrica. Calcule o valor de x de modo que a matriz $\begin{pmatrix} 0 & x-1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ seja anti-simétrica.

VI) OPERAÇÕES COM MATRIZES:

1) Adição e Subtração: Só é possível adicionar ou subtrair matrizes de mesma ordem.Nesse caso, adicionamos ou subtraímos os termos correspondentes.

Exemplos: Dadas as matrizes A = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Calcule:

a) A + B = $\begin{pmatrix} 2+1 & 0+4 & 5+2 \\ -1+3 & 4+8 & 7+9 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2 & 12 & 16 \end{pmatrix}$

b) A – B = A + (-B) = $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ + $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -3 & -8 & -9 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

Propriedades:

a) A + B = B + A (comutativa)
b) (A + B) + C = A + (B + C) (associativa)
c) A + 0 = 0 + A (elemento neutro)
d) A + (-A) = (-A) + A = 0 (elemento oposto)
   ☞ **Se liga**: 0 → matriz nula.
e) $(A + B)^t = A^t + B^t$

2) Multiplicação de um número real por uma matriz:

Exemplo: 3. $\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 3.(-5) & 3.0 \\ 3.2 & 3.6 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Dada as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, B = $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 6 & 8 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ e C = $\begin{bmatrix} 5 & -9 \\ -10 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, determine 3A + B – 2C,

2. Dada as matrizes A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, determine a matriz x tal que $x + 3A - B^t = 0$:

3) Multiplicação de Matrizes: O produto A.B só é possível se o número de colunas da matriz A for igual ao número de linha da matriz B.

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Sendo M = $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ e N = $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ Determine:
   a) M.N
   b) N.M

2. Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ Determine A^2

3. Se A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e B=$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Obter a matriz X, tal que A . X = B

VII) MATRIZ INVERSA: seja A uma matriz quadrada de ordem n. chama-se inversa de matriz A à matriz B. Também de ordem n, tal que A . B = B.A = In

☞ **Indicação: A^{-1}**

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$$

Exemplo: Determine caso exista a inversa da matriz

A = $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução: Sendo A^{-1} = $\begin{bmatrix} x & y, \\ z & w \end{bmatrix}$ como $A^{-1} \cdot A = I_2$, então:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4x+3y & 2x+2y, \\ 4z+3w & 2z+2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x+3y=1 \\ 2x+2y=0 \ \cdot(-2) \end{cases} \qquad \begin{cases} 4z+3w=0 \\ 2z+2w=1 \ \cdot(-2) \end{cases}$$

-y = 1 . (-1)   - w = -2 . (-1)

$\boxed{y = -1}$ $\boxed{w = 2}$

2x + 2y = 0   2x + 2w = 1
2x – 2 = 0   2z + 4 = 1

x =1   2xz = -3
z = -3/2

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3/2 & 2 \end{bmatrix}$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Se A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcule $x = (A \cdot B^{-1})^t$

2. Determine a inversa da matriz x = $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

3. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e M = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo que traço de uma matriz é a soma dos elementos da diagonal principal. Calcule o traço da matriz $M^{-1} \cdot A.M$

4. Sendo A = $\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, determine a matriz x tal que $\frac{X - A}{2} = \frac{X + 2B}{3}$

5. Obtenha as matrizes X e Y tais que $\begin{cases} 2x+3y = A+B \\ x+2y = A - 2B \end{cases}$, sabendo que: A = $\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Se M, N e P são matrizes do tipo 3 x 2, 2 x 1 e 1 x 5, respectivamente, então o produto M . N . P será do tipo:
   a) 2 x 1   b) 5 x 2   c) 2 x 5
   d) 5 x 3   e) 3 x 5

7. O produto das matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é comutativo para:
   a) todo x e todo y   b) nenhum valor de x e y
   c) x = 0 e y = 1   d) x = 1 e y = 0   e) x = y = 1

8. São dadas as matrizes A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}) quadradas de ordem 2, com a_{ij} = 3i + 4j e b_{ij} = -4i – 3j. Se C = A + B, então C^2 é igual a:
   a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
   b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com a seguinte especificação:

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Para os dois primeiros meses do ano, a produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Modelos/Meses	Janeiro	Fevereiro
A	30	20
B	25	18
C	20	15

Usando a multiplicação de matrizes, responda: nessas condições, quantos eixos e quantas rodas são necessários em cada um dos meses para que a montadora atinja a produção planejada?

