

Laura Tameirao Sampaio Rodrigues

Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação

Belo Horizonte, MG - Brasil

16 de setembro de 2018

Laura Tameirao Sampaio Rodrigues

Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação/ Laura Tameirao Sampaio Rodrigues. – Belo Horizonte, MG - Brasil, 16 de setembro de 2018-

53 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Helio de Assis Pegado

Coorientador: -

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Escola de Engenharia

Engenharia Aeroespacial, 16 de setembro de 2018.

1. Otimização. 2. Materiais compostos. 2. Parâmetros de laminação. I. Prof. Helio de Assis Pegado. II. Universidade Federal de Minas Gerais. III. Escola de Engenharia. IV. Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação

Laura Tameirao Sampaio Rodrigues

Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação

Trabalho de conclusão de curso de Engenharia Aeroespacial na Universidade Federal de Minas Gerais, centrado na otimização de uma estrutura em material composto utilizando os parâmetros de laminação

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, MG - Brasil, 16 de setembro de 2018:

Prof. Helio de Assis Pegado
Orientador

Nome
Convidado 1

Nome
Convidado 2

Belo Horizonte, MG - Brasil
16 de setembro de 2018

Dedicatória: a fazer.

“The mind that opens up to a new idea never returns to its original size.”

Albert Einstein

Resumo

A primeira versão deste Trabalho de Conclusão de Curso consiste em uma revisão bibliográfica a respeito do tema: Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação. As próximas versões irão conter mais detalhes da metodologia adotada e os resultados obtidos durante o desenvolvimento do trabalho.

Palavras-chave: engenharia aeroespacial, otimização, materiais compostos, parâmetros de laminação, painel reforçado, nastran sol 200.

Lista de abreviaturas e siglas

PL	<i>Parâmetros de laminação</i>
CLT	<i>Classical Theory of Lamination</i>
FEM	<i>Finite Element Model</i>

Sumário

1	OBJETIVOS	13
2	INTRODUÇÃO	15
3	MATERIAIS COMPOSTOS	17
3.1	Desenvolvimento histórico	17
3.2	Visão geral	19
3.3	Teoria Clássica da Laminação	19
3.3.1	Relações entre deformações e deslocamentos	20
3.3.2	Relações entre tensões e deformações de uma lâmina dentro de um laminado	22
3.3.3	Relações envolvendo forças e momentos resultantes	23
3.4	Parâmetros de laminação	26
3.4.1	Soma dos parâmetros de laminação	29
3.5	Práticas de projeto adotadas	29
3.5.1	Laminados simétricos	30
3.5.2	Laminados balanceados	30
3.5.3	Regra dos 10%	31
4	OTIMIZAÇÃO	33
4.1	Introdução	33
4.2	Análise vs. Otimização de um projeto	34
4.3	Princípios básicos de uma Otimização Numérica	35
4.3.1	Otimização Numérica - Visão geral	35
4.3.2	Otimização Numérica - Visão quantitativa	35
4.3.3	Busca numérica por um ótimo	36
4.3.3.1	Condições de Kuhn-Tucker	37
4.4	Otimização Estrutural	38
4.4.1	Conexão entre análise estrutural e otimização numérica	39
4.4.2	Conceitos fundamentais	40
4.4.2.1	Variáveis de projeto	40
4.4.2.2	Propriedades de projeto	40
4.4.2.3	Respostas de projeto	42
4.4.2.4	Restrições de projeto	42
4.4.2.5	Função objetivo do projeto	42
5	METODOLOGIA	43

5.1	Desenvolvimento geral	43
5.2	Análise teórica de um painel reforçado	43
5.2.1	Limitação de projeto - Espaçamento entre reforçadores	46
5.3	Otimização de um painel reforçado em material metálico	47
5.3.1	Modelo em elementos finitos	48
5.3.2	Otimização	49
5.4	Otimização de um painel reforçado em material composto	49
5.4.1	Modelo em elementos finitos	50
5.4.2	Otimização	51
REFERÊNCIAS		53

1 Objetivos

Como trabalho final do curso de graduação em Engenharia Aeroespacial na Universidade Federal de Minas Gerais, este trabalho de pesquisa foi realizado no âmbito de uma otimização estrutural de um painel reforçado utilizando como variáveis de otimização os parâmetros de laminação de cada componente estrutural. Visando otimizar a estrutura de um painel reforçado quando submetido à uma determinada carga de compressão, será feito um modelo em elementos finitos utilizando o *software FEMAP*. O revestimento do painel e os reforçadores serão otimizada utilizando a SOL 200 do *Nastran* e análises de flambagem, SOL 105, serão realizadas visando obter os modos de flambagem da estrutura.

O objetivo inicial da otimização é obter as propriedades de um laminado que suporte a maior carga de flambagem, mantendo as espessuras do revestimento e a geometria e espessuras dos reforçadores constantes, portanto, variando somente as propriedades do laminado. Os parâmetros de laminação serão utilizados como variáveis de projeto e serão os resultados obtidos da otimização.

O outro objetivo do trabalho é criar um banco de dados para um determinado valor de espessura do laminado. Com este banco de dados de laminados será possível obter a sequência e os ângulos de cada lâmina do laminado com base nos valores de propriedades do laminado que foram otimizados.

2 Introdução

A utilização de materiais compostos em estruturas primárias tem aumentado gradualmente nas últimas décadas. Atualmente, no setor aeronáutico, estruturas primárias como asas, fuselagens e empenagens possuem a tendência de serem projetadas utilizando painéis reforçados constituídos de material composto. Isto se deve ao fato de as estruturas em materiais compostos possuírem elevadas resistência e rigidez específicas ([HERENCIA; WEAVER; FRISWELL, 2007](#)). Além disso, variando-se a sequência do laminado e os ângulos de laminação, as propriedades do material composto podem ser otimizadas em vista do componente estrutural no qual o laminado será aplicado, apresentando um potencial de uso bastante elevado.

No decorrer dos anos, diversas técnicas de otimização foram desenvolvidas para auxiliar nos processos de obtenção do laminado ótimo para cada uso. Algumas das técnicas de otimização dos materiais compostos envolvem a variação do número de camadas do laminado e dos ângulos de laminação, e assumem que o material possui propriedades ortotrópicas, conforme utilizado por ([SCHMIT; FARSHI, 1973](#)). No entanto, segundo ([CHAMIS, 1969](#)) pelo fato de os materiais compostos poderem apresentar características anisotrópicas, resultados não conservativos podem ser obtidos, durante otimizações nas quais o comportamento em flambagem é observado, caso a anisotropia flexural dos materiais não sejam consideradas. A otimização do número de camadas e dos ângulos de laminação de cada camada demanda um elevado custo computacional e consiste em um processo de otimização não linear com variáveis discretas e que possui um espaço de projeto não convexo.

Visando solucionar o problema de otimização das variáveis discretas da sequência de laminação dos materiais compostos, ([MIKI, 1991](#)) propôs a utilização dos parâmetros de laminação. O método proposto por ([MIKI, 1991](#)), considera que a rigidez no plano e a rigidez flexural de materiais compostos que possuem laminados simétricos e ortotrópicos são funções dos parâmetros de laminação, e esses parâmetros dependem da sequência de laminação. Com isso, os parâmetros de laminação podem ser utilizados como as variáveis de projeto durante a otimização e pontos ótimos de projeto podem ser obtidos em função desses parâmetros e da função objetivo.

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso, é portanto, descrever um processo de otimização de um painel reforçado em material composto utilizando os parâmetros de laminação como variáveis de projeto. O problema será dividido em duas etapas, na qual a primeira consistirá na otimização dos parâmetros de laminação aplicando restrições de projetos presentes na indústria aeronáutica. A função objetivo da otimização é obter uma

estrutura que suporte a maior carga de flambagem variando somente as propriedades do material e mantendo a geometria dos reforçadores e do painel constantes. Nesta etapa, será assumido que os laminados dos reforçadores e do revestimento sejam simétricos e ortotrópicos. Após a obtenção dos parâmetros de laminação com a otimização estrutural, a sequência de laminação do laminado deverá ser obtida. Para isso, será criado um banco de dados de laminados com restrições e critérios de boas práticas e então os melhores laminados que atenderem aos critérios pré-estabelecidos serão selecionados.

3 Materiais Compostos

3.1 Desenvolvimento histórico

A implementação do uso de materiais compostos na indústria aeronáutica civil e militar seguiu os estágios típicos da implementação de qualquer nova tecnologia no mercado. Segundo (KASSAPOGLOU, 2013), primeiramente o uso da tecnologia de materiais compostos foi limitado às estruturas secundárias visto que minimizavam os riscos envolvidos e também possibilitava a coleta de dados, o que viabilizava uma melhor compreensão do comportamento das estruturas que possuíam essa tecnologia.

De acordo com (DANIEL, 2006), em 1942 o primeiro barco constituído de fibra de vidro foi fabricado, e nos anos 1950 as primeiras aplicações com materiais compostos em mísseis foram realizadas. Referindo-se a indústria aeronáutica no último século, o primeiro uso de materiais compostos mais avançados, segundo (KASSAPOGLOU, 2013), ocorreu no final da década de 1950 na aeronave *Akaflieg Phonix FS-24*. Essa aeronave consistiu em um planador projetado por professores e alunos da Universidade de Stuttgart e foi construído, inicialmente de madeira balsa, e posteriormente teve sua estrutura alterada para um sanduíche de compósitos de fibra de vidro com madeira tipo balsa. Após isso, no fim dos anos 1960, com a nova geração de materiais compostos avançados, como o carbono, a indústria de helicópteros foi a primeira a utilizá-los em estruturas primárias, destacando o projeto do *Aerospatiale AS-341 Gazelle*. Este helicóptero foi considerado um dos mais modernos na época, não só porque ele possuía um inovador rotor de cauda reduzindo drasticamente a emissão de ruídos, mas também, pelo fato de as pás do rotor principal serem constituídas de material composto.

