

Laura Tameirao Sampaio Rodrigues

# **Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação**

Belo Horizonte, MG - Brasil

6 de novembro de 2018



Laura Tameirao Sampaio Rodrigues

Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação/ Laura Tameirao Sampaio Rodrigues. – Belo Horizonte, MG - Brasil, 6 de novembro de 2018-

65 p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Prof. Helio de Assis Pegado

Coorientador: -

Trabalho de Conclusão de Curso – Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Escola de Engenharia

Engenharia Aeroespacial, 6 de novembro de 2018.

1. Otimização. 2. Materiais compostos. 2. Parâmetros de laminação. I. Prof. Helio de Assis Pegado. II. Universidade Federal de Minas Gerais. III. Escola de Engenharia. IV. Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação

Laura Tameirao Sampaio Rodrigues

## **Otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação**

Trabalho de conclusão de curso de Engenharia Aeroespacial na Universidade Federal de Minas Gerais, centrado na otimização de uma estrutura em material composto utilizando os parâmetros de laminação

Trabalho aprovado. Belo Horizonte, MG - Brasil, 6 de novembro de 2018:

---

**Prof. Helio de Assis Pegado**  
Orientador

---

**Nome**  
Convidado 1

---

**Nome**  
Convidado 2

Belo Horizonte, MG - Brasil  
6 de novembro de 2018

# Agradecimentos

Aos meus pais, Amilvana e Marcos, por me permitirem e me apoiarem a estudar todos esses anos na UFMG, e por todo o suporte que eles sempre me deram nas minhas escolhas profissionais.

Ao meu irmão, Victor, pela amizade e apoio durante todo este tempo.

Aos meus colegas de faculdade, especialmente, aos colegas de equipe do Aerodesign, por todo o companherismo.

Aos meus colegas e supervisores do estágio, com quem tive a oportunidade de grande aprendizado, por todo o apoio e ensino durante esses últimos meses.

Aos todos os meus professores pelo ensinamento passado durante os últimos anos.

Ao meu orientador, Prof. Helio de Assis, e ao Prof. Rodrigo Martins, pela ajuda e suporte na realização deste trabalho.



*“The mind that opens up to a new idea never returns to its original size.”*

*Albert Einstein*





# Resumo

O intuito deste Trabalho de Conclusão de Curso é o de realizar uma revisão bibliográfica a respeito dos temas de materiais compostos e otimização, bem como descrever como foi feita uma otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação. Sabe-se que a utilização dos materiais compostos em estruturas aeronáuticas tem aumentado gradualmente nas últimas décadas, e também, que estruturas primárias como asas e empenagens possuem a tendência de serem projetadas utilizando painéis reforçados constituídos de material composto. Isto se deve ao fato de as estruturas em materiais compostos possuírem elevados valores de resistência e rigidez específicas. As propriedades do material composto podem ser otimizadas utilizando como ferramenta os parâmetros de laminação, apresentando um potencial de uso bastante elevado para esse tipo de material. Portanto, foram desenvolvidos modelos de otimização do painel reforçado utilizando o *software Nastran* para comparar os resultados entre painéis reforçados fabricados de material metálico e de material composto. O desenvolvimento do estudo e os resultados obtidos são detalhados no decorrer deste trabalho.

**Palavras-chave:** estruturas aeroespaciais. otimização. materiais compostos. parâmetros de laminação. painel reforçado. nastran sol 200.



# Abstract

The main objective of this Conclusion Graduation Work is to do a bibliographic revision about composite materials and optimization, also to describe how was the process to realize an structural optimization of a reinforced panel using the lamination parameters. It is known that the use of composite materials in aeronautic industry is increasing in last decades. Also, it is known that primary structures, as wings and empenages, has the tendency to be designed using reinforced panels of composite materials. It is due to the fact that structures in composite materials has higher values of specific resistance and specific rigity. The properties of composite materials can be optimized using the lamination parameters, showing the potencial of usage of this material. So, it were developed optimization models of the reinforced panel using the software Nastran to compare the results between reinforced panel produced of metallic material and reinforced panel produced of composite material. The development of this study and the results are detailed in this work.

**Keywords:** aerospace structures. optimization. composite materials. lamination parameters. reinforced panels. nastran sol 200.



# Lista de abreviaturas e siglas

PL	<i>Parâmetros de laminação</i>
CLT	<i>Classical Theory of Lamination</i>
FEM	<i>Finite Element Model</i>



# Sumário

<b>1</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS COMPOSTOS</b>	<b>19</b>
3.1	Desenvolvimento histórico	19
3.2	Visão geral	21
3.3	Teoria Clássica da Laminação	21
3.3.1	Relações entre deformações e deslocamentos	22
3.3.2	Relações entre tensões e deformações de uma lâmina dentro de um laminado	24
3.3.3	Relações envolvendo forças e momentos resultantes	25
3.4	Parâmetros de laminação	28
3.5	Práticas de projeto adotadas	31
3.5.1	Laminados simétricos	31
3.5.2	Laminados balanceados	32
3.5.3	Regra dos 10%	33
<b>4</b>	<b>OTIMIZAÇÃO</b>	<b>35</b>
4.1	Introdução	35
4.2	Diferenças entre a análise e a otimização de um projeto	36
4.3	Princípios básicos de uma Otimização Numérica	37
4.3.1	Otimização Numérica - Visão geral	37
4.3.2	Otimização Numérica - Visão quantitativa	37
4.3.3	Busca numérica por um ótimo	38
4.3.3.1	Condições de Kuhn-Tucker	39
4.4	Otimização Estrutural	40
4.4.1	Conexão entre análise estrutural e otimização numérica	41
4.4.2	Conceitos fundamentais	42
4.4.2.1	Variáveis de projeto	42
4.4.2.2	Propriedades de projeto	42
4.4.2.3	Respostas de projeto	44
4.4.2.4	Restrições de projeto	44
4.4.2.5	Função objetivo do projeto	44
<b>5</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>45</b>
5.1	Desenvolvimento geral	45

<b>5.2</b>	<b>Análise teórica de um painel reforçado</b>	<b>45</b>
5.2.1	Limitação de projeto - Espaçamento entre reforçadores	48
5.2.2	Limitação de projeto - Altura do reforçador	49
5.2.3	Metodologia utilizando o Fator de Eficiência de Farrar	50
<b>5.3</b>	<b>Otimização de um painel reforçado em material metálico</b>	<b>52</b>
5.3.1	Modelo em elementos finitos	52
5.3.2	Otimização	53
<b>5.4</b>	<b>Otimização de um painel reforçado em material composto</b>	<b>54</b>
5.4.1	Modelo em elementos finitos	54
5.4.2	Otimização	56
<b>6</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>57</b>
<b>6.1</b>	<b>Análise teórica vs. Otimização do painel reforçado</b>	<b>57</b>
6.1.1	Análise teórica do painel reforçado	57
6.1.2	Otimização do painel reforçado em material metálico	58
6.1.3	Comparação dos resultados	59
<b>6.2</b>	<b>Análise teórica vs. Otimização do painel reforçado</b>	<b>59</b>
6.2.1	Otimização do painel reforçado em material metálico	59
6.2.2	Otimização do painel reforçado em material composto	60
6.2.3	Comparação dos resultados	62
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>63</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>65</b>



# 1 Objetivos

Como trabalho final do curso de graduação em Engenharia Aeroespacial na Universidade Federal de Minas Gerais, este trabalho de pesquisa foi realizado com o objetivo de aplicar os conhecimentos adquiridos durante o curso, executando um trabalho de engenharia no âmbito de uma otimização estrutural de um painel reforçado utilizando como variáveis os parâmetros de laminação de cada componente estrutural e suas espessuras. Visando otimizar a estrutura de um painel reforçado quando submetido à uma determinada carga de compressão, foi feito um modelo em elementos finitos utilizando o *software FEMAP* e o *solver Nastran*. O revestimento do painel e a espessura dos reforçadores serão otimizados utilizando a SOL 200 do *Nastran* e, para as análises de flambagem, foi utilizado a SOL 105, obtendo os modos de flambagem da estrutura.



## 2 Introdução

A utilização de materiais compostos em estruturas primárias tem aumentado gradualmente nas últimas décadas. Atualmente, no setor aeronáutico, estruturas primárias como asas, fuselagens e empenagens possuem a tendência de serem projetadas utilizando painéis reforçados constituídos de material composto. Isto se deve ao fato de as estruturas em materiais compostos possuírem elevadas resistência e rigidez em relação a densidade (HERENCIA; WEAVER; FRISWELL, 2007). Além disso, variando-se a sequência do laminado e os ângulos de laminação, as propriedades do material composto podem ser otimizadas em vista do componente estrutural no qual o laminado será aplicado, apresentando um potencial de uso bastante elevado.

No decorrer dos anos, diversas técnicas de otimização foram desenvolvidas para auxiliar nos processos de obtenção do laminado ótimo para cada uso. Algumas das técnicas de otimização dos materiais compostos envolvem a variação do número de camadas do laminado e dos ângulos de laminação, e assumem que o material possui propriedades ortotrópicas, conforme utilizado por (SCHMIT; FARSHI, 1973). No entanto, segundo (CHAMIS, 1969) pelo fato de os materiais compostos poderem apresentar características anisotrópicas, resultados não conservativos podem ser obtidos, durante otimizações nas quais o comportamento em flambagem é observado, caso a anisotropia em flexão dos materiais não seja considerada. A otimização do número de camadas e dos ângulos de laminação de cada camada demanda um elevado custo computacional e consiste em um processo de otimização não linear com variáveis discretas e que possui um espaço de projeto não convexo.

Visando solucionar o problema de otimização das variáveis discretas da sequência de laminação dos materiais compostos, (MIKI, 1991) propôs a utilização dos parâmetros de laminação. O método proposto por (MIKI, 1991), considera que a rigidez no plano e a rigidez flexural de materiais compostos que possuem laminados simétricos e ortotrópicos são funções dos parâmetros de laminação, e esses parâmetros dependem da sequência de laminação. Com isso, os parâmetros de laminação podem ser utilizados como as variáveis de projeto durante a otimização e os pontos ótimos de projeto podem ser obtidos em função desses parâmetros e da função objetivo.

O objetivo deste trabalho de conclusão de curso, é portanto, descrever um processo de otimização de um painel reforçado em material composto utilizando os parâmetros de laminação e as espessuras do revestimento e do reforçador como variáveis de projeto. O problema foi dividido em duas etapas, na qual a primeira consistiu em validar o otimizador utilizado. Para isso, comparou-se um modelo de um painel reforçado em material metálico

com um painel reforçado proposto por (NIU, 1997). Após a validação do otimizador, fez-se a otimização do painel reforçado em material composto utilizando os parâmetros de laminação e aplicando restrições de projetos presentes na indústria aeronáutica. A função objetivo da otimização é obter uma estrutura mais leve e que suporte a carga de compressão aplicada, variando as propriedades do material e as espessuras do revestimento e do reforçador. Nesta etapa, assumiu-se que os laminados dos reforçadores e do revestimento eram simétricos e ortotrópicos.

## 3 Materiais Compostos

### 3.1 Desenvolvimento histórico

A implementação do uso de materiais compostos na indústria aeronáutica civil e militar seguiu os estágios típicos da implementação de qualquer nova tecnologia no mercado. Segundo ([KASSAPOGLOU, 2013](#)), primeiramente o uso da tecnologia de materiais compostos foi limitado às estruturas secundárias visto que minimizavam os riscos envolvidos e também possibilitava a coleta de dados, o que viabilizava uma melhor compreensão do comportamento das estruturas que possuíam essa tecnologia.

De acordo com ([DANIEL, 2006](#)), em 1942 o primeiro barco constituído de fibra de vidro foi fabricado, e nos anos 1950 as primeiras aplicações com materiais compostos em mísseis foram realizadas. Referindo-se a indústria aeronáutica no último século, o primeiro uso de materiais compostos mais avançados, segundo ([KASSAPOGLOU, 2013](#)), ocorreu no final da década de 1950 na aeronave *Akaflieg Phonix FS-24*. Essa aeronave consistiu em um planador projetado por professores e alunos da Universidade de Stuttgart e foi construído, inicialmente de madeira balsa, e posteriormente teve sua estrutura alterada para um sanduíche de compósitos de fibra de vidro com madeira tipo balsa. Após isso, no fim dos anos 1960, com a nova geração de materiais compostos avançados, como o carbono, a indústria de helicópteros foi a primeira a utilizá-los em estruturas primárias, destacando o projeto do *Aerospatiale AS-341 Gazelle*. Este helicóptero foi considerado um dos mais modernos na época, não só porque ele possuía um inovador rotor de cauda reduzindo drasticamente a emissão de ruídos, mas também, pelo fato de as pás do rotor principal serem constituídas de material composto.

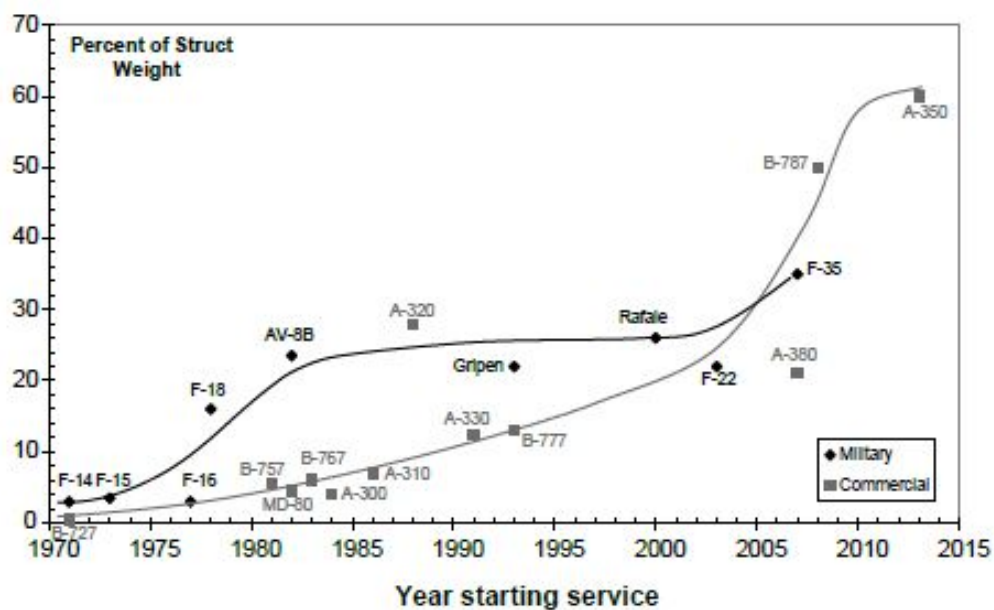
Por volta dos anos 1970 as primeiras aeronaves majoritariamente constituídas de materiais compostos começaram a surgir. Essas aeronaves eram pequenas e normalmente para uso recreativo ou para acrobacias, visto que com o uso de materiais compostos era possível obter uma redução de peso estrutural e portanto, aeronaves mais rápidas e ágeis quando comparadas às aeronaves da época. O uso de material composto teve início em aeronaves pequenas também pelo fato de os requisitos de certificação estrutural para aeronaves menores serem mais facilmente cumpridos quando comparados aos requisitos das aeronaves de grande porte. Além disso, de acordo com ([KASSAPOGLOU, 2013](#)), a performance dos materiais compostos não era completamente conhecida, por exemplo, a sensibilidade desse tipo de material ao dano por impacto e suas implicações para o projeto só foram ser melhor conhecidas no final dos anos 1970. Portanto, somente no final dos anos 1970 e início dos anos 1980 que a utilização de materiais compostos começou a ser expandida para aeronaves de porte maior, como a concepção da empenagem horizontal

do *Boeing 737*, que era uma estrutura primária construída de um sanduíche de materiais compostos. Seguindo a aplicação em grande escala de materiais compostos, destaca-se o *Airbus A320*, no qual tanto a empenagem horizontal e a vertical, quanto as superfícies de controle foram projetadas e fabricadas utilizando material composto.