10. A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usados num restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada na composição dos pratos tipo P_1, P_2, P_3 desse restaurante.

$$C = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{arroz} \\ \text{carne} \\ \text{salada} \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{arroz} & \text{carne} & \text{salada} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{prato } P \\ \text{prato } P^1 \\ \text{prato } P^2 \end{array}$$

A matriz que fornece o custo de produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3 é:

a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

11. **(Bernard Kulman)** Pulverizam-se pesticidas sobre plantas para eliminar insetos daninhos. No entanto, parte do pesticida é absorvida pela planta, e são absorvidos por herbívoros quando eles comem as plantas que foram pulverizadas. Para determinar a quantidade de pesticida absorvida por um herbívoro, procedemos como segue. Suponha que temos três pesticidas e quatro plantas. Seja a_{ij} a quantidade de pesticidas **i** (em miligramas) que foi absorvida pela planta **j.** Essa informação pode ser representada pela matriz.

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Suponha agora que temos três herbívoros, e seja b_{ij} o número de plantas do tipo **i** que um herbívoro do tipo **j** come por mês. Essa informação pode ser representada pela matriz:

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} 20 & 12 & 8 \\ 28 & 12 & 15 \\ 30 & 12 & 10 \\ 40 & 16 & 20 \end{bmatrix}$$

Então a quantidade de pesticida do tipo 2 que o animal do tipo 3 absorve por mês é:

12. **(Alunonota10)** Uma indústria automobilística produz os carros **ASTON MARTIN** e **ROVER** nas versões **SEDAN, UTILIT, ROADSTER.** Na montagem desses carros são utilizadas peças A, B e C. Para um certo plano de montagem são dadas as seguintes informações:

	Carro Aston Maritin	Carro Rover
Peça A	4	3
Peça B	3	5
Peça C	6	2

	Sedam	Utilit	Roadster
Carro Astron Martin	2	4	3
Carro Rover	3	2	5

Em termos matriciais, temos:

Matriz Peça/carro = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$

Matriz carro/versão = $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, então a matriz peça versão é?

DETERMINANTES

I) CONCEITO: É um número real associado a toda matriz quadrada.

- **Indicação:** $|\ \ |$ **ou det**

Exemplo: O determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

é indicado por: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}$ ou det A.

II) Cálculo de determinante:

a) **Determinante de 1ª ordem**:

Exemplo: A = [5]
det A = |5| = 5

b) **Determinante de 2ª ordem**:

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ = 2 . 3 – (-1) . 5 = 11

c) Determinante de 3ª ordem: Regra de Sarrus

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & 4 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

40 – 6 + 48 – (90 + 8 – 16) = 82 – 28 = 0

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Calcule:

a) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

2. Resolva a equação:

$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 6 & x \end{vmatrix} = 10$

3. Seja A= (a_{ij}) 3 x 3, em que aij = $\begin{cases} -2; \text{se } i = j \\ 0; \text{se } i \neq j \end{cases}$. Calcule det ($A^t$):

4. Resolva em IR, a equação $\begin{vmatrix} 2x & 9 \\ 2 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & (3-x) \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & (2+x) \end{vmatrix}$

III) Propriedades dos Determinantes:

- **Um Determinante será nulo quando:**

a) Duas filas paralelas iguais:

Ex: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

b) Duas filas paralelas proporcionais:

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 10 \\ -2 & 5 & -10 \\ 3 & 4 & 15 \end{vmatrix} = 0$

3ª coluna = (1ª coluna) x 5.

c) Uma fila toda formada por zeros.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \\ 7 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$

- **O Determinante não se altera se:**

a) det A = det A^t.

b) **Teorema de Jacobi:** o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$\begin{vmatrix} 1+2.2 & 2 & 3 \\ 2+1.2 & 1 & 2 \\ 2+4.2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$

c) os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas:

$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$c_1 + c_2 = c_3$

- **O Determinante se altera se:**

a) Multiplicando ou dividindo uma fila de um determinante por um número real diferente de zero, este ficará multiplicado ou dividido por este número.

b) Ao trocarmos de posição duas filas paralelas de um determinante, este muda de sinal.

c) Se uma matriz quadrada M de ordem n é multiplicada por um número real k, o seu determinante fica multiplicado por k^n, isto é:

det ($k.M_n$) = k^n . det M_n

d) O determinante de uma matriz triangular superior ou inferior é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

Exemplo: $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 . 4 . 1 = 12$

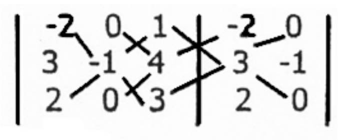
- **Propriedade de Binet**

det (A . B) = det A . det B

- **Determinante da matriz inversa:**

Det (A^{-1}) = $\dfrac{1}{\det A}$

Exemplo: Sendo A = $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule det A^{-1}.

det A =  = 6 + 2 = 8

det A^{-1} = $\dfrac{1}{8}$

- **Matriz de Vandermonde:**

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c - b) . (c - a) . (b - a)$$

Exemplo: Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} = (-5-4) . (-5-3) . (4-3) = -9 . (-8) . 1 = 72$$

EXERCÍCIOS

1. Determine o valor de x para que o determinante da matriz C = A. B^t seja igual a 602, onde:

   A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} x-1 & 8 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$

2. Determine os valores reais de k de modo que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & -4 & 0 \\ 0 & 6 & k \end{bmatrix}$ admita inversa.

3. Calcule x ∈ R de modo que o determinante da matriz seja igual a 6.

   $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x-1 & x+1 \\ 4 & (x-1)^2 & (x+1)^2 \end{bmatrix}$$

4. Sabendo que o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ é igual a 7. Calcule o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 3 & 6 & 3 \\ a & b & c \end{bmatrix}$

5. Determine caso exista a inversa da matriz.

   E = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. Dadas as matrizes A = $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e I = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, os valores x tais que det (A – x.I) = 0 são:

   a) 0 e 1 b) 2 e 6 c) 1 e 5

   d) 4 e 6 e)1 e 4

7. A e B são matrizes quadradas de ordem 3 e B = k • A. Sabendo que det A = 1,5 e det (B^t) = 96, então:

   a) k = 64 b) k = 96 c) k = ¼
   d)k = 3/2 e) k = 4

8. Se $\begin{bmatrix} a & b & c \\ a & d & c \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ = -2, então $\begin{bmatrix} a & d & c \\ 0 & b-d & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ é igual a:

   a) -4 b) -2 c) 0 d) 2 e) 16

9. Seja a matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e uma matriz B, também quadrada de ordem 3. Sabendo-se que det (A • B) = 8, pode-se afirmar que:
a) det B = +64
b) det B = -64
c) det B = +8
d) det B = -8
e) é impossível calcular det B.

