

Tutoriat 6 - Rezolvări

Grupul de permutări

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 9 decembrie 2020 -

Exercițiul 1

Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 7 & 9 & 2 & 8 & 6 & 1 & 11 & 10 \end{pmatrix} \in S_{11}$

1. Descompuneți σ în produs de cicli disjuncti.
2. Descompuneți σ în produs de transpoziții.
3. Calculați $\text{sgn}(\sigma)$ și $\text{ord}(\sigma)$.
4. Există permutări de ordin 35 în S_{11} ?
5. Rezolvați ecuația $x^{2011} = \sigma$.

Rezolvare:

1. $\sigma = (1, 3, 5, 9)(2, 4, 7, 8, 6)(10, 11)$
2. având descompusă permutarea în cicli descompunerea în transpoziții este $\sigma = (1, 3)(3, 5)(5, 9)(2, 4)(4, 7)(7, 8)(8, 6)(10, 11)$
3. Signatura unui produs de cicli este produsul signaturilor cicliilor. Un ciclu de lungime n are signatura $(-1)^{n-1}$. Deci $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^3 \cdot (-1)^4 \cdot (-1)^1 = -1$.
1. Ordinul permutării este cel mai mic multiplu comun al lungimilor cicliilor în care acesta se descompune. $\text{ord}(\sigma) = \text{cmmmc}(4, 5, 2) = 20$.
4. Cum $35 = 7 \cdot 5$ rezultă că permutarea ar trebui să conțină cel puțin un ciclu de lungime 7 și un ciclu de lungime 5. Însă lungimea acestor cicli este $12 > 11$ și deci prin urmare nu poate exista o permutare din S_{11} cu ordinul 35.
5. Trebuie să argumentăm de unde poate proveni fiecare ciclu din permutarea σ (spre exemplu 2 2-ciclu pot proveni dintr-un ciclu de lungime 4 ridicat la pătrat). Luând pe rând ciclii din σ , cel de lungime 5 poate proveni doar dintr-un ciclu de lungime 5, cel de lungime 4 în mod analog iar

cel de lungime 2 tot dintr-un ciclu de lungime 2. Ne rămâne să vedem ce ciclu de lungime 5 ridicat la 2011 da ciclul de lungime 5 din σ . Folosindu-ne de ordinul unui ciclu, găsim pe rând ciclul și deci $x = (1, 9, 5, 3)(2, 4, 7, 8, 6)(10, 11)$

Exercițiul 2

Fie $\sigma = (1324) \in S_4$.

1. Determinați soluțiile ecuației $x^2 = \sigma, x \in S_4$
2. Determinați soluțiile ecuației $x^3 = \sigma, x \in S_4$.
3. Aflați numărul de elemente din $H = \langle \sigma \rangle$ (subgrupul generat de σ în S_4).
4. Aflați indicele lui H în S_4 .
5. Arătați că H nu e subgrup normal în S_4 .
6. Determinați cel mai mic subgrup normal al lui S_4 care-l conține pe H .

(Examen algebră, 31.01.2020, seria 13)

Rezolvare:

1. Pentru ca ecuația $x^2 = \sigma, x \in S_4$ să aibă soluție, σ trebuie să fie o permutare pară.
Putem scrie σ astfel

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{ord}(\sigma) = 2 + 3 = 5 \Rightarrow \text{sgn}(\sigma) = -1$, σ este impară deci ecuația nu are soluție.

2. Trebuie să știm că atunci când ridicăm o transpoziție la puterea a treia obținem aceeași transpoziție, când ridicăm un ciclu de lungime trei la puterea a treia obținem permutarea identică, iar când ridicăm un ciclu de lungime patru la puterea a treia obținem tot un ciclu de lungime patru. Astfel, soluția ecuației $x^3 = \sigma, x \in S_4$ poate fi doar un ciclu de patru. Fie permutarea

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = x^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. σ este un ciclu de lungime patru, deci $\sigma^4 = e$. Astfel numărul de elemente din $H = \langle \sigma \rangle$ este 4, $H = \{e, \sigma, (12)(34), (1423)\}$.
4. S_4 are $4! = 24$ elemente. Indicele lui H în S_4 , $[S_4 : H] = \frac{\text{ord}(S_4)}{\text{ord}(H)} = 6$.

5. Dacă H ar fi subgrup normal în S_4 , atunci $\forall x \in S_4, \forall y \in H \quad xyx^{-1} \in H$.
Fie $x = (123)$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x^{-1} = (132)$$

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$x\sigma x^{-1} = (123)(1324)(132) = (1342) \notin H \Rightarrow H \text{ nu e subgrup normal.}$$

6. Vom demonstra la exercițiul următor că S_4 are următoarele subgrupuri normale $\{e\}, K, A_4, S_4$. Dintre acestea, cel mai mic subgrup care îl conține pe H este S_4 .

Exercițiul 3

Fie $K = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$. Să se arate că:

1. K este subgrup normal în S_4 (deci și în A_4).
2. S_4/K este izomorf cu S_3 .
3. A_4 nu are subgrupuri