1055750605. 29-11-23

Parcial # 3 Señales y sistemas.

Punto 1. Solución.

El sistema masa, resorte y amortiguadores se puede modelar a partir de la conservación de fuerzas.

$$F_S(t) + F_F(t) + F_I(t) = F_E(t)$$

donde $F_S(t) = ky(t)$, $F_F(t) = C\dfrac{dy(t)}{dt}$ y $F_I = m\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$

Por consiguiente

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + C\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F_E(t) = x(t)$$

Aplicando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n x(t)}{dt}\right\} = S^n X(S)$$ tenemos que

$$mS^2 Y(S) + CSY(S) + kY(S) = X(S)$$

y

$$H(S) = \frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{mS^2 + CS + k}$$

Función de tranferencia sistema masa, resorte y amortiguador.

Ahora, para el cto eléctrico presentado, hallamos la respectiva función de tranferencia

LVK malla int

$$-V_i(t) + L\frac{d}{dt}i_1(t) + \frac{1}{C}\int_0^t (i_1(t) - i_2(t)\, dt = 0$$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos

$$V_i(S) = LS\, I_1(S) + (I_1(S) - I_2(S))\frac{1}{CS} \quad (1)$$

Ahora hallamos LVK malla $i_2(t)$

$$i_2(t)R + \frac{1}{C}\int_0^t (i_2(t) - I_1(t)\, dt = 0$$

donde $V_0(t) = i_2(t)R$

Utilizando las impedancias transformadas, obtenemos.

$$I^2(S)R + (I_2(S) - I_1(S)\frac{1}{CS} = 0$$

Despejando $I_1(s)$, se obtiene

$$\frac{I_1(s)}{Cs} + \frac{I_2(s)}{Cs} + I_2(s)R$$

$$I_1(s) = \frac{I_2(s)\,Cs + I_2(s)\,RCs}{Cs}$$

$$I_1(s) = I_2(s)\,(1 + CRs) \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$Vi(s) = Ls\,I_2(s)\,(1 + CRs) + \left(I_2(s)(1+CRs) - I_2(s)\right)\frac{1}{Cs}$$

$$Vi(s) = Ls\,I_2(s) + CRLs^2 I_2(s) + \left(I_2(s) + CRsI_2(s) - I_2(s)\right)\frac{1}{Cs}$$

$$Vi(s) = Ls\,I_2(s) + (RLs^2 I_2(s) + R\,I_2(s)$$

$$Vi(s) = I_2(s)\,[CRLs^2 + Ls + R]$$

$$\frac{I_2(s)}{Vi(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R}$$

Reemplazando $I_2(s) = \frac{Vo(s)}{R}$ obtenemos:

$$\frac{Vo(s)}{R\,Vi(s)} = \frac{1}{CRLs^2 + Ls + R}$$

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{R}{CRLs^2 + Ls + R} \cdot \left(\frac{1/R}{1/R}\right)$$

$$\frac{Vo(s)}{Vi(s)} = \frac{1}{CLs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$ Función transferencia cto electrico

Equivalencia del cto eléctrico en péndulo elástico.

Cto eléctrico	Péndulo elástico
CL	m
L/R	c
1	k

Entonces:

$$H(s) = \frac{1}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Su equivalente en pendulo es:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} = \frac{1/m}{\left(s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}\right)}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden:

- Comparando:

$$s^2 + s\xi w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{cs}{m} + \frac{k}{m}$$

- igualando coeficientes.

$$1 = 1 \longrightarrow \text{coef } s^2$$

$$2\xi w_n = \frac{c}{m} \rightarrow \text{coef } s$$

$$w_n^2 = \frac{k}{m} \rightarrow \text{coef independiente}$$

- Hallando Frecuencia natural no amortiguado

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

- Hallando Factor de amortiguamiento

$$2\xi\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{m} \Rightarrow \xi = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

