



XX Semana da Matemática e X Semana da Estatística e IX Mostra IC

Universidade Federal de Uberlândia

19 de setembro a 14 de novembro de 2020

Modelagem fluidodinâmica do fenômeno de levitação acústica

Matheus Lopes Silva

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica

matheuslopesilva@ufu.br

Laura Pereira de Castro

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica

laurapdec@ufu.br

Aristeu da Silveira Neto

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Mecânica

aristeus@ufu.br

Introdução

Define-se como levitação o processo no qual mantêm-se um objeto suspenso de maneira a garantir sua estabilidade, por utilização de forças ascendentes, que contrariam a força peso do objeto, sem que ocorra contato mecânico entre o objeto e a origem da força. Existem linhas de pesquisa que, historicamente, visam utilização de ondas eletromagnéticas para obtenção de dados experimentais sobre levitação [1].

Assim como as ondas eletromagnéticas, as ondas acústicas também podem exercer forças em objetos. A força produzida por ondas acústicas é chamada de força de radiação acústica ou pressão de radiação acústica [2]. Existem diversas aplicações que utilizam o fenômeno da força de radiação acústica. Entre essas aplicações, tem-se a levitação acústica [3]. As forças de ondas acústicas podem ser geradas por ondas acústicas progressivas ou estacionárias.

Nesse trabalho foi analisado o comportamento do sistema apresentado na Figura 2. Impondo uma vibração com uma frequência f no disco inferior, e considerando a atuação da gravidade, da pressão e as forças viscosas devido à existência de um filme lubrificante entre o disco superior e o cilindro limitante, cujo lubrificante possui massa específica $\rho_{oleo} = 0.02394 \text{ kg/m}^3$ e viscosidade dinâmica $\mu_{oleo} = 910 \text{ Pa} \cdot \text{s}$.

O domínio físico do problema apresentado é um cilindro de diâmetro interno de 51 milímetros no qual são posicionados dois discos (pistões) com diâmetro 50 milímetros e massa m e 200 milímetros de distância entre estes. Além disso, o fluido entre estes dois cilindros é ar e, no instante inicial, a pressão interna é igual a atmosférica.

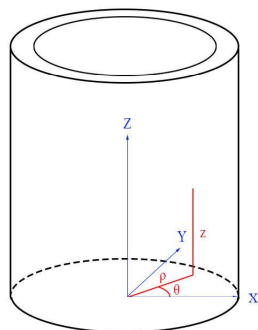


Figura 1: Sistema de coordenadas

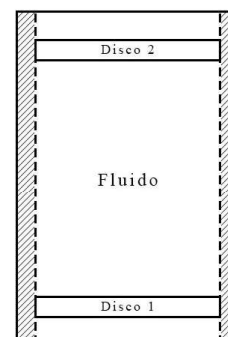


Figura 2: Modelo Físico

Modelo Matemático

Para o desenvolvimento, supõe-se que a massa específica do fluido não varie nas coordenadas espaciais adotadas no mesmo instante de tempo, dado que as dimensões do sistema físico adotado são pequenas e, assim, a propagação

da variação de massa específica ocorre de maneira quase instantânea. Desse modo, pode-se iniciar o desenvolvimento matemático com o cálculo do balanço de forças que atuam sobre o disco, apresentado na Eq. 1.

$$F = (P - P_{atm})A - W + F_V = m\ddot{L}_s. \quad (1)$$

De modo que F é a força resultante no pistão superior, P a pressão absoluta dentro do cilindro, P_{atm} a pressão atmosférica, A a área do pistão superior, W a força peso, F_V a força viscosa, determinada pela Eq. 2 [4], m a massa do pistão superior e \ddot{L}_s a aceleração do pistão superior. Com isso, segue-se o seguinte desenvolvimento para a força viscosa:

$$F_V = \mu_{oleo} \times \tau \times A_L. \quad (2)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{rr} & \tau_{r\theta} & \tau_{rz} \\ \tau_{\theta r} & \tau_{\theta\theta} & \tau_{\theta z} \\ \tau_{zr} & \tau_{z\theta} & \tau_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial V_s}{\partial r} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Em que μ_{oleo} é a viscosidade dinâmica do óleo lubrificante, τ o tensor viscoso [4], A_L a área lateral do pistão superior, V_s a velocidade no eixo Z do pistão superior e r é referente ao raio no sistema de coordenadas cilíndricas adotado neste trabalho. Assim, ao aproximar o perfil de velocidade em r como linear, devido ao pequeno espaço existente entre o pistão e o cilindro, para o fluido lubrificante presente:

$$F_V = \mu_{oleo} \frac{\partial V_s}{\partial r} A_L = -\mu_{oleo} \frac{V_s}{G} A_L. \quad (4)$$

No qual G é o espaço entre o pistão e o cilindro.

