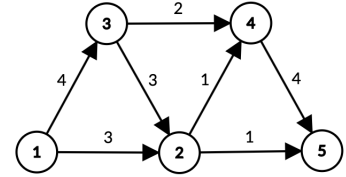


Algoritmi fundamentali

Tema 2

Exercițiul 1 (0.5p)

Găsiți fluxul $S - T$ maxim pe rețeaua din dreapta, unde $S = 1$ și $T = 5$. Numerele de deasupra muchiilor indică capacitățile acestora. Argumentați că fluxul găsit este maxim, evidențiând eventual o $S - T$ tăietură minimă.



Exercițiul 2 (1p)

Demonstrați că adaptarea Edmonds-Karp a algoritmului de determinare a fluxului maxim are complexitate de timp ce se încadrează în $\Omega(E^2)$ pe cazul nefavorabil.

Hint: Găsiți o rețea de flux pentru care algoritmul trebuie să ruleze cel puțin $\Omega(E)$ iterații de BFS.

Exercițiul 3 (1p)

Demonstrați că în determinarea fluxului maxim de la S la T în orice rețea de flux, se pot șterge toate muchiile (direcționale) care pornesc din T sau care ajung în S (formal, demonstrați că în orice rețea de flux, fluxul maxim în rețea coincide cu fluxul maxim în subrețeaua care nu conține muchii care pornesc din T sau ajung în S).

Folosiți demonstrația pentru a argumenta că pe muchiile care pornesc din S și cele care ajung în T nu se va întoarce flux niciodată, în cadrul algoritmilor de flux maxim cunoscuți.

Exercițiul 4 (1p)

Să considerăm o variantă generalizată a fluxului maxim, în care avem constrângerea, în plus, că fiecare nod v ($v \in V$) are o limită superioară $c(v)$ pentru valoarea fluxului care se transferă prin acel nod (de exemplu, putem considera că fiecare nod este o fabrică, care are o limită asupra cantității de produs care poate fi procesată într-un interval de timp). Muchiile rețelei vor avea în continuare capacitate $c(u, v)$.

Descrieți o modalitate de a rezolva problema generalizată în aceeași complexitate ca cea de a determina fluxul maxim pe rețeaua neconstrânsă, găsim o rețea care modelează problema.

Hint: Transformați constrângerea la nivel de noduri într-una la nivel de muchii.

Exercițiul 5 (2p)

Fie T un arbore cu n noduri. Acest arbore descrie harta unei țări; mai exact, putem considera că fiecare nod este un oraș, iar capitala este în orașul 1. În fiecare oraș i ($1 \leq i \leq n$) există s_i oameni și d_i locuințe ($1 \leq s_i, d_i \leq 10^9$). Un om aflat într-un oraș v poate să rămână în orașul său sau să se relocheze în orice alt oraș aflat pe drumul dintre v și capitală.

Determinați dacă există o strategie de relocare care garantează ca, la final, pentru fiecare om să existe o locuință în care să se stabilească (doi oameni nu pot locui împreună), modelând problema ca una de flux maxim. (1p)

Hint: Considerați ideea de a adăuga noduri și muchii noi.

Găsiți un algoritm care rezolvă problema în complexitate timp $O(n)$, folosindu-vă de structura specială a rețelei. Demonstrați corectitudinea algoritmului, folosindu-vă de teoria fluxului maxim. (1p)

Exercițiul 6 (2.5p)

Pentru a se pregăti organizatoric pentru noul sezon, n echipe de fotbal plănuiesc să realizeze transferuri de jucători.

Din motive de regulament, fiecare echipă are voie să transfere cel mult un jucător spre o altă echipă. Mai mult, după ce se realizează transferurile, fiecare echipă trebuie să aibă același număr de jucători ca înainte de transferuri.

În același timp, există m oferte de transferuri care se pot onora, descrise prin triplete (a_i, b_i, p_i) ($1 \leq a_i, b_i \leq n$, $1 \leq p_i \leq 10^9$), cu semnificația că echipa a_i va vinde un jucător către echipa b_i cu prețul p_i (jucătorul cu pricina nu este relevant pentru problemă).

Deoarece compania care realizează transferurile va câștiga un comision din suma totală care se transferă, aceasta își dorește să decidă ce transferuri se vor onora, astfel încât să se respecte regulamentul de mai sus, iar suma prețurilor transferurilor să fie cât mai mare. Găsiți această sumă.

Hint: Modelați problema ca una de flux maxim de cost minim.

Exercițiul 7 (3p)

La un concurs de dans participă formată din n băieți și n fete. Coregrafia a fost stabilită așa încât momentul să se realizeze în k ($1 \leq k \leq n$) runde. În cadrul fiecărei runde se vor forma n perechi fată-băiat care vor dansa în același timp. Pentru a realiza coregrafia, fiecare băiat și fiecare fată au comunicat o listă de persoane distincte de sex opus cu care preferă să danseze.

Descrieți un algoritm care determină dacă se poate realiza coregrafia pentru spectacol (respectând toate preferințele) și, în caz afirmativ, afișează o posibilă configurație. O persoană poate dansa doar cu o singură altă persoană în cadrul unei runde și nu are voie să danseze cu aceeași partener în două runde diferite.