Tema 3 Seminar

Tender Laura-Maria

- 11 ianuarie 2021 -

Exercițiul 1

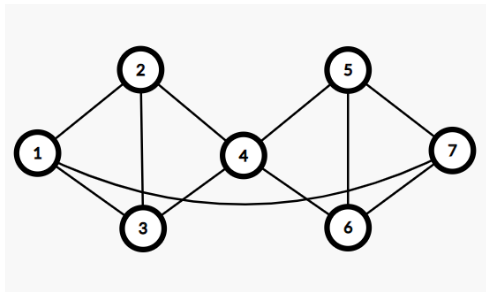
Fie două matrice A și B de dimnesiuni $N \times M$ și $N' \times M'$. Acestea pot fi înmuțite doar dacă $M = N'$. Dându-se K matrice cu dimensiunile $N_i \times M_i, i \in \overline{(1, K)}$ dorim să știm dacă acestea pot fi înmulțite și ordinea.

- Fie un graf orientat cu K noduri, fiecare nod reprezentând o matrice. În graf, există muchie orientată de nodul u (reprezentând matricea A) la nodul v (reprezentând matricea B) dacă $M = N'$. Trasăm aceste muchii, de la o matrice la oricare altă matrice cu care poate fi înmulțită la dreapta. Astfel, problema noastră este echivalentă cu a găsi un lanț hamiltonian în acest graf. Această problemă are o complexitate exponențială. În funcție de implementare putem obține diferite complexități. Printr-o soluție folosind programarea dinamică obținem o complexitate O($2^K K^2$).
- Fie un multigraf în care nodurile sunt numerele distincte din mulțimea $\{N_1, N_2, ..., N_K\} \cup \{M_1, M_2, ..., M_K\}$. Între două noduri se află o muchie dacă cele două numerele reprezentate de noduri sunt dimensiunile unei matrice. Astfel, două matrice pot fi înmulțite dacă sunt asociate unor muchii adiacente.
  Astfel, problema noastră este echivalentă cu a găsi un lanț eulerian în acest graf. Această problemă poate fi rezolvată prin algoritmul lui Hierholzer într-o complexitate O(K).

Exercițiul 2

Un graf cu n noduri este complet dacă fiecare nod din graf are o muchie către oricare alt nod din graf. Atunci când colorăm un graf, culorile oricăror doi vecini trebuie sa fie diferite. Dar într-un graf complet, oricare două noduri sunt vecine, deci avem nevoie de n culori pentru a colora un graf complet cu n noduri.
Fie un graf $G = (V, E)$, $\chi(G)$ numărul său cromatic și $c(G)$ dimensiunea subgrafului complet maxim din G. Conform celor enunțate în paragraful anterior, pentru a colora subgraful complet avem nevoie de $c(G)$ culori. Deci, numărul de culori de care avem nevoie pentru a colora G cu siguranță nu este mai mic decât $c(G)$.

Pentru a demonstra că $c(G)$ nu este egal cu $\chi(G)$ pentru orice graf este suficient să dăm un contraexemplu.



Vom demonstra că pentru acest graf $\chi = 4$ arătând că graful nu poate fi colorat cu 3 culori. Nodurile (1, 2, 3), (5, 6,7), (2, 3, 4) și (4, 5, 6) trebuie să aibă culori diferite. Dacă 4 are culoarea 1, atunci 2, 3 și 5, 6 trebuie să aibă culorile 2 și 3. Deci, 1 și 7 ar trebui să aibă ambele culoarea 1, ceea ce nu este posibil întrucât sunt vecine. Permutarea culorilor nu afectează numărul lor. Întrucât nu am restrâns cazurile, graful nu poate fi colorat cu 3 culori.
Pentru acest graf, $\chi = 4$. Însă subgraful complet maxim are dimensiunea 3. Deci, $\exists G$ astfel încât $c(G) \neq \chi(G)$.
În concluzie, obținem relația corectă $c(G) \geq \chi(G)$ pentru orice graf G.

Exercițiul 3

MIN-VC(G) reprezintă cardinalul minim al unei mulțimi de noduri astfel încât în mulțime să existe un nod din fiecare muchie din graf. MAX-MTC(G), cuplajul maxim, reprezintă cardinalul maxim al unei mulțimi de muchii astfel încât să nu existe un nod care să aparțină mai mult de unei muchii din mulțime.

Alegând câte un nod din fiecare muchie din MAX-MTC vom obține MAX-MTC noduri întrucât acestea sunt distincte. Deci am ales un nod pentru fiecare muchie din MAX-MTC, care este o submulțime a muchiilor din graf. Pentru a obține un nod pentru fiecare muchie din graf, numărul de noduri va fi cel puțin egal cu acesta. Adică, MIN-VC(G) $\geq$ MAX-MTC(G) întrucât conține cel puțin un nod din fiecare muchie din MAX-MTC.

Exercițiul 4

Fie G un graf cu n noduri și $\chi(G) = k$, $1 \leq k \leq n-1$.
Fie o colorare a lui G cu k culori: $1, 2, ..., k$. Pentru fiecare pereche de culori i, j, $1 \leq i \leq j \leq k$ trebuie să existe cel puțin o muchie între un nod de culoare i și unul de culoare j, altfel acestea ar fi putut avea aceeași culoare, și k nu mai era numărul minim de culori în care poate fi colorat graful. Deci, G are cel puțin $C_k^2 = \frac{k(k-1)}{2}$ muchii.

Cum graful nostru este k-colorabil, știm că acesta nu conține K_{k+1} ca subgraf. Pentru a exprima numărul maxim de muchii pe care îl poate avea G vom folosi teorema lui Turan. Aceasta ne spune că: pentru un graf G cu n vârfuri care nu conține K_{k+1} ca subgraf numărul maxim de muchii este $(1-\frac{1}{k})\cdot\frac{n^2}{2}$. Numărul maxim de muchii este atins în graful Turan $T(n,k)$. Graful lui Turan este un graf complet multipartit format prin împărțirea celor n vârfuri în k mulțimi. Există muchie între oricare două vârfuri din mulțimi diferite, dar nu și între vârfurile din aceeași mulțime. Vârfurile din aceeași mulțime sunt colorate cu aceeași culoare. Graful Turan $T(n,k)$ este k-colorabil. Iar numărul exact de muchii al acestuia este:

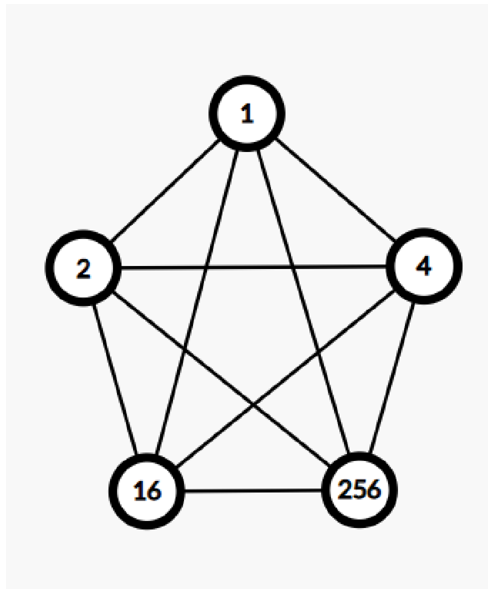
$$\frac{n(n-1)}{2}-(n\text{mod}k)\frac{[n/k]([n/k]-1)}{2}-(k-(n\text{mod}k))\frac{[n/k]([n/k]-1)}{2}\leq(1-\frac{1}{k})\cdot\frac{n^2}{2}$$

Exercițiul 5

Fie graful neorientat $G=(V,E)$ unde $V=\{1,2,...,10^5\}$ și $E=\{(i,j)|i$ divide $j\}$.