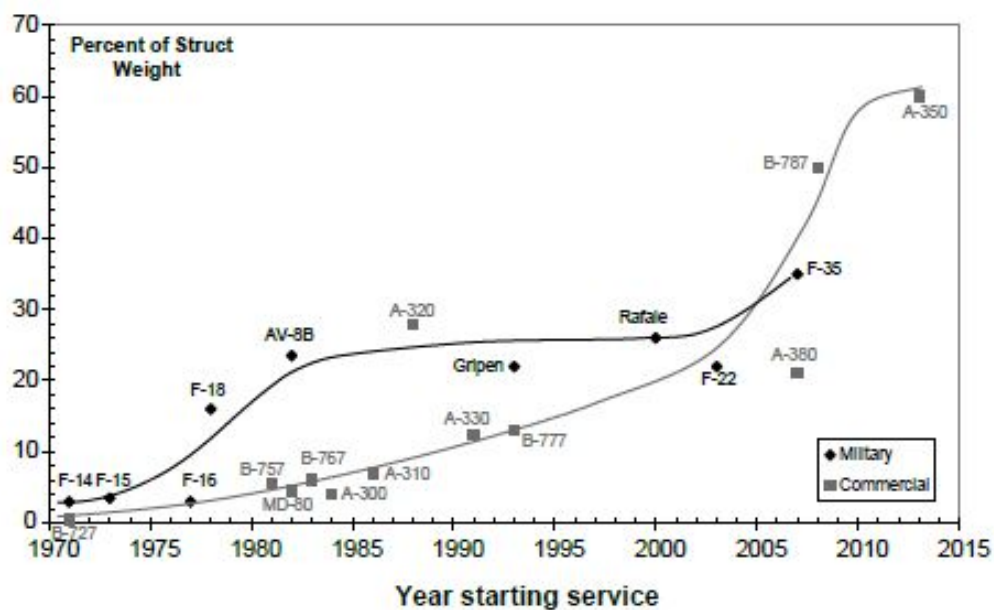
Por volta dos anos 1970 as primeiras aeronaves majoritariamente constituídas de materiais compostos começaram a surgir. Essas aeronaves eram pequenas e normalmente para uso recreativo ou para acrobacias, visto que com o uso de materiais compostos era possível obter uma redução de peso estrutural e portanto, aeronaves mais rápidas e ágeis quando comparadas às aeronaves da época. O uso de material composto teve início em aeronaves pequenas também pelo fato de os requisitos de certificação estrutural para aeronaves menores serem mais facilmente cumpridos quando comparados aos requisitos das aeronaves de grande porte. Além disso, de acordo com (KASSAPOGLOU, 2013), a performance dos materiais compostos não era completamente conhecida, por exemplo, a sensibilidade desse tipo de material ao dano por impacto e suas implicações para o projeto só foram ser melhor conhecidas no final dos anos 1970. Portanto, somente no final dos anos 1970 e início dos anos 1980 que a utilização de materiais compostos começou a ser expandida para aeronaves de porte maior, como a concepção da empenagem horizontal

do *Boeing 737*, que era uma estrutura primária construída de um sanduíche de materiais compostos. Seguindo a aplicação em grande escala de materiais compostos, destaca-se o *Airbus A320*, no qual tanto a empenagem horizontal e a vertical, quanto as superfícies de controle foram projetadas e fabricadas utilizando material composto.

A próxima aplicação significante desse tipo de material em estruturas primárias foi no início dos anos 1990 com o *Boeing 777*, em que além das empenagens e superfícies de controle, as vigas principais do piso eram constituídas de material composto. Segundo (DANIEL, 2006), o maior sinal de aceitação do uso de materiais compostos na indústria aeronáutica civil, ocorreu no *Boeing 787 Dreamliner*, em que materiais como carbono/*epoxy* e grafite/titânio constituíam cerca de 50% do peso da aeronave, incluindo majoritariamente asas e fuselagem. Destaca-se também o *Airbus A380*, que utiliza materiais compostos, incluindo o *GLARE*, um laminado híbrido de fibra de vidro/*epoxy*/alumínio, que combina as vantagens e desvantagens dos materiais metálicos e compostos.

Observa-se, portanto, que o uso dos materiais compostos vem aumentando de maneira significativa na indústria aeronáutica. Uma maneira de perceber o aumento do uso de materiais compostos nessa indústria é com base na Figura 1, em que fica claro o aumento percentual da utilização desse tipo de material em relação ao peso das estruturas de vários modelos de aeronaves.

Figura 1 – Uso de materiais compostos na indústria aeronáutica.



Fonte: (KASSAPOGLOU, 2013, p. 6)

3.2 Visão geral

De acordo com (DANIEL, 2006), os materiais compostos possuem diversas vantagens de utilização em relação aos materiais metálicos como a elevada resistência, a elevada rigidez, a vida longa em fadiga, a baixa densidade e a alta adaptabilidade em relação a função de utilização pretendida pela estrutura. A superior performance estrutural dos materiais compostos se deve basicamente às elevadas resistência e rigidez específicas e à anisotropia do material, visto que devido à esta última característica, o material composto possui diversos graus de liberdade para uma configuração ótima do laminado. No geral, devido ao elevado número de graus de liberdade é possível realizar a otimização do laminado em material composto para diversas restrições de projeto e objetivos, como menor peso estrutural, máxima estabilidade dinâmica e/ou menor custo de fabricação. No entanto, todo o processo requer um confiável banco de dados das propriedades dos materiais, métodos de análises estruturais, técnicas de modelagem e simulações padronizadas e certificadas. Logo, devido às numerosas opções disponíveis, os processos e análises acabam se tornando mais complexos e custos em relação aos dos materiais convencionais.

Os materiais compostos possuem algumas limitações de uso em relação aos materiais metálicos. Do ponto de vista da micromecânica, as fibras dos materiais compostos possuem uma grande variabilidade nas propriedades de resistência e concentradores de tensão locais reduzem consideravelmente a resistência a tração das estruturas projetadas em materiais compostos. Em relação a macromecânica, a anisotropia do material pode ser utilizada considerada como uma vantagem visto que o comportamento do material pode ser variado, no entanto, esta mesma característica faz com que as análises desses materiais sejam muito mais complexas (DANIEL, 2006).

3.3 Teoria Clássica da Laminação

De acordo com (DANIEL, 2006) para o desenvolvimento da Teoria Clássica da Laminação, assumem-se as seguintes premissas e restrições:

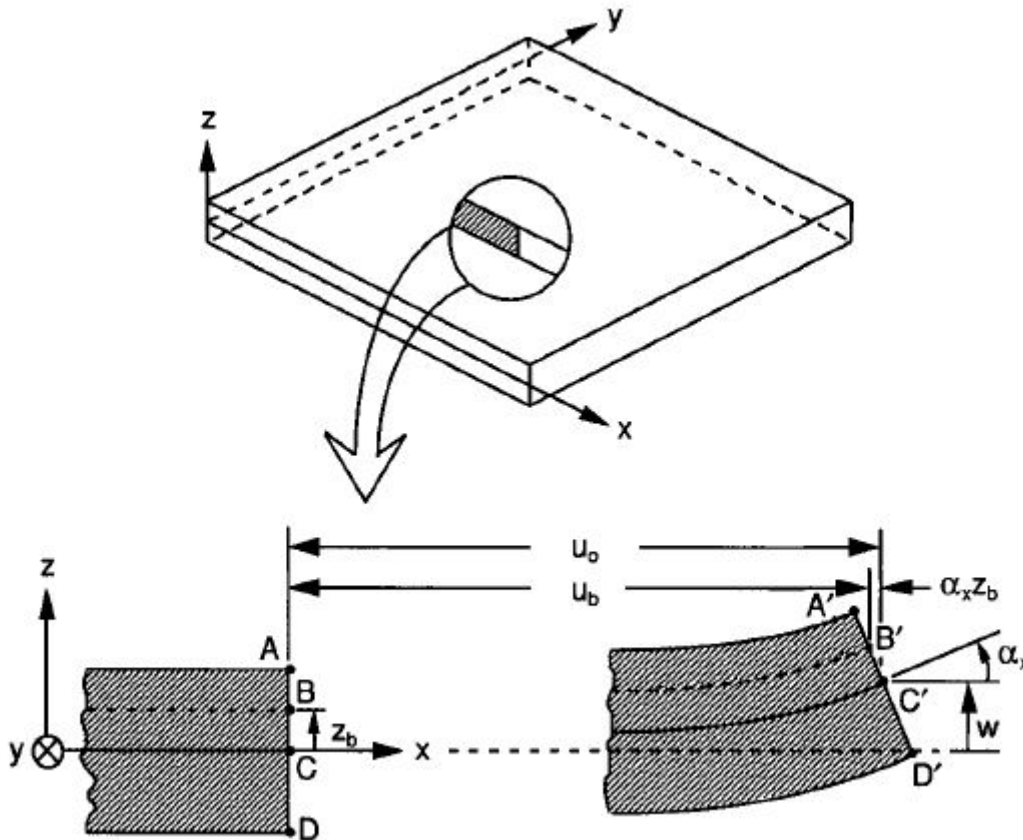
1. Cada lâmina do laminado é quasi-homogênea e ortotrópica;
2. O laminado é fino com as suas dimensões laterais muito maiores do que a sua espessura e é carregado somente no plano, isto é, o laminado e suas lâminas (exceto as bordas) estão em um estado plano de tensão ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$);
3. Todos os deslocamentos são pequenos comparados com a espessura do laminado ($|u|, |v|, |w| \ll h$);
4. Deslocamentos são contínuos ao longo da espessura;

5. Deslocamentos no plano variam linearmente ao longo da espessura do laminado, isto é, os deslocamentos u e v nas direções x e y são funções lineares de z ;
6. Linhas retas normais à superfície média permanece reta e normal à essa superfície após a deformação. Isto implica que as deformações transversais de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} são nulas;
7. As relações deformações-deslocamentos e tensões-deformações são lineares;
8. Distâncias normais à superfície média permanecem constantes, isto é, o deslocamento transversal normal, ε_z é zero. Isto implica que o deslocamento transversal w é independente da coordenada de espessura z .

3.3.1 Relações entre deformações e deslocamentos

Seguindo a [Figura 2](#) como referência, tem-se que o plano $x - y$ é o plano médio do laminado, ou seja, é equidistante do laminado mais superior e do mais inferior. Portanto, este plano é chamado de *Plano médio* ou *Plano de referência*.

Figura 2 – Seção do laminado antes (ABCD) e depois da deformação (A'B'C'D').



Fonte: ([DANIEL, 2006](#))

Tem-se que os deslocamentos no plano u_0 e v_0 nas direções x e y e o deslocamento fora do plano w na direção z são funções somente de x e y , como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} u_o &= u_o(x, y) \\ v_o &= v_o(x, y) \\ w &= f(x, y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

E que as rotações ao longo dos eixos x e y são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_y &= \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, os componentes de deslocamentos de um ponto B de coordenada z_b , onde z é a coordenada na espessura do laminado, são:

$$\begin{aligned} u &= u_o - \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_o - \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para pequenos deslocamentos, as relações clássicas de deformação e deslocamento no campo elástico são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \gamma_z &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sabe-se ainda, por definição, que:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^o &= \frac{\partial u_o}{\partial x} \\
 \varepsilon_y^o &= \frac{\partial v_o}{\partial y} \\
 \gamma_{xy}^o &= \gamma_z^o = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 \kappa_{xy} &= \kappa_z = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Portanto, as deformações em qualquer ponto do laminado podem ser relacionadas às deformações do plano e às curvaturas do laminado como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_z^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

3.3.2 Relações entre tensões e deformações de uma lâmina dentro de um laminado

Considera uma lâmina específica, k em um laminado multidirecional, na qual a distância z_k se refere a distância da lâmina ao plano de referência do Laminado. Tem-se que as relações de tensão-deformação para essa lâmina, no sistema de coordenada do laminado valem:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k \tag{3.7}$$

Em que a rigidez representada por Q , vale:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= E_{11} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}} \\
 Q_{xy} &= E_{12} - \frac{E_{13}E_{23}}{E_{33}} \\
 Q_{yy} &= E_{22} - \frac{E_{23}^2}{E_{33}} \\
 Q_{xs} &= E_{66}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Onde $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$ e E_{66} são constantes elásticas independentes do material.