- Hallando la ganancia K

$$K w_n^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow K = \frac{1}{m w_n^2}$$

$$K = \frac{1}{m\frac{k}{m}}$$

$$K = \frac{1}{k} //$$

Finalmente, la forma canónica de segundo orden es:

$$H(s) = K\frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$H(s) = \frac{1}{k} \cdot \frac{k/m}{s^2 + 2\left(\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k}{m}}}\right)\sqrt{k/m}\, s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}}$$

$$H(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m}\right)} //$$

- Hallando la frecuencia natural amortiguada

$$wd = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$wd = \left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\left(\sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{k/m}}\right)^2}\right)$$

$$wd = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}\ \sqrt{4km-c^2}}{2\ \sqrt{km}}$$

El tiempo de levantamiento y tiempo pico se hace por simulación:

- Hallando el tiempo de establecimiento

$$ts = \frac{3}{\xi\omega_n} \Rightarrow ts = \frac{3}{\left(\frac{c}{2m}\sqrt{\frac{k}{m}}\right)\sqrt{k/m}}$$

$$ts = \frac{6m}{c}$$

Función de transferencia para masa resorte amortiguado lazo cerrado.

Podemos representar la función de tranferencia de un sistema de lazo de la ste manera.

$$HLC = \frac{H(s)}{1 + A(s)\ H(s)}$$

En este caso:

$$H(s) = \frac{1}{ms^2 + cs + k} \rightarrow \text{Función de transferencia lazo abierto.}$$

$$A(s) = 1$$

Calculamos $HLC(s)$:

$$HLC(s) = \frac{\frac{1}{ms^2+cs+k}}{1 + \frac{1}{ms^2+cs+k}} = \frac{\frac{1}{ms^2+cs+k}}{\frac{ms^2+cs+k+1}{ms^2+cs+k}}$$

$$HLC(s) = \frac{\cancel{ms^2+cs+k}}{\cancel{(ms^2+cs+k)}\ (ms^2+cs+k)}$$

$$HLC(s) = \frac{1}{ms^2+cs+k+1} \quad ó \quad \frac{1/m}{s^2 + \frac{c}{m}s + \left(\frac{k+1}{m}\right)}$$

Hallando la forma canónica de segundo orden. o comparado.

$$s^2 + s\,\xi\, w_n s + w_n^2 = s^2 + \frac{c}{m}s + \left(\frac{k+1}{m}\right)$$

comparando coeficientes

$$1 = 1 \longrightarrow \text{coe F } s^2$$

$$2\xi w_n = \frac{c}{m} \longrightarrow \text{coe F } s$$

$$w_n^2 = \frac{k+1}{m} \longrightarrow \text{coe F independiente}$$

Hallando Frecuencia natural no amortiguado.

$$w_n = \sqrt{\frac{k+1}{m}}$$

Hallando factor de amortiguado.

$$\xi = \frac{c}{2mw_n} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}}$$

Hallando la ganancia

$$kw_n^2 = \frac{1}{m} \Rightarrow k = \frac{1}{m\,w_n^2}$$

$$k = \frac{1}{m\left(\sqrt{\frac{k+2}{m}}\right)^2}$$

$$k = \frac{1}{k+1}$$

Entonces de la forma canónica de segundo orden es:

$$H_{LC}(s) = \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{(k+1)/m}{s^2 + \cancel{2}\left(\frac{c}{\cancel{2}m\left(\cancel{\sqrt{\frac{k+1}{m}}}\right)}\cancel{\sqrt{(k+1)/m}}\cdot s \quad \frac{k+1}{m}\right)}$$

$$H_{LC}(s) = \frac{1}{m\left(s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k+1}{m}\right)}$$

Hallando frecuencia natural amortiguada

$$wd = w_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$wd = \sqrt{\frac{k+1}{m}} \sqrt{1-\left(\frac{c}{2m\sqrt{(k+1)/m}}\right)^2}$$

$$wd = \frac{\sqrt{\frac{k+1}{m}} \sqrt{4km + 4m - c^2}}{2\sqrt{m(k+1)}}$$

Hallando el tiempo de establecimiento.

$$ts = \frac{3}{\xi w_n} = \frac{3}{\frac{c}{2m\sqrt{\frac{k+1}{m}}} \sqrt{\frac{k+1}{m}}} = \frac{6m}{c}$$