Tarea 1 Probabilidad

Jessenia Piza, Paula López, Laura Salazar

Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas, Universidad del Rosario

1. Hallar el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra MISSISSIPPI.

Del problema tenemos las siguientes repeticiones de cada letra de la palabra:

$$\begin{aligned} M &= 1 \\ I &= 4 \\ S &= 4 \\ P &= 2 \end{aligned}$$

Ahora, el número de letras que tiene la palabra MISSISSIPPI es 11, es decir $n = 11$. Luego, usando el coeficiente multinomial de las particiones, obtenemos:

$$\binom{n!}{I, S, P, M} = \frac{11!}{(4!)^2 \cdot 2! \cdot 1!} = 34{,}650 \tag{1}$$

Por ende, el número de palabras que se pueden formar con las letras de la palabra MISSISSIPPI es 34,650.

2. Hallar la cantidad de números naturales palíndromos (que se leen igual en un sentido que en otro) de n dígitos.

Cuando hablamos de números palíndromos, obtenemos dos primeras observaciones: el primer dígito no puede ser 0, y se debe dividir en dos casos (cuando n es par e impar).

- **Caso n es Par:** Como es un número palíndromo, sabemos que desde la posición $\frac{n}{2} + 1$ todas las posibilidades de cada número serán 1 (los números que van desde 0 hasta $\frac{n}{2}$).

n	1	2	3	...	$\frac{n}{2}$	$\frac{n}{2}+1$	...	n
Posibilidades	9	10	10	...	10	1	...	1

  De esta manera, tenemos $9 \cdot 10^{\frac{n}{2}-1}$ números palíndromos con n par.

- **Caso n es Impar:** En este caso pasa casi lo mismo que cuando n es par, pero lo que cambia es que nos interesa desde 0 hasta $\frac{n+1}{2}$. De esta manera:

n	1	2	3	...	$\frac{n+1}{2}$	$\frac{n+1}{2}+1$	...	n
Posibilidades	9	10	10	...	10	1	...	1

Así, obtenemos $9 \cdot 10^{\frac{n+1}{2}-1}$ números palíndromos con n impar.

Por lo tanto, uniendo los dos casos, obtenemos: $9 \cdot 10^{\frac{n}{2}-1} + 9 \cdot 10^{\frac{n+1}{2}-1}$ números palíndromos de n dígitos.

3. ¿De cuántas formas podemos seleccionar 6 cartas de una baraja usual de 52 cartas de modo que tengamos por lo menos una carta de cada pinta?

Tenemos $\binom{52}{6}$ posibilidades de sacar 6 cartas de una baraja de 52.

Ahora bien, planteemos los siguientes eventos:

$$\begin{aligned} A &= \{Falta\,\heartsuit\} \\ B &= \{Falta\,\diamondsuit\} \\ C &= \{Falta\,\clubsuit\} \\ D &= \{Falta\,\spadesuit\} \end{aligned}$$

De esta manera, tenemos que para poder seleccionar 6 cartas de la baraja de modo que tengamos por lo menos una carta de cada pinta sería: $\binom{52}{6} - |A \cup B \cup C \cup D|$ donde $|A \cup B \cup C \cup D|$ es la cardinalidad del conjunto donde por lo menos falta una de las pintas. Así,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C \cup D| &= |A \cup (B \cup C \cup D)| \\ &= |A| + |B \cup (C \cup D)| - |A \cap (B \cup (C \cup D))| \\ &= |A| + |B| + |C \cup D| - |B \cap (C \cup D)| - |(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)| \\ &= |A| + |B| + |C| + |D| - |C \cap D| - |B \cap (C \cup D)| - |(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (A \cap D)| \\ &= |A| + |B| + |C| + |D| - |C \cap D| - |B \cap (C \cup D)| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| + \\ &\quad |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| \\ &= |A| + |B| + |C| + |D| - |C \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| + \\ &\quad |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| - |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$

Note que, la cardinalidad de los eventos es la misma:

$$|A| = |B| = |C| = |D| = \binom{39}{6}$$

Y definimos la suma de estas como:

$$|A| + |B| + |C| + |D| = 4 \cdot \binom{39}{6}$$

De la misma manera, ocurre lo siguiente con la intersección de cualquiera de dos eventos:

$$|C \cap D| = |B \cap C| = |B \cap D| = |A \cap D| = |A \cap C| = |A \cap B| = \binom{26}{6}$$

$$-|C \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |A \cap D| - |A \cap C| - |A \cap B| = -6 \cdot \binom{26}{6}$$

De igual forma, observe que la cardinalidad de la intersección de tres eventos cualesquiera es la misma, y la definimos como:

$$|A\cap B\cap C| = |A\cap B\cap D| = |A\cap C\cap D| = |B\cap C\cap D| = \binom{13}{6}$$
$$|A\cap B\cap C| + |A\cap B\cap D| + |A\cap C\cap D| + |B\cap C\cap D| = 4\cdot\binom{13}{6}$$

Finalmente, note que $|A\cap B\cap C\cap D| = 0$.

Así, nos quedaría que:

$$\begin{aligned}\binom{52}{6} - |A\cup B\cup C\cup D| &= \binom{52}{6} - (4\cdot\binom{39}{6} - 6\cdot\binom{26}{6} + 4\cdot\binom{13}{6})\\ &= \binom{52}{6} - 4\cdot\binom{39}{6} + 6\cdot\binom{26}{6} - 4\cdot\binom{13}{6}\\ &= 8{,}682{,}544\end{aligned}$$

4. Sea $n \geq 3$ un entero. Determinar el número de diagonales de un polígono de n lados (cada diagonal se forma eligiendo 2 vértices no consecutivos) y el número de triángulos que se pueden formar usando sus vértices.

Por definición, tenemos que el número de aristas de un polígono regular es:

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

Ahora bien, para hallar el número de diagonales no debemos contar el número de aristas adyacentes de cada uno de los vértices. Por ende:

$$\frac{n(n-1)-2n}{2} = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{n(n-3)}{2}$$

De esta manera, tenemos $\frac{n(n-3)}{2}$ número de diagonales en un polígono regular.

Ahora, para hallar el número de triángulos que se pueden formar usando sus vértices, sería:

$$\binom{n}{3}$$

Ya que como un triángulo tiene 3 vértices, sería todas las formas en las que se pueden combinar 3 vértices de un polígono de n vétices.

5. La extracción de uranio es un trabajo duro: el mineral aparece en solo el 1 % de las rocas obtenidas en la mina. Su mejor amig@ ha estado perfeccionando un detector de uranio que nunca falla cuando las rocas contienen el mineral (siempre se detona) y, en caso de que no lo contengan, devuelve lecturas precisas el 90 % del tiempo (no se detona el 90 % de las veces). Su amig@ encuentra una roca para la cual el detector se ha detonado. Su amig@ ofrece venderle la roca por 1000 dolares. En caso de que la roca contenga uranio usted puede venderla por 4000. ¿Debería usted aceptar el negocio? Justifique su respuesta con argumentos probabilísticos.

Según el enunciado obtenemos los siguientes eventos:

$A = \{$ La piedra contiene Uranio $\}$ $\qquad$ $B = \{$ El detector detona $\}$

De la misma manera, obtenemos:

$$P(A) = 0{,}01 \qquad P(\overline{A}) = 0{,}99$$
$$P(B|A) = 1 \qquad P(B|\overline{A}) = 0{,}1 \qquad P(\overline{B}|\overline{A}) = 0{,}9$$

Luego, para determinar si se debe o no aceptar l negocio debemos hallar $P(A|B)$, y para esto utilizaremos el Teorema de Bayes.

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A})} = \frac{0{,}01 \cdot 1}{0{,}01 \cdot 1 + 0{,}99 \cdot 0{,}1} = 0{,}091 \tag{2}$$

Esto significa que la probabilidad de que la piedra contenga Uranio dado que el detector detona es de aproximadamente 9 %. Por lo tanto, como la probabilidad es muy pequeña, concluímos que no se debería aceptar el negocio.

6. Después de un día agotador como miner@s usted y su mejor amig@ deciden ir a jugar cartas. En cada ronda su amig@ reparte 4 cartas, dos para cada jugador (2 para él o ella y 2 usted). Las suyas están tapadas y las de su contrincante están abiertas. En la primera ronda las cartas de su contrincante son 8 y J. En la segunda son 2 y 2. Usted gana si obtiene un par y su contrincante no obtiene nada o si usted obtiene un par más alto que su contrincante. ¿En qué ronda tiene usted probabilidad más alta de ganar?

En la **primera ronda** tenemos que para ganar tenemos que sacar un par. Como ya salieron las cartas 8 y J obtenemos que la probabilidad de ganar sería:

$$\frac{11 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{3}{2}}{\binom{50}{2}} \tag{3}$$

Note que, el numerador corresponde a la combinación de las 4 posibles cartas de cada pinta con 2 porque sólo nos importan los pares. Además, se le suma la combinatoria de las 3 pintas que quedan de las 2 cartas que ya salieron (8 y J). Esto lo tenemos que dividir entre la combinatoria de 50 con 2, por las 50 cartas que quedan y todos los posibles pares de estas.

