Algoritmi fundamentali

Tema 3

Exercițiul 1 (1p)

Se știe că înmulțirea a două matrice A și B de dimensiuni $N \times M$ și $N' \times M'$ respectiv se poate realiza doar dacă $M = N'$. Dându-se dimensiunile pentru K matrice $M_1, M_2, ..., M_K$ ($1 \leq K \leq 10^6$), determinați (dacă există) o ordine în care acestea ar putea fi aranjate, astfel încât produsul celor K matrice (în ordinea aleasă) să aibă sens.

1. Formulați problema ca una de găsire a unui lanț hamiltonian într-un graf; menționați un algoritm care rezolvă problema astfel, precizând eficiența acestuia. **(0.5p)**
2. Formulați problema ca una de găsire a unui lanț eulerian într-un graf; menționați un algoritm care rezolvă problema astfel, precizând eficiența acestuia. **(0.5p)**

Exercițiul 2 (1p)

Pentru un graf $G = (V, E)$, definim $\chi(G)$ numărul său cromatic (în esență, dacă $\chi(G) = k$, atunci graful G este k-colorabil dar nu este $(k-1)$-colorabil) și $c(G)$ dimensiunea subgrafului complet maxim din G.

Verificați care dintre relațiile: $\chi(G)[\leq ;=; \geq]c(G)$ se respectă pentru orice graf G.

Exercițiul 3 (1.5p)

Teorema König enunță că, pentru orice graf bipartit G, dimensiunea celei mai mici acoperiri cu noduri **MIN-VC**(G) este egală cu dimensiunea cuplajului maxim **MAX-MTC**(G). Demonstrați că, în general, pentru orice graf G (nu neapărat bipartit) avem că:

$$\textbf{MIN-VC}(G) \geq \textbf{MAX-MTC}(G)$$

Exercițiul 4 (2p)

Care este numărul minim **(1p)**, respectiv maxim **(1p)** de muchii pe care poate să îl conțină un graf G de n noduri, așa încât $\chi(G) = k$ (unde $\chi(G)$ reprezintă numărul cromatic al grafului G și $1 \leq k \leq n-1$)? *(Răspuns în funcție de n și k)*

Exercițiul 5 (2.5p)

Fie graful **neorientat** $G = (V, E)$ unde $V = \{1, 2, ..., 10^5\}$ și $E = \{(i, j) \mid i \text{ divide } j\}$.

1. Argumentați dacă G este/nu este un graf planar. **(1p)**
2. Aflați $\chi(G)$. **(1.5p)**