# Práctica 3: Transformadas		Grupo	
		Puesto	
Apellidos, nombre	**Sánchez Garzón, Laura**	**Fecha**	
Apellidos, nombre	**Remuiñán Cid, Sara**	**27/09/2023**	

El objetivo de esta práctica es presentar al alumno los fundamentos de las transformadas discretas lineales y parte de sus aplicaciones.

Desarrolle cada ejercicio en un fichero de comandos 'ejercicio_X.m' separado. Para conocer el funcionamiento preciso de los comandos que se introducen en este guión, utilice la ayuda de MATLAB. Para evitar posibles interferencias con otras variables o ventanas recuerde incluir siempre las instrucciones `clear all` y `close all` al principio de cada fichero de comandos.

Al finalizar la práctica, comprima el documento de observaciones y los ficheros '.m' generados en un único fichero con el nombre '**FTDI_P3_ApellidosNombre1_ApellidosNombre2.zip**', conéctese al sistema de entrega de prácticas de *Moodle* y entréguelo.

NOTA IMPORTANTE: En el desarrollo de esta práctica y posteriores se pide realizar operaciones repetidamente, por ejemplo, asignando individualmente píxeles concretos de una imagen. En estos casos se recomienda acudir al uso de estructuras de control (bucles, condiciones, etc.). Adicionalmente, debido a la creciente complejidad de los programas que se le va a pedir desarrollar, se recomienda encarecidamente el uso del depurador o *debugger* de MatLab, cuya funcionalidad está descrita en la ayuda del programa (*User's Guide - Desktop Tools and Development Environment - Editing and Debugging MATLAB Code*).

1 Transformadas discretas bidimensionales

Este apartado guía el modo de realizar una transformada y muestra su interpretación como un cambio de base.

Aunque no siempre es imprescindible, se recomienda que todas las operaciones se realicen sobre imágenes *true color* y de tipo `double` en rango [0,1] por lo que, justo tras la lectura de la imagen, se recomienda modificarla para que verifique estas recomendaciones (como en este apartado sólo se operará con imágenes en niveles de gris, basta utilizar las funciones `ind2gray` e `im2double`, según proceda).

A lo largo de este ejercicio se le darán indicaciones de la energía que debe tener cada imagen resultante, para que pueda comprobar que lo está llevando a cabo correctamente[1].

1.1 Ejercicio 1: cálculo de una transformada directa y de su inversa

El objetivo de este ejercicio es realizar una transformada discreta lineal y su inversa. Se presenta únicamente el caso de las transformadas separables y unitarias, que son las de mayor aplicación en el ámbito del tratamiento de señales.

Según las explicaciones de la parte teórica de la asignatura sabemos que la relación entre una imagen o señal bidimensional ψ y su imagen transformada Ψ viene dada en forma matricial por las expresiones:

[1] Para calcular la energía de una imagen de tipo `double`, utilice `e_ima=sum(sum(ima.*ima))`

$$\boldsymbol{\Psi} = \boldsymbol{W}^{*T} \cdot \boldsymbol{\psi} \cdot \boldsymbol{W}^{*}$$
$$\boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{W} \cdot \boldsymbol{\Psi} \cdot \boldsymbol{W}^{\boldsymbol{T}}$$

, donde la matriz $\boldsymbol{W}$ es el núcleo de la transformación.

A lo largo de esta práctica, por simplicidad, asumiremos que las imágenes sobre las que se efectúan transformadas son siempre cuadradas, es decir, de N filas por N columnas. En esta situación el núcleo de la transformación será también una matriz de NxN valores.

Se propone, a modo de ejemplo, obtener la Transformada Discreta del Coseno (DCT) de una imagen. El núcleo de la DCT viene dado, para cada fila n y columna u, por la expresión:

$$\boldsymbol{W}(n,u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & ,u = 0,\ 0 \le n \le N-1 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} cos \frac{(2n+1)u\cdot\pi}{2N} & ,1 \le u \le N-1,\ 0 \le n \le N-1 \end{cases} \quad (6.1)$$

Para definirlo en MatLab puede utilizar los siguientes comandos:

```
>> N=image_width;
>> [u,n]=meshgrid([0:N-1],[0:N-1]);
>> W=(sqrt(2/N))*cos((2*n+1)*pi.*u/(2*N));
>> W(:,1)=(1/sqrt(N));
```

Utilice este núcleo y las expresiones generales anteriores para calcular la DCT de la imagen `Skin.tif`[2]. Compruebe que en el caso de la DCT el núcleo presenta valores reales, por lo que no es necesario conjugarlo para calcular la transformada directa.