10. O determinante de uma matriz vale 40. Multiplicando a primeira coluna dessa matriz por 3 e dividindo a terceira coluna por 6, o determinante da nova matriz vale:
a) 80
b) 20
c) ½
d) 2
e) nda

11. Se $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 9 & 12 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -12$, então $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ vale:
a) – 4
b) 4/3
c) $\frac{4}{3}$
d) 4
e) nda

12. O conjunto verdade da equação $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & x \\ 1 & x & -1 \end{vmatrix} = 81$ é:
a) {1}
b) {–1}
c) {1, -1}
d) {IR}
e) ∅

13. Os valores de x que tornam não-nulo o determinante da matriz $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 7 \\ 4 & 2 & x \end{vmatrix}$ são dados por:
a) $x \neq 4$
b) $x \neq -4$
c) $x \neq 0$
d) $x \neq -5$
e) $x \neq 5$

III) Menor complementar, Cofator ou Complemento Algébrico, Matriz Cofatora, Matriz Adjunta e Matriz Inversa:

a) **Menor Complementar:** Chama-se menor complementar de um elemento aij de uma matriz, ao determinante que se obtém eliminando a linha i e a coluna j, as quais o elemento pertence.

Ex: Determine o menor complementar do elemento a_{23} da matriz A = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & -1 \end{bmatrix}$

$D_{23} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = -2 \times 7 - 1 \times 6 = -20$

b) **Cofator ou Complemento Algébrico de um elemento aij:**

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Exemplo: Determine os cofatores de todos os elementos da matriz A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$C_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$C_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$

$C_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$C_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$C_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$

$C_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$C_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1$

$C_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -3$

$C_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

c) **Matriz Cofatora:** É a matriz formada por todos os cofatores de todos os elementos de uma determinada matriz nas suas respectivas posições.

Exemplo: $= \overline{A} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$

d) **Matriz Adjunta:** É a transpostas da matriz cofatora.

Exemplo: adj A = $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

e) **Matriz Inversa:**

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \text{adj } A.$

Exemplo: det A = $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1$

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

SISTEMA LINEAR

I) Equação Linear: É toda equação da forma,

$a_1 X_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = b$, onde:

- ☞ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são as variáveis ou incógnitas
- ☞ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são os coeficientes
- ☞ $b \in$ IR → termo independente.

Exemplo:

a) $3x + 2y = 5$
b) $x - y + 3z = 1$
c) $x + y - 2z = 0$ (equação linear homogênea – seu termo independente é igual a zero)

Solução de uma equação linear: A ênupla ordenada de números reais $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \ldots, n)$ será solução de uma equação linear quando tornar a igualdade verdadeira.

Exemplo: Verifique se a terna (2, -1, 3) é solução equação linear.

$2x + 3y + z = 4$

Resolução: $2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 3 = 4$

$4 - \cancel{3} + \cancel{3} = 4$

Obs: Topa equação linear homogênea admite como solução a ênupla (0, 0, …, 0) que é chamada solução trivial.

II) **Sistema Linear:** É um conjunto de duas ou mais equações lineares.

Exemplo: a) $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 5x - y = 4 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + z = 3 \end{cases}$

1) **Solução de um sistema linear:** Uma ênupla ordenada de números reais será solução de um sistema linear se for solução de todas as suas equações.
Exemplo: Verifique se a terna (2, 2, 1) é solução do sistema linear.

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + z = 3 \end{cases}$$

Resolução:

X + y - z = 3	2x + y + 3z = 9	3x - 2y+ z = 3
2 + 2 - 1 = 3	2.2 + 2 + 3.1 = 9	3.2 - 2.2 + 1 = 3
3 = 3 (V)	4 + 2 + 3 = 9	6 - 4 + 1 = 3
	9 = 9 (V)	3 = 3 (V)

Resposta: sim

2) **Sistema Homogêneo:** É aquele formado apenas por equações homogêneas.

Exemplo: $\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$

Observação: Todo sistema linear homogêneo admite a solução trivial.

3) Sistemas Equivalentes: Dois sistemas lineares são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo: $\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ e $\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

4) Classificação de um sistema linear quanto ao número de soluções:

- Possível e Determinado: É aquele que possui solução única.
- Possível e Indeterminado: É aquele que possui infinitas soluções.
- Impossível: É aquele que não tem solução.