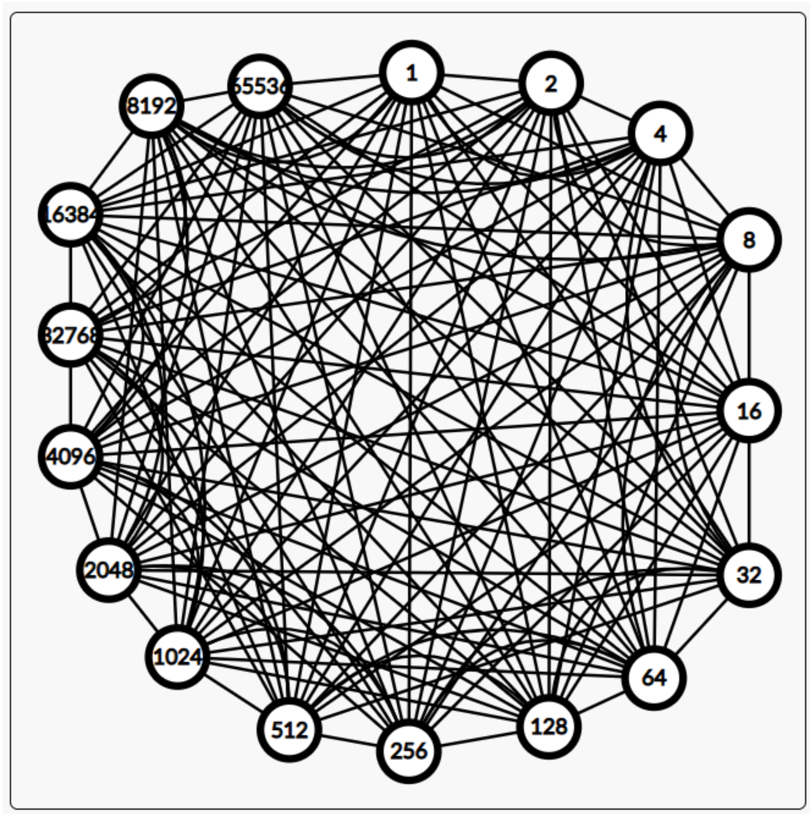
1. Conform consecinței teoremei poliedrale ale lui Euler, dacă G este graf planar, $|E|\leq 3|V|-6=3\cdot 10^5-6$.
   1 divide 10^5 numere, nodul 1 este conectat cu 10^5-1 noduri, 2 divide $\frac{10^5}{2}$ numere, 3 divide $[\frac{10^5}{3}]$ numere, ...
   Numărul de muchii este $\sum_{i=1}^{10^5}[\frac{10^5}{i}]-1\geq\sum_{i=1}^{10^5}\frac{10^5}{i}-2=\sum_{i=1}^{10^5}\frac{10^5}{i}-\sum_{i=1}^{10^5}2=10^5\cdot H_{10^5}-2\cdot 10^5$.
   H_{10^5} este seria armonică până la 10^5. Aceasta este aproximativ egală cu 12,1. Deci numărul de muchii este mai mare decât $10^5\cdot 12,1-2\cdot 10^5=10,1\cdot 10^5\geq 3\cdot 10^5-6$. Astfel, graful nu este planar.

   De asemenea graful următor este subgraf a lui G.



Observvăm că acest subgraf este izomorf cu K_5 care nu este planar, deci G nu este planar.

2. Exemplul de la subpunctul anterior ne face să obersvăm că următorul graf este de asemenea subgraf a lui G.
   Observație: $2^{16} = 65536 < 10^5$ și $2^{17} = 131072 > 10^5$, deci 16 este cea mai mai putere a lui 2 care este numărul unui nod.
   Următorul graf conține 17 noduri: $\{2^0, 2^1, ..., 2^{16}\}$.



Graful este izomorf cu K_{17}. Cum G are K_{17} ca subgraf, $\chi(G) \geq 17$.

Fie două numere $x, y, \in \{1, 2, ..., 10^5\}, x \neq y$ și descompunerea lor în factori primi $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}, y = q_1^{\beta_1} \cdot q_2^{\beta_2} \cdot ... \cdot q_{k_1}^{\beta_{k_1}}$. Dacă $\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_k = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k_1}$, atunci $x \nmid y$ și $y \nmid x$. Presupunem că $x|y$, atunci orice factor prim p_i din descompunerea lui x se află și in descompunerea lui y cel puțin la puterea α_i. Atunci $\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_k \leq \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k_1}$. Obținem egalitate doar pentru $x = y$. Cum $x \neq y$, $\alpha_1 + \alpha_2 + ... \alpha_k < \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{k_1}$ ceea ce este fals. Astfel, presupunerea făcută este falsă.

Dacă găsim un mod în care putem colora graful în 17 culori, atunci $\chi(G) = 17$. Vom colora nodul 1 cu culoarea 1. Nici un alt nod nu mai poate avea această culoare întrucât toate nodurile sunt legate de 1. Vom colora toate numerele prime cu culoarea 2 (putem face această operație întrucât nici unul nu îl divide pe celălalt). Vom colora numerele care au suma exponenților din descompunerea în factori primi egală cu a cu culoarea $a + 1$. Conform paragrafului anterior niciunul dintre acestea nu îl divide altul. Pentru orice număr cu suma a există un număr cu suma $j, j \in \overline{(1, a-1)}$ care îl divide (un număr care

are aceeași facatori primi în descompunere dar valoarea exponenților mai mică). Vom demonstra că suma exponenților din descompunerea în factori primi a unui nod din G este mai mică decât 16. Presupunem că există un număr x, $x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$ cu $\alpha_1 + \alpha_2 + ...\alpha_k = 17$. Cum $p_k \geq ... \geq p_2 \geq p_1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 2^{17} = 131072 > 10^5$. Deci $x \notin G$.

În concluzie, putem colora acest graf cu 17 culori (1 + 16) și 17 este numărul minim, deci $\chi(G) = 17$.