Substituindo a [Equação 3.6](#) na [Equação 3.7](#) tem-se, de forma generalizada, a seguinte expressão para as deformações:

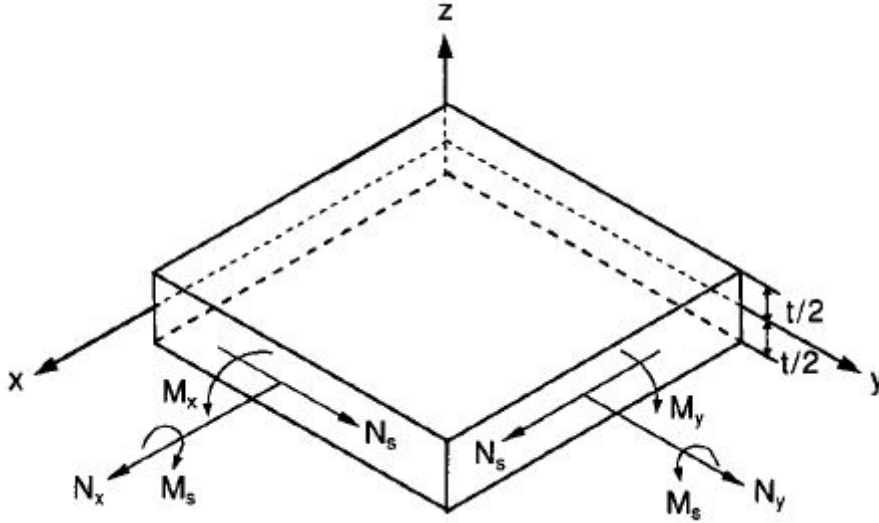
$$[\sigma]_{x,y}^k = [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^o]_{x,y} + z [Q]_{x,y}^k [\kappa]_{x,y} \tag{3.9}$$

Nota-se, portanto, das [Equação 3.6](#) e [Equação 3.9](#) que mesmo que as deformações variem linearmente, não necessariamente as tensões variam da mesma maneira. Devido à discontinuidade da matriz de rigidez $[Q]_{x,y}$ ao longo das lâminas do laminado, as tensões também podem variar de forma descontínua ao longo das lâminas.

3.3.3 Relações envolvendo forças e momentos resultantes

Tendo como referência a [Figura 3](#) e sabendo que as tensões ao longo do laminado variam devido às diferentes matrizes de rigidez de cada lâmina específica, pode-se fazer uma integração para obter forças e momentos resultantes.

Figura 3 – Elemento de uma lâmina com forças e momentos resultantes.



Fonte: (DANIEL, 2006)

As expressões seguintes se relacionam a essas forças e momentos resultantes.

$$N_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$

$$N_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz$$

$$N_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s dz$$

(3.10)

$$M_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz$$

$$M_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s z dz$$

Em que z é a coordenada da lâmina na seção do laminado, t é a espessura da lâmina, N_i^k são as forças (x, y, s) por unidade de comprimento e M_i^k são os momentos (x, y, s) por unidade de comprimento. E no caso de um laminado com diversas lâminas, a força e o momento total são obtidos fazendo o somatório dos efeitos de cada lâmina.

Tem-se, portanto, as seguintes expressões:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k dz \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k z dz$$

Substituindo a [Equação 3.7](#) na [Equação 3.11](#), tem-se:

$$N_{x,y} = [\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k - z_{k-1})] [\varepsilon^o]_{x,y} + [\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)] [\kappa]_{x,y} \quad (3.12)$$

$$M_{x,y} = [\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)] [\varepsilon^o]_{x,y} + [\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)] [\kappa]_{x,y}$$

Por definição tem-se as três matrizes de rigidez do laminado como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [Q]_{ij}^k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3.13)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

Portanto, em geral, substituindo [Equação 3.16](#) na [Equação 3.12](#), pode-se representar as forças e momentos resultantes em função das matrizes de rigidez [A], [B] e [D] como segue:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Para cada uma das matrizes de rigidez [A], [B] e [D] tem os seguintes significados físicos:

- Matriz [A]: corresponde a rigidez extensional, ou módulo do laminado no plano, e relaciona os carregamentos com as deformações no plano.
- Matriz [B]: corresponde ao acoplamento de rigidez, ou seja acoplamento entre o módulo do laminado no plano e o flexural. Relaciona os carregamentos no plano com curvaturas, e momentos de flexão com deformações no plano. Isto é, se $B_{ij} \neq 0$,

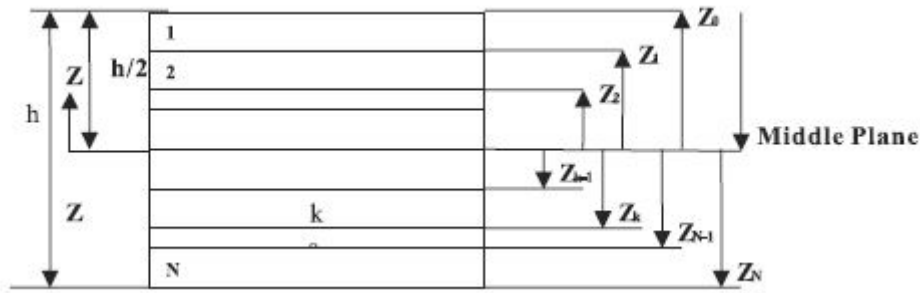
forças no plano produzem deformações flexurais e torsionais, em vez de deformações no plano; e momentos produzem extensões no plano e deformações cisalhantes no plano médio, em vez de produzir deformações flexurais e torsionais (curvaturas).

- Matriz $[D]$: corresponde a rigidez flexural do laminado, e relaciona momentos atuantes com as curvaturas.

3.4 Parâmetros de laminação

Os parâmetros de laminação, segundo (TSAI; PAGANO, 1968), propiciam uma representação compacta das propriedades de rigidez dos laminados de materiais compostos. A utilização dos parâmetros de laminação permite uma eficiente otimização de um laminado para as propriedades de rigidez desejadas.

Figura 4 – Referência de sequência de laminação.



Fonte: (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004)

Segundo a metodologia para utilização dos parâmetros de laminação apresentada por (MIKI, 1991) e tendo como referência a Figura 4 considera-se uma sequência de laminação, em que cada lâmina é ortotrópica, como segue:

$$[(\pm\theta_n)_{Nn} / \dots (\pm\theta_2)_{N2} / (\pm\theta_1)_{N1}]_s \quad (3.15)$$

Segundo (MIKI, 1991), os parâmetros de laminação são boas ferramentas para serem utilizadas como variáveis de projeto ao desenvolver um laminado, visto que é possível obter uma região viável dos parâmetros de laminação em um plano bidimensional. Quando tem-se um laminado simétrico e ortotrópico, a rigidez no plano (matriz A) e a rigidez flexural (matriz D) se tornam funções dos parâmetros de laminação, que são funções da sequência da laminação. E como este laminado é simétrico, a rigidez devido ao acoplamento no plano e a flexural (matriz B) é nula. Sabe-se que é possível através do método de utilizar parâmetros de laminação como variáveis de projeto, e obter pontos ótimos de projeto através de relações geométricas entre a região viável e a função objetivo do projeto.

Sabe-se, conforme demonstrado na seção da Teoria Clássica da Laminação, que:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Segundo (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004), as matrizes de rigidez A, B e D mostradas acima podem ser expressas em função dos invariantes de rigidez dos materiais U e de 12 parâmetros de laminação ξ (TSAI; PAGANO, 1968). Considerando o laminado simétrico, a matriz de acoplamento de rigidez B será nula e então, o número de parâmetros de laminação será reduzido para 8. Considerando ainda, como prática de projeto adotada por vários fabricantes, que as lâminas são ortotrópicas e podem ter somente $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$ como ângulos de laminação, os parâmetros de laminação são reduzidos para 6. Tem-se, portanto, as seguintes expressões para a rigidez no plano e para a rigidez flexural:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^A & \xi_2^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^A & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1^A & \xi_2^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^A & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\xi_3^A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_3^A}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^D & \xi_2^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^D & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1^D & \xi_2^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^D & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\xi_3^D}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_3^D}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

As propriedades de rigidez Q são dadas por:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{21} &= Q_{12} \\
 Q_{66} &= G_{12} \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

E tem-se que os parâmetros de laminação relacionados ao plano $\xi_{[1,2,3]}^A$ e flexão $\xi_{[1,2,3]}^D$, são:

$$\begin{aligned}
 \xi_{[1,2,3]}^A &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \sin 2\varphi] dz \\
 \xi_{[1,2,3]}^D &= \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \sin 2\varphi] z^2 dz
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Baseando-se nas equações [Equação 3.18](#) e [Equação 3.16](#), percebe-se que os parâmetros de laminação ξ_3^D se relacionam com os termos D_{16} e D_{26} da matriz $[D]$. Estes termos não possuem uma contribuição significativa para a análise e o critério de falha por flambagem que será avaliado, portanto, neste estudo o parâmetro ξ_3^D será negligenciado. E como o laminado é simétrico e balanceado em relação ao plano médio o parâmetro de laminação ξ_3^A também não será levado em consideração neste estudo, sobrando, portanto, os seguintes parâmetros de laminação que serão considerados durante a otimização do

painel reforçado.

$$\xi_1^A = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi] dz$$

$$\xi_2^A = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 4\varphi] dz$$

(3.20)

$$\xi_1^D = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi] z^2 dz$$

$$\xi_2^D = \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 4\varphi] z^2 dz$$

Ainda que os parâmetros de laminação permitam uma otimização contínua do laminado com um número de variáveis de projeto relativamente baixo, eles não permitem a associação das restrições com a natureza discreta da espessura em ângulos de laminação (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004). Por exemplo, com a utilização desse método não é possível prever a acomodação de várias lâminas em sequência com uma mesma direção de ângulo de laminação. Portanto, após a obtenção da otimização do laminado utilizando os parâmetros de laminação, será necessário recorrer a um banco de dados de laminados para obter a solução discreta do laminado.

Resumidamente, tem-se, portanto, que a relação, originalmente, não-linear entre a rigidez de um laminado e a sequência de laminação discreta se torna linear quando as funções trigonométricas são substituídas pelos parâmetros de laminação. Comparando-se à sequência de laminação discreta, os parâmetros de laminação podem ser utilizados como variáveis contínuas e adimensionais dentro de uma otimização baseada no gradiente, conforme abordado nas seções seguintes.

3.4.1 Soma dos parâmetros de laminação

(ESCREVER SOBRE)

3.5 Práticas de projeto adotadas

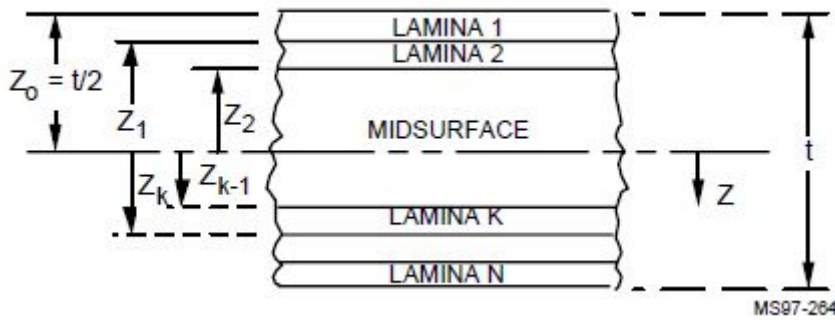
Esta seção apresenta regras e práticas relevantes utilizadas durante o projeto de estruturas em materiais compostos na indústria aeronáutica.

3.5.1 Laminados simétricos

Os laminados que possuem uma sequência de ângulos das lâminas simétrica em relação ao plano médio, são chamados de laminados simétricos. Conforme descrito por (MIL-HDBK-17-3F, 2002) e (NIU, 1992), a maior vantagem da utilização de um laminado simétrico é o desacoplamento entre o comportamento de membrana e flexão da estrutura.

Em um laminado simétrico, conforme notação apresentada na Figura 5 e conforme a Equação 3.21 a matriz [B] do laminado se anula.

Figura 5 – Notação para espessura do laminado e sequência das lâminas



Fonte: (MIL-HDBK-17-3F, 2002)

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^2 - (z_{k-1})^2] \quad (3.21)$$

Sabe-se que \bar{Q}_{ij} corresponde a rigidez da lâmina. E sabe-se também que a matriz B_{ij} é a responsável pelo acoplamento entre a resposta no plano e a flexão do laminado. Portanto, conforme (BAILIE J; LEY; PASRICHA, 1997), quando a matriz B_{ij} não é zerada, um carregamento no plano induz curvaturas, e momentos de flexão induzem deformações no plano. Nota-se pela Equação 3.21 que a matriz B_{ij} possui termos da coordenada z elevados ao quadrado, portanto, quando o laminado possui simetria geométrica e de materiais em relação ao plano médio, este termo é zerado, e portanto, tem-se $B_{ij} = 0$.

3.5.2 Laminados balanceados

Os laminados balanceados são aqueles em que todas as lâminas, com exceção das de 0° e das de 90° , devem ocorrer em pares de $+\theta$ e $-\theta$ acima e abaixo do plano médio do laminado. Para o conjunto de laminados compostos por lâminas com ângulos $0/\pm 45/90$, cada lâmina de $+45^\circ$ deve ser acompanhada de uma lâmina de -45° . Laminados balanceados possuem vantagens similares às vantagens dos laminados simétricos. Uma delas é que o acoplamento de membrana entre o comportamento normal e de cisalhamento no plano da estrutura é removido, visto que ambos os coeficientes, A_{16} e A_{26} , são iguais a zero.

(BAILIE J; LEY; PASRICHA, 1997). Este comportamento pode ser explicado observado as equações do carregamento de membrana de um laminado simétrico, Equação 3.22, Equação 3.23 e Equação 3.24.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_{16} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{16})_k t_k \quad (3.23)$$

$$A_{26} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{26})_k t_k \quad (3.24)$$

Onde

$$(\overline{Q}_{16})_k = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})_k \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})_k \sin^3 \theta \cos \theta \quad (3.25)$$

$$(\overline{Q}_{26})_k = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})_k \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})_k \sin \theta \cos^3 \theta \quad (3.26)$$

Sabe-se que \overline{Q}_{ij} corresponde a rigidez da lâmina e que t_k corresponde a espessura da lâmina. Nota-se também que ambas as expressões de A_{16} e A_{26} contém potências ímpares de $\sin \theta$ e $\cos \theta$. Logo lâminas com ângulos de 0° e 90° não contribuem para os termos de A_{16} e A_{26} e estes termos são reduzidos a zero em qualquer laminado balanceado (BAILIE J; LEY; PASRICHA, 1997).

A Figura 6 apresenta dois laminados, um desbalanceado, visto que faltam lâminas com -45° e um balanceado.

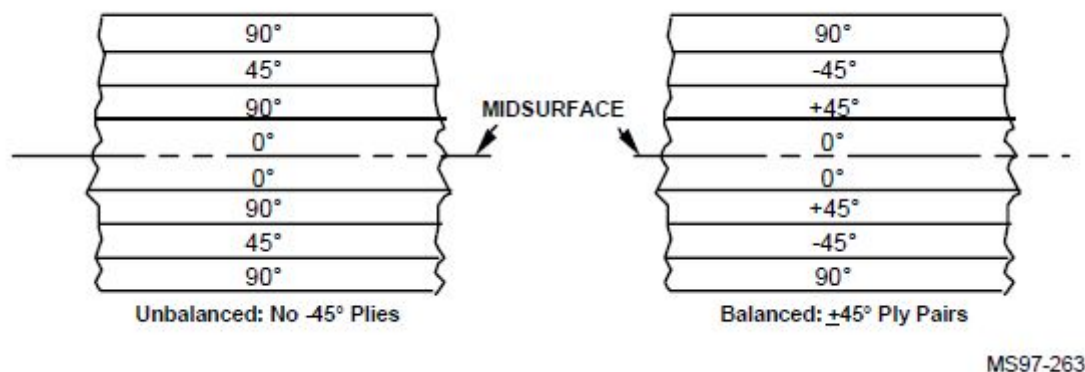
Portanto, satisfazendo esta prática de projeto de utilizar somente laminados balanceados, tem-se a seguinte Equação 3.27 resultante para tensão-deformação

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

3.5.3 Regra dos 10%

Esta prática de projeto não é determinada por documentação para ser rigorosamente seguida e também não há nenhuma documentação formal que comprove a sua validade.

Figura 6 – Laminado desbalanceado e laminado balanceado



Fonte: ([MIL-HDBK-17-3F](#), 2002)

No entanto, esta prática foi seguida por diversas campanhas de projetos de estruturas em materiais compostos e demonstrou bons resultados e portanto, é adotada até os dias atuais em diversos programas. A regra dos 10% determina que cada ângulo de laminação ($0^\circ, \pm 45^\circ$ e 90°) compreenda em pelo menos 10% das camadas do laminado final. O uso desta prática de projeto conduz a laminados utilizáveis que são mais robustos pelo fato de que eles menos susceptíveis à fragilidade associada aos laminados rigorosamente ortotrópicos ([BAILIE J](#); [LEY](#); [PASRICHA](#), 1997).

Além disso, segundo ([MIL-HDBK-17-3F](#), 2002), um comportamento do laminado dominado pela matriz, ou seja, efeitos não lineares, pode ser evitados em laminados onde a direção principal da fibra não é alinhada com o eixo principal do carregamento.

4 Otimização

4.1 Introdução

A otimização estrutural se refere a busca de um design estrutural que seja ótimo, ou "o melhor", variando alguns de seus parâmetros estruturais que são pré-estabelecidos. Durante a busca deste design ótimo, o projeto é guiado para satisfazer alguns limites operacionais que são impostos em relação às respostas da estrutura e também por limites nos valores dos parâmetros estruturais que são variados. Segundo (MOORE, 1994), a capacidade de otimização de projeto presente no *software* utilizado, *MSC Nastran*, se dá pelo fato de essa otimização ser baseada em uma análise de sensibilidade.

A capacidade de otimização de projeto presente no *software MSC Nastran* é beneficiada, significativamente, devido a análise de sensibilidade. A análise de sensibilidade do projeto computa taxas de variação das respostas da estrutura em relação a variação dos parâmetros de projeto. Esses parâmetros de projeto, ou variáveis de projeto, podem ser espessura de um elemento de placa, comprimento de elemento de barra, raio de perfuração em uma estrutura, propriedades dos materiais, entre outros. No caso a otimização conduzida neste trabalho, os parâmetros de projetos são relacionados à espessura dos elementos de placas e às propriedades dos materiais compostos. Essas taxas de variações, ou derivadas parciais na linguagem de cálculo, são chamadas na otimização de coeficientes de sensibilidade de projeto.

Os coeficientes de sensibilidade de projeto são computados explicitamente no *MSC Nastran* e são de extrema importância no processo de otimização, visto que eles podem ser utilizados para prever como uma variação de projeto vai alterar uma resposta da estrutura. Quando estes coeficientes de sensibilidade são aplicados na solução de um otimizador, eles aumentam a eficiência do mesmo, visto que durante a busca para o melhor resultado, o algoritmo sabe não somente o estado atual do projeto, mas também tem uma ideia de qual direção utilizar para buscar o melhor projeto. A capacidade básica de otimização de projeto do *MSC Nastran* depende da existência de informação disponível sobre a sensibilidade do projeto, visto que a otimização não pode ser realizada sem isso.

A utilização de uma otimização se deu com o intuito de encontrar um design ótimo para a estrutura escolhida, além de automatizar o processo utilizando um processo racional e com uma abordagem matemática. A utilização de otimizações se dá em situações como as seguintes:

1. Produção de projetos mais eficientes com maiores margens de segurança;

2. Realização de estudos de variabilidade;
3. Auxílio em estudos de sensibilidade de projeto;
4. Validação de dados de testes e resultados de análises (correspondência de modelo).

No caso deste trabalho, o otimizador será primeiramente validado, sendo feita uma otimização de um painel reforçado em material metálico e então uma comparação com a teoria. E em sequência, após a validação deste otimizador, ele será utilizado para a obtenção de um projeto ótimo para um painel reforçado em material composto.

4.2 Análise vs. Otimização de um projeto

Há algumas diferenças conceituais entre a otimização e a análise de um projeto, ainda que elas possam ser vistas como complementares.

Durante a realização de uma análise, é criada uma idealização matemática de um sistema físico visando obter respostas de determinadas questões. A classe dessas respostas obtidas depende do tipo de análise que se está buscando, já a precisão dessas respostas, depende da qualidade do modelo e do conhecimento geral do verdadeiro sistema. Portanto, a definição do tipo de elemento finito utilizado, das representações das condições de contorno, dos carregamentos e da malha utilizada, representam um papel extremamente importante em determinar quão bem o modelo está para representar a estrutura física. Logo, o objetivo é obter uma previsão precisa das respostas que são esperadas da estrutura real.

Em contraste a isso, tem-se o modelo de otimização, no qual idealiza-se mudanças que podem ser feitas na estrutura para melhorar o seu desempenho ou resposta a uma determinada característica. Portanto, para isso, deve-se primeiramente definir o que deseja-se melhorar no projeto, podendo ser como objetivo, por exemplo, uma estrutura com o menor peso possível ou com maior rigidez. Deve-se então estabelecer limites nos quais as variáveis podem flutuar e também expressões de máximos permissíveis, por exemplo.

A maior diferença portanto entre um modelo de análise e um modelo de otimização é que a análise lida com "a solução", enquanto que a otimização lida com "uma solução". Isto é, durante a performance de uma análise, encontra-se uma única solução, já na performance de uma otimização mais de uma solução é possível de ser encontrada. Matematicamente, durante uma otimização o espaço de solução pode conter um mínimo local, mas não necessariamente um mínimo global. Portanto, dependendo das condições iniciais setadas no problema pode-se obter uma solução, já caso essas condições iniciais se alterem, pode-se obter uma solução diferente da obtida anteriormente.

4.3 Princípios básicos de uma Otimização Numérica

4.3.1 Otimização Numérica - Visão geral

De acordo com (MOORE, 1994) a otimização pode ser visto como a seguinte "tarefa de projeto": encontrar um ponto mais baixo em um terreno adjacente. Supõe-se que um indivíduo esteja situado do lado de uma montanha e que deseja encontrar o próximo ponto de menor elevação, este seria o "objetivo". A localização de qualquer ponto será quantificada utilizando as suas coordenadas, logo essas serão as "variáveis de projeto". Supõe-se, também, que existem algumas cercas no terreno, que forçam a restrição do espaço de busca ser dentro do território cercado, logo as cercas são as "restrições" que limitam o "espaço de projeto".

Negligenciando a presença de mínimos locais, ou seja, tendo somente um ponto que pode ser considerado como ótimo, achar o ponto de menor elevação dentro deste terreno não é um problema muito grande para um indivíduo comum. Visto que tudo que ele precisará fazer é olhar para a região, e com uma boa perspectiva, apontar qual o ponto mínimo. No entanto, se pensarmos em um indivíduo que não possui a capacidade de enxergar, o processo de decisão não será tão simples, e isto é basicamente o que ocorre com um otimizador numérico.

Se tratando de um sistema computacional, a determinação do ponto próximo com menor elevação, ou seja, o valor da função objetivo, deverá ser feita utilizando análises numéricas. Portanto, necessita-se de um método sistemático para solucionar tais problemas e para isso tem-se diversas técnicas, chamadas de algoritmos de otimização numérica. Genericamente, os métodos de otimização numérica visam determinar a "direção da busca", o que permite encontrar um ótimo que obedeça as restrições estabelecidas.

Visando encontrar a "direção de busca", deve-se determinar o valor do gradiente da função objetivo e então, utilizar essa informação para estabelecer uma provável direção. No exemplo citado, de encontrar um ponto próximo com menor elevação, mesmo para um indivíduo privado de vista, é possível encontrar a direção dando passos pequenos, por exemplo, até encontrar as cercas como restrições e ir estabelecendo as diferenças nas elevações de cada passada. Este tipo de otimização que utiliza a ideia do gradiente é chamada, portanto, de método baseado no gradiente. E dentro deste método a ideia é repetir o processo de busca até que não seja mais possível reduzir a função objetivo.

4.3.2 Otimização Numérica - Visão quantitativa

Em uma visão quantitativa de uma otimização numérica, tem-se portanto, que deve-se encontrar o valor de \mathbf{X} que minimize ou maximize, dependendo do problema, a função objetivo $F(\mathbf{X})$ submetida à:

1. Restrições de desigualdade

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{X}) &\leq 0 \\ j &= 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (4.1)$$

2. Restrições de igualdade

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{X}) &= 0 \\ k &= 1, \dots, n_h \end{aligned} \quad (4.2)$$

3. Restrições laterais

$$\begin{aligned} x_i^L &\leq x_i \leq x_i^U \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.3)$$

4. Variáveis de projeto

$$\mathbf{X} = x_1, x_2, \dots, x_n \quad (4.4)$$

Nesta notação abordada, tem-se que \mathbf{X} , em maiúsculo e negrito, é um vetor, enquanto as outras variáveis, em minúsculo, são membros deste vetor. E tem-se como função objetivo a quantidade escalar a ser minimizada. As restrições laterais são utilizadas como as variáveis de projeto para limitar a região de busca, e as restrições de desigualdade, convencionalmente, são expressas na forma de menor ou igual a zero. E as restrições de igualdade, caso existam, devem satisfazer o *design* "ótimo".

4.3.3 Busca numérica por um ótimo

A solução de otimização utilizada pelo *software MSC Nastran* durante o desenvolvimento deste estudo é referenciada como: Método baseado no gradiente.

O primeiro passo, em um procedimento numérico, é determinar a direção de busca. Este procedimento de busca é repetido até o ponto no qual não consegue obter melhorias na função objetivo sem violar as restrições. Em um contexto de otimização estrutural, a situação pode-se complicar sendo considerada com inviável (uma ou mais restrições são violadas), ou crítica (ponto situado exatamente nas restrições).

A ideia de utilizar o gradiente como base para a otimização, ou seja, dar pequenos passos nas diversas direções das variáveis de projeto, corresponde exatamente ao conceito matemático de diferenças finitas, que é dado por:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.5)$$

Onde Δx representa as pequenas variações, pequenos passos, dados na direção x . E na maioria dos casos, é considerado um vetor de variáveis de projeto, logo, o vetor gradiente resultante pode ser escrito em função das derivadas parciais conforme:

$$\nabla F(X) = \begin{bmatrix} \frac{df(x)}{dx_1} \\ \vdots \\ \frac{df(x)}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f(X + \Delta x_1) - F(X)}{\Delta x_1} \\ \vdots \\ \frac{f(X + \Delta x_n) - F(X)}{\Delta x_n} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Fisicamente, o vetor gradiente aponta na direção de aumento da função objetivo. Portanto, se quiser minimizar a função objetivo, deve-se mover na direção oposta daquele gradiente e o vetor de busca S é dado por:

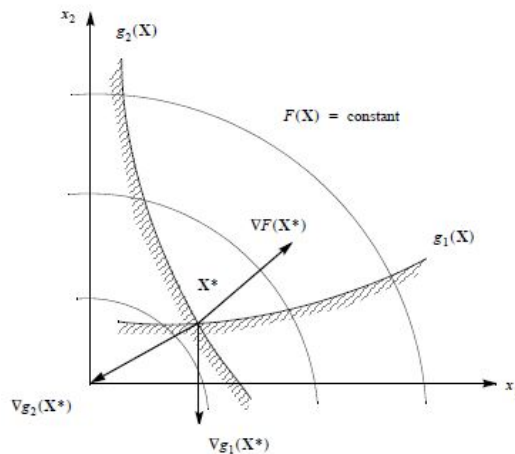
$$S = -\nabla F \quad (4.7)$$

O *software MSC Nastran* utiliza este método quando nenhuma das restrições são críticas ou violadas e somente do ponto inicial para outros. Embora esta direção de busca seja uma boa direção inicial, subseqüente direções de busca, utilizando este método, não funcionam propriamente para melhorar a função objetivo. Portanto, o *software MSC Nastran* utiliza métodos mais eficientes que podem ser generalizados para casos de restrições ativas e/ou violadas, que são as condições de Kuhn-Tucker em conjunto com o algoritmo de determinação da direção de busca.

4.3.3.1 Condições de Kuhn-Tucker

Considerando um espaço para as variáveis de projeto, com as restrições $g_1(X)$ e $g_2(X)$ e uma função objetivo $F(X)$, conforme mostrado na [Figura 7](#).

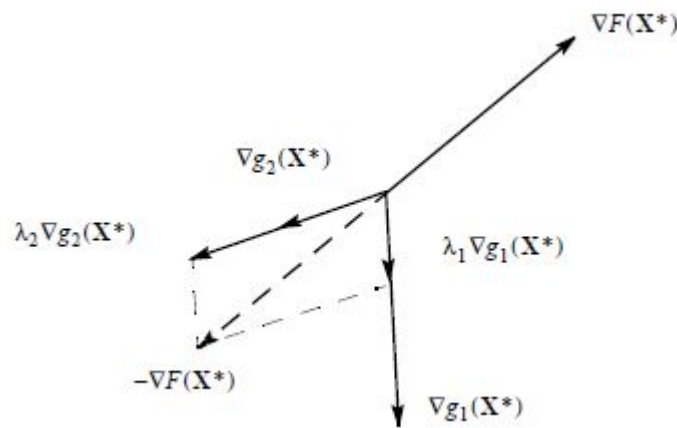
Figura 7 – Condições de Kuhn-Tucker em um ótimo restrito.



Fonte: (MOORE, 1994)

Os limites das restrições são as curvas nas quais os valores das restrições são identicamente iguais a zero. O ponto ótimo, nesta na Figura 7, é o ponto na interseção das duas curvas de restrições (ponto X^*). Caso os gradientes das duas curvas de restrições sejam computados, observa-se que eles apontam em diferentes direções, visto que os gradientes apontam na direção de crescimento do valor da função. Portanto, para essa situação de um ótimo restrito, as condições de Kuhn-Tucker estabelecem que o vetor soma da função objetivo e das restrições devem ser iguais a zero, dados apropriados fatores multiplicativos (multiplicadores de Lagrange). A Figura 8 mostra a situação em que os multiplicadores de Lagrange λ_1 e λ_2 fazem com que o vetor soma seja zero.

Figura 8 – Interpretação gráfica das condições de Kuhn-Tucker.



Fonte: (MOORE, 1994)

4.4 Otimização Estrutural

Durante a realização de uma análise estrutural, o objetivo é construir uma idealização matemática de um determinado sistema físico. Para isso, deve-se portanto, determinar as propriedades da análise, o tipo de resposta que será obtida e também uma malha em elementos finitos que será capaz de computar as respostas de maneira acurada. As propriedades da análise consistem em definir os materiais, as espessuras dos elementos, as malhas dos elementos, entre outras variáveis, e os tipos de respostas podem ser, por exemplo, tensões ou deformações nos elementos, frequências modais e outros. Já durante a realização de uma otimização, deseja-se definir como o modelo varia, em busca de um design melhor, com a alteração das variáveis de otimização.

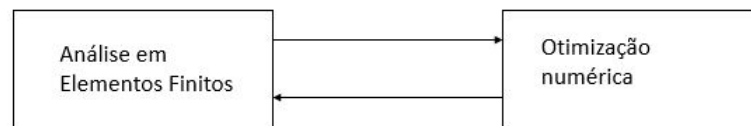
A otimização utilizada pelo *software MSC Nastran* conecta portanto as duas propostas acima utilizando conceitos intermediários:

1. Propriedades de projeto: proporcionam uma conexão entre as variáveis de projeto utilizadas pelo otimizador e as propriedades dos elementos utilizadas pela análise em elementos finitos;
2. Respostas de projeto: é um resultado físico que pode ser utilizado como um objetivo de projeto ou, seguindo imposições do usuário, como uma restrição de projeto.

4.4.1 Conexão entre análise estrutural e otimização numérica

As primeiras tentativas utilizadas para conectarem a análise estrutural com a otimização numérica se baseavam na ideia de um acoplamento direto, chamado também de "*black box*", conforme mostrado na [Figura 9](#).

Figura 9 – Acoplamento direto ou "*black box*".



Fonte: ([MOORE, 1994](#))

Neste método, todas as vezes que o otimizador necessitasse de uma avaliação da função objetivo seria realizada uma análise em elementos finitos. Este método, portanto, se mostrou inviável mesmo para problemas pequenos, visto que necessitaria de muitos recursos computacionais. O principal fator relacionado à otimização estrutural que torna a ideia do "*black box*" inviável, é que as respostas quantitativas de interesse são normalmente funções implícitas das variáveis de projeto. Isto é, por exemplo, a variação de tensão em um elemento de placa em função da variação da espessura da mesma, só pode ser obtido realizando uma análise em elementos finitos da estrutura.

Portanto, para evitar que seja feita uma análise em elementos finitos para cada variação durante a otimização numérica, o *MSC Nastran* utiliza o conceito de realizar aproximações, conforme [Figura 10](#).

O conceito das aproximações baseia-se principalmente na ideia de reduzir o problema suficientemente, de maneira que, somente as informações mais pertinentes sejam consideradas no processo de geração do melhor projeto. Uma vez que um novo design é proposto pelo otimizador, baseado na informação fornecida pelo modelo aproximado, o próximo passo é realizar uma análise mais detalhada em elementos finitos da nova configuração. E com isso, é possível checar se o novo design realmente satisfaz as restrições de projeto e reduz a função objetivo. Se uma subsequente otimização ainda for necessária, a análise em elementos finitos serve como base para construir um submodelo com apro-

ximações. E portanto, estes ciclos de projetos são repetidos até que a convergência seja atingida.

Figura 10 – Acoplamento entre análise em elementos finitos e otimização numérica utilizando aproximações.



Fonte: (MOORE, 1994)

4.4.2 Conceitos fundamentais

Dentro da otimização estrutural do *MSC Nastran* há alguns conceitos fundamentais que devem ser destacados, conforme segue.

4.4.2.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são quantidades que são conhecidas pelo otimizador e que podem ser diretamente alteradas para satisfazerem a proposta da otimização. No *MSC Nastran*, as variáveis de projeto são definidas pela entrada do tipo DESVAR e elas só afetam a análise em elementos finitos caso sejam conectadas com as propriedades de projeto e/ou respostas de projeto.

É função do usuário definir os limites de variação das variáveis de projeto, ou seja, impor as restrições. O *MSC Nastran* é capaz de distinguir entre variáveis de projeto dependentes e independentes, e também é capaz de utilizar o conceito de variáveis discretas, onde o valor das variáveis é restrito a um específico *set* de números reais.

No caso deste estudo, as variáveis de projeto, detalhadas na seção do Desenvolvimento, são as espessuras do revestimento e do reforçador, e também os parâmetros de laminação (ξ).

4.4.2.2 Propriedades de projeto

As propriedades de projeto são quantidades que influenciam diretamente na análise de elementos finitos e que incluem propriedades como espessuras, materiais, densidades e

posicionamento dos nós.

As propriedades dos elementos variam de acordo com o tipo de elemento utilizado no modelo, conforme mostrado na [Figura 11](#). Bem como as propriedades dos materiais, dependem do tipo de entrada de material que será fornecida.

Figura 11 – Exemplos de propriedades dos elementos e propriedades do materiais.

Property Entry	Property
PACABS	TESTAR, CUTFR, B, K, M
PACBAR	MBACK, MSEPTM, FRESON, KRESON
PBAR	A, I1, I2, J, NSM, C1, C2, D1, D2, E1, D2, F1, F2, K1, K2, I12
PBARL	DIMi, NSM
PBEAM	(A(i), I1(i), I2(i), I12(i), J(i), NSM(i), C1(i), C2(i), D1(i), D2(i), E1(i), E2(i), F1(i), F2(i), i = A, B, 1 ... 9), K1, K2, S1, S2, (NSI(j), CW(j), M1(j), M2(j), N1(j), N2(j), j = A, B)
PBEAML	(DIMi(j), NSM(j), j = A, B, 1 ... 9)
PBRSECT/PBMSECT	W (Overall Width), H(Overall Height), T(Overall Thickness) and T(n) Thickness of segment. See PBRSECT, 657 for more information.
PBUSH	(Ki, Bi, GEi, i = 1, 6), SA, ST, EA, ET
PBUSHID	K, C, M, SA, SE (only linear elements are supported for optimization)
PCOMP	Z0, NSM, SB, TREF, GE, Ti, THETAi
PDAMP	B1, B2, B3, B4
PELAS	K1, GE1, S1, K2, GE2, S2
PGAP	U0, F0, KA, KB, KT, MU1, MU2
PCOMPG	Z0, NSM, SB, TREF, GE, Ti, THETAi
PMASS	M1, M2, M3, M4
PROD	A, J, C, NSM
PSHEAR	T, NSM, F1, F2
PSHELL	T, 12I/T**3, TS/T, NSM, Z1, Z2 (The 12I/T**3 term can be designed but must be referenced by Field ID = 6 rather than by name.)
PTUBE	OD, T, NSM
PVISC	CE1, CR1, CE2, CR2
GPLY	T, THETA

Material Entry	Material Properties
MAT1	E, G NU, RHO, A, TREF, GE
MAT2	G11, G12, G13, G22, G23, G33, RHO, A1, A2, A3, TREF, GE
MAT3	EX, ETH, EZ, NUXTH, NUZTH, NUZX, RHO, GZX, AX, ATH, AZ, TREF, GE
MAT8	E1, E2, NU12, G12, G1Z, G2Z, RHO, A1, A2, TREF, Xt, Xc, Yt, Yc, S, GE
MAT9	G11, G12, G13, G14, G15, G16, G22, G23, G24, G25, G26, G33, G34, G35, G36, G44, G45, G46, G55, G56, G66, RHO, A1, A2, A3, A4, A5, A6, TREF, GE
MAT10	BULK, RHO, C, GE

Fonte: (MOORE, 1994)

No caso deste estudo, detalhado na seção do Desenvolvimento, propriedades de elementos do tipo PSHELL e propriedades dos materiais do tipo MAT2 foram utilizadas para gerar o modelo.

4.4.2.3 Respostas de projeto

As respostas de projeto são utilizadas no *MSC Nastran* como bases para definirem o objetivo e as restrições de projeto. Assim como as propriedades de projeto, as respostas de projeto funcionam como uma conexão entre a análise em elementos finitos e a otimização numérica, e podem ser divididas em três tipos.

1. Resposta tipo 1: essas respostas são obtidas diretamente de uma análise do *MSC Nastran* e utiliza-se DRESP1 para acessá-las. Exemplos: peso estrutural, deslocamentos de nós e tensões nos elementos.
2. Resposta tipo 2: esse tipo de resposta permite que o usuário utilize uma equação para manipular as respostas do tipo 1 e utiliza-se DRESP2 para acessá-las. Permite, por exemplo, que o usuário formule critérios de falha, avalie o comportamento referente a flambagem, imponha limitações para as respostas, entre outros.
3. Resposta tipo 3: este tipo de resposta é semelhante ao tipo 2, mas permite que o usuário utilize o API (*Application Programming Interface*) para buscar processos externos ao *MSC Nastran*. Utiliza-se DRESP3 para acessá-las.

No caso deste estudo, detalhado na seção do Desenvolvimento, as respostas de projeto do tipo 1 e 2 (DRESP1 e DRESP2) foram utilizadas no modelo.

4.4.2.4 Restrições de projeto

As restrições de projeto são acessadas utilizando o DCONSTR para identificarem um resposta (DRESP1, DRESP2 ou DRESP3) e assim, impor um limite a essa resposta.

$$r_j^L \leq r_j(X) \leq r_j^U \quad (4.8)$$

onde r_j^L é o limite inferior da j -ésima resposta e r_j^U é o limite superior.

4.4.2.5 Função objetivo do projeto

A função objetivo do projeto é uma quantidade escalar que deve ser minimizada ou maximizada pelo otimizador, dependendo do problema proposto. Esta função objetivo é selecionada utilizando o comando DESOBJ e este comando referencia a alguma resposta do tipo DRESP1, DRESP2 ou DRESP3 que deve ser uma resposta escalar simples.

No caso deste estudo, detalhado na seção do Desenvolvimento, a função objetivo é minimizar o peso da estrutura. Para isso, utiliza-se de três soluções do *MSC Nastran*, a solução de otimização (SOL 200), a solução estática (SOL 101) a solução de flambagem (SOL 105).

5 Metodologia

5.1 Desenvolvimento geral

Visando realizar a otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação, realizou-se uma sequência de passos conforme segue:

1. Análise teórica de um painel reforçado de material metálico utilizando a metodologia do *Fator de Eficiência de Farrar* proposta por (NIU, 1997)
2. Otimização de um painel reforçado de material metálico utilizando o *MSC Nastran* e comparação dos resultados obtidos com o resultado teórico obtido no item anterior. Nesta etapa visou-se obter a validação o método de otimização utilizado para assim poder aplicá-lo em outros painéis reforçados;
3. Otimização de um painel reforçado de material composto utilizando o *MSC Nastran* e comparação dos resultados obtidos com os resultados obtidos para um painel reforçado de material metálico.

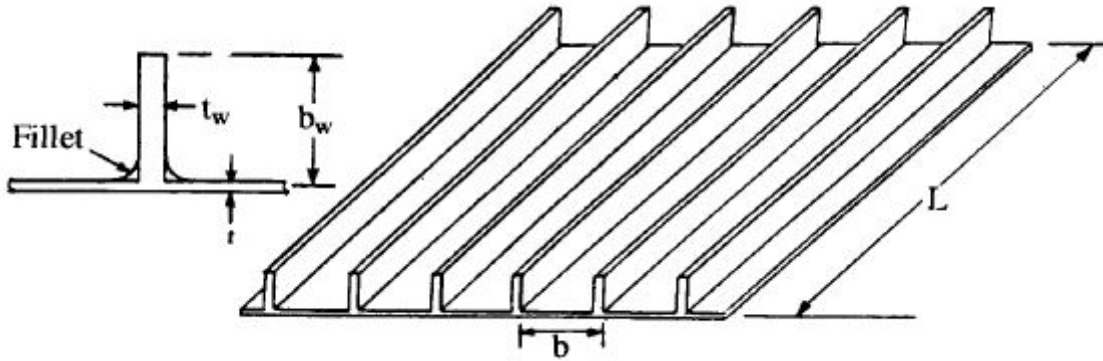
As seções seguintes descrevem a metodologia utilizada com mais detalhes e apresentam os modelos das otimizações realizadas e o capítulo seguinte contém os resultados obtidos.

5.2 Análise teórica de um painel reforçado

Visando realizar a análise teórica de um painel reforçado fabricado em material metálico, assume-se algumas proposições como segue e considera-se um painel conforme mostrado na [Figura 12](#).

- Painel suficientemente largo para permitir que seja tratado como uma simples coluna, ou seja, não há restrições impostas nas bordas longitudinais do painel;
- O painel possui uma fixação de apoio no final da sua estrutura, em relação ao comprimento L . Deve-se levar em consideração este comprimento como sendo o o comprimento efetivo do painel, e não o comprimento da bacia;
- As nervuras não colocam restrições à flambagem.

Figura 12 – Típico painel reforçado.



Fonte: (NIU, 1997)

Nota-se que

t - Espessura do revestimento

b - Largura entre reforçadores

t_w - Espessura do reforçador

b_w - Altura do reforçador

L - Comprimento efetivo

A Figura 13 mostra a tensão de flambagem inicial de diversas combinações de painéis reforçados, como razão entre $\frac{f_i}{f_o}$, considerando a seguinte notação.

f - Tensão aplicada

f_E - Tensão de instabilidade de Euler

f_i - Tensão inicial de flambagem do painel

f_o - Tensão inicial de flambagem de um painel reforçado longo, com espaçamento entre reforçadores (b) e espessura do revestimento (t), simplesmente apoiado ao longo da borda $= 3.62E_t(\frac{t}{b})^2$

Segundo (NIU, 1997), para um dado material, no qual a relação entre f e E_t é conhecida, o Fator de Eficiência de Farrar pode ser dado por:

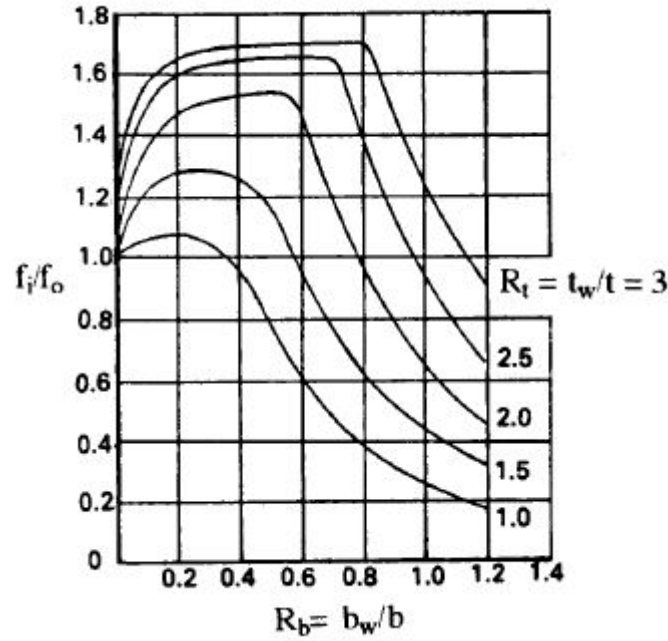
$$F = f\left(\frac{L}{NE_t}\right)^{0.5} \quad (5.1)$$

Onde

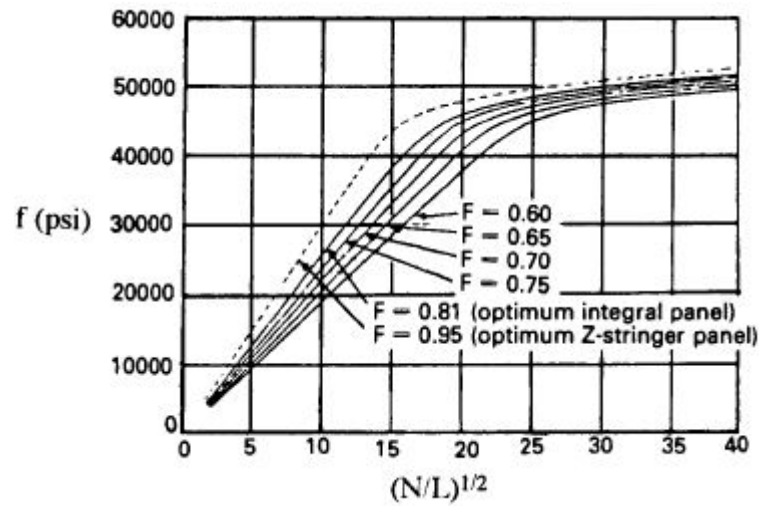
N - Carga por unidade de comprimento do painel (lbs/in)

E_t - Módulo tangente (psi)

Figura 13 – Tensão inicial de flambagem.



Fonte: (NIU, 1997)

Figura 14 – Tensão no painel *vs.* índice estrutural $\frac{N}{L}$ para material Al 2024-T3.

Fonte: (NIU, 1997)

Este fator pode ser utilizado, conforme [Figura 14](#) que mostra para um painel reforçado de Al 2024-T3.

Sabe-se que a tensão inicial de flambagem (f_i) é dada por:

$$f_i = \left(\frac{f_i}{f_o}\right) \left[3.62 E_t \left(\frac{t}{b}\right)^2 \right] \quad (5.2)$$

E que a tensão de instabilidade de Euler (f_E) é dada por:

$$f_E = \pi^2 E_t \left(\frac{\rho}{L} \right)^2 \quad (5.3)$$

Onde ρ corresponde ao raio de giração do painel reforçado em relação ao seu eixo neutro e tem que:

$$\rho^2 = \frac{b^2 R_b^3 R_t}{12(1 + R_b R_t)} (4 + R_b R_t)^2 \quad (5.4)$$

Em que

$$R_b = \frac{b_w}{b} \quad (5.5)$$

$$R_t = \frac{t_w}{t} \quad (5.6)$$

Relacionando a tensão no painel com a intensidade de carga tem-se:

$$f = \frac{N}{t(1 + R_b R_t)} \quad (5.7)$$

Portanto, impõe-se a condição de que tensão aplicada é igual à tensão inicial de flambagem do painel que é igual à tensão de instabilidade de Euler ($f = f_i = f_E$).

Tomando-se a [Equação 5.2](#) x [Equação 5.3](#) x [Equação 5.7](#)², obtem-se:

$$f^4 = \pi^2 E_t^2 \left(\frac{3.62 \rho^2 f_i}{f_o b^2 L^2} \right) \left[\frac{N^2}{(1 + R_b R_t)^2} \right] \quad (5.8)$$

Tirando a raiz quarta de ambos os lados, tem-se:

$$f = F \left(\frac{N E_t}{L} \right)^{0.5} \quad (5.9)$$

Onde o *Fator de Eficiência de Farrar* vale:

$$F = 1.314 \frac{R_b^3 R_t (4 + R_b R_t)^{0.25}}{(1 + R_b R_t)} \left(\frac{f_i}{f_o} \right)^{0.25} \quad (5.10)$$

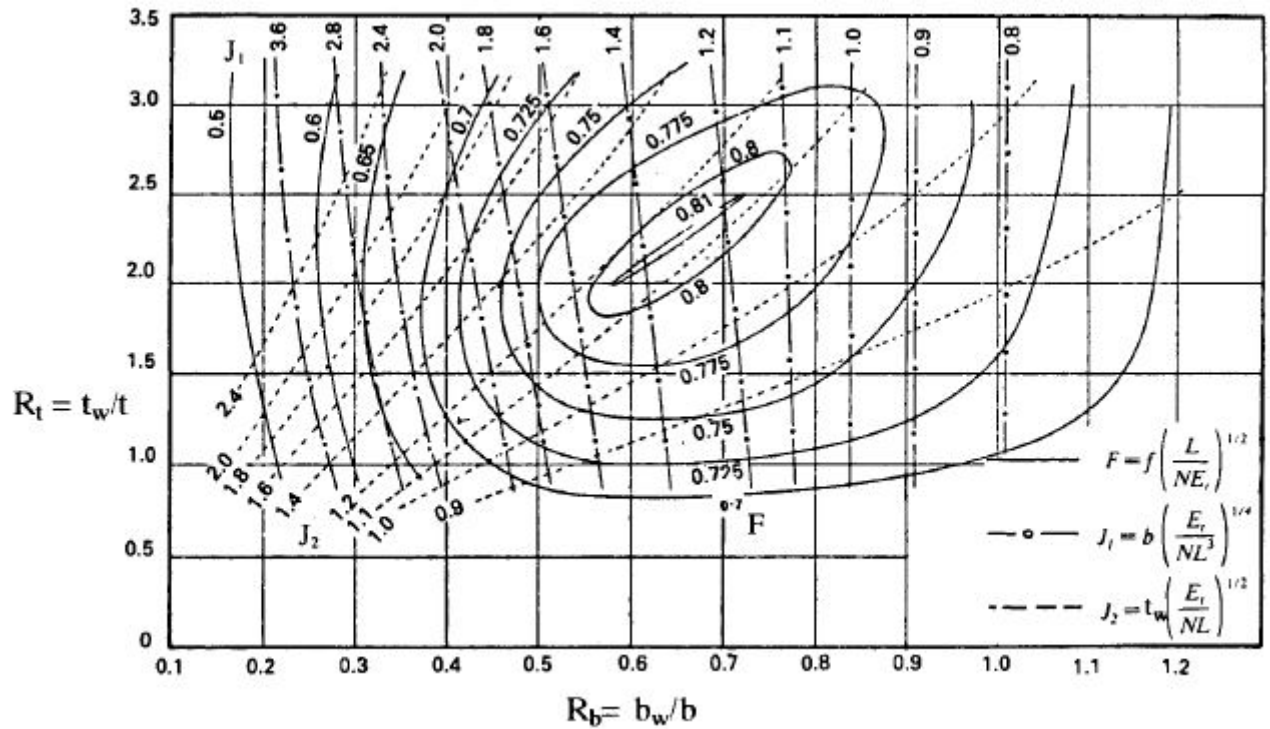
5.2.1 Limitação de projeto - Espaçamento entre reforçadores

Considerando um espaçamento entre reforçadores (b) já previamente determinado, devido ao modelo em elementos finitos que foi desenvolvido para as etapas de otimização, tem-se, portanto, uma limitação de projeto. Segundo ([NIU, 1997](#)), para manter o valor

de largura entre reforçadores constante (b) e o valor de espessura do reforçador também constante (t_w), tem-se as seguintes equações, que também são plotadas na [Figura 15](#).

No caso deste estudo, considerou-se somente que a largura entre os reforçadores será constante, visando obter os outros parâmetros geométricos do painel reforçado ótimo.

Figura 15 – Curvas para projetos com limitações - Espessura do reforçador (t_w) e largura do reforçador (b).



Fonte: (NIU, 1997)

Visando, portanto, projetar um painel reforçado otimizado, seguindo a metodologia de *Fator de Eficiência de Farrar* proposta por (NIU, 1997), submetido a uma carga de intensidade N , alguns passos foram seguidos.

- Utilização de valores otimizados

$$F=0.81; R_t=2.25; R_b=0.65z$$

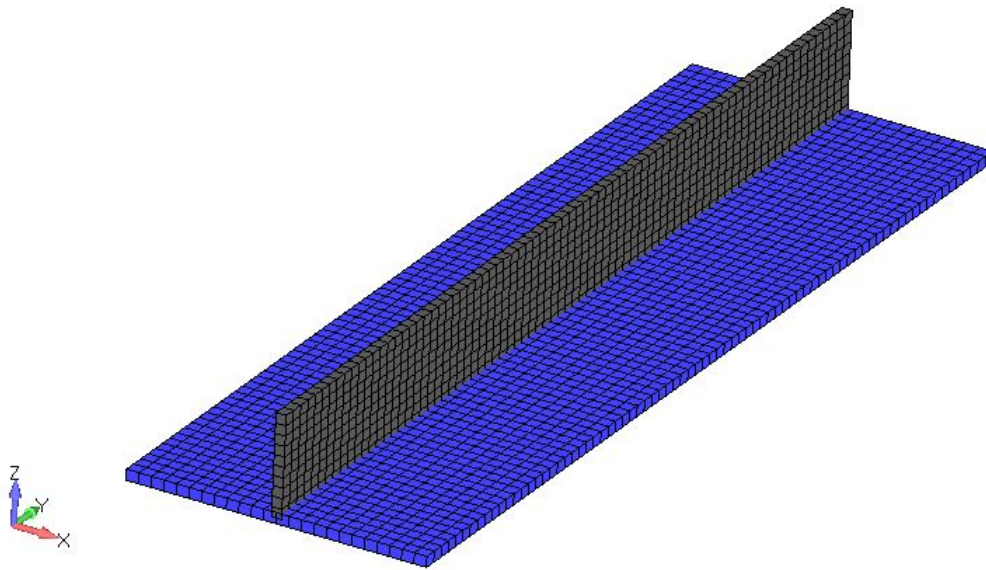
5.3 Otimização de um painel reforçado em material metálico

Realizou-se uma otimização de um painel reforçado em material metálico utilizando o *MSC Nastran*, para que após a validação do otimizador ele possa ser aplicado para outros tipos de painéis reforçados, como os em material composto.

5.3.1 Modelo em elementos finitos

Desenvolveu-se um modelo em elementos finitos de um painel reforçado, conforme [Figura 16](#) para realizar a análise de otimização. Este modelo foi desenvolvido utilizando somente um tipo de material, tanto para o revestimento quanto para o reforçador, que foi o Al, com as características conforme mostrado na

Figura 16 – Modelo do reforçador em material metálico.