En la **segunda ronda** el contrincante lanza un par 2 por lo tanto, la única forma de ganar es sacando un par mayor a 2. La probabilidad de ganar es:

$$\frac{12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{50}{2}} \tag{4}$$

Observe que en la parte superior de la fracción aparecen las posibles combinaciones de las 4 cartas de cada pinta con 2, excluyendo a las del número 2, cumpliendo así que sean exclusivamente mayores a 2. Este resultado lo dividimos por la combinación de 50 con 2, puesto que ya tenemos dos cartas menos en la baraja.

Ahora compararemos ambas respuestas para saber cual de los dos casos es más probable.

Caso 1:

$$\frac{11 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{3}{2}}{\binom{50}{2}} = 0,05877 \tag{5}$$

Caso 2:

$$\frac{12 \cdot \binom{4}{2}}{\binom{50}{2}} = 0,05877 \tag{6}$$

Note que en ambos casos el resultado es 0,05877. Por lo tanto no hay diferencia en ninguno de los dos casos. La probabilidad de ganar es la misma.

7. Sean A, B y C eventos. Muestre que:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C). \tag{7}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A \cup (B \cup C)) \\
&= P(A) + P(B \cup C) - P(A \cap (B \cup C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - [P(A \cap B) + P(A \cap C) - P((A \cap B) \cap (A \cap C)] \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(B \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

□

8. Considere una variable aleatoria binomial X con parámetros n y p. Sea k^* el entero más grande que a la vez es menor o igual a $(n+1)p$. Demuestre que la PMF (función de masa de probabilidad) $pX(k)$ es monotónicamente no decreciente con k entre 0 y k^*, y monotónicamente decreciente con k mayor o igual a k^*.

Pista: Sea X una variable aleatoria binomial con parámetros n y p. Entonces su PMF puede calcularse de forma recursiva usando:

$$p_X(k+1) = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} \cdot p_X(k)$$

- **Mostraremos que la PMF de una variable aleatoria es monotónicamente no decreciente con k entre 0 y k^*.**

  Para esto, demostraremos que $p_X(k+1) \geq p_X(k)$ para cualquier k tal que $0 > k > k^*$. De esta manera, tenemos que por la fórmula recursiva de $p_X(k+1)$ que para que $p_X(k+1) \geq p_X(k)$ se debe cumplir que $\frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} \geq 1$

  De esta manera, partiremos de que $k^* > k > 0$ y, como nos dice el enunciado, $k^* \leq (n+1)\cdot p$. Además, tomamos $1-p > 0$ y $k+1 > 0$.

$$\begin{aligned}
k^* &> k \\
k^* &\geq k+1 \\
p\cdot(n+1) &\geq k^* \geq k+1 \\
p\cdot(n+1) &\geq k+1 \\
pn+p &\geq k+1 \\
pn &\geq k+1-p \\
pn-pk &\geq k+1-p-pk \\
p(n-k) &\geq (1-p)(k+1) \\
\frac{p(n-k)}{(1-p)(k+1)} &\geq 1 \\
\frac{p}{1-p}\cdot\frac{n-k}{k+1} &\geq 1
\end{aligned}$$

  Por lo tanto, para el interrvalo $k^* > k > 0$, la función de masa de probabilidad es monotónicamente no decreciente.

- **Mostraremos que la PMF de una variable aleatoria es monotónicamente decreciente con k mayor o igual a k^*.**

  De la misma manera que el punto anterior, por la definición inductiva, necesitamos mostrar que $\frac{p}{1-p} \cdot \frac{n-k}{k+1} < 1$ para que $p_X(k+1) < p_X(k)$ con $k \geq k^*$.

Partiremos de suponer que $k \geq k^*$ y que $k^* \leq (n+1) \cdot p$ (como nos dice el enunciado).

$$\begin{aligned} k &\geq k^* \\ k+1 &> k^* \\ k+1 > k^* &\geq (n+1) \cdot p \\ k+1 &> (n+1) \cdot p \\ k+1 &> pn + p \\ k+1-p &> pn \\ k+1-p-pk &> pn - pk \\ (k+1)(1-p) &> p(n-k) \\ 1 &> \frac{p(n-k)}{(1-p)(k+1)} \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos que:

$$\frac{p}{1-p)} \cdot \frac{n-k}{k+1} < 1$$

Por lo tanto, en el intervalo $k \geq k^*$, la función de masa de probabilidad es monotónicamente decreciente.