Una vez obtenida la transformada aplique sobre ella la operación inversa para obtener de nuevo la imagen original. Para comprobar que el resultado es correcto, calcule la energía de la señal original, de la señal transformada y de la diferencia entre la imagen inicial y la imagen obtenida tras aplicar la transformada directa e inversa[3].

Finalmente, modifique su código para repetir el ejercicio calculando esta vez la Transformada Discreta del Seno (DST). Recuerde que el núcleo de la DST viene dado por la expresión:

$$\boldsymbol{W}(n,u) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} sin \frac{(n+1)(u+1)\cdot\pi}{N+1}, \quad 0 \le n,u \le N-1 \quad (6.2)$$

COMPROBACIÓN:

La energía de las imágenes involucradas (de tipo `double` en el rango [0,1]) es 115216.317801 ($1{,}1522 \cdot 10^5$) para la original, la transformada y la inversa, y del orden de magnitud de 10^{-22} ($5{,}9863 \cdot 10^{-22}$) para la diferencia, esta última puede variar según la precisión de cálculo de cada sistema operativo.

---

[2] Descárguese esta imagen de la página *web* de la asignatura.

[3] Observe que, aunque la energía obtenida para la señal diferencia es despreciable frente al rango de variación de las imágenes (0-1), no es completamente nula. Ello se debe a la precisión finita en el cálculo de funciones trigonométricas derivada del uso de magnitudes irracionales (en este caso, del número π).

1.2 Ejercicio 2: representación de vectores base

El objetivo de este ejercicio es representar las imágenes de la nueva base que caracteriza cada transformada, para poder obtener una visión intuitiva del efecto que la transformada persigue y una interpretación adecuada del significado de cada coeficiente (recuerde que cada coeficiente o valor de la imagen transformada indica la ponderación de la correspondiente imagen base a la hora de recomponer la imagen original).

Al efectuar una transformada de NxN valores se está efectuando un cambio de base de la imagen original de NxN valores en una *imagen* transformada de NxN coeficientes. Las imágenes base que gobiernan el cambio son por lo tanto NxN imágenes de tamaño NxN cada una. Siendo así, para poder representar todas ellas a la vez se propone realizar el ejercicio con un núcleo de tamaño reducido, por ejemplo, $N = 8$, en vez de con el núcleo correspondiente a una imagen como la del ejercicio anterior ($N = 512$) que daría lugar a un número difícilmente representable de imágenes base.

Según lo visto en las explicaciones teóricas, en el caso de las transformadas separables el núcleo que la caracteriza al realizar una transformada 2D es el mismo que caracteriza la transformada 1D, sólo que en el caso de la bidimensional se aplica dos veces (sobre ambas dimensiones de la señal a transformar).

En el caso de la transformada 1D, sabemos que los vectores columna del núcleo que la define son precisamente los vectores de la nueva base que representa la transformada. En el caso de la transformada 2D, sabemos que el producto tensorial de todas las posibles parejas de vectores base da lugar a las imágenes base de la transformada 2D.

Teniendo en cuenta lo anterior, defina el núcleo de una DCT de tamaño $8x8$ y represente en una misma ventana (comando `subplot`) los ocho vectores que definen la nueva base, ordenados desde la primera hasta la última columna. Al representar cada vector superponga sus ocho valores (comando `stem`) con la curva que los interpola linealmente (comando `plot`). Indique el número de cruces por cero (o *wave number*) de cada uno de los ocho vectores.

Repita el ejercicio con el núcleo de una DST de 8x8.