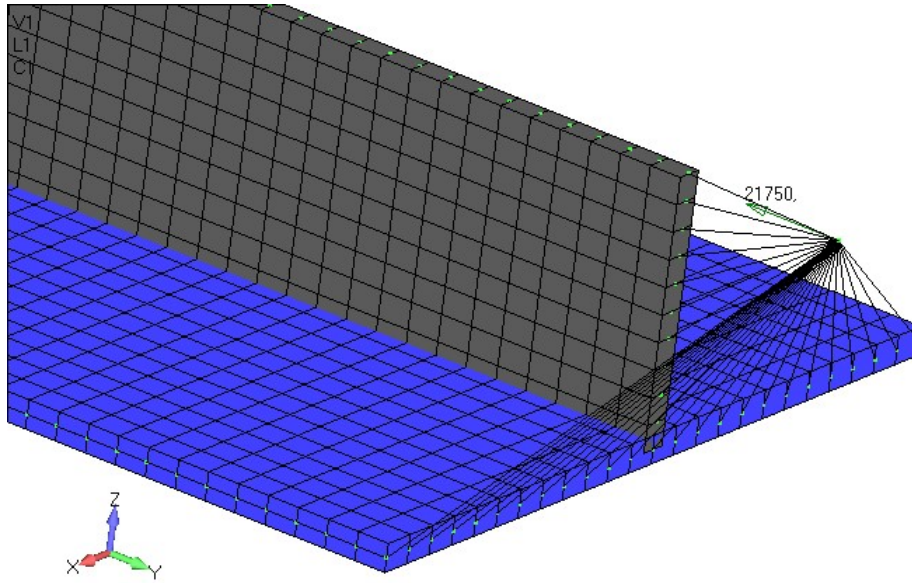
Fonte: Femap

O modelo foi desenvolvido com elementos do tipo placa (*PLATE*) para o reforçador e para o revestimento, e com duas propriedades distintas, sendo uma propriedade para o revestimento e outra propriedade para o reforçador.

O painel reforçado foi modelado utilizando somente a idealização de um reforçador e para isso as seguintes condições de contorno foram aplicadas, conforme mostrado na (adicionar figura).

Em relação ao carregamento do aplicado no modelo, definiu-se que o painel reforçado estaria submetido somente a uma carga de compressão, sem cisalhamento. E portanto, aplicou-se essa carga de compressão conforme mostrado na [Figura 17](#), utilizando um elemento rígido do tipo RBE2 para distribuir a carga igualmente nos nós dos elementos de placa que situam-se em uma extremidade do reforçador.

Figura 17 – Carregamento aplicado no reforçador em material metálico.



Fonte: Femap

5.3.2 Otimização

Em relação a otimização, buscou-se como objetivo minimizar o peso da estrutura. Portanto, durante a solução de otimização, manteve-se a carga de compressão constante e variou-se as espessuras do revestimento e do reforçador. Buscou-se, então, uma estrutura que suportasse a carga de compressão, utilizando uma análise de flambagem dentro do otimizador (SOL 105), e que possuísse o menor peso estrutural.

Resumidamente, a otimização possuiu as seguintes características:

- Função objetivo: minimizar o peso da estrutura;
- Variáveis de projeto: espessura do revestimento e espessura do reforçador;
- Respostas de projeto: Cinco (5) primeiros autovalores da solução de flambagem;
- Restrições de projeto: Autovalores maiores que um (1);
- Soluções utilizadas: Otimização (SOL 200) e Análise de flambagem (SOL 105).

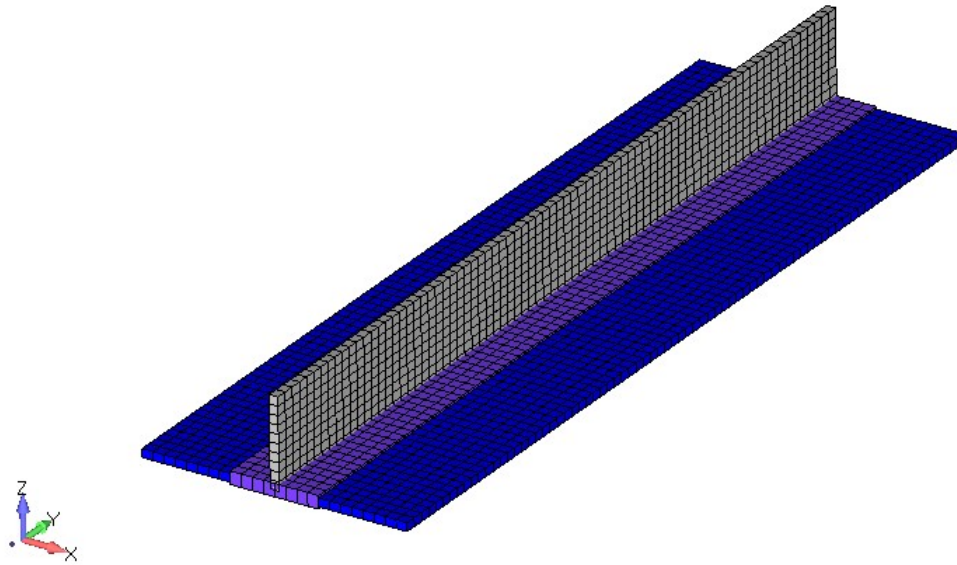
5.4 Otimização de um painel reforçado em material composto

Após a realização da otimização do painel reforçado em material metálico, realizou-se a otimização de um painel reforçado em material composto utilizando o *MSC Nastran*.

5.4.1 Modelo em elementos finitos

Similarmente ao modelo para o painel reforçado em material metálico, desenvolveu-se um modelo em elementos finitos de um painel reforçado em material composto, conforme [Figura 18](#) para realizar a análise de otimização.

Figura 18 – Modelo do reforçador em material composto.



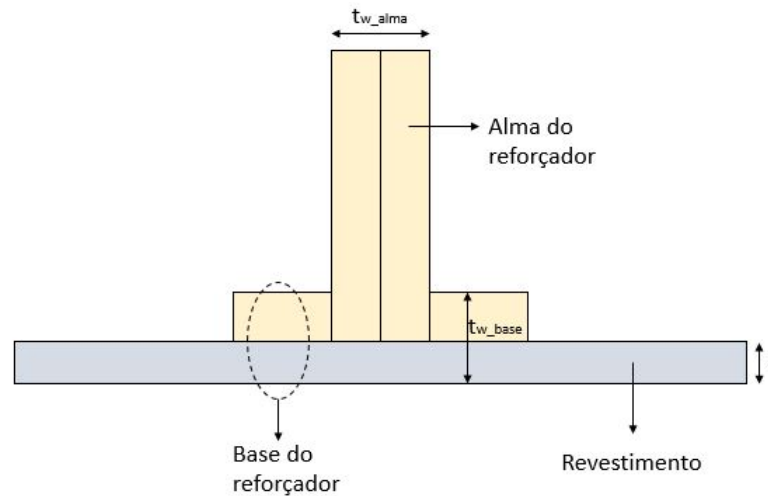
Fonte: Femap

Este modelo foi desenvolvido utilizando como material composto o carbono, mas com duas propriedades de materiais distintas. Sendo que tem-se um material exclusivamente para o revestimento e outro para a alma do reforçador. Já a base do reforçador é composta tanto pelo material do revestimento, quanto pelo material da alma do reforçador, conforme ilustrado na [Figura 19](#).

O modelo foi desenvolvido com elementos do tipo placa (*PLATE*) para o reforçador e para o revestimento, e com duas propriedades distintas, sendo uma propriedade para o revestimento e outra propriedade para o reforçador. Portanto, tem-se uma dada espessura para o reforçador (t_{valma}), uma espessura para o revestimento (t) e uma espessura para a base do reforçador (t_{wbase}) que é uma relação entre a espessura da alma do reforçador e a espessura do revestimento.

Optou-se por modelar a base do reforçador de material composto visando fazer a conexão entre as propriedades dos materiais da alma do reforçador e do revestimento.

Figura 19 – Visualização do reforçador em material composto.



Fonte: Femap

O painel reforçado foi modelado utilizando somente a idealização de um reforçador, as condições de contorno aplicadas no modelo de elementos finitos de reforçador em material composto são as mesmas que foram aplicadas no modelo do reforçador em material metálico, conforme mostrado na (adicionar figura).

Em relação ao carregamento do aplicado no modelo, definiu-se que o painel reforçado estaria submetido somente a uma carga de compressão, sem cisalhamento. E portanto, aplicou-se essa carga de compressão igualmente àquela aplicada no modelo do reforçador de material metálico, conforme mostrado na [Figura 17](#). Utilizou-se um elemento rígido do tipo RBE2 para distribuir a carga igualmente nos nós dos elementos de placa que situam-se em uma extremidade do reforçador.

5.4.2 Otimização

Em relação a otimização, buscou-se como objetivo minimizar o peso da estrutura. Portanto, durante a solução de otimização, manteve-se a carga de compressão constante e variou-se as espessuras do revestimento e do reforçador. Buscou-se, então, uma estrutura que suportasse a carga de compressão, utilizando uma análise de flambagem dentro do otimizador (SOL 105), e que possuísse o menor peso estrutural.

Resumidamente, a otimização possuiu as seguintes características:

- Função objetivo: minimizar o peso da estrutura;
- Variáveis de projeto: espessura do revestimento e espessura do reforçador;
- Respostas de projeto: Cinco (5) primeiros autovalores da solução de flambagem;

- Restrições de projeto: Autovalores maiores que um (1);
- Soluções utilizadas: Otimização (SOL 200) e Análise de flambagem (SOL 105).

Referências

- BAILIE J; LEY, R.; PASRICHA, A. A summary and review of composite laminate design guidelines. *National Aeronautics and Space Administration*, Final, n. 22, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 30, 31 e 32.
- CHAMIS, C. C. Buckling of anisotropic composite plates. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 95, n. 10, p. 2119–2140, 1969. Citado na página 15.
- DANIEL, I. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 17, 18, 19, 20 e 24.
- HERENCIA, J. E.; WEAVER, P. M.; FRISWELL, M. I. Optimization of long anisotropic laminated fiber composite panels with t-shaped stiffeners. *AIAA journal*, v. 45, n. 10, p. 2497–2509, 2007. Citado na página 15.
- KASSAPOGLOU, C. *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- LIU, B.; HAFTKA, R.; TROMPETTE, P. Maximization of buckling loads of composite panels using flexural lamination parameters. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 26, n. 1-2, p. 28–36, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 26, 27 e 29.
- MIKI, M. Optimum design of laminated composite plates using lamination parameters. *AIAA Paper*, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 26.
- MIL-HDBK-17-3F. *MIL-HDBK-17-3F Composite Materials Handbook - Volume 3: Polymer Matrix Composites, Materials Usage, Design and Analyses*. [S.l.]: US Department of Defense, 2002. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 32.
- MOORE, G. J. *MSC/NASTRAN design sensitivity and optimization: user's guide, version 68*. [S.l.]: MacNeal-Schwendler Corporation, 1994. Citado 7 vezes nas páginas 33, 35, 37, 38, 39, 40 e 41.
- NIU, M. C.-Y. Composite airframe structures. *Hong Kong Conmmilit Press Ltd*, 1992. Citado na página 30.
- NIU, M. C.-Y. *Airframe stress analysis and sizing*. [S.l.: s.n.], 1997. Citado 5 vezes nas páginas 43, 44, 45, 46 e 47.
- SCHMIT, L.; FARSHI, B. Optimum laminate design for strength and stiffness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 7, n. 4, p. 519–536, 1973. Citado na página 15.
- TSAI, S. W.; PAGANO, N. J. *Invariant properties of composite materials*. [S.l.], 1968. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 27.