Em seguida, deseja-se modelar a pressão absoluta no cilindro. Desta forma, sabe-se que a pressão pode ser modelada por meio da Lei dos Gases Universais [4], apresentada na Eq. 5.

$$P = \rho RT. \quad (5)$$

No qual ρ é a massa específica do fluido, neste caso ar, R a constante do gás e T a temperatura do fluido. Inicialmente, para modelar a massa específica, utilizou-se a Equação da Continuidade [4], apresentada na Eq. 6. Considerando a hipótese de não escorregamento e, para esse modelo, o perfil de velocidade em Z linear, como exposto na Fig. 3, obtém-se a Eq. 7 da velocidade do fluido, V_z , em função do tempo e do espaço.

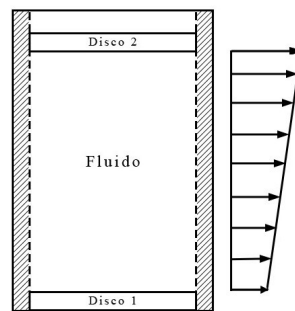


Figura 3: Distribuição de Velocidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

$$V_z(t, z) = \frac{V_s(t) - V_i(t)}{L_s(t) - L_i(t)} \times z + V_i(t). \quad (7)$$

Em que L_s é o deslocamento do pistão superior, V_i e L_i são, respectivamente, a velocidade e o deslocamento impostas no pistão inferior. Portanto, ao derivar a Eq. 7 em relação a Z e implementá-la na Eq. 6, tem-se a Eq. 8.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{V_s(t) - V_i(t)}{L_s(t) - L_i(t)}. \quad (8)$$

Nesse momento, ao observar a Eq. 5 percebe-se que ainda é necessária a modelagem da temperatura, em que pode ser obtida por meio da Eq. 9, desenvolvida a partir do balanço de energia com o uso do Teorema do Transporte de Reynolds [4] considerando os termos de escoamento compressíveis.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\frac{4}{3}\mu_{ar}\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 - P\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}{\rho C_p}. \quad (9)$$

No qual μ_{ar} é a viscosidade dinâmica do ar e C_p a capacidade térmica do ar. Assim, tem-se um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e as respectivas condições iniciais apresentadas nas Eq. 10a, 10b, 10c, 11a, 11b, 12a e 12b.

$$\begin{cases} \frac{d^2 L_s}{dt^2} = \frac{(\rho(t)RT(t) - P_{atm})A - W + F_V}{m}. \end{cases} \quad (10a)$$

$$\begin{cases} \frac{dL_s}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (10b)$$

$$\begin{cases} L_s(0) = 0.2. \end{cases} \quad (10c)$$

$$\begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = -\rho \frac{V_s(t) - V_i(t)}{L_s(t) - L_i(t)}. \end{cases} \quad (11a)$$

$$\begin{cases} \rho(0) = 1.225. \end{cases} \quad (11b)$$

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \frac{\frac{4}{3}\mu_{ar}\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 - \rho(t)RT(t)\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)}{\rho C_p}. \end{cases} \quad (12a)$$

$$\begin{cases} T(0) = 15. \end{cases} \quad (12b)$$

Por fim, utilizou-se o método de Runge-Kutta de 4ª ordem implementado computacionalmente para resolução deste sistema.

Resultados

Para a obtenção dos resultados a partir da modelagem apresentada foram simulados 3 casos do sistema: com frequência $f = 10 \text{ Hz}$ e massa $m = 100 \text{ g}$, com frequência $f = 10 \text{ Hz}$ e massa $m = 200 \text{ g}$ e com frequência $f = 20 \text{ Hz}$ e massa $m = 100 \text{ g}$. Para o primeiro caso, foram obtidas as Fig. 4 e 5, para o segundo caso, as Fig. 6 e 7 e, para o último caso, as Fig. 8 e 9.

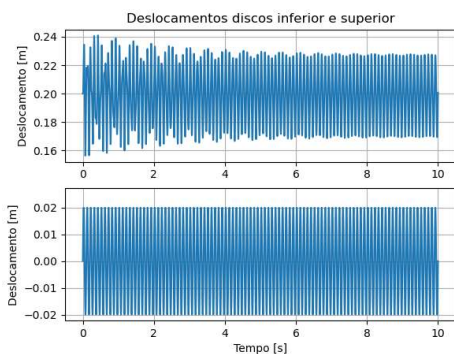


Figura 4: Deslocamento dos discos para $f = 10 \text{ Hz}$ e $m = 100 \text{ g}$

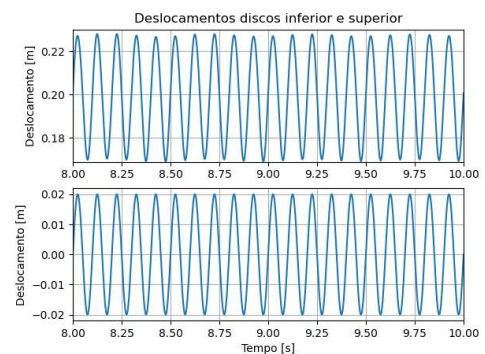


Figura 5: Deslocamento dos discos para $f = 10 \text{ Hz}$ e $m = 100 \text{ g}$ em regime estacionário

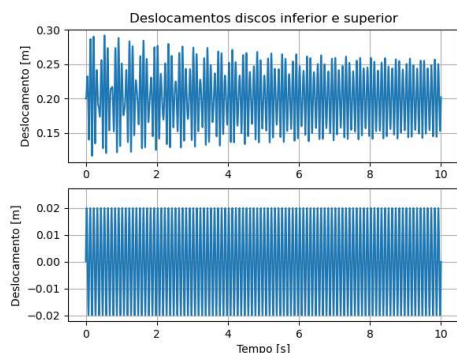


Figura 6: Deslocamento dos discos para $f = 10$ Hz e $m = 200$ g

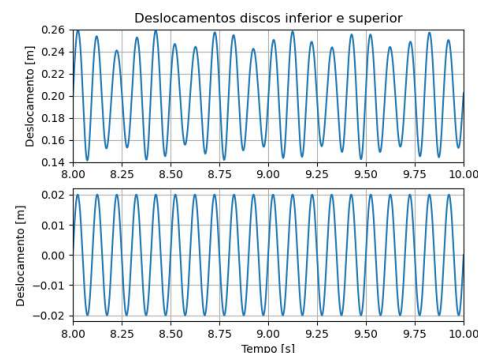


Figura 7: Deslocamento dos discos para $f = 10$ Hz e $m = 200$ g (Ampliado)

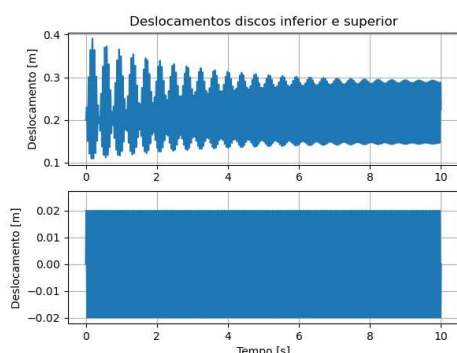


Figura 8: Deslocamento dos discos para $f = 20$ Hz e $m = 100$ g

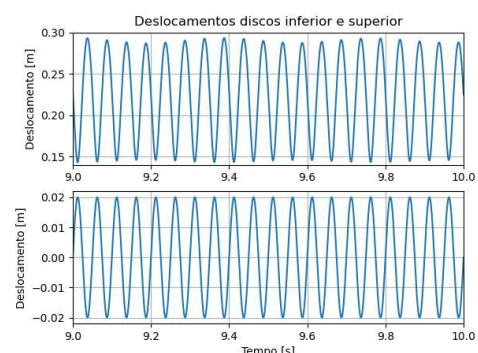


Figura 9: Deslocamento dos discos para $f = 20$ Hz e $m = 100$ g em regime estacionário

Conclusões

A solução do problema unidimensional da levitação acústica abordado neste trabalho representa um primeiro passo ao entendimento desse complexo fenômeno físico. Dessa maneira ao partir do modelo apresentado é possível analisar a amplitude, fase e velocidade de movimentação dos dois discos considerando inclusive a influência de forças viscosas entre o disco superior e o cilindro limitante.

Nota-se a influência de dois fatores fundamentais para o modelo, sendo que ao aumentar a massa do pistão superior, que influencia na força peso, percebe-se que o sistema apresenta uma resposta transiente mais prolongada devido a maior dificuldade de amortecimento das forças viscosas causada pelo aumento da velocidade associado ao aumento da força peso. Além disso, percebe-se a clara influência da frequência na fase do sistema, visto que para frequência de 10 Hz , apresentada na Fig. 5 os pistões inferior e superior estão em fase, ou seja, apresentam 0° de defasagem, enquanto para 20 Hz , apresentado na Fig. 9, os pistões possuem uma defasagem de 180° nos respectivos movimentos.

Referências

- [1] VALLE, R.L.S., *Levitação Eletromagnética de um disco*, monografia de graduação, UFRJ, Rio de Janeiro, Brazil, 2010.
- [2] HAMILTON, M.F., BLACKSTOCK, D.T. et al., *Nonlinear Acoustics*, Academic Press, 1998.
- [3] BRANDT, E.H., *Suspended by sound*, Nature, 413, pages 474–475, 2001.
- [4] WHITE, F.M., *Fluid Mechanics 7th Edition*, McGraw Hill, 2011.