A próxima aplicação significativa desse tipo de material em estruturas primárias foi no início dos anos 1990 com o *Boeing 777*, em que além das empenagens e superfícies de controle, as vigas principais do piso eram constituídas de material composto. Segundo (DANIEL, 2006), o maior sinal de aceitação do uso de materiais compostos na indústria aeronáutica civil, ocorreu no *Boeing 787 Dreamliner*, em que materiais como carbono/*epoxy* e grafite/titânio constituíam cerca de 50% do peso da aeronave, incluindo majoritariamente asas e fuselagem. Destaca-se também o *Airbus A380*, que utiliza materiais compostos, incluindo o *GLARE*, um laminado híbrido de fibra de vidro/*epoxy*/alumínio, que combina as vantagens e desvantagens dos materiais metálicos e compostos.

Observa-se, portanto, que o uso dos materiais compostos vem aumentando de maneira significativa na indústria aeronáutica. Uma maneira de perceber o aumento do uso de materiais compostos nessa indústria é com base na Figura 1, em que fica claro o aumento percentual da utilização desse tipo de material em relação ao peso das estruturas de vários modelos de aeronaves.

Figura 1 – Uso de materiais compostos na indústria aeronáutica.



Fonte: (KASSAPOGLOU, 2013, p. 6)

## 3.2 Visão geral

De acordo com (DANIEL, 2006), os materiais compostos possuem diversas vantagens de utilização em relação aos materiais metálicos como a elevada resistência, a elevada rigidez, a vida longa em fadiga, a baixa densidade e a alta adaptabilidade em relação a função de utilização pretendida pela estrutura. A superior performance estrutural dos materiais compostos se deve basicamente às elevadas resistência e rigidez específicas e à anisotropia do material, visto que devido à esta última característica, o material composto possui diversos graus de liberdade para uma configuração ótima do laminado. No geral, devido ao elevado número de graus de liberdade é possível realizar a otimização do laminado em material composto para diversas restrições de projeto e objetivos, como menor peso estrutural, máxima estabilidade dinâmica e/ou menor custo de fabricação. No entanto, todo o processo requer um confiável banco de dados das propriedades dos materiais, métodos de análises estruturais, técnicas de modelagem e simulações padronizadas e certificadas. Logo, devido às numerosas possibilidades de projeto, os processos e análises acabaram se tornando mais complexos e custosos em relação aos dos materiais convencionais.

Os materiais compostos possuem algumas limitações de uso em relação aos materiais metálicos. Do ponto de vista da micromecânica, as fibras dos materiais compostos possuem uma grande variabilidade nas propriedades de resistência e pontos de concentração de tensão locais reduzem consideravelmente a resistência a tração das estruturas projetadas em materiais compostos. Em relação a macromecânica, a anisotropia do material pode ser considerada como uma vantagem visto que permite que o material seja empregado em inúmeras direções de aplicação dos esforços, no entanto, esta mesma característica faz com que as análises desses materiais sejam muito mais complexas (DANIEL, 2006).

## 3.3 Teoria Clássica da Laminação

De acordo com (DANIEL, 2006) para o desenvolvimento da Teoria Clássica da Laminação, assumem-se as seguintes premissas e restrições:

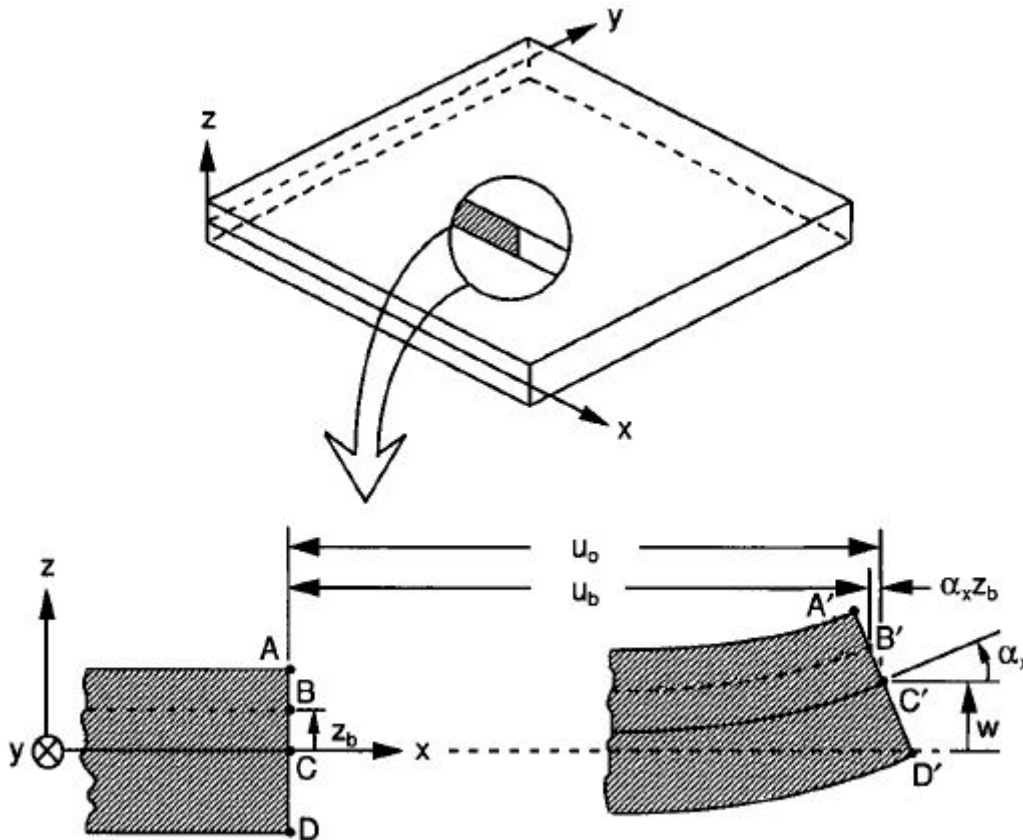
1. Cada lâmina do laminado é quasi-homogênea e ortotrópica;
2. O laminado é fino com as suas dimensões laterais muito maiores do que a sua espessura e é carregado somente no plano, isto é, o laminado e suas lâminas (exceto as bordas) estão em um estado plano de tensão ( $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ );
3. Todos os deslocamentos são pequenos comparados com a espessura do laminado ( $|u|, |v|, |w| \ll h$ );
4. Deslocamentos são contínuos ao longo da espessura;

5. Deslocamentos no plano variam linearmente ao longo da espessura do laminado, isto é, os deslocamentos  $u$  e  $v$  nas direções  $x$  e  $y$  são funções lineares de  $z$ ;
6. Linhas retas normais à superfície média permanecem retas e normais à essa superfície após a deformação. Isto implica que as deformações transversais de cisalhamento  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  são nulas;
7. As relações deformações-deslocamentos e tensões-deformações são lineares;
8. Distâncias normais à superfície média permanecem constantes, isto é, a deformação transversal normal,  $\varepsilon_z$  é zero. Isto implica que o deslocamento transversal  $w$  é independente da coordenada de espessura  $z$ .

### 3.3.1 Relações entre deformações e deslocamentos

Seguindo a [Figura 2](#) como referência, tem-se que o plano  $x - y$  é o plano médio do laminado, ou seja, é equidistante do laminado mais superior e do mais inferior. Portanto, este plano é chamado de *Plano médio* ou *Plano de referência*.

Figura 2 – Seção do laminado antes (ABCD) e depois da deformação (A'B'C'D').



Fonte: ([DANIEL, 2006](#))



Tem-se que os deslocamentos no plano  $u_0$  e  $v_0$  nas direções  $x$  e  $y$  e o deslocamento fora do plano  $w$  na direção  $z$  são funções somente de  $x$  e  $y$ , como mostrado a seguir.

$$\begin{aligned} u_o &= u_o(x, y) \\ v_o &= v_o(x, y) \\ w &= f(x, y) \end{aligned} \tag{3.1}$$

E que as rotações ao longo dos eixos  $x$  e  $y$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_x &= \frac{\partial w}{\partial x} \\ \alpha_y &= \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Portanto, os componentes de deslocamentos de um ponto  $B$  de coordenada  $z_b$ , onde  $z$  é a coordenada na espessura do laminado, são:

$$\begin{aligned} u &= u_o - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v &= v_o - z \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Para pequenos deslocamentos, as relações clássicas de deformação e deslocamento no campo elástico são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_o}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} = \gamma_z &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Sabe-se ainda, por definição, que:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x^o &= \frac{\partial u_o}{\partial x} \\
 \varepsilon_y^o &= \frac{\partial v_o}{\partial y} \\
 \gamma_{xy}^o &= \gamma_z^o = \frac{\partial u_o}{\partial y} + \frac{\partial v_o}{\partial x} \\
 \kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 \kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 \kappa_{xy} &= \kappa_z = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Portanto, as deformações em qualquer ponto do laminado podem ser relacionadas às deformações do plano e às curvaturas do laminado como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_z^o \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

### 3.3.2 Relações entre tensões e deformações de uma lâmina dentro de um laminado

Considera uma lâmina específica,  $k$  em um laminado multidirecional, na qual a distância  $z_k$  se refere a distância da lâmina ao plano de referência do Laminado. Tem-se que as relações de tensão-deformação para essa lâmina, no sistema de coordenada do laminado valem:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xs} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{ys} \\ Q_{sx} & Q_{sy} & Q_{ss} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_s \end{bmatrix}_k \tag{3.7}$$

Em que a rigidez representada por  $Q$ , vale:

$$\begin{aligned}
 Q_{xx} &= E_{11} - \frac{E_{13}^2}{E_{33}} \\
 Q_{xy} &= E_{12} - \frac{E_{13}E_{23}}{E_{33}} \\
 Q_{yy} &= E_{22} - \frac{E_{23}^2}{E_{33}} \\
 Q_{xs} &= E_{66}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Onde  $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{22}, E_{23}, E_{33}$  e  $E_{66}$  são constantes elásticas independentes do material.

Substituindo a [Equação 3.6](#) na [Equação 3.7](#) tem-se, de forma generalizada, a seguinte expressão para as deformações:

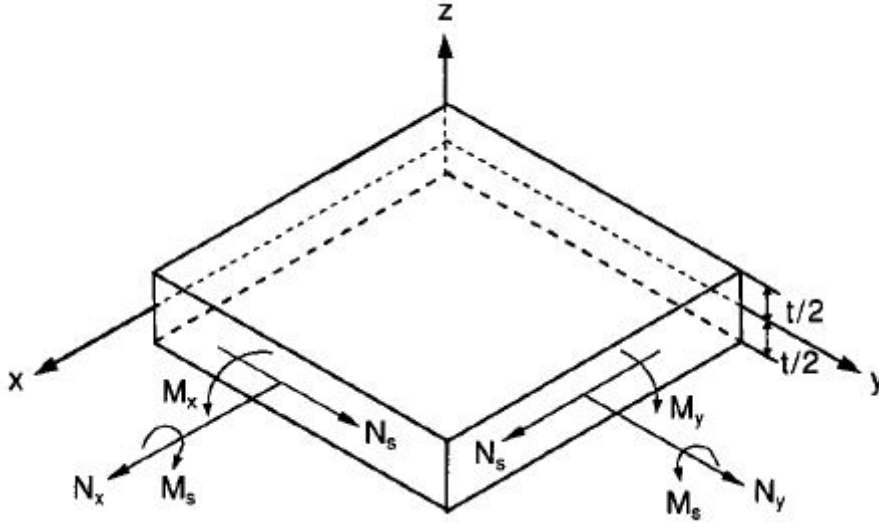
$$[\sigma]_{x,y}^k = [Q]_{x,y}^k [\varepsilon^o]_{x,y} + z [Q]_{x,y}^k [\kappa]_{x,y} \tag{3.9}$$

Nota-se, portanto, das [Equação 3.6](#) e [Equação 3.9](#) que mesmo que as deformações variem linearmente, não necessariamente as tensões variam da mesma maneira. Devido à discontinuidade da matriz de rigidez  $[Q]_{x,y}$  ao longo das lâminas do laminado, as tensões também podem variar de forma descontínua ao longo das lâminas.

### 3.3.3 Relações envolvendo forças e momentos resultantes

Tendo como referência a [Figura 3](#) e sabendo que as tensões ao longo do laminado variam devido às diferentes matrizes de rigidez de cada lâmina específica, pode-se fazer uma integração para obter forças e momentos resultantes.

Figura 3 – Elemento de uma lâmina com forças e momentos resultantes.



Fonte: (DANIEL, 2006)

As expressões seguintes se relacionam a essas forças e momentos resultantes.

$$N_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz$$

$$N_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz$$

$$N_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s dz$$

(3.10)

$$M_x^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x z dz$$

$$M_y^k = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y z dz$$

$$M_s^k = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_s z dz$$

Em que  $z$  é a coordenada da lâmina na seção do laminado,  $t$  é a espessura da lâmina,  $N_i^k$  são as forças ( $x, y, s$ ) por unidade de comprimento e  $M_i^k$  são os momentos ( $x, y, s$ ) por unidade de comprimento. E no caso de um laminado com diversas lâminas, a força e o momento total são obtidos fazendo o somatório dos efeitos de cada lâmina.

Tem-se, portanto, as seguintes expressões:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_s \end{bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k dz \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_s \end{bmatrix}_k = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_s \end{bmatrix}_k z dz$$

Substituindo a [Equação 3.7](#) na [Equação 3.11](#), tem-se:

$$N_{x,y} = [\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k - z_{k-1})] [\varepsilon^o]_{x,y} + [\sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)] [\kappa]_{x,y} \quad (3.12)$$

$$M_{x,y} = [\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2)] [\varepsilon^o]_{x,y} + [\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{x,y}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)] [\kappa]_{x,y}$$

Por definição tem-se as três matriz de rigidez do laminado como:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n [Q]_{ij}^k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n [Q]_{ij}^k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (3.13)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n [Q]_{ij}^k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

Portanto, em geral, substituindo [Equação 3.16](#) na [Equação 3.12](#), pode-se representar as forças e momentos resultantes em função das matrizes de rigidez [A], [B] e [D] como segue:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Para cada uma das matrizes de rigidez [A], [B] e [D] tem os seguintes significados físicos:

- Matriz [A]: corresponde a rigidez extensional, ou módulo do laminado no plano, e relaciona os carregamentos com as deformações no plano.
- Matriz [B]: corresponde ao acoplamento de rigidez, ou seja acoplamento entre o módulo do laminado no plano e o flexural. Relaciona os carregamentos no plano com curvaturas, e momentos de flexão com deformações no plano. Isto é, se  $B_{ij} \neq 0$ ,

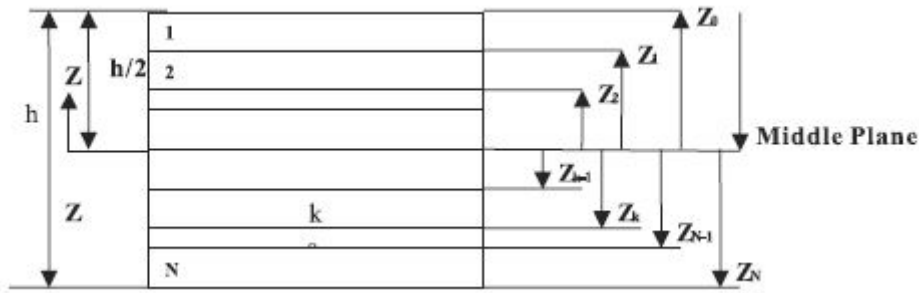
forças no plano produzem deformações flexurais e torsionais, em vez de deformações no plano; e momentos produzem extensões no plano e deformações cisalhantes no plano médio, em vez de produzir deformações flexurais e torsionais (curvaturas).