Observaciones 1.2:

Se observa cómo va variando la función de la matriz núcleo, según nos movemos en dicho matriz columnas hacia abajo

——

1.3 Ejercicio 3: representación de imágenes base

Continuando con la discusión del ejercicio anterior y partiendo de los vectores base de la DCT, obtenga, dos a dos, los $8x8$ productos tensoriales: multiplique cada vector columna por el correspondiente vector columna transpuesto. Esta operación resultará en $8x8$ imágenes. Represente estas imágenes en una misma ventana (comando `subplot`), formando una matriz de $8x8$ imágenes de tamaño $8x8$ cada una.

Por motivos de visualización y para que las imágenes base sean fáciles de comparar e interpretar, escale cada una de modo que su rango se sitúe entre -1 y +1. Para lograrlo, observe en la expresión del núcleo de la DCT (Eq. 6.1) que cada vector columna sigue una función sinusoidal (el primero constante y de valor $\sqrt{\frac{1}{N}}$ y el resto ponderadas por $\sqrt{\frac{2}{N}}$). Por lo tanto, para que los productos tensoriales varíen en (-1,1) deberá multiplicar el resultado por $\frac{N}{\sqrt{2}}$, si el producto involucra el primer vector columna, y por $\frac{N}{2}$ si no lo involucra.

Modifique el código para repetir el mismo ejercicio con la DST. Compare las imágenes base de mínima frecuencia de ambas transformadas e indique si alguna de las dos representa la componente continua o valor medio de la imagen original (es decir, si alguna de las dos es una imagen base constante).

Observaciones 1.3:

2 Transformadas y compactación de energía

Este apartado presenta la característica de la DCT y de la DST como transformadas para compactar la energía de la señal y el posible uso de esta propiedad en aplicaciones de codificación.

2.1 Ejercicio 4: observación de la distribución de energías de la imagen y su transformada.

Partiendo del código del Ejercicio 1, obtenga la DCT de la imagen `Skin.tif`.

Para observar la distribución de energía por zonas de una imagen, es posible dividirla en KxK subimágenes y obtener en una matriz de KxK valores el porcentaje de la energía de la imagen contenido en cada subimagen. Efectúe este proceso sobre la imagen `Skin.tif` para $K = 4$ (compruebe que el resultado es correcto verificando que la suma de porcentajes es 100). A continuación, repita el proceso sobre la DCT y sobre la DST de la imagen indicada. Transcriba aproximadamente (basta con un dígito significativo) los porcentajes obtenidos en cada caso:

% de energía regiones de la imagen original

% de energía regiones de la imagen DCT

% de energía regiones de la imagen DST

Comente los resultados obtenidos indicando si las transformadas compactan o no y cuánto la energía de la señal, indicando en qué regiones de las transformadas se concentra la mayor parte de la energía, y concluyendo si DCT y DST compactan de manera similar:

Observaciones 2.1:

2.2 Ejercicio 5: efecto de la eliminación de las componentes de menor energía.

El objetivo de este ejercicio es apreciar la pérdida de calidad que se produce sobre una imagen al ir eliminando (haciendo nulas) componentes de su DCT.

Tomando como punto de partida el ejercicio anterior, divida la DCT de la imagen `Skin.tif` en KxK subimágenes, pero ahora con $K = 16$ (es decir en 256 subimágenes). Calcule el % de energía, E_{min}, de la subimagen que menos energía contiene. Sitúe un umbral T justo en el doble de este valor ($T = 2E_{min}$), haciendo iguales a cero las subimágenes de la DCT cuyo % de energía sea inferior a este umbral. Represente la DCT así modificada y observe cuántas subimágenes han sido anuladas. Por último, obtenga la transformada inversa de la DCT modificada y observe si aprecia o no diferencia con respecto a la imagen original.

Repita el proceso anterior aumentando sucesivamente el valor del umbral T ($T = 4E_{min}$) hasta que aprecie diferencia con respecto a la imagen original. Indique cuál es el $\%_{apreciable}$ de píxeles o valores de la DCT que ha anulado al llegar a esta situación.

A continuación, siga aumentando del mismo modo el valor del umbral hasta que juzgue que la pérdida de calidad de la imagen obtenida es claramente visible en condiciones normales (por ejemplo observando ambas imágenes a tamaño real a unos 60cm del monitor). Indique cuál es el nuevo $\%_{aceptable}$.

Por último, comente las posibles aplicaciones de los resultados obtenidos.

Observaciones 2.2: