Práctica 2: Análisis frecuencial		Grupo	
		Puesto	
Apellidos, nombre	Sánchez Garzón, Laura	Fecha	
Apellidos, nombre	Remuiñán Cid, Sara	21/9/2023	

El objetivo de esta práctica es presentar al alumno la aplicación de las herramientas que ofrece el análisis de los sistemas LSI (*Linear Shift Invariant*) al tratamiento digital de imágenes.

Desarrolle cada ejercicio en un fichero de comandos 'ejercicio_X.m' separado.Para conocer el funcionamiento preciso de los comandos que se introducen en este guión, utilice la ayuda de MATLAB.Para evitar posibles interferencias con otras variables o ventanas recuerde incluir siempre las instrucciones **`clearall`** y **`closeall`** al principio de cada fichero de comandos.

Al finalizar la práctica, comprima el documento con las observaciones y los ficheros '.m' generados en un único fichero con el nombre '**FTDI_P2_ApellidosNombre1_ApellidosNombre2.zip**', conéctese al sistema de entrega de prácticas de *Moodle* y entréguelo.

1 Obtención de la FT

1.1 Ejercicio 1: Transformada de Fourier de sinusoides; caso particular.

Genere imágenes de las versiones discretas de las siguientes cuatro funciones; para ello defina las funciones en la región $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$ (observe que los intervalos están abiertos en su extremo superior, y tenga en cuenta que este aspecto es fundamental para la correcta realización del ejercicio), muestreando con un retículo ortogonal de vectores $\vec{v}_1 = (1/200, 0), \vec{v}_2 = (0, 1/200)$.

1. $\psi_1(x, y) = \sin(10\pi x)$
2. $\psi_2(x, y) = \sin(20\pi y)$
3. $\psi_3(x, y) = \sin(40\pi x + 30\pi y)$
4. $\psi_4(x, y) = \sin(10\pi x + 20\pi y) + \sin(30\pi x + 30\pi y)$

Represente las cuatro funciones a tamaño real, de modo que cada píxel de la imagen se corresponda con un píxel de la pantalla. Recuerde que para ello deberá representar cada una en una figura distinta, utilizando el comando:

```
>>imshow(f,[min(min(f)) max(max(f))],'InitialMagnification',100);
```

La Transformada de Fourier (FT) de una señal es una función compleja de variable real. En el caso de señales bidimensionales o imágenes, la FT toma un valor complejo para cada punto del plano de frecuencias horizontales y verticales. Para poder representarla, una posibilidad es representar su módulo normalizado (también se podrían representar por separado sus partes real e imaginaria). Esta representación puede hacerse de dos modos: una representación 3D, definiendo el plano de frecuencias y utilizando el comando **`mesh`**para obtener la superficie que representa la FT; o una representación 2D, asumiendo que el módulo de la FT es una imagen discreta. Este ejercicio propone ilustrar ambos métodos.

REPRESENTACIÓN DEL MÓDULO DE LA FT EN 3D:

En primer lugar, obtenga la FT de cada una de las cuatro señales anteriores. Para ello, utilice los comandos:

```
>> F=fftshift(fft2(f));
```

, donde `fft2` obtiene la transformada de Fourier bidimensional `de f` y`fftshift`sitúa la componente de frecuencia 0 en el centro de la imagen y las de altas frecuencias en las esquinas.

Tenga en cuenta que mientras que cada una de las cuatro funciones definidas presentan su origen de coordenadas en la parte superior izquierda de su representación como imágenes, la FT así obtenida presenta su origen de coordenadas en el centro del plano de frecuencias en que está definida. Además, la máxima frecuencia horizontal de las imágenes discretas será la mitad de su número de columnas (**`image_w/2`**), y la máxima frecuencia vertical la mitad de su número de filas (**`image_h/2`**). Por lo tanto, la definición del plano de frecuencias resulta:

```
>>fx=[-image_w/2:image_w/2]; fx=fx(1:end-1);
>>fy=[-image_h/2:image_h/2]; fy=fy(1:end-1);
```

El cálculo del módulo normalizado es:

```
>> F=abs(F)/max(max(abs(F)));
```

Y, finalmente su representación 3D se obtiene mediante:

```
>>figure; mesh(fx, fy, F);
```

Vaya representando una a una las FT de las imágenes propuestas, cada una en una figura. Obsérvelas al mayor tamaño posible y compruebe si son coherentes con lo que cabía esperar de la definición de las funciones, para ello atienda al número de componentes frecuenciales de cada función.

Observaciones 1.1.1:

Se realiza la fast Fourier transform en 2D, y se mueve el eje. Al haber movido el eje, se crean las variables fx y fy, que cogen el centro y ponen la longitud de las matrices a lo ancho y a lo largo mitad y mitad (se quita 1 porque el 0 cuenta).

En el primer caso, dado que la señal se mueve en el eje x, los valores se encuentran en dicho eje. Lo mismo ocurre en el segundo caso con el eje y. En el tercer caso, al tener componente de x y de y, sale la señal en diagonal. En el cuarto caso, es una suma de señales con componentes en x y en y.

Al ser en 3D, el eje z se va a infinito en los puntos donde existe señal.

——

REPRESENTACIÓN DEL MÓDULO DE LA FT COMO UNA IMAGEN:

En esta situación, en lugar de definir el plano de frecuencias y representar la FT utilizando el comando **`mesh`**, se pretende representar directamente el módulo de la FT como una imagen.Dado que en la práctica una imagen sólo contiene 256 niveles o valores distintos de la señal que representa, en vez de representar el módulo normalizado de la FT resulta más conveniente representar su logaritmo[1]:

[1]Observe que, en vez de calcular directamente el logaritmo del módulo de la FT, se le suma una unidad para evitar que el resultado tome valores negativos.

```
>> F=log(1+abs(F));
>> figure; imshow(F,[min(min(F)) max(max(F))],'InitialMagnification',100);
```

Represente las FT de las imágenes propuestas, cada una en una figura y a resolución real, y compruebe que lo que observa es coherente con la representación 3D realizada antes.

Observaciones 1.1.2:

Se obtiene la señal vista “desde arriba” del apartado anterior. Se utiliza el logaritmo para empequeñecer la escala.

——

1.2 Ejercicio 2: Transformada de Fourier; caso general.

Utilizando el mismo retículo del ejercicio anterior, genere ahora en la región $0 \le x < 1.02, 0 \le y < 1.03$ una versión discreta de las funciones:

1. $\psi_1(x, y) = \sin(40\pi x + 30\pi y)$
2. $\psi_2(x, y) = \sin(120x + 90y)$

Represente la FT de estas dos señales tanto en 3D como en 2D, siguiendo el esquema del ejercicio anterior.Observe las representaciones al mayor tamaño posible e indique cuál cree que es el motivo de no obtener resultados similares a los del ejercicio anterior, sobre todo en el caso de $\psi_1(x, y)$, que es idéntica a la tercera función del citado ejercicio.

Repita el ejercicio para la señal $\psi_1(x, y)$ en la región $0 \le x < 1, 0 \le y < 1.03$ y en la región $0 \le x < 1.02, 0 \le y < 1$. Indique que diferencias con el casoconsiderado al principio de este ejercicio.

Observaciones 1.2:

——

1.3 Ejercicio 3: Transformada de Fourier de imágenes naturales.

La conclusión del ejercicio 2 es que, si la señal cuya FT se desea obtener o no es periódica o no presenta un número entero de periodos en la región en la que está definida, la FT calculada según se propone en el Ejercicio 1 presenta componentes frecuenciales que no corresponden a la señal en cuestión. En ambas situaciones, aunque por distintas causas, el motivo es que la replicación periódica de la señal, implícita en la obtención de la FT a partir de la FFT, crea discontinuidades de la señal que dan lugar a componentes de alta frecuencia en las direcciones horizontal y vertical.

En el caso de imágenes reales o *naturales* (así llamadas por oposición a las imágenes sintéticas), la periodicidad es en la práctica inexistente, por lo que el efecto observado en el ejercicio anterior se produciría siempre, impidiendo de este modo una correcta interpretación de las componentes frecuenciales de la imagen.

Una posible solución a este problema consiste en generar una nueva imagen formada por réplicas especulares de la imagen cuya FT se desea obtener (ver Fig. 1), para obtener a continuación la FT de esta imagen. La FT de la imagen así extendida presentará componentes frecuenciales similaresa las de la imagen inicial, pero sin los efectos derivados de la no periodicidad ya que la extensión hace que la imagen sea siempre periódica.

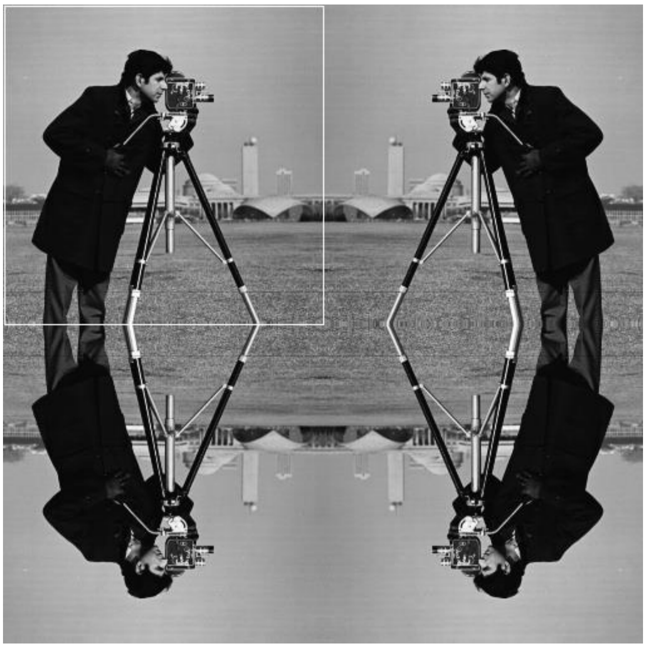

Fig.1: Imagen extendida especularmente en todas sus dimensiones[2].

Para apreciar la dependencia de este efecto con respecto a la imagen particular con que se opere, proceda según se indica a continuación:

Obtenga la FT de la imagen `RNM-TOBILLO.jpg`[3] tanto como se propone en los ejercicios anteriores como siguiendo el esquema comentado en los párrafos anteriores[4] (represente en ambos casos la imagen cuya FT calcula para asegurarse de que la extensión se realiza correctamente). Tenga en cuenta que para poder calcular la FT de la imagen tendrá que convertirla antes a tipo `double` (para ello use siempre `double(ima)`, que no modifica los valores de la imagen, en vez de usar la función `im2double(ima)` que además los escala). Represente en una misma ventana las imágenes 2D de las dos FTs obtenidas y describa y justifique todas las diferencias que observa entre ellas:

Observaciones 1.3.1:

____

[2] El marco alrededor de la imagen original no aparece en la práctica, solamente se incluye aquí por razones de visualización

[3]Descárguese esta imagen de la página *moodle* de la asignatura.

[4] Para calcular la imagen propuesta en la Figura 1 utilice las funciones fliplr y flipud para reflejar la imagen original tanto en el eje x como en el eje y.

Repita el procedimiento anterior con la imagen `Hernia_disco.jpg`[5]y anote de nuevo las diferencias entre las dos FTs obtenidas, indicando además si son o no tan acusadas cono en la imagen anterior y por qué:

Observaciones 1.3.2:

——

Concluya, a la vista de las apreciaciones anteriores, si este método para evitar la aparición de falsas frecuencias horizontales y verticales por efecto de la replicación periódica inherente al cálculo de la FT, le parece o no adecuado para realizar una interpretación frecuencial de una imagen cualquiera:

Observaciones 1.3.3:

——

2 Filtrado en frecuencia

Si en vez de una interpretación frecuencial de una señal mediante la observación de su transformada, el objetivo que se persigue con el uso de la FT es utilizar la propiedad de convolución para hacer un filtrado en el dominio frecuencial, el efecto observado en los ejercicios anteriores no tiene importancia a efectos de cálculo, ya que la FT inversa lo compensa. Por lo tanto, en este apartado calcule la FT sin acudir a réplicas especulares de las imágenes con que trabaja.

2.1 Ejercicio 4: Filtrado paso bajo y paso alto ideal.

El objetivo de este ejercicio es aprender a aplicar la técnica de filtrado frecuencial, y comprobar su validez sobre una imagen. Sin embargo, no se pretende profundizar en el efecto visual de los distintos tipos de filtrado, asunto éste que no entra en los objetivos de esta parte de la asignatura.

Sea la función: $\psi_1(x,y) = \sin(2\pi 160 x) + \sin(2\pi 40 y)$

Genere una imagen a partir de ella muestreándola en la región $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$ con un retículo ortogonal de vectores $\vec{v}_1 = (1/400, 0), \vec{v}_2 = (0, 1/400)$ y calcule su FT.

Un filtro 2D estará definido por una imagen de igual tamaño que la FT sobre la que se pretende aplicar. Su origen estará en el centro de la imagen (de coordenadas normalizadas `f0_x` y `f0_y`en el código de abajo).

Para generar filtros paso bajo o paso alto ideales deberá asignar valor unidad a sus regiones de soporte y valor nulo al resto. Tenga en cuenta que si los filtros no son simétricos respecto del origen el resultado será una imagen con valores complejos. Analice y comprenda el siguiente código de ejemplo, que genera filtros paso-bajo (`fpb`) y paso-alto (`fpa`) con frecuencias de corte normalizadashorizontal en `fc_x` y vertical en `fc_y`. Observe que estas frecuencias se especifican en ciclos por dimensión de la imagen, normalizados por el vector base del retículo en la dirección correspondiente.

---

[5]Descárguese esta imagen de la página *moodle* de la asignatura.

```
>> v1=1/400; v2=1/400;
>>fcorte_x = 30;
>>fcorte_y = 30;
>>fc_x=fcorte_x*v1; fc_y=fcorte_y*v2;
>> f0_x=0.5+v1; f0_y=0.5+v2;
>>fpb=(X>(f0_x-fc_x) & X<(f0_x+fc_x)) & (Y>(f0_y-fc_y) & Y<(f0_y+fc_y));
>>fpa=~fpb;
>>fpb=1*double(fpb);fpa=1*double(fpa);
```

Para obtener la imagen resultante de un proceso de filtrado deberá aplicar la FT inversa. Por motivos de precisión numérica, esta operación genera valores complejos aun en el caso de que el resultado sea una imagen real y valores muy pequeños, pero no nulos aun en el caso de que el resultado teórico fuera nulo.

Para resolver la primera situación suele tomarse la parte real del resultado; para resolver la segunda, suele redondearse al intervalo de cuantificación, que depende del rango de la imagen que se filtra (en este caso una suma de dos sinusoides, cuyo rango varía desde -2 a +2, es decir, 4 unidades) y del número de niveles de cuantificación que se desean (en general, 256):

```
>>ima_range=max(max(ima_original))-min(min(ima_original)); quant=ima_range/256;
>>filtered_ima=quant*round(real(ifft2(ifftshift(F)))/quant);
```

Tomando como ejemplo el código indicado, genere y represente los filtros paso-bajo y paso-alto con frecuencias de corte normalizadas en **`fc_x=fc_y=30*v1`** y **`fc_x=fc_y=100*v1`**. Compruebe visualmente que la extensión de su región de soporte se corresponde con las frecuencias de corte definidas.

Represente a tamaño real la FT de la imagen propuesta. Aplique cada filtro sobre dicha imagen y represente la imagen resultante. Comente el resultado obtenido indicando su coherencia con la FT de la imagen de partida y con los distintos filtros aplicados, para ello, recomendamos que haga uso del comando **`colorbar`**, para observar el rango de variación de las imágenes representadas.

Observaciones 2.1:

____

2.2 Ejercicio 5: Grados de libertad en el filtrado 2D

El ejercicio anterior considera un filtro de forma rectangular, definido en base a frecuencias de corte horizontal y vertical. En este apartado se profundiza en otro aspecto del filtrado 2D: la forma de los filtros, con independencia de sus frecuencias de corte en las direcciones de los ejes principales.

Asumiendo que la frecuencia de corte es igual en ambas direcciones (**`fc_x=fc_y=fc`**), el siguiente código define un filtro paso-bajo ideal cuadrado, otro romboidal y otro circular, todos con igual frecuencia de corte y ganancia unidad:

```
>>fpb_cuad=1*double((X>(f0_x-fc) & X<(f0_x+fc)) & (Y>(f0_y-fc) & Y<(f0_y+fc)));
>>fpb_romb=1*double((abs(X-f0_x)+abs(Y-f0_y))<fc);
>>fpb_circ=1*double((((X-f0_x).*(X-f0_x)+(Y-f0_y).*(Y-f0_y)).^(1/2))<fc);
```

Sea la función: $\psi_1(x,y) = \sin(2\pi 90x) + \sin(2\pi 60x + 2\pi 60y) + \sin(2\pi 90x - 2\pi 90y)$

Genere una imagen a partir de ella muestreándola en la región $0 \le x < 1, 0 \le y < 1$ con un retículo ortogonal de vectores $\vec{v}_1 = (1/400, 0), \vec{v}_2 = (0, 1/400)$ y calcule su FT.

Genere y represente en una misma figura filtros paso-bajo de las tres formas indicadas con frecuencia de corte en `fc=100`. Compruebe visualmente que la extensión de su región de soporte se corresponde con las frecuencias de corte definidas. Represente a tamaño real la FT de la imagen propuesta. Aplique cada filtro sobre dicha imagen y represente la imagen resultante. Comente el resultado obtenido indicando su coherencia con la FT de la imagen de partida y con los distintos filtros aplicados:

Observaciones 2.2:

____

2.3 Ejercicio 6: Aportación perceptual del módulo y la fase de la FT.

El objetivo de este ejercicio es mostrar la relevancia que tienen el módulo y la fase de la FT de una imagen real a la hora de percibir su contenido, para lo cual se propone filtrar separadamente ambas partes de la FT y ver el efecto que ello tiene sobre la imagen.

Obtenga la FT de la imagen `Xray_gray.jpg`[6]. En primer lugar, quédese, por una parte, con el módulo de la FT (lo cual equivale a eliminar la fase), y obtenga su FT inversa. Dado que la imagen resultante tiene un rango de variación enorme, en vez de representarla directamente, represente su logaritmo.

En segundo lugar, genere una FT cuyo módulo sea constante e igual al valor medio del módulo de la FT calculada, y cuya fase sea la misma que la de la FT calculada. Obtenga y represente la FT inversa y comente los resultados.

Observaciones 2.3:

____

[6] Descárguese esta imagen de la página *moodle* de la asignatura.