- Matriz  $[D]$ : corresponde a rigidez flexural do laminado, e relaciona momentos atuantes com as curvaturas.

### 3.4 Parâmetros de laminação

Os parâmetros de laminação, segundo (TSAI; PAGANO, 1968), propiciam uma representação compacta das propriedades de rigidez dos laminados de materiais compostos. A utilização dos parâmetros de laminação permite uma eficiente otimização de um laminado para as propriedades de rigidez desejadas.

Figura 4 – Referência de sequência de laminação.



Fonte: (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004)

Segundo a metodologia para utilização dos parâmetros de laminação apresentada por (MIKI, 1991) e tendo como referência a Figura 4 considera-se uma sequência de laminação, em que cada lâmina é ortotrópica, como segue:

$$[(\pm\theta_n)_{Nn} / \dots (\pm\theta_2)_{N2} / (\pm\theta_1)_{N1}]_s \quad (3.15)$$

Segundo (MIKI, 1991), os parâmetros de laminação são boas ferramentas para serem utilizadas como variáveis de projeto ao desenvolver um laminado, visto que é possível obter uma região viável dos parâmetros de laminação em um plano bidimensional. Quando tem-se um laminado simétrico e ortotrópico, a rigidez no plano (matriz A) e a rigidez flexural (matriz D) se tornam funções dos parâmetros de laminação, que são funções da sequência da laminação. E como este laminado é simétrico, a rigidez devido ao acoplamento no plano e a flexural (matriz B) é nula. Sabe-se que é possível através do método de utilizar parâmetros de laminação como variáveis de projeto, e obter pontos ótimos de projeto através de relações geométricas entre a região viável e a função objetivo do projeto.

Sabe-se, conforme demonstrado na seção da Teoria Clássica da Laminação, que:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^o \\ \kappa \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Segundo (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004), as matrizes de rigidez A, B e D mostradas acima podem ser expressas em função dos invariantes de rigidez dos materiais  $U$  e de 12 parâmetros de laminação  $\xi$  (TSAI; PAGANO, 1968). Considerando o laminado simétrico, a matriz de acoplamento de rigidez B será nula e então, o número de parâmetros de laminação será reduzido para 8. Considerando ainda, como prática de projeto adotada por vários fabricantes, que as lâminas são ortotrópicas e podem ter somente  $0^\circ/\pm 45^\circ/90^\circ$  como ângulos de laminação, os parâmetros de laminação são reduzidos para 6. Tem-se, portanto, as seguintes expressões para a rigidez no plano e para a rigidez flexural:

$$\begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{12} \\ A_{22} \\ A_{66} \\ A_{16} \\ A_{26} \end{bmatrix} = h \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^A & \xi_2^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^A & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1^A & \xi_2^A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^A & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\xi_3^A}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_3^A}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} D_{11} \\ D_{12} \\ D_{22} \\ D_{66} \\ D_{16} \\ D_{26} \end{bmatrix} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} 1 & \xi_1^D & \xi_2^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^D & 1 & 0 \\ 1 & -\xi_1^D & \xi_2^D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_2^D & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\xi_3^D}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi_3^D}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{bmatrix}$$

As propriedades de rigidez  $Q$  são dadas por:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12}E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{22} &= \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{21} &= Q_{12} \\
 Q_{66} &= G_{12} \\
 \nu_{21} &= \nu_{12} \frac{E_{22}}{E_{11}}
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

E tem-se que os parâmetros de laminação relacionados ao plano  $\xi_{[1,2,3]}^A$  e flexão  $\xi_{[1,2,3]}^D$ , são:

$$\begin{aligned}
 \xi_{[1,2,3]}^A &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \sin 2\varphi] dz \\
 \xi_{[1,2,3]}^D &= \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi, \cos 4\varphi, \sin 2\varphi] z^2 dz
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Baseando-se nas equações [Equação 3.18](#) e [Equação 3.16](#), percebe-se que os parâmetros de laminação  $\xi_3^D$  se relacionam com os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  da matriz  $[D]$ . Estes termos não possuem uma contribuição significativa para a análise e o critério de falha por flambagem que será avaliado, portanto, neste estudo o parâmetro  $\xi_3^D$  será negligenciado. E como o laminado é simétrico e balanceado em relação ao plano médio o parâmetro de laminação  $\xi_3^A$  também não será levado em consideração neste estudo, sobrando, portanto, os seguintes parâmetros de laminação que serão considerados durante a otimização do



painel reforçado.

$$\begin{aligned}
 \xi_1^A &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi] dz \\
 \xi_2^A &= \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 4\varphi] dz \\
 \xi_1^D &= \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 2\varphi] z^2 dz \\
 \xi_2^D &= \frac{12}{h^3} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\cos 4\varphi] z^2 dz
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Ainda que os parâmetros de laminação permitam uma otimização contínua do laminado com um número de variáveis de projeto relativamente baixo, eles não permitem a associação das restrições com a natureza discreta da espessura em ângulos de laminação (LIU; HAFTKA; TROMPETTE, 2004). Por exemplo, com a utilização desse método não é possível prever a acomodação de várias lâminas em sequência com uma mesma direção de ângulo de laminação. Portanto, após a obtenção da otimização do laminado utilizando os parâmetros de laminação, será necessário recorrer a um banco de dados de laminados para obter a solução discreta do laminado.

Resumidamente, tem-se, portanto, que a relação, originalmente, não-linear entre a rigidez de um laminado e a sequência de laminação discreta se torna linear quando as funções trigonométricas são substituídas pelos parâmetros de laminação. Comparando-se à sequência de laminação discreta, os parâmetros de laminação podem ser utilizados como variáveis contínuas e adimensionais dentro de uma otimização baseada no gradiente, conforme abordado nas seções seguintes.

## 3.5 Práticas de projeto adotadas

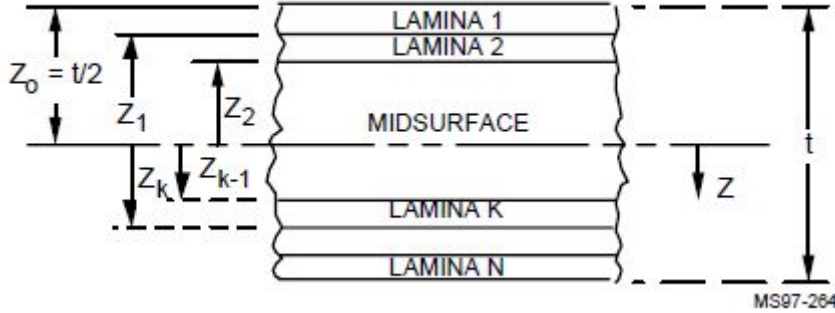
Esta seção apresenta regras e práticas relevantes utilizadas durante o projeto de estruturas em materiais compostos na indústria aeronáutica.

### 3.5.1 Laminados simétricos

Os laminados que possuem uma sequência de ângulos das lâminas simétrico em relação ao plano médio, são chamados de laminados simétricos. Conforme descrito por (MIL-HDBK-17-3F, 2002) e (NIU, 1992), a maior vantagem da utilização de um laminado simétrico é o desacoplamento entre o comportamento de membrana e flexão da estrutura.

Em um laminado simétrico, conforme notação apresentada na [Figura 5](#) e conforme a [Equação 3.21](#) matriz  $[B]$  do laminado se anula.

Figura 5 – Notação para espessura do laminado e sequência das lâminas



Fonte: ([MIL-HDBK-17-3F](#), 2002)

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k [z_k^2 - (z_{k-1})^2] \quad (3.21)$$

Sabe-se que  $\bar{Q}_{ij}$  corresponde a rigidez da lâmina. E sabe-se também que a matriz  $B_{ij}$  é a responsável pelo acoplamento entre a resposta no plano e a flexão do laminado. Portanto, conforme ([BAILIE J; LEY; PASRICHA, 1997](#)), quando a matriz  $B_{ij}$  não é zerada, um carregamento no plano induz curvaturas, e momentos de flexão induzem deformações no plano. Nota-se pela [Equação 3.21](#) que a matriz  $B_{ij}$  possui termos da coordenada  $z$  elevados ao quadrado, portanto, quando o laminado possui simetria geométrica e de materiais em relação ao plano médio, este termo é zerado, e portanto, tem-se  $B_{ij} = 0$ .

### 3.5.2 Laminados balanceados

Os laminados balanceados são aqueles em que todas as lâminas, com exceção das de  $0^\circ$  e das de  $90^\circ$ , devem ocorrer em pares de  $+\theta$  e  $-\theta$  acima e abaixo do plano médio do laminado. Para o conjunto de laminados compostos por lâminas com ângulos  $0/\pm 45/90$ , cada lâmina de  $+45^\circ$  deve ser acompanhada de uma lâmina de  $-45^\circ$ . Laminados balanceados possuem vantagens similares às vantagens dos laminados simétricos. Uma delas é que o acoplamento de membrana entre o comportamento normal e de cisalhamento no plano da estrutura é removido, visto que ambos os coeficientes,  $A_{16}$  e  $A_{26}$ , são iguais a zero ([BAILIE J; LEY; PASRICHA, 1997](#)). Este comportamento pode ser explicado observando as equações do carregamento de membrana de um laminado simétrico, [Equação 3.22](#),

Equação 3.23 e Equação 3.24.

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$A_{16} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{16})_k t_k \quad (3.23)$$

$$A_{26} = \sum_{k=1}^N (\overline{Q}_{26})_k t_k \quad (3.24)$$

Onde

$$(\overline{Q}_{16})_k = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})_k \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})_k \sin^3 \theta \cos \theta \quad (3.25)$$

$$(\overline{Q}_{26})_k = (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})_k \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66})_k \sin \theta \cos^3 \theta \quad (3.26)$$

Sabe-se que  $\overline{Q}_{ij}$  corresponde a rigidez da lâmina e que  $t_k$  corresponde a espessura da lâmina. Nota-se também que ambas as expressões de  $A_{16}$  e  $A_{26}$  contém potências ímpares de  $\sin \theta$  e  $\cos \theta$ . Logo lâminas com ângulos de  $0^\circ$  e  $90^\circ$  não contribuem para os termos de  $A_{16}$  e  $A_{26}$  e estes termos são reduzidos a zero em qualquer laminado balanceado (BAILIE J; LEY; PASRICHA, 1997).

A Figura 6 apresenta dois laminados, um desbalanceado, visto que faltam lâminas com  $-45^\circ$  e um balanceado.

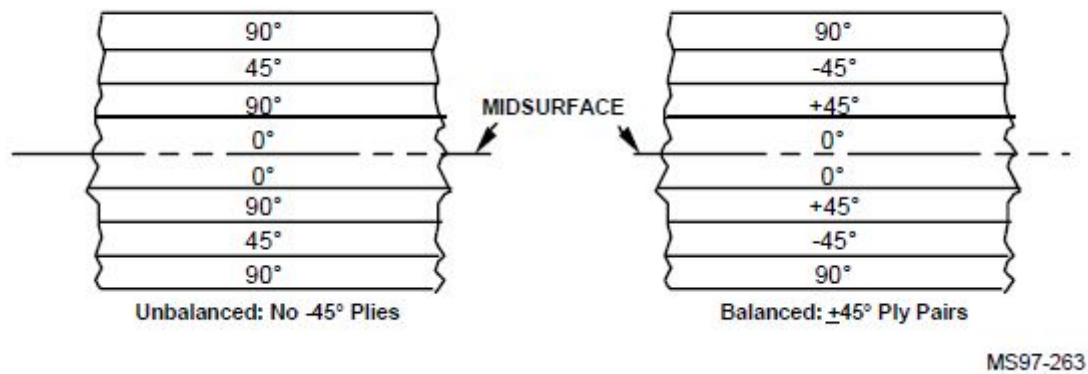
Portanto, satisfazendo esta prática de projeto de utilizar somente laminados balanceados, tem-se a seguinte Equação 3.27 resultante para tensão-deformação

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

### 3.5.3 Regra dos 10%

Esta prática de projeto não é determinada por documentação para ser rigorosamente seguida e também não há nenhuma documentação formal que comprove a sua validade. No entanto, esta prática foi seguida por diversas campanhas de projetos de estruturas em materiais compostos e demonstrou bons resultados e portanto, é adotada até os dias atuais

Figura 6 – Laminado desbalanceado e laminado balanceado



Fonte: ([MIL-HDBK-17-3F](#), 2002)

em diversos programas. A regra dos 10% determina que cada ângulo de laminação ( $0^\circ, \pm 45^\circ$  e  $90^\circ$ ) compreenda em pelo menos 10% das camadas do laminado final. O uso desta prática de projeto conduz a laminados utilizáveis que são mais robustos pelo fato de que eles menos susceptíveis à fragilidade associada aos laminados rigorosamente ortotrópicos ([BAILIE J](#); [LEY](#); [PASRICHA](#), 1997).

Além disso, segundo ([MIL-HDBK-17-3F](#), 2002), um comportamento do laminado dominado pela matriz, ou seja, efeitos não lineares, pode ser evitados em laminados onde a direção principal da fibra não é alinhada com o eixo principal do carregamento.

## 4 Otimização

### 4.1 Introdução

A otimização estrutural se refere a busca de um design estrutural que seja ótimo, ou "o melhor", variando alguns de seus parâmetros estruturais que são pré-estabelecidos. Durante a busca deste design ótimo, o projeto é guiado para satisfazer alguns limites operacionais que são impostos em relação às respostas da estrutura e também por limites nos valores dos parâmetros estruturais que são variados. Segundo (MOORE, 1994), a capacidade de otimização de projeto presente no *software* utilizado, *MSC Nastran*, se dá pelo fato de essa otimização ser baseada em uma análise de sensibilidade.

A capacidade de otimização de projeto presente no *software* *MSC Nastran* é beneficiada, significativamente, devido a análise de sensibilidade. A análise de sensibilidade do projeto computa taxas de variação das respostas da estrutura em relação a variação dos parâmetros de projeto. Esses parâmetros de projeto, ou variáveis de projeto, podem ser a espessura de um elemento de placa, o comprimento de elemento de barra, o raio de perfuração em uma estrutura, as propriedades dos materiais, entre outros. No caso a otimização conduzida neste trabalho, os parâmetros de projetos são relacionados à espessura dos elementos de placas e às propriedades dos materiais compostos. Essas taxas de variações, ou derivadas parciais, na linguagem de cálculo, são chamadas na otimização de coeficientes de sensibilidade de projeto.

Os coeficientes de sensibilidade de projeto são computados explicitamente no *MSC Nastran* e são de extrema importância no processo de otimização, visto que eles podem ser utilizados para prever como uma variação de projeto vai alterar uma resposta da estrutura. Quando estes coeficientes de sensibilidade são aplicados na solução de um otimizador, eles aumentam a eficiência do mesmo, visto que durante a busca para o melhor resultado, o algoritmo sabe não somente o estado atual do projeto, mas também tem uma ideia de qual direção utilizar para buscar o melhor projeto. A capacidade básica de otimização de projeto do *MSC Nastran* depende da existência de informação disponível sobre a sensibilidade do projeto, visto que a otimização não pode ser realizada sem isso.

A utilização de uma otimização se deu com o intuito de encontrar um design ótimo para a estrutura escolhida, além de automatizar o processo utilizando um processo racional e com uma abordagem matemática. A utilização de otimizações se dá em situações como as seguintes:

1. Produção de projetos mais eficientes com maiores margens de segurança;

2. Realização de estudos de viabilidade;
3. Auxílio em estudos de sensibilidade de projeto;
4. Validação de dados de testes e resultados de análises (correspondência de modelo).

No caso deste trabalho, o otimizador será primeiramente validado, sendo feita uma otimização de um painel reforçado em material metálico e então uma comparação com a teoria. E em sequência, após a validação deste otimizador, ele será utilizado para a obtenção de um projeto ótimo para um painel reforçado em material composto.

## 4.2 Diferenças entre a análise e a otimização de um projeto

Há algumas diferenças conceituais entre a otimização e a análise de um projeto, ainda que elas possam ser vistas como complementares.

Durante a realização de uma análise, é criada uma idealização matemática de um sistema físico visando obter respostas de determinadas questões. A classe dessas respostas obtidas depende do tipo de análise que se está buscando, já a precisão dessas respostas, depende da qualidade do modelo e do conhecimento geral do verdadeiro sistema. Portanto, a definição do tipo de elemento finito a ser utilizado, das condições de contorno do problema, dos carregamentos e da malha utilizada, tem um papel extremamente importante para que o modelo represente com precisão a estrutura física. Logo, o objetivo é obter uma previsão precisa das respostas que são esperadas da estrutura real.

Em contraste a isso, tem-se o modelo de otimização, no qual idealiza-se mudanças que podem ser feitas na estrutura para melhorar o seu desempenho ou a resposta a uma determinada característica. Portanto, para isso, deve-se primeiramente definir o que deseja-se melhorar no projeto, podendo-se ter como objetivo, por exemplo, uma estrutura com o menor peso possível ou com maior rigidez. Deve-se então estabelecer limites nos quais as variáveis podem variar e também expressões de máximos permissíveis, por exemplo.

A maior diferença portanto entre um modelo de análise e um modelo de otimização é que a análise estuda "a solução", definindo se é adequada ou se precisa ser melhorada, enquanto que a otimização busca "uma solução" ótima. Isto é, durante a performance de uma análise, encontra-se uma única solução, já na performance de uma otimização mais de uma solução é possível de ser encontrada. Matematicamente, durante uma otimização o espaço de solução pode conter um mínimo local, mas não necessariamente um mínimo global. Portanto, dependendo das condições iniciais impostas no problema pode-se obter uma solução, já caso essas condições iniciais se alterem, pode-se obter uma solução diferente da obtida anteriormente.

## 4.3 Princípios básicos de uma Otimização Numérica

### 4.3.1 Otimização Numérica - Visão geral

De acordo com (MOORE, 1994) a otimização pode ser visto como a seguinte "tarefa de projeto": encontrar um ponto mais baixo em um terreno adjacente. Supõe-se que um indivíduo esteja situado do lado de uma montanha e que deseja encontrar o próximo ponto de menor elevação, este seria o "objetivo". A localização de qualquer ponto será quantificada utilizando as suas coordenadas, logo essas serão as "variáveis de projeto". Supõe-se, também, que existem algumas cercas no terreno, que forçam a restrição do espaço de busca ser dentro do território cercado, logo as cercas são as "restrições" que limitam o "espaço de projeto".

Negligenciando a presença de mínimos locais, ou seja, tendo somente um ponto que pode ser considerado como ótimo, achar o ponto de menor elevação dentro deste terreno não é um problema muito grande para um indivíduo comum. Visto que tudo que ele precisará fazer é olhar para a região, e com uma boa perspectiva, apontar qual o ponto mínimo. No entanto, se pensarmos em um indivíduo que não possui a capacidade de enxergar, o processo de decisão não será tão simples, e isto é basicamente o que ocorre com um otimizador numérico.

Se tratando de um sistema computacional, a determinação do ponto próximo com menor elevação, ou seja, o valor da função objetivo, deverá ser feita utilizando análises numéricas. Portanto, necessita-se de um método sistemático para solucionar tais problemas e para isso tem-se diversas técnicas, chamadas de algoritmos de otimização numérica. Genericamente, os métodos de otimização numérica visam determinar a "direção da busca", o que permite encontrar um ótimo que obedeça as restrições estabelecidas.

Visando encontrar a "direção de busca", deve-se determinar o valor do gradiente da função objetivo e então, utilizar essa informação para estabelecer uma provável direção. No exemplo citado, de encontrar um ponto próximo com menor elevação, mesmo para um indivíduo privado de vista, é possível encontrar a direção dando passos pequenos, por exemplo, até encontrar as cercas como restrições e ir estabelecendo as diferenças nas elevações de cada passada. Este tipo de otimização que utiliza a ideia do gradiente é chamada, portanto, de método baseado no gradiente. E dentro deste método a ideia é repetir o processo de busca até que não seja mais possível reduzir a função objetivo.

### 4.3.2 Otimização Numérica - Visão quantitativa

Em uma visão quantitativa de uma otimização numérica, tem-se portanto, que deve-se encontrar o valor de  $\mathbf{X}$  que minimize ou maximize, dependendo do problema, a função objetivo  $F(\mathbf{X})$  submetida à:

## 1. Restrições de desigualdade

$$\begin{aligned} g_j(\mathbf{X}) &\leq 0 \\ j &= 1, \dots, n_g \end{aligned} \quad (4.1)$$

## 2. Restrições de igualdade

$$\begin{aligned} h_k(\mathbf{X}) &= 0 \\ k &= 1, \dots, n_h \end{aligned} \quad (4.2)$$

## 3. Restrições laterais

$$\begin{aligned} x_i^L &\leq x_i \leq x_i^U \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.3)$$

## 4. Variáveis de projeto

$$\mathbf{X} = x_1, x_2, \dots, x_n \quad (4.4)$$

Nesta notação abordada, tem-se que  $\mathbf{X}$ , em maiúsculo e negrito, é um vetor, enquanto as outras variáveis, em minúsculo, são membros deste vetor. E tem-se como função objetivo a quantidade escalar a ser minimizada. As restrições laterais são utilizadas como as variáveis de projeto para limitar a região de busca, e as restrições de desigualdade, convencionalmente, são expressas na forma de menor ou igual a zero. E as restrições de igualdade, caso existam, devem satisfazer o *design* "ótimo".

### 4.3.3 Busca numérica por um ótimo

A solução de otimização utilizada pelo *software MSC Nastran* durante o desenvolvimento deste estudo é referenciada como: Método baseado no gradiente.

O primeiro passo, em um procedimento numérico, é determinar a direção de busca. Este procedimento de busca é repetido até o ponto no qual não consegue obter melhorias na função objetivo sem violar as restrições. Em um contexto de otimização estrutural, a situação pode-se complicar sendo considerada com inviável (uma ou mais restrições são violadas), ou crítica (ponto situado exatamente nas restrições).

A ideia de utilizar o gradiente como base para a otimização, ou seja, dar pequenos passos nas diversas direções das variáveis de projeto, corresponde exatamente ao conceito matemático de diferenças finitas, que é dado por:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (4.5)$$



Onde  $\Delta x$  representa as pequenas variações, pequenos passos, dados na direção  $x$ . E na maioria dos casos, é considerado um vetor de variáveis de projeto, logo, o vetor gradiente resultante pode ser escrito em função das derivadas parciais conforme:

$$\nabla F(X) = \begin{bmatrix} \frac{df(x)}{dx_1} \\ \vdots \\ \frac{df(x)}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f(X + \Delta x_1) - F(X)}{\Delta x_1} \\ \vdots \\ \frac{f(X + \Delta x_n) - F(X)}{\Delta x_n} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Fisicamente, o vetor gradiente aponta na direção de aumento da função objetivo. Portanto, se quiser minimizar a função objetivo, deve-se mover na direção oposta daquele gradiente e o vetor de busca  $S$  é dado por:

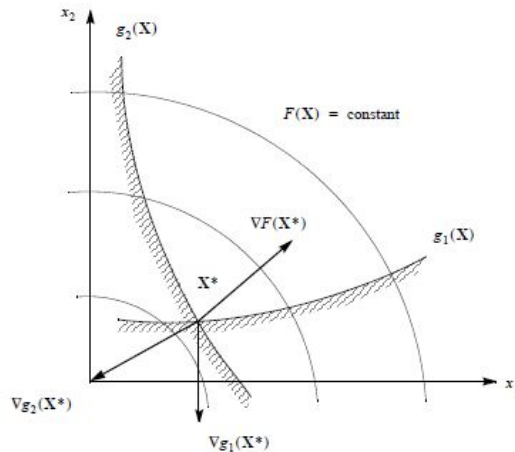
$$S = -\nabla F \quad (4.7)$$

O *software MSC Nastran* utiliza este método quando nenhuma das restrições são críticas ou violadas e somente do ponto inicial para outros. Embora esta direção de busca seja uma boa direção inicial, subseqüente direções de busca, utilizando este método, não funcionam propriamente para melhorar a função objetivo. Portanto, o *software MSC Nastran* utiliza métodos mais eficientes que podem ser generalizados para casos de restrições ativas e/ou violadas, que são as condições de Kuhn-Tucker em conjunto com o algoritmo de determinação da direção de busca.

#### 4.3.3.1 Condições de Kuhn-Tucker

Considerando um espaço para as variáveis de projeto, com as restrições  $g_1(X)$  e  $g_2(X)$  e uma função objetivo  $F(X)$ , conforme mostrado na [Figura 7](#).

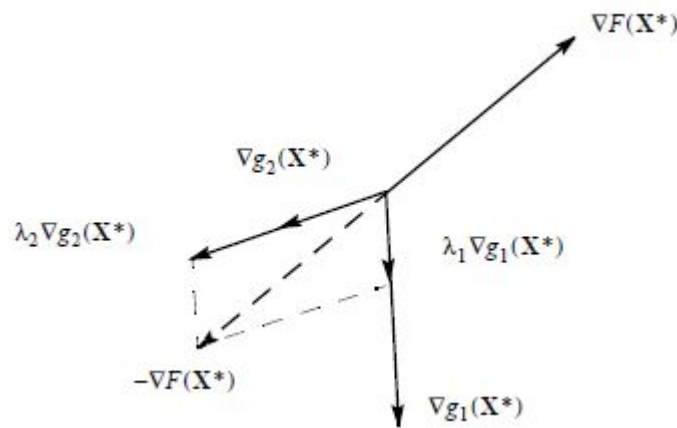
Figura 7 – Condições de Kuhn-Tucker em um ótimo restrito.



Fonte: (MOORE, 1994)

Os limites das restrições são as curvas nas quais os valores das restrições são identicamente iguais a zero. O ponto ótimo, nesta na Figura 7, é o ponto na interseção das duas curvas de restrições (ponto  $X^*$ ). Caso os gradientes das duas curvas de restrições sejam computados, observa-se que eles apontam em diferentes direções, visto que os gradientes apontam na direção de crescimento do valor da função. Portanto, para essa situação de um ótimo restrito, as condições de Kuhn-Tucker estabelecem que o vetor soma da função objetivo e das restrições devem ser iguais a zero, dados apropriados fatores multiplicativos (multiplicadores de Lagrange). A Figura 8 mostra a situação em que os multiplicadores de Lagrange  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  fazem com que o vetor soma seja zero.

Figura 8 – Interpretação gráfica das condições de Kuhn-Tucker.



Fonte: (MOORE, 1994)

## 4.4 Otimização Estrutural

Durante a realização de uma análise estrutural, o objetivo é construir uma idealização matemática de um determinado sistema físico. Para isso, deve-se portanto, determinar as propriedades da análise, o tipo de resposta que será obtida e também uma malha em elementos finitos que será capaz de computar as respostas de maneira acurada. As propriedades da análise consistem em definir os materiais, as espessuras dos elementos, as malhas dos elementos, entre outras variáveis, e os tipos de respostas podem ser, por exemplo, tensões ou deformações nos elementos, frequências modais e outros. Já durante a realização de uma otimização, deseja-se definir como o modelo varia, em busca de um design melhor, com a alteração das variáveis de otimização.

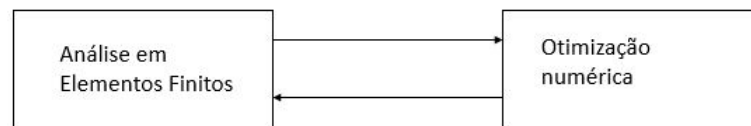
A otimização utilizada pelo *software MSC Nastran* conecta portanto as duas propostas acima utilizando conceitos intermediários:

1. Propriedades de projeto: proporcionam uma conexão entre as variáveis de projeto utilizadas pelo otimizador e as propriedades dos elementos utilizadas pela análise em elementos finitos;
2. Respostas de projeto: é um resultado físico que pode ser utilizado como um objetivo de projeto ou, seguindo imposições do usuário, como uma restrição de projeto.

#### 4.4.1 Conexão entre análise estrutural e otimização numérica

As primeiras tentativas utilizadas para conectarem a análise estrutural com a otimização numérica se baseavam na ideia de um acoplamento direto, chamado também de "*black box*", conforme mostrado na [Figura 9](#).

Figura 9 – Acoplamento direto ou "*black box*".



Fonte: ([MOORE, 1994](#))

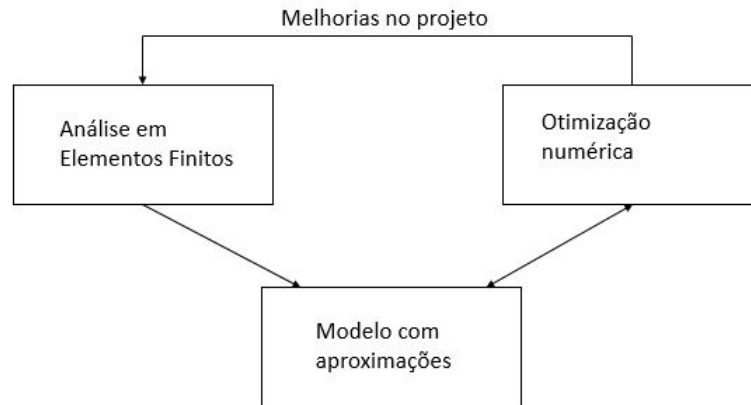
Neste método, todas as vezes que o otimizador necessita de uma avaliação da função objetivo seria realizada uma análise em elementos finitos. Este método, portanto, se mostrou inviável mesmo para problemas pequenos, visto que necessitaria de muitos recursos computacionais. O principal fator relacionado à otimização estrutural que torna a ideia do "*black box*" inviável, é que as respostas quantitativas de interesse são normalmente funções implícitas das variáveis de projeto. Isto é, por exemplo, a variação de tensão em um elemento de placa em função da variação da espessura da mesma, só pode ser obtido realizando uma análise em elementos finitos da estrutura.

Portanto, para evitar que seja feita uma análise em elementos finitos para cada variação durante a otimização numérica, o *MSC Nastran* utiliza o conceito de realizar aproximações, conforme [Figura 10](#).

O conceito das aproximações baseia-se principalmente na ideia de reduzir o problema suficientemente, de maneira que, somente as informações mais pertinentes sejam consideradas no processo de geração do melhor projeto. Uma vez que um novo design é proposto pelo otimizador, baseado na informação fornecida pelo modelo aproximado, o próximo passo é realizar uma análise mais detalhada em elementos finitos da nova configuração. E com isso, é possível checar se o novo design realmente satisfaz as restrições de projeto e reduz a função objetivo. Se uma subsequente otimização ainda for necessária, a análise em elementos finitos serve como base para construir um submodelo com apro-

ximações. E portanto, estes ciclos de projetos são repetidos até que a convergência seja atingida.

Figura 10 – Acoplamento entre análise em elementos finitos e otimização numérica utilizando aproximações.



Fonte: (MOORE, 1994)

#### 4.4.2 Conceitos fundamentais

Dentro da otimização estrutural do *MSC Nastran* há alguns conceitos fundamentais que devem ser destacados, conforme segue.

##### 4.4.2.1 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto são quantidades que são conhecidas pelo otimizador e que podem ser diretamente alteradas para satisfazerem a proposta da otimização. No *MSC Nastran*, as variáveis de projeto são definidas pela entrada do tipo DESVAR e elas só afetam a análise em elementos finitos caso sejam conectadas com as propriedades de projeto e/ou respostas de projeto.

É função do usuário definir os limites de variação das variáveis de projeto, ou seja, impor as restrições. O *MSC Nastran* é capaz de distinguir entre variáveis de projeto dependentes e independentes, e também é capaz de utilizar o conceito de variáveis discretas, onde o valor das variáveis é restrito a um específico *set* de números reais.

No caso deste estudo, as variáveis de projeto, detalhadas na seção do Desenvolvimento, são as espessuras do revestimento e do reforçador, e também os parâmetros de laminação ( $\xi$ ).

##### 4.4.2.2 Propriedades de projeto

As propriedades de projeto são quantidades que influenciam diretamente na análise de elementos finitos e que incluem propriedades como espessuras, materiais, densidades e

posicionamento dos nós.

As propriedades dos elementos variam de acordo com o tipo de elemento utilizado no modelo, conforme mostrado na [Figura 11](#). Bem como as propriedades dos materiais, dependem do tipo de entrada de material que será fornecida.

Figura 11 – Exemplos de propriedades dos elementos e propriedades do materiais.

Property Entry	Property
PACABS	TESTAR, CUTFR, B, K, M
PACBAR	MBACK, MSEPTM, FRESON, KRESON
PBAR	A, I1, I2, J, NSM, C1, C2, D1, D2, E1, D2, F1, F2, K1, K2, I12
PBARL	DIMi, NSM
PBEAM	(A(i), I1(i), I2(i), I12(i), J(i), NSM(i), C1(i), C2(i), D1(i), D2(i), E1(i), E2(i), F1(i), F2(i), i = A, B, 1 ... 9), K1, K2, S1, S2, (NSI(j), CW(j), M1(j), M2(j), N1(j), N2(j), j = A, B)
PBEAML	(DIMi(j), NSM(j), j = A, B, 1 ... 9)
PBRSECT/PBMSECT	W (Overall Width), H(Overall Height), T(Overall Thickness) and T(n) Thickness of segment. See <a href="#">PBRSECT</a> , 657 for more information.
PBUSH	(Ki, Bi, GEi, i = 1, 6), SA, ST, EA, ET
PBUSHID	K, C, M, SA, SE (only linear elements are supported for optimization)
PCOMP	Z0, NSM, SB, TREF, GE, Ti, THETAi
PDAMP	B1, B2, B3, B4
PELAS	K1, GE1, S1, K2, GE2, S2
PGAP	U0, F0, KA, KB, KT, MU1, MU2
PCOMPG	Z0, NSM, SB, TREF, GE, Ti, THETAi
PMASS	M1, M2, M3, M4
PROD	A, J, C, NSM
PSHEAR	T, NSM, F1, F2
PSHELL	T, 12I/T**3, TS/T, NSM, Z1, Z2 (The 12I/T**3 term can be designed but must be referenced by Field ID = 6 rather than by name.)
PTUBE	OD, T, NSM
PVISC	CE1, CR1, CE2, CR2
GPLY	T, THETA

Material Entry	Material Properties
MAT1	E, G, NU, RHO, A, TREF, GE
MAT2	G11, G12, G13, G22, G23, G33, RHO, A1, A2, A3, TREF, GE
MAT3	EX, ETH, EZ, NUXTH, NUZTH, NUZX, RHO, GZX, AX, ATH, AZ, TREF, GE
MAT8	E1, E2, NU12, G12, G1Z, G2Z, RHO, A1, A2, TREF, Xt, Xc, Yt, Yc, S, GE
MAT9	G11, G12, G13, G14, G15, G16, G22, G23, G24, G25, G26, G33, G34, G35, G36, G44, G45, G46, G55, G56, G66, RHO, A1, A2, A3, A4, A5, A6, TREF, GE
MAT10	BULK, RHO, C, GE

Fonte: (MOORE, 1994)

No caso deste estudo, detalhado na seção do Desenvolvimento, propriedades de elementos do tipo PSHELL e propriedades dos materiais do tipo MAT2 foram utilizadas para gerar o modelo.

#### 4.4.2.3 Respostas de projeto

As respostas de projeto são utilizadas no *MSC Nastran* como bases para definirem o objetivo e as restrições de projeto. Assim como as propriedades de projeto, as respostas de projeto funcionam como uma conexão entre a análise em elementos finitos e a otimização numérica, e podem ser divididas em três tipos.

1. Resposta tipo 1: essas respostas são obtidas diretamente de uma análise do *MSC Nastran* e utiliza-se DRESP1 para acessá-las. Exemplos: peso estrutural, deslocamentos de nós e tensões nos elementos.
2. Resposta tipo 2: esse tipo de resposta permite que o usuário utilize uma equação para manipular as respostas do tipo 1 e utiliza-se DRESP2 para acessá-las. Permite, por exemplo, que o usuário formule critérios de falha, avalie o comportamento referente a flambagem, imponha limitações para as respostas, entre outros.
3. Resposta tipo 3: este tipo de resposta é semelhante ao tipo 2, mas permite que o usuário utilize o API (*Application Programming Interface*) para buscar processos externos ao *MSC Nastran*. Utiliza-se DRESP3 para acessá-las.

No caso deste estudo, detalhado na seção do Desenvolvimento, as respostas de projeto do tipo 1 e 2 (DRESP1 e DRESP2) foram utilizadas no modelo.

#### 4.4.2.4 Restrições de projeto

As restrições de projeto são acessadas utilizando o DCONSTR para identificarem um resposta (DRESP1, DRESP2 ou DRESP3) e assim, impor um limite a essa resposta.

$$r_j^L \leq r_j(X) \leq r_j^U \quad (4.8)$$

onde  $r_j^L$  é o limite inferior da  $j$ -ésima resposta e  $r_j^U$  é o limite superior.

#### 4.4.2.5 Função objetivo do projeto

A função objetivo do projeto é uma quantidade escalar que deve ser minimizada ou maximizada pelo otimizador, dependendo do problema proposto. Esta função objetivo é selecionada utilizando o comando DESOBJ e este comando referencia a alguma resposta do tipo DRESP1, DRESP2 ou DRESP3 que deve ser uma resposta escalar simples.

No caso deste estudo, detalhado na seção do Desenvolvimento, a função objetivo é minimizar o peso da estrutura. Para isso, utiliza-se de três soluções do *MSC Nastran*, a solução de otimização (SOL 200), a solução estática (SOL 101) a solução de flambagem (SOL 105).

## 5 Metodologia

### 5.1 Desenvolvimento geral

Visando realizar a otimização estrutural de um painel reforçado utilizando os parâmetros de laminação, realizou-se uma sequência de passos conforme segue:

1. Análise teórica de um painel reforçado de material metálico utilizando a metodologia do *Fator de Eficiência de Farrar* proposta por (NIU, 1997)
2. Otimização de um painel reforçado de material metálico utilizando o *MSC Nastran* e comparação dos resultados obtidos com o resultado teórico obtido no item anterior. O objetivo desta etapa era validar o método de otimização utilizado para assim poder aplicá-lo em outros painéis reforçados;
3. Otimização de um painel reforçado de material composto utilizando o *MSC Nastran* e comparação dos resultados obtidos com os resultados obtidos para um painel reforçado de material metálico.

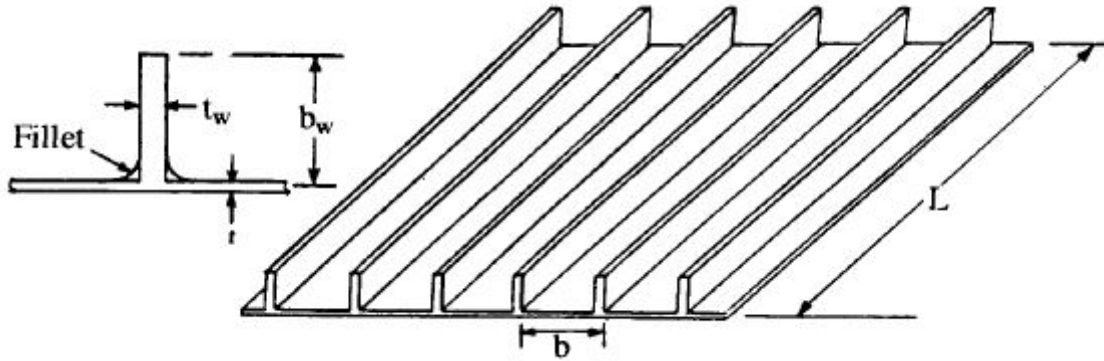
As seções seguintes descrevem a metodologia utilizada com mais detalhes e apresentam os modelos das otimizações realizadas e o capítulo seguinte contém os resultados obtidos.

### 5.2 Análise teórica de um painel reforçado

Visando realizar a análise teórica de um painel reforçado fabricado em material metálico, assumem-se algumas hipóteses como segue e considera-se o painel conforme mostrado na [Figura 12](#).

- Painel suficientemente largo para permitir que seja tratado como uma simples coluna, ou seja, não há restrições impostas nas bordas longitudinais do painel;
- O painel possui uma fixação de apoio no final da sua estrutura, em relação ao comprimento  $L$ . Deve-se levar em consideração este comprimento como sendo o o comprimento efetivo do painel, e não o comprimento do *pocket*;
- As nervuras não colocam restrições à flambagem.

Figura 12 – Típico painel reforçado.



Fonte: (NIU, 1997)

Nota-se que

$t$  - Espessura do revestimento

$b$  - Largura entre reforçadores

$t_w$  - Espessura do reforçador

$b_w$  - Altura do reforçador

$L$  - Comprimento

A Figura 13 mostra a tensão de flambagem inicial de diversas combinações de painéis reforçados, como razão entre  $\frac{f_i}{f_o}$ , considerando a seguinte notação.

$f$  - Tensão aplicada

$f_E$  - Tensão de instabilidade de Euler

$f_i$  - Tensão inicial de flambagem do painel

$f_o$  - Tensão inicial de flambagem de um painel reforçado longo, com espaçamento entre reforçadores ( $b$ ) e espessura do revestimento ( $t$ ), simplesmente apoiado ao longo da borda  $= 3.62E_t(\frac{t}{b})^2$

Segundo (NIU, 1997), para um dado material, no qual a relação entre  $f$  e  $E_t$  é conhecida, o Fator de Eficiência de Farrar pode ser dado por:

$$F = f\left(\frac{L}{NE_t}\right)^{0.5} \quad (5.1)$$

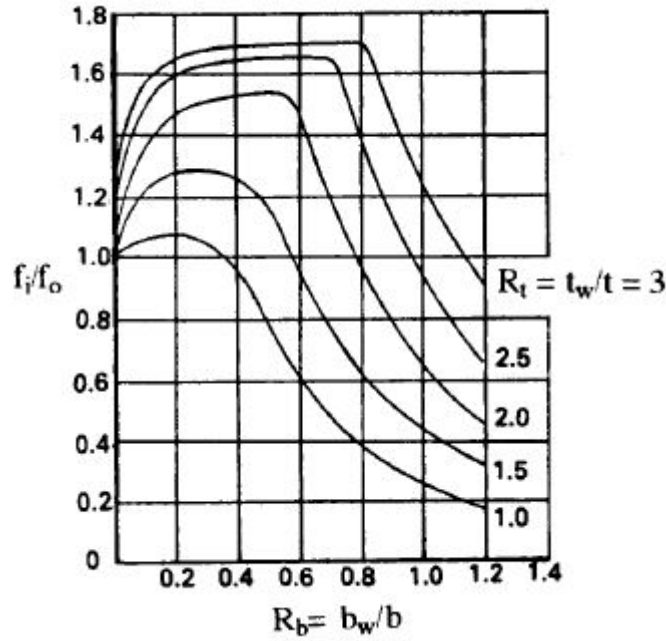
Onde

$N$  - Carga por unidade de comprimento do painel (lbs/in)

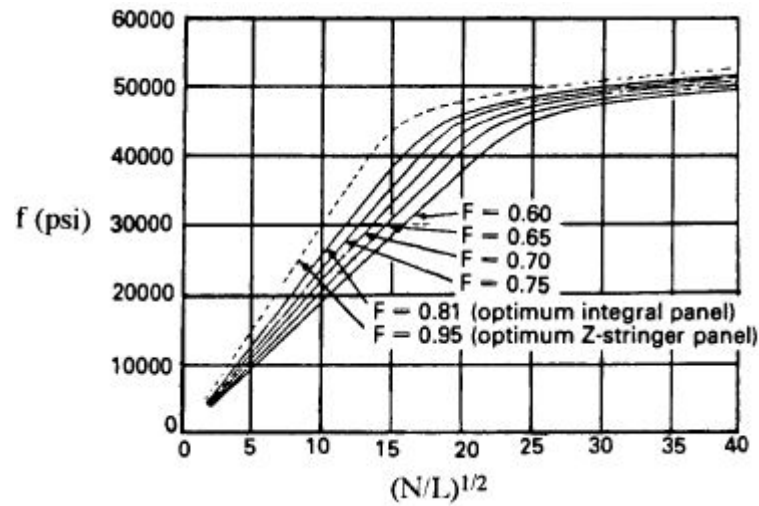
$E_t$  - Módulo de elasticidade tangente (psi)



Figura 13 – Tensão inicial de flambagem.



Fonte: (NIU, 1997)

Figura 14 – Tensão no painel *vs.* índice estrutural  $\frac{N}{L}$  para material Al 2024-T3.

Fonte: (NIU, 1997)

Este fator pode ser utilizado, conforme [Figura 14](#) que mostra para um painel reforçado de Al 2024-T3.

Sabe-se que a tensão inicial de flambagem ( $f_i$ ) é dada por:

$$f_i = \left(\frac{f_i}{f_o}\right) [3.62 E_t \left(\frac{t}{b}\right)^2] \quad (5.2)$$

E que a tensão de instabilidade de Euler ( $f_E$ ) é dada por:

$$f_E = \pi^2 E_t \left( \frac{\rho}{L} \right)^2 \quad (5.3)$$

Onde  $\rho$  corresponde ao raio de giração do painel reforçado em relação ao seu eixo neutro e tem que:

$$\rho^2 = \frac{b^2 R_b^3 R_t}{12(1 + R_b R_t)} (4 + R_b R_t)^2 \quad (5.4)$$

Em que

$$R_b = \frac{b_w}{b} \quad (5.5)$$

$$R_t = \frac{t_w}{t} \quad (5.6)$$

Relacionando a tensão no painel com a intensidade de carga tem-se:

$$f = \frac{N}{t(1 + R_b R_t)} \quad (5.7)$$

Portanto, impõe-se a condição de que tensão aplicada é igual à tensão inicial de flambagem do painel que é igual à tensão de instabilidade de Euler ( $f = f_i = f_E$ ).

Tomando-se a [Equação 5.2](#) x [Equação 5.3](#) x [Equação 5.7](#)<sup>2</sup>, obtem-se:

$$f^4 = \pi^2 E_t^2 \left( \frac{3.62 \rho^2 f_i}{f_o b^2 L^2} \right) \left[ \frac{N^2}{(1 + R_b R_t)^2} \right] \quad (5.8)$$

Tirando a raiz quarta de ambos os lados, tem-se:

$$f = F \left( \frac{N E_t}{L} \right)^{0.5} \quad (5.9)$$

Onde o *Fator de Eficiência de Farrar* vale:

$$F = 1.314 \frac{R_b^3 R_t (4 + R_b R_t)^{0.25}}{(1 + R_b R_t)} \left( \frac{f_i}{f_o} \right)^{0.25} \quad (5.10)$$

### 5.2.1 Limitação de projeto - Espaçamento entre reforçadores

Considerando um espaçamento entre reforçadores ( $b$ ) já previamente determinado, devido ao modelo em elementos finitos que foi desenvolvido para as etapas de otimização, tem-se, portanto, uma limitação de projeto. Segundo (NIU, 1997), para manter o valor de

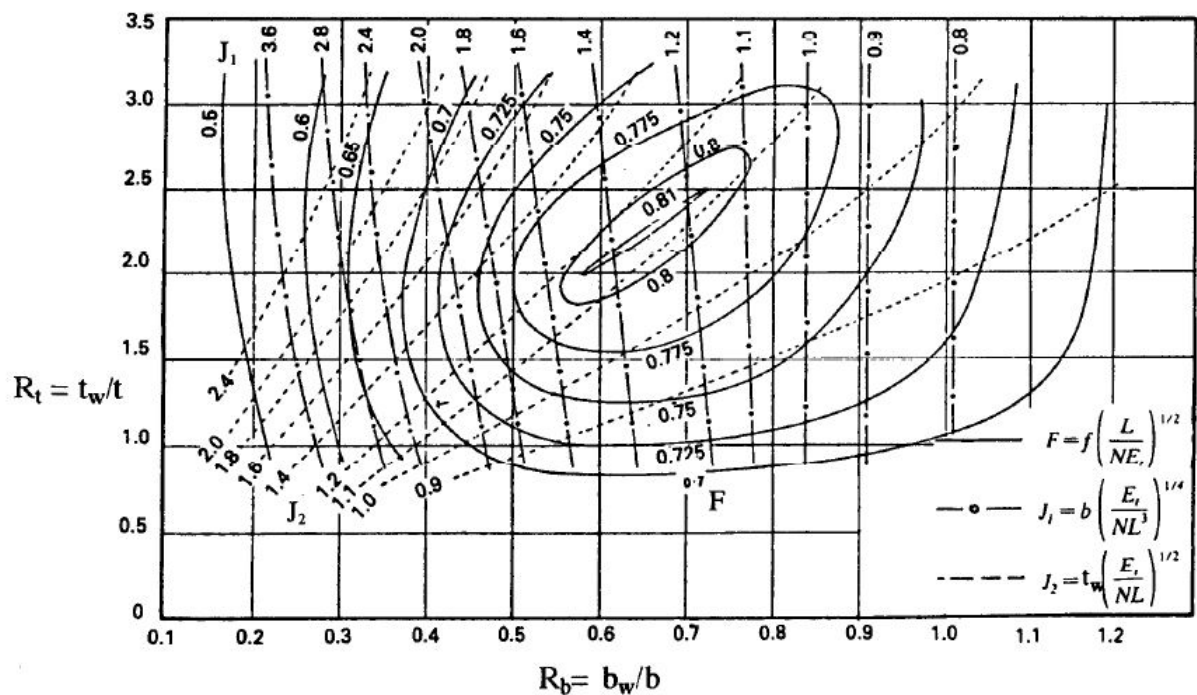
largura entre reforçadores constante (b) ou o valor de espessura do reforçador também constante ( $t_w$ ), tem-se as seguintes relações, que também são plotadas na [Figura 15](#).

$$J_1 = b(\frac{E_t}{NL^3})^{0.25} \quad (5.11)$$

$$J_2 = t_w (\frac{E_t}{NI^3})^{0.5} \quad (5.12)$$

No caso deste estudo, considerou-se que a largura entre os reforçadores será constante, visando obter os outros parâmetros geométricos do painel reforçado ótimo.

Figura 15 – Curvas para projetos com limitações - Espessura do reforçador ( $t_w$ ) e largura do reforçador ( $b$ ).



Fonte: (NIU, 1997)

### 5.2.2 Limitação de projeto - Altura do reforçador

Considerando uma altura de reforçador ( $b_w$ ) já previamente determinada, devido ao modelo em elementos finitos que foi desenvolvido para as etapas de otimização, tem-se, portanto, mais uma limitação de projeto. Segundo (NIU, 1997), para manter o valor da

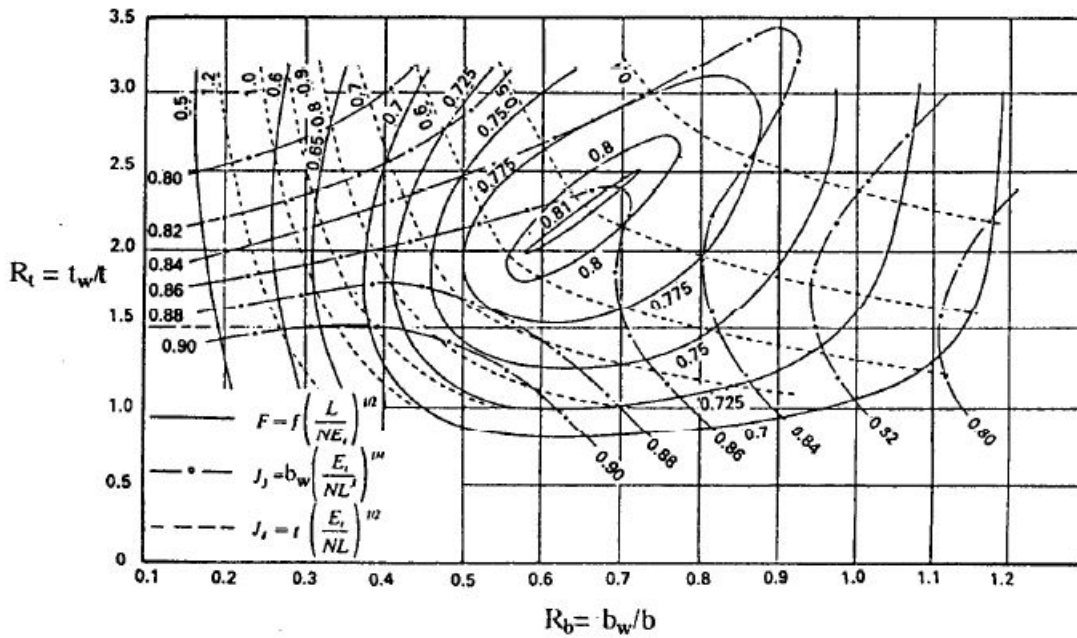
altura do reforçador constante ( $b_w$ ) ou o valor de espessura do revestimento também constante ( $t$ ), tem-se as seguintes relações, que também são plotadas na Figura 16.

$$J_3 = b_w \left( \frac{E_t}{NL^3} \right)^{0.25} \quad (5.13)$$

$$J_4 = t \left( \frac{E_t}{NL^3} \right)^{0.5} \quad (5.14)$$

No caso deste estudo, considerou-se que a altura do reforçador será constante, visando obter os outros parâmetros geométricos do painel reforçado ótimo.

Figura 16 – Curvas para projetos com limitações - Altura do reforçador ( $b_w$ ) e espessura do revestimento ( $t$ ).



Fonte: (NIU, 1997)

### 5.2.3 Metodologia utilizando o Fator de Eficiência de Farrar

Visando, portanto, projetar um painel reforçado otimizado, seguindo a metodologia de *Fator de Eficiência de Farrar* proposta por (NIU, 1997), submetido a uma carga de intensidade  $N$  (lbs/in), alguns passos foram seguidos:

- Determinação de  $R_b$

Como há duas limitações de projeto, largura entre os reforçadores ( $b$ ) e altura do reforçador ( $b_w$ ), o valor de  $R_b$  já está pré-determinado, sendo:

$$R_b=0.33;$$

- Determinação de  $R_t$  e  $F$

Com base na Figura 15 e Figura 16, para garantir as limitações de projeto determinadas, tem-se que:

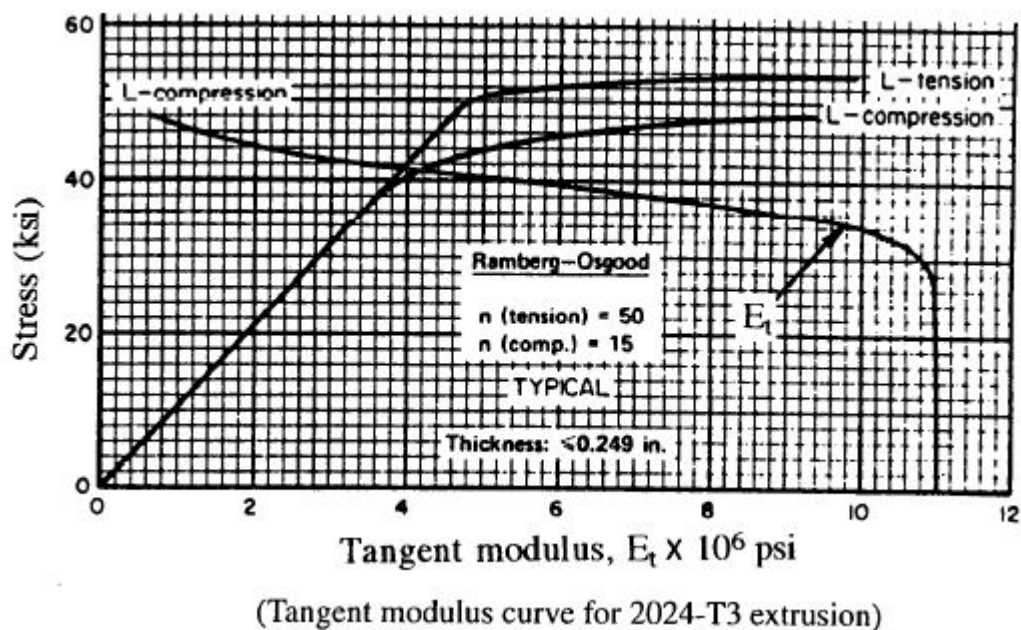
$$F=0.65; R_t=1.5;$$

- Da Figura 14, encontrou-se o valor de "f" correspondente a carga por largura (N/L), utilizando  $F=0.65$  para o Al 2024-T3 extrudado;
- Encontrou-se o módulo tangente  $E_t$  correspondente ao valor de "f", da curva de módulo tangente do material, conforme Figura 17;
- Determinação de  $J_4$  com base na Figura 16, sendo  $F=0.65$ ,  $R_t=1.5$  e  $R_b=0.33$ .
- Determinou-se os valores de  $t$  e  $t_w$  conforme Equação 5.15 e Equação 5.16.

$$t = J_4 \left( \frac{NL}{E_t} \right)^{0.5} \quad (5.15)$$

$$t_w = 1.5t \quad (5.16)$$

Figura 17 – Curva do módulo de elasticidade tangente para Al 2014-T3 extrudado.



Fonte: (NIU, 1997)



### 5.3 Otimização de um painel reforçado em material metálico

Realizou-se uma otimização de um painel reforçado em material metálico utilizando o *MSC Nastran*, para que após a validação do otimizador ele pudesse ser aplicado para outros tipos de painéis reforçados, como os painéis em material composto.

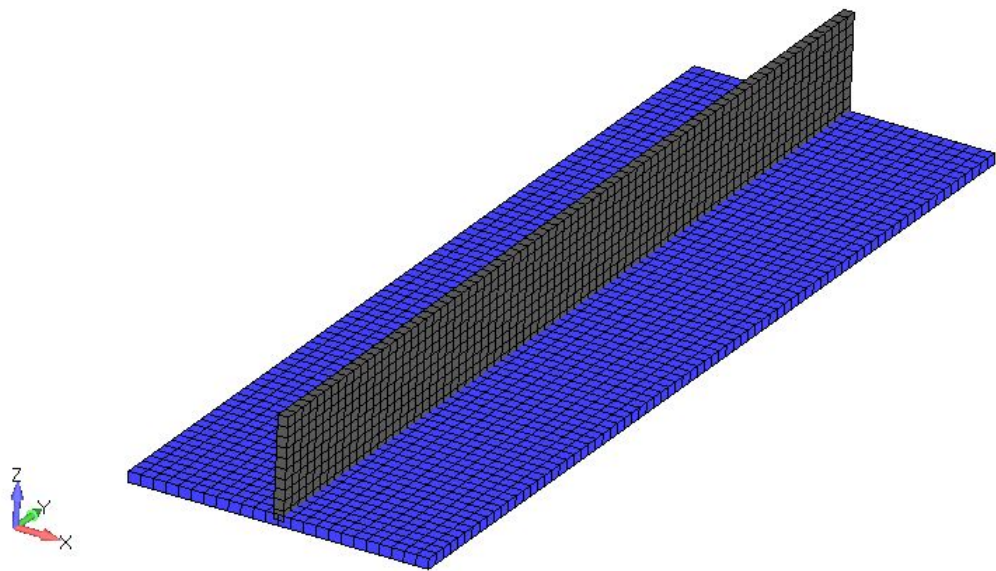
#### 5.3.1 Modelo em elementos finitos

Desenvolveu-se um modelo em elementos finitos de um painel reforçado, conforme [Figura 18](#) para realizar a análise de otimização. Este modelo foi desenvolvido utilizando somente um tipo de material, tanto para o revestimento quanto para o reforçador (Al 2024 T3), com as características conforme mostrado na [Tabela 1](#).

Propriedades Al 2024-T3 extrudado		
Módulo de elasticidade tangente( $E_t$ )	$66.2 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$	$9.16 \times 10^3 \text{ ksi}$
Coefficiente de Poisson ( $\nu$ )	0.33	0.33
Densidade mássica ( $\rho$ )	$2.8 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$	$0.1 \text{ lb/in}^3$

Tabela 1 – Propriedades do material metálico. Fonte:([RICE, 2003](#))

Figura 18 – Modelo do reforçador em material metálico.

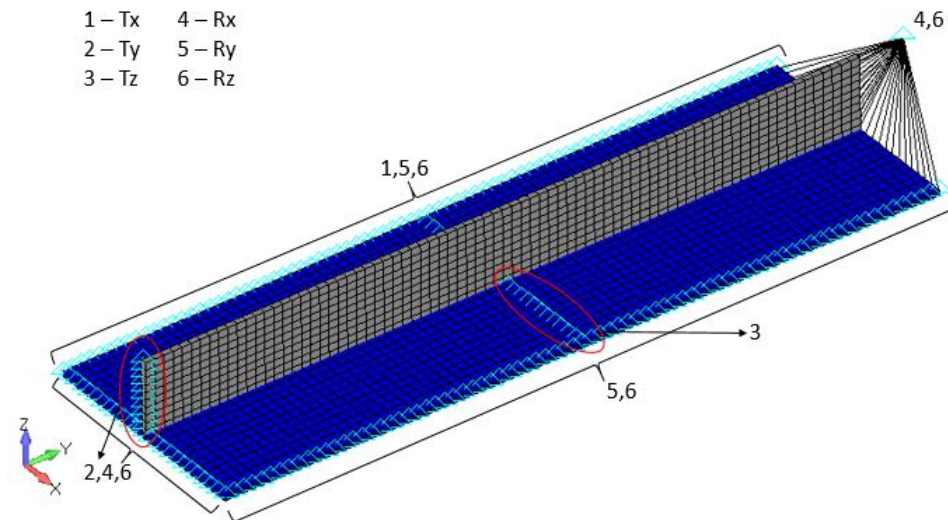


Fonte: Femap

O modelo foi desenvolvido com elementos do tipo placa (*PLATE*) para o reforçador e para o revestimento, e com duas propriedades distintas, sendo uma propriedade para o revestimento e outra propriedade para o reforçador, visto que possuem espessuras diferentes.

O painel reforçado foi modelado utilizando somente a idealização de um reforçador e para isso as seguintes condições de contorno foram aplicadas, conforme mostrado na Figura 19.

Figura 19 – Condições de contorno aplicadas no modelo do reforçador.



Fonte: Femap

Em relação ao carregamento do aplicado no modelo, definiu-se que o painel reforçado estaria submetido somente a uma carga de compressão, sem cisalhamento. E portanto, aplicou-se essa carga de compressão conforme mostrado na Figura 20, utilizando um elemento rígido do tipo RBE2 para distribuir a carga igualmente nos nós dos elementos de placa que situam-se em uma extremidade do reforçador.

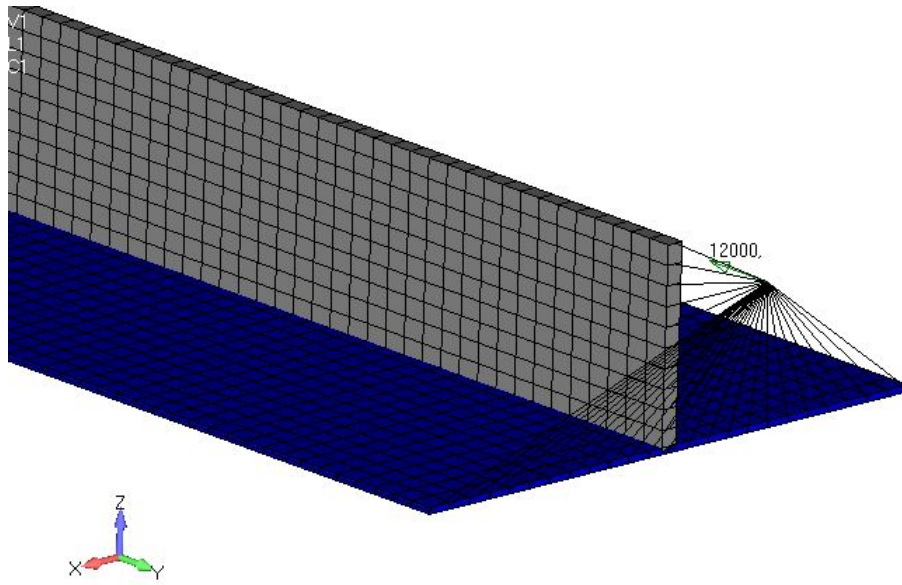
### 5.3.2 Otimização

Em relação a otimização, buscou-se como objetivo minimizar o peso da estrutura. Portanto, durante a solução de otimização, manteve-se a carga de compressão constante e variou-se as espessuras do revestimento e do reforçador. Buscou-se, então, uma estrutura que suportasse a carga de compressão, utilizando uma análise de flambagem dentro do otimizador (SOL 105), e que possuísse o menor peso estrutural.

Resumidamente, a otimização possuiu as seguintes características:

- Função objetivo: minimizar o peso da estrutura;
- Variáveis de projeto: espessura do revestimento e espessura do reforçador;

Figura 20 – Carregamento aplicado no modelo do reforçador [12000daN].



Fonte: Femap

- Respostas de projeto: Cinco (5) primeiros autovalores da solução de flambagem (cargas de flambagem);
- Restrições de projeto: Autovalores maiores que um (1), ou seja, a estrutura flamba com valores maiores que 100% da carga aplicada;
- Soluções utilizadas: Otimização (SOL 200) e Análise de flambagem (SOL 105).

## 5.4 Otimização de um painel reforçado em material composto

Após a realização da otimização do painel reforçado em material metálico, realizou-se a otimização de um painel reforçado em material composto utilizando o *MSC Nastran*.

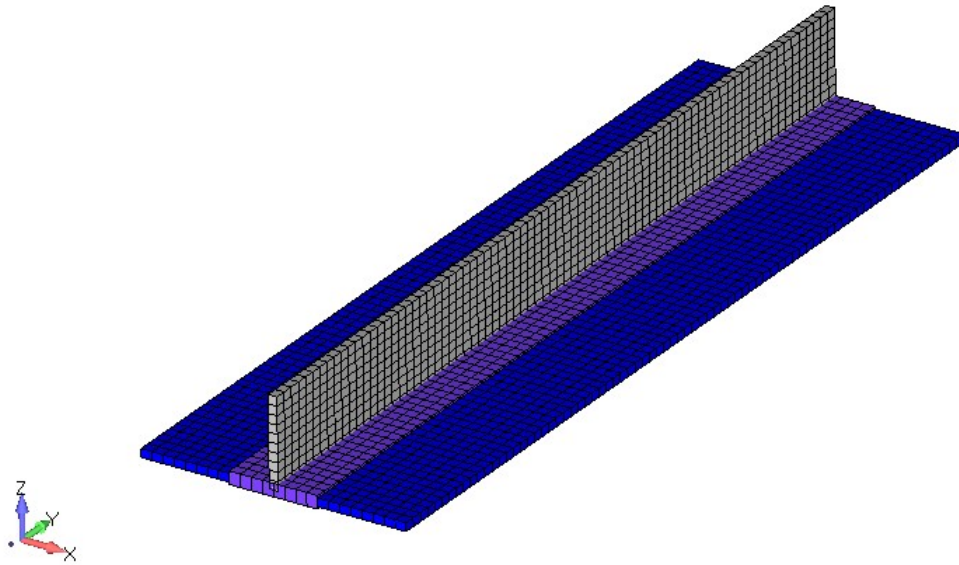
### 5.4.1 Modelo em elementos finitos

Similarmente ao modelo para o painel reforçado em material metálico, desenvolveu-se um modelo em elementos finitos de um painel reforçado em material composto, conforme [Figura 21](#) para realizar a análise de otimização.

Este modelo foi desenvolvido utilizando como material composto o carbono, mas com duas propriedades de materiais distintas. Sendo que tem-se um material exclusivamente para o revestimento e outro para a alma do reforçador. Já a base do reforçador é composta



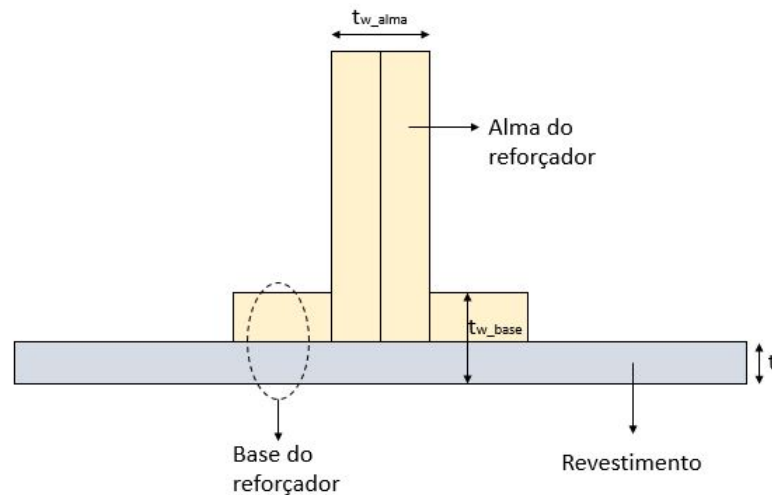
Figura 21 – Modelo do reforçador em material composto.



Fonte: Femap

tanto pelo material do revestimento, quanto pelo material da alma do reforçador, conforme ilustrado na [Figura 22](#).

Figura 22 – Visualização do reforçador em material composto.



O modelo foi desenvolvido com elementos do tipo placa (*PLATE*) para o reforçador e para o revestimento, e com duas propriedades distintas, sendo uma propriedade para o revestimento e outra propriedade para o reforçador. Portanto, tem-se uma dada espessura para o reforçador ( $t_{w_{alma}}$ ), uma espessura para o revestimento ( $t$ ) e uma espessura para a base do reforçador ( $t_{w_{base}}$ ) que é uma relação entre a espessura da alma do reforçador e a espessura do revestimento.

Optou-se por modelar a base do reforçador de material composto visando fazer a conexão entre as propriedades dos materiais da alma do reforçador e do revestimento.

O painel reforçado foi modelado utilizando somente a idealização de um reforçador, as condições de contorno aplicadas no modelo de elementos finitos de reforçador em material composto são as mesmas que foram aplicadas no modelo do reforçador em material metálico, conforme mostrado na (adicionar figura).

Em relação ao carregamento do aplicado no modelo, definiu-se que o painel reforçado estaria submetido somente a uma carga de compressão, sem cisalhamento. E portanto, aplicou-se essa carga de compressão igualmente àquela aplicada no modelo do reforçador de material metálico, conforme mostrado na [Figura 20](#). Utilizou-se um elemento rígido do tipo RBE2 para distribuir a carga igualmente nos nós dos elementos de placa que situam-se em uma extremidade do reforçador.

#### 5.4.2 Otimização

Em relação a otimização, buscou-se como objetivo minimizar o peso da estrutura. Portanto, durante a solução de otimização, manteve-se a carga de compressão constante e variou-se as espessuras do revestimento e do reforçador. Na otimização do painel reforçado, variou-se também os parâmetros de laminação tanto do revestimento, quanto do reforçador. Buscou-se, então, uma estrutura que suportasse a carga de compressão, utilizando uma análise de flambagem dentro do otimizador (SOL 105), e que possuísse o menor peso estrutural.

Resumidamente, a otimização possuiu as seguintes características:

- Função objetivo: minimizar o peso da estrutura;
- Variáveis de projeto: espessura do revestimento e espessura do reforçador;
- Respostas de projeto: Cinco (5) primeiros autovalores da solução de flambagem (cargas de flambagem);
- Restrições de projeto: Autovalores maiores que um (1), ou seja, a estrutura flamba com valores maiores que 100% da carga aplicada;
- Soluções utilizadas: Otimização (SOL 200) e Análise de flambagem (SOL 105).

## 6 Resultados

### 6.1 Análise teórica vs. Otimização do painel reforçado

Esta seção está dividida em três subseções:

- Resultados da análise teórica do painel reforçado;
- Resultados da otimização do painel reforçado fabricado em material metálico;
- Comparação dos dois itens anteriores .

#### 6.1.1 Análise teórica do painel reforçado

A análise teórica do painel reforçado seguiu a metodologia do *Fator de Eficiência de Farrar* proposta por (NIU, 1997). O painel reforçado foi submetido a uma carga de compressão de intensidade 10000daN (269777lbs), obtendo-se portando uma carga de compressão linear (N) como segue:

$$N = 1000 \text{ N/mm} = 5710.2 \text{ lbs/in}$$

Utilizou-se os seguintes valores na análise teórica:  $F=0.65$ ;  $R_t=1.50$ ;  $R_b=0.33$ ; Da [Figura 14](#), encontrou-se o valor de "f"correspondente a carga por largura (5710.4 lbs/in), utilizando  $F=0.65$  para o Al 2024-T3 extrudado.

$$f = 40000 \text{ psi}$$

Encontrou-se o módulo tangente  $E_t$ , aproximado, correspondente ao valor de "f", da curva de módulo tangente do material, conforme [Figura 17](#).

$$E_t = 5.4 \times 10^6 \text{ psi}$$

Conforme [Figura 16](#), determinou-se o valor de  $J_4$ :

$$J_4 = 1.2$$

E determinou-se o valor  $t$  e  $t_w$ , como segue:

$$t = J_4 \left( \frac{NL}{E_t} \right)^{0.5} = 0.153in = 3.884mm$$

$$t_w = R_t t = 1.2t = 0.183in = 4.661mm$$

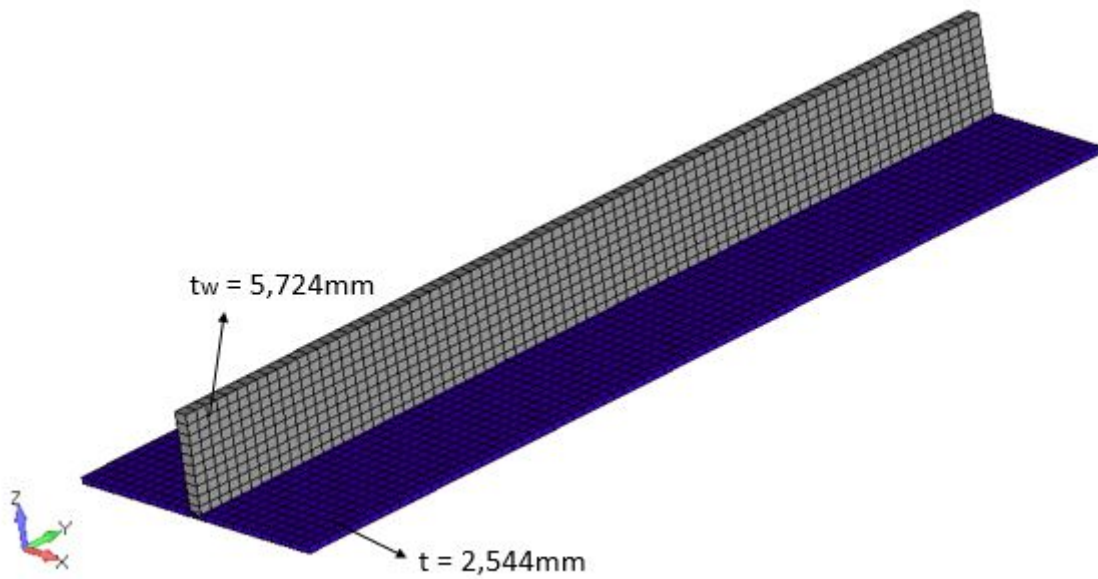
### 6.1.2 Otimização do painel reforçado em material metálico

Desenvolveu-se um modelo de otimização do reforçador em material metálico, no qual, o material possuía as mesmas propriedades de módulo de elasticidade tangente ( $E_t$ ) do modelo teórico, visto que a solução 105 do *Nastran* é linear, ou seja, não leva em conta a plasticidade do material. Para este modelo, encontrou-se o seguinte resultado:

$$t = 2.544mm$$

$$t_w = 5.724mm$$

Figura 23 – Resultado do reforçador em material metálico.



