Tutoriat 3 - Rezolvări
Grupuri. Teorema lui Lagrange

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 17 noiembrie 2020 -

Exercițiul 1

Demonstrați că următoarele grupuri (cu adunarea) nu sunt izomorfe:

- $Z_2 \times Z_2$ și Z_4.
- $\mathbf{Z}$ și $\mathbf{Q}$
- $\mathbf{Q}$ și $\mathbf{R}$

Rezolvare:

Referință: Gabriel Majeri, "Rezolvări Tutoriat 6", 2019, exercițiul 1

Pentru a demonstra că două grupuri nu sunt izomorfe, putem folosi procedeul reducerii la absurd. Presupunem că ar exista un izomorfism f și ajungem la o contradicție.

- În unele cazuri ne putem gândi la ordinele elementelor. Reamintim că ordinul elementului x este cel mai mic număr natural nenul k pentru care $\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ ori}} = 0$. Un izomorfism păstrează ordinul unui element: $f(\underbrace{x + \cdots + x}_{k \text{ ori}}) = \underbrace{f(x) + \cdots + f(x)}_{k \text{ ori}}$.
  - În $Z_2 \times Z_2$ toate elementele au ordin cel mult 2.
  - În Z_4 avem și un element de ordin 4 (și anume $\hat{1}$. Pentru elementul de ordin 4 nu am avea corespondent.
- O altă proprietate care trebuie păstrată de izomorfisme este cea de a fi grup ciclic. $\mathbf{Z}$ este un grup ciclic, în timp ce $\mathbf{Q}$ nu este.

  Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $\mathbf{Q}$ ar fi ciclic. Fie a $\in$ $\mathbf{Q}$ un generator al său. Scriem a sub formă de fracție rațională ireductibilă: a = $\frac{p}{q}$, cu p, q $\in \mathbf{Z}$.

Observăm că fracția $\frac{p}{q+1}$ nu poate fi obținută din $\frac{p}{q}$. Oricum am aduna sau scădea fracțiile care sunt multiplu de $\frac{p}{q}$, nu putem ajunge la o fracție cu numitor mai mare.

- Dacă ar exista un izomorfism f, acesta ar fi funcție bijectivă. Asta ar însemna că **Q** și **R** ar avea același cardinal. Dar **Q** este mulțime numărabilă, iar **R** este nenumărabilă.

Exercițiul 2

Arătați că un grup cu 4 elemente este izomorf cu Z_4 sau cu grupul lui Klein $Z_2{\times}Z_2$.

Rezolvare:

Referință: Tiberiu Dumitrescu, "Algebra 1", București, 2006, capitolul 10, exercițiul 49

$(Z_4, +)$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$(Z_2{\times}Z_2, +)$	$(\hat{0}, \hat{0})$	$(\hat{0}, \hat{1})$	$(\hat{1}, \hat{0})$	$(\hat{1}, \hat{1})$
$(\hat{0}, \hat{0})$	$(\hat{0}, \hat{0})$	$(\hat{0}, \hat{1})$	$(\hat{1}, \hat{0})$	$(\hat{1}, \hat{1})$
$(\hat{0}, \hat{1})$	$(\hat{0}, \hat{1})$	$(\hat{0}, \hat{0})$	$(\hat{1}, \hat{1})$	$(\hat{1}, \hat{0})$
$(\hat{1}, \hat{0})$	$(\hat{1}, \hat{0})$	$(\hat{1}, \hat{1})$	$(\hat{0}, \hat{0})$	$(\hat{0}, \hat{1})$
$(\hat{1}, \hat{1})$	$(\hat{1}, \hat{1})$	$(\hat{1}, \hat{0})$	$(\hat{0}, \hat{1})$	$(\hat{0}, \hat{0})$

Fie G un grup cu 4 elemente. Elementele lui G au ordinul divizor al lui 4. Dacă G conține un element x de ordin 4, atunci x, x^2, x^3 și e = x^4 aparțin lui G, deci G este ciclic generat de x. Astfel G $\simeq Z_4$.
Dacă G nu conține elemente de ordin 4, atunci putem presupunem că G = $\{1, a, b, c\}$ cu $a^2 = b^2 = c^2 = 1$ Dacă ab = 1 (respectiv, ab = a, ab = b), atunci a = b (respectiv, b = 1, a = 1), contradicție. Deci ab = c și analog ba = c, ac = ca = b, bc = cb = a. Comparând tablele de înmulțire, vedem că G $\simeq Z_2{\times}Z_2$.

