Algoritmi fundamentali

Tema 1

Exercițiul 1 (0.5p)

Să se demonstreze că orice graf neorientat cu n noduri fără cicluri are cel mult $n-1$ muchii.

Exercițiul 2 (0.5p)

Fie problema rezolvării cubului Rubik. Modelați-o ca o problemă de grafuri.

1. Care sunt mulțimile de noduri și de muchii (V, E)? Este graf orientat sau neorientat?
2. Descrieți un algoritm eficient care găsește o rezolvare a cubului.

Exercițiul 3 (0.5p)

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat conex, unde $V = \{1, 2, ..., n\}$. Care este numărul maxim de muchii care pot fi șterse din G pentru ca noul graf $G' = (V, E')$ $(E' \subseteq E)$ să rămână conex și să respecte:

$$d_G(1, i) = d_{G'}(1, i), \forall 1 \leq i \leq n$$

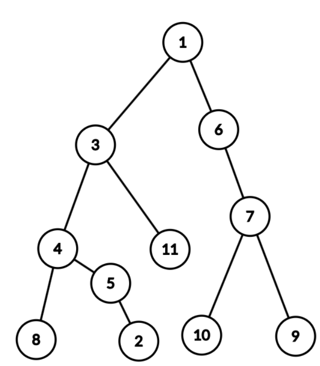
unde $d_G(a, b)$ este distanța dintre a și b pe graful G.

Exercițiul 4 (1p)

Fie a, b numere naturale pozitive și $1 \leq d \leq 10^6$. Găsiți două numere naturale pozitive x și y a.î. $ax + by$ divizibil cu d și $x + y$ este minim posibil (dacă există). Modelați-o ca problemă de grafuri.

1. Care sunt mulțimile de noduri și de muchii (V, E)? Este orientat sau neorientat?
2. Descrieți un algoritm care găsește rezolvarea problemei.

Exercițiul 5 (1p)



În figura din dreapta este ilustrat arborele DFS al unui graf $G = (V, E)$, unde $V = \{1, 2, ..., 11\}$.

Care este numărul maxim de muchii pe care îl poate avea graful inițial, pentru a se obține acest arbore? Trebuie precizată și ordinea în care au fost procesați vecinii unui vârf.

Bonus: Generalizați problema pentru arbori arbitrari.

Exercițiul 6 (1p)

Fie $G = (V, E)$ un graf neorientat conex unde $V = \{1, 2, ..., n\}$ și o relație de ordine $<$ pe V. Se consideră parcurgerile DFS și BFS care pornesc din nodul 1 și vizitează vecinii unui nod în ordinea dată de $<$.

Ce proprietăți trebuie să respecte G pentru ca cele două parcurgeri să obțină același arbore parțial $T_{DFS} = T_{BFS}$?

Exercițiul 7 (2p)

Se dau n intervale închise $[a_i, b_i]$, $1 \le i \le n$. Trebuie să alegem o submulțime S de intervale, a.î. oricare două să se intersecteze în maximum un punct, iar suma lungimilor intervalelor alese să fie maximă. Modelați-o ca o problemă de grafuri.

1. Care sunt mulțimile de noduri și de muchii (V, E)? Este graf orientat sau neorientat?
2. Descrieți un algoritm eficient care găsește o rezolvare a problemei.

Bonus: Considerăm varianta 2D a problemei (intervalele devini regiuni dreptunghiulare, iar problema cere să maximizăm suma ariilor). Ce problemă de grafuri modelează noua problemă?

Exercițiul 8 (2p)

Fie un graf neorientat $G = (V, E)$, unde $V = \{1, 2, ..., n\}$ și E nu este inițial cunoscut. Graful poate fi descoperit prin interogări de tipul $Q(i, j)$ către un oracol, care va răspunde cu 1 dacă muchia neorientată (i, j) există în E și cu 0 altfel.

Demonstrați că, pentru orice algoritm A de determinare a componentelor conexe, există un graf G_A pentru care A trebuie să facă cel puțin $n(n-1)/2$ interogări.

Indiciu: algoritmi $\Leftrightarrow$ arbori de decizie

Exercițiul 9 (2.5p)

Fie n puncte de interes, reprezentate prin puncte în plan (x_i, y_i) $(1 \le i \le n)$. Un turist împătimit pornește din punctul (x_1, y_1) și dorește să viziteze fiecare alt punct de interes, ca mai apoi să se întoarcă în locul de unde a plecat, parcurgând o distanță cât mai mică.

După multe încercări, nu a reușit să găsească cel mai bun itinerariu, așa că se mulțumește ca distanța parcursă să fie *de cel mult două ori mai mare* decât distanța minimă. Descrieți un algoritm eficient care găsește un itinerariu corespunzător.

Notă: Distanța între două puncte de interes (x_i, y_i) și (x_j, y_j) se va considera cea euclideană, egală cu $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$.