5) Forma Matricial de um sistema:

Exemplo:

$2x + y - z = 2$
$3x + 2y + z = 6$
$x - 3y - z = -3$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{B}{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}} = \underset{C}{\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}} \quad \text{(forma matricial I)}$$

A – Matriz dos coeficientes
B – Matriz das incógnitas
C – Matriz dos ermos independentes

6) Resolução de um sistema linear através da regra de CRAMER.

Exemplo: Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 10 \\ 2x \ - \ y \ + \ z \ = \ 5 \\ 3x \ = \ y \ - \ 2z \ = \ 9 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 30$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 90$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 9 & 2 \end{vmatrix} = 60$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 10 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 9 \end{vmatrix} = 30$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{90}{30} = 3$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{60}{30} = 3$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{30}{30} = 1$$

S = {(3, 2, 1)}

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Resolva os sistemas lineares, aplicando a Regra de Cramer:

a) $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 5 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x + 3y + 5z = 13 \\ x - y + z = 1 \\ 7y - 2z = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y - 2z = -2 \\ 7x + 2y - 5z = -4 \end{cases}$

7) Discussão de um sistema linear pela Regra de Cramer.

- Se $\Delta \neq 0$, o sistema é possível e determinado.
- Se $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$; o sistema é possível e indeterminado.
- Se $\Delta = 0$ e pelo menos Δx, Δy, ou Δz for diferente de zero, o sistema é impossível.

Exemplos:

1) Classifique o sistema linear.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z = -3 \\ y \ + \ z = 2 \\ 3x - 2z \ = -1 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0,$$

logo o sistema é possível e determinado.

2) Discuta o sistema $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x + ay = 2 \end{cases}$ em função do parâmetro real a.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a - 4$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & a \end{vmatrix} = 3a - 4$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$\Delta \neq 0$
$a - 4 \neq 0$
$a \neq 4$

☞ Se liga:

- Se $a \neq 4$, o sistema é possível e determinado.
- Se a = 4, o sistema é impossível.

1. Determine os parâmetros k e m para que o sistema $\begin{cases} kx + 2y = -1 \\ 2x - y = m \end{cases}$ seja impossível.
2. Determine os valores de a e b de modo que o sistema $\begin{cases} 2x + 2y = b \\ 3x + ay = 6 \end{cases}$ seja indeterminado.
3. Determine k ∈ IR de modo que o sistema abaixo apresente soluções diferentes da trivial.

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + ky \ \ z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

EXERCÍCIOS DE REVISÃO

1. Os valores reais de a e b para que o sistema $\begin{cases} 5x + ay = 3 \\ bx + 8y = 6 \end{cases}$ seja indeterminado são:

a) a = 5 e b = 10
b) a = 4 e b = 10
c) a = 6 e b = 10
d) a = 7 e b = 11
e) a = 10 e b = 11

2. Determine os valores reais a e b para que o sistema seja impossível: $\begin{cases} 3x + 2y + 5z = 3 \\ ax - y + 2z = 2 \\ x - z = b \end{cases}$
3. Determine o valor de k para que o sistema $\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + ky + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$ admita solução própria.

4. Na feira, uma das barracas de frutas estavam vendendo embalagens com 10 pêras; 5 maças e 4 mangas por 11 reais; outra barraca vendia um pacote contendo 8 pêras, 6 maças e 4 mangas por 10 reais, e uma terceira vendia 6 pêras e 12 maças por 9 reais. Na verdade, só havia mudança na quantidade de cada pacote porque o preço de cada espécie de fruta era o mesmo nas três barracas. Qual o preço a se pagar por três pêras, 2 maças e 2 mangas em qualquer dessas barracas?