Exercițiul 3

Arătați că un grup cu 6 elemente este izomorf cu Z_6 sau cu S_3.

Rezolvare:

Referință: Tiberiu Dumitrescu, "Algebra 1", București, 2006, capitolul 10, exercițiul 49

Fie G un grup cu 6 elemente. G poate conține un element a de ordin 3 și un element b de ordin 2, conform teoremei lui Cauchy. Deci G = {1, a, a^2, b, ab, a^2b}.

Dacă ba = 1 (respectiv, ba = b, ba = b^2, ba = a), atunci a = b (respectiv, a = 1, a = b, b = 1), contradicție. Deci ba = ab sau ba = a^2b. Dacă ba = ab, atunci ab are ordinul 6, deci G este ciclic generat de ab, așadar G $\simeq Z_6$. Dacă ba = a^2b, atunci comparând tabelele, se vede că G $\simeq S_3$.

Exercițiul 4

Determinați dacă grupurile $Z_{28} \times Z_{29}$, $Z_{28} \times Z_{30}$, respectiv **R** sunt sau nu ciclice.

Rezolvare:

Referință: Gabriel Majeri, "Rezolvări Tutoriat 5", 2019, exercițiul 3

Pentru a simplifica demonstrațiile în problemele în care apar $Z_n \times Z_m$, ne folosim de o teoremă care ne spune că $Z_n \times Z_m$ este izomorf cu $Z_{n\times m}$ dacă și numai dacă n este prim față de m. În acest fel, se poate arăta că $Z_{n\times m}$ este ciclic dacă și numai dacă (n, m) = 1.

- Pentru $Z_{28} \times Z_{29}$, (28, 29) = 1.
- Pentru $Z_{28} \times Z_{30}$, numerele nu sunt prime între ele, deci grupul nu este izomorf cu $Z_{28\times 30}$.
- Să presupunem că **R** ar fi ciclic, și a $\in$ **R** ar fi un generator. Elementul a poate genera doar multiplii de a. Asta înseamnă că toate numerele din **R** sunt de forma na, pentru un n $\in$ **Z**. Dar **R** este o mulțime infinită nenumărabilă, deci există elemente care nu sunt generate de a.

Teorema de structură a grupurilor ciclice ne spune că orice grup ciclic este izomorf cu Z_n, dacă este finit, respectiv **Z** dacă este infinit. Deci, la un astfel de exercițiu putem arăta că un grup este/nu este izomorf cu unul dintre grupurile Z_n sau **Z**.

Exercițiul 5

Arătați că singurul morfism de grupuri (Q, +) → (Z, +) este cel nul.

Rezolvare

Considerăm un morfism $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$. Fie un număr rațional de forma $\frac{1}{b} \in \mathbb{Q}$. Din proprietățiile morfismelor obținem următoarele două relații:
$f(0) = 0$.
$f(\underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{b \text{ ori}}) = f(1) = b * f(\frac{1}{b}) \implies f(\frac{1}{b}) = \frac{f(1)}{b}$

Cum $f(x) \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$, rezultă că $\frac{f(1)}{b} \in \mathbb{Z}$, $\forall b \in \mathbb{Z}$. Dacă $f(1) \neq 0$, atunci alegem $b = |f(1)| + 1$ si astfel fracția $\frac{f(1)}{b} \notin \mathbb{Z}$ deoarece $f(1)$ și b sunt prime între ele. Prin urmare $f(1) = 0$.

Din relația de mai sus avem că $f(\frac{1}{b}) = 0$, iar din relația $f(\frac{a}{b}) = f(\underbrace{\frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b}}_{a \text{ ori}}) =$

$a * f(\frac{1}{b})$ rezultă că $f(\frac{a}{b}) = 0$ $\forall a, b \in \mathbb{Z}$.