### 6.1.3 Comparação dos resultados

A [Tabela 2](#) seguinte compara os resultados das espessuras do revestimento e do reforçador obtidas na análise do modelo teórico e do modelo otimizado.

Modelo	Revestimento (mm)	Reforçador (mm)
Teórico	3.884	4.661
Otimizado	2.544	5.724

Tabela 2 – Resultados de espessuras.

Tendo-se como base a geometria do reforçador e a densidade mássica do material considerado, calculou-se as massas das estruturas. E os resultados são conforme mostrado na [Tabela 3](#).

Modelo	Massa (kg)
Teórico	0.717
Otimizado	0.587

Tabela 3 – Resultados de massa da estrutura.

Observa-se que foram encontradas espessuras, e consequentemente, massas das estruturas diferentes, entre os modelos teóricos e o modelo da otimização. Em relação as massas foi encontrada uma diferença de 18.12%. Essa diferença se deve ao fato de o modelo teórico ter considerado um reforçador ótimo com o fator de eficiência de Farrar de 0.65, e caso esse fator pudesse ser melhorado, o modelo teórico ficaria mais aproximado do modelo otimizado.

## 6.2 Análise teórica vs. Otimização do painel reforçado

Esta seção está dividida em três subseções:

- Resultados da otimização do painel reforçado fabricado em material metálico;
- Resultados da otimização do painel reforçado fabricado em material composto;
- Comparação dos dois itens anteriores .

### 6.2.1 Otimização do painel reforçado em material metálico

Desenvolveu-se um modelo de otimização do reforçador em material metálico, no qual, o material possuía as propriedades conforme mostrado na [Tabela 1](#). A carga de compressão aplicada neste modelo se deu da mesma forma mostrada na [Figura 20](#), no

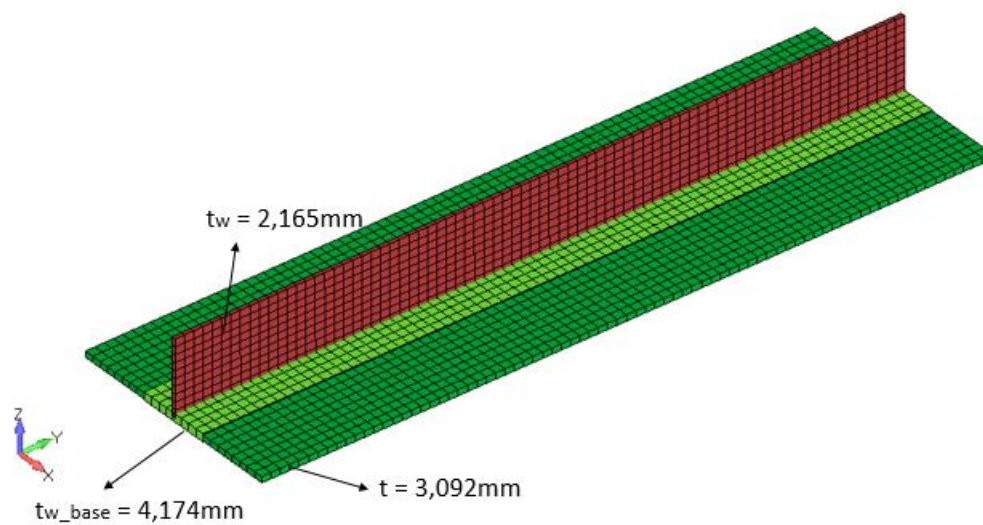
entanto com o módulo de 10000daN. Para este modelo, do reforçador constituído de material metálico, encontrou-se o seguinte resultado:

$$t = 3.092mm$$

$$t_w = 2.165mm$$

$$t_{wBase} = 4.174mm$$

Figura 24 – Resultado do reforçador em material metálico.



### 6.2.2 Otimização do painel reforçado em material composto

Desenvolveu-se um modelo de otimização do reforçador em material composto, no qual, as propriedades do material variavam com base na otimização dos parâmetros de laminação. A carga de compressão aplicada no modelo do reforçador de material composto foi a mesma aplicada no modelo metálico, com o módulo de 10000daN. Para este modelo, encontrou-se o seguinte resultado para as espessuras:

$$t = 2.928mm$$

$$t_w = 2.611mm$$

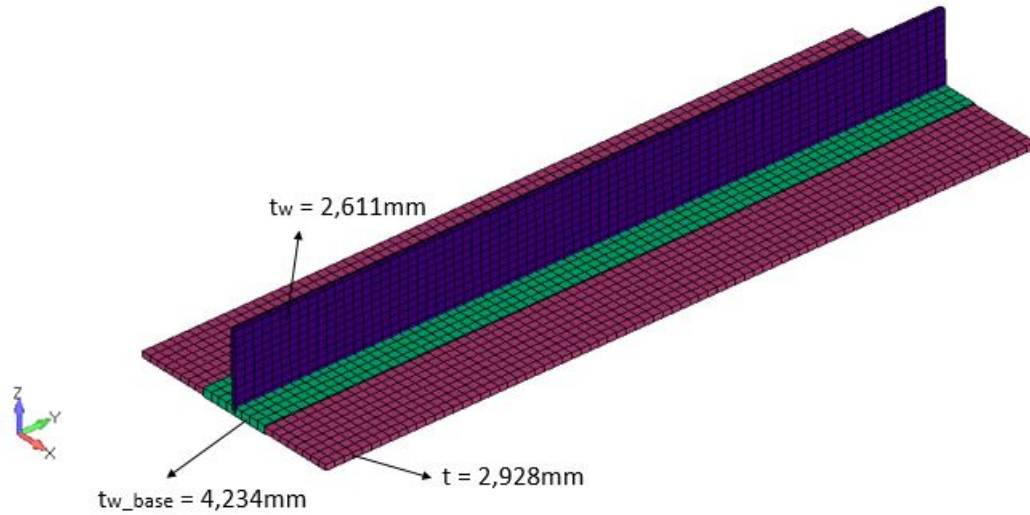
$$t_{wBase} = 4.234mm$$

E encontrou-se o seguinte resultado para os parâmetros de laminação:

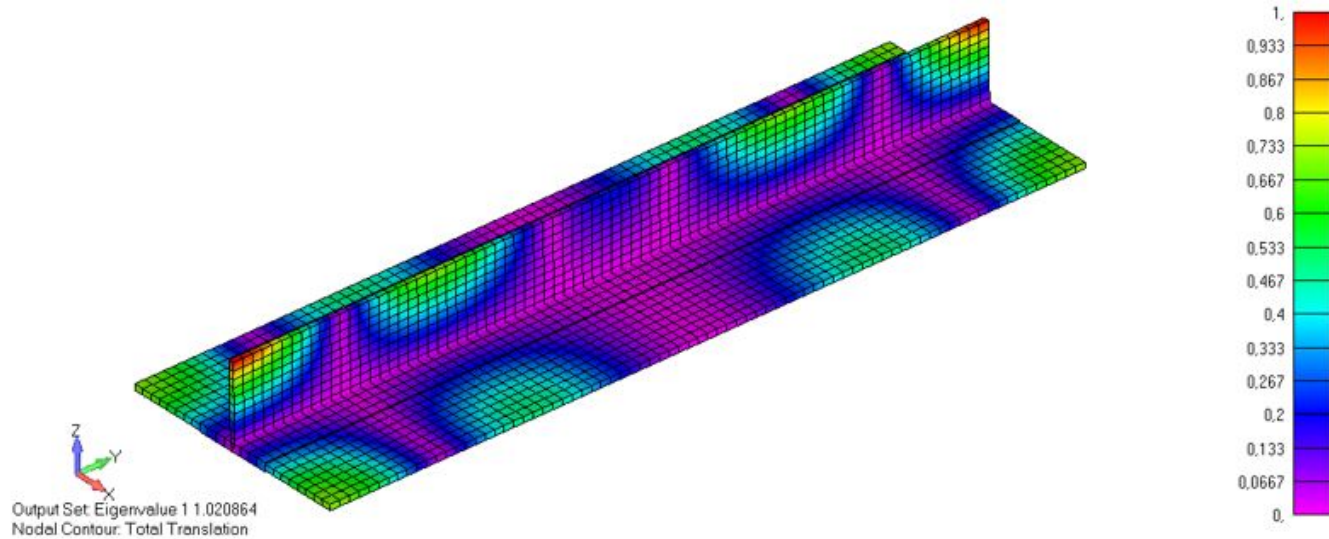
Estrutura	$\xi_1^A$	$\xi_2^A$	$\xi_1^D$	$\xi_2^D$
Reforçador	0.3182	0.0348	0.0537	-0.0625
Revestimento	0.2560	0.0529	-0.0851	-0.0913
Base reforçador	0.2853	0.0443	0.0215	-0.199

Tabela 4 – Resultados dos parâmetros de laminação.

Figura 25 – Resultado do reforçador em material composto.



Em relação ao resultado da análise de flambagem, a [Figura 26](#) mostra a resposta da estrutura com o primeiro autovalor encontrado para este reforçador em material composto.

Figura 26 – Análise de flambagem do reforçador em material composto ( $\lambda_1 = 1.021$ ).

### 6.2.3 Comparação dos resultados

A [Tabela 5](#) compara os resultados das espessuras do revestimento, do reforçador e da base do reforçador obtidas na otimização do modelo em material metálico e do modelo em material composto.

Modelo	Revestimento (mm)	Reforçador (mm)	Base do reforçador (mm)
Metálico	3.092	2.165	4.174
Composto	2.928	2.611	4.234

Tabela 5 – Resultados de espessuras.

Tendo-se como base a geometria do reforçador e a densidade mássica dos materiais, sendo  $\rho_{metal} = 2.8 \times 10^{-3} g/mm^3$  e  $\rho_{composto} = 1.56 \times 10^{-3} g/mm^3$  calculou-se as massas das estruturas. E os resultados são conforme mostrado na [Tabela 6](#).

Modelo	Massa (kg)
Teórico	0.551
Otimizado	0.309

Tabela 6 – Resultados de massa da estrutura.

Observa-se que foram encontradas espessuras e massas das estruturas diferentes, entre os modelos de otimização do reforçador em material metálico e o reforçador em material composto. Em relação a massa da estrutura, que era a função objetivo da otimização, a otimização do reforçador em material composto gerou um resultado de uma estrutura com a massa 43% menor do que o reforçador em material composto. Isto mostra, portanto, que para a situação e modelo considerados, o reforçador em material composto é mais eficiente do que o reforçador em material metálico, visto que ambos suportam a mesma carga de flambagem, no entanto, o reforçador em material composto possui uma massa estrutural menor.



## 7 Conclusão

A realização desse trabalho permitiu que fosse realizado um estudo a respeito da otimização estrutural de um painel reforçado utilizando o *solver Nastran* e uma solução de flambagem.

A utilização dos parâmetros de laminação permitiu que fosse realizada uma otimização consistente do painel reforçado em material composto e evitou que fosse feita a otimização discreta com base no número e direção de cada lâmina do laminado.

Por meio da otimização realizada, percebeu-se que para o tipo de problema abordado, o painel reforçado constituído de material composto apresentava uma vantagem de massa estrutural em relação a uma painel constituído de material metálico.

Como sugestões para trabalhos futuros que deem continuidade ao tema abordado, citam-se a seguintes propostas:

- Otimização de outras estruturas utilizando o mesmo *solver*;
- Otimização do painel reforçado em material composto submetido a outros tipos de carregamento além da força de compressão, por exemplo, carregamentos cisalhantes também. Com o objetivo de ver o comportamento do otimizador quando aplicado outros carregamentos na estrutura;
- Desenvolvimento de um banco de laminados, repetindo as regras práticas de projetos utilizadas na indústria aeronáutica. Com isso é possível obter um laminado que possua as propriedades (parâmetros de laminação) que saíram como resultados da otimização.
- Realizar a otimização do painel reforçado variando outros parâmetros além da espessura e dos parâmetros de laminação. Podem ser variados por exemplo, a largura e o espaçamento entre os reforçadores e a altura do reforçador. Para isso, deve-se estudar outras ferramentas disponíveis dentro da SOL 200 do *Nastran*



# Referências

- BAILIE J; LEY, R.; PASRICHA, A. A summary and review of composite laminate design guidelines. *National Aeronautics and Space Administration*, Final, n. 22, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 32, 33 e 34.
- CHAMIS, C. C. Buckling of anisotropic composite plates. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 95, n. 10, p. 2119–2140, 1969. Citado na página 17.
- DANIEL, I. *Engineering Mechanics of Composite Materials*. [S.l.]: Oxford University Press, 2006. Citado 5 vezes nas páginas 19, 20, 21, 22 e 26.
- HERENCIA, J. E.; WEAVER, P. M.; FRISWELL, M. I. Optimization of long anisotropic laminated fiber composite panels with t-shaped stiffeners. *AIAA journal*, v. 45, n. 10, p. 2497–2509, 2007. Citado na página 17.
- KASSAPOGLOU, C. *Design and analysis of composite structures: with applications to aerospace structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- LIU, B.; HAFTKA, R.; TROMPETTE, P. Maximization of buckling loads of composite panels using flexural lamination parameters. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Springer, v. 26, n. 1-2, p. 28–36, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 31.
- MIKI, M. Optimum design of laminated composite plates using lamination parameters. *AIAA Paper*, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 28.
- MIL-HDBK-17-3F. *MIL-HDBK-17-3F Composite Materials Handbook - Volume 3: Polymer Matrix Composites, Materials Usage, Design and Analyses*. [S.l.]: US Department of Defense, 2002. Citado 3 vezes nas páginas 31, 32 e 34.
- MOORE, G. J. *MSC/NASTRAN design sensitivity and optimization: user's guide, version 68*. [S.l.]: MacNeal-Schwendler Corporation, 1994. Citado 7 vezes nas páginas 35, 37, 39, 40, 41, 42 e 43.
- NIU, M. C.-Y. Composite airframe structures. *Hong Kong Conmmilit Press Ltd*, 1992. Citado na página 31.
- NIU, M. C.-Y. *Airframe stress analysis and sizing*. [S.l.: s.n.], 1997. Citado 9 vezes nas páginas 18, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51 e 57.
- RICE, R. C. *Metallic Materials Properties Development and Standardization (MMPDS): Chapters 1-4*. [S.l.]: National Technical Information Service, 2003. Citado na página 52.
- SCHMIT, L.; FARSHI, B. Optimum laminate design for strength and stiffness. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Wiley Online Library, v. 7, n. 4, p. 519–536, 1973. Citado na página 17.
- TSAI, S. W.; PAGANO, N. J. *Invariant properties of composite materials*. [S.l.], 1968. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.