5. Uma coleção de livros de matemática para o ensino médio é representada pelos livros L_1, L_2 e L_3. As livrarias A, B e C, em um relatório sobre vendas diárias, apresentam os seguintes resultados num determinado dia:

	Total de vendas	Total recebido
A	1 L_1 2 L_2 3 L3	R$ 111,00
B	2 L_1 1 L_2 2 L_3	R$ 88,00
C	3 L_1 2 L_2 5 L_3	R$ 181,00

Com base nesse relatório, determine os preços dos livros L_1, L_2 e L_3.

6. Um fabricante de móveis manufatura cadeiras, mesinhas e mesas. Cada cadeira exige 10 minutos de lixagem, 6 minutos de pintura e 12 minutos de envernizamento. Cada mesinha exige 12 minutos de lixagem, 8 minutos de pintura e 12 minutos de envernizamento. Cada mesa exige 15 minutos de lixagem, 12 minutos de pintura 18 minutos de envernizamento. A máquina de lixagem está disponível 16 horas por semana, a pintura 11 horas por semana e a de envernizamento 18 horas por semana. Quantas cadeiras (por semana) devem ser fabricadas de maneira que as 3 máquinas sejam plenamente utilizadas?

EXERCÍCIOS COMPLEMENTARES:

1- Heron, Josué e Adonai saíram juntos para beber no sábado e no domingo. As tabelas a seguir resumem quantas garrafas de cerveja cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad D=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

S refere-se as despesas de sábado e D as despesas de domingo. Cada elemento a_{ij} das matrizes nos dá o número de cervejas que i pagou a j, sendo que Heron o nº 1, Josué o n° 2 e Adonai o n° 3. Quem bebeu mais no fim de semana?

2- Na produção de dois modelos de jaquetas foram usados botões pequenos e grandes. Nesta tabela temos o número de botões por modelos.

	março	abril
Jaq 1	10	12
Jaq 2	7	9

O número de jaquetas produzidas nos meses de março, abril também foi registrado numa tabela.

	Jaq 1	Jaq 2
Bot peq	2	4
Bot gran	6	3

Como podemos obter a tabela que nos dá o total de botões desses modelos nos dois meses?

3- Julgue o item:
Se $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_9$ formam uma progressão geométrica de razão q, então:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = a_1 . q^9$$

4- Seja a $\in$ IR e considere as matrizes reais 2 x 2 A = $\begin{pmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{pmatrix}$ e B = $\begin{pmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{pmatrix}$, o produto A.B será invertivel se e somente se:
a) $a^2 - 5a + 6 \neq 0$
b) $a^2 - 5a \neq 0$
c) $a^2 - 3a \neq 0$
d) $a^2 - 2a + 1 \neq 0$
e) $a^2 - 2a \neq 0$

5- Considere as matrizes A = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e B = $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e n = det (A.B). calcule 7^n.

6- Considere as funções f e g, definidas no conjunto dos números reais por:

$f(x) = (x - 7)^2 + 5$ e $g(x) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ -2 & x & 0 \\ 0 & 3 & x \end{bmatrix}$.

Sabendo-se que f(x) = g(x) para todo x, calcule o valor numérico de a.b.c.

7- Para que o sistema linear $\begin{cases} x + my + z = 0 \\ mx + y - z = 4 \\ x - z = 2 \end{cases}$ seja possível e determinado, é necessário que:
a) m = 2 ou m = -1
b) m = -2 ou m = 1
c) m = 2 ou m $\neq$ - 1
d) m $\neq$ 2 ou m = -1
e) m $\neq$ 2 ou m $\neq$ -1

8- Durante uma semana o Shopping Iguatemi reservou uma área para as crianças brincarem sobre rodas e colocou à disposição bicicletas (2 rodas), triciclos (3 rodas) e carrinhos (4 rodas). Ao final da promoção, devido ao desgaste, tiveram que trocar todos os pneus. Entre bicicletas e triciclos foram trocados 90 pneus, entre bicicletas e carrinhos, 130 e entre triciclos e carrinhos, 160. Quantas eram as bicicletas que estiveram à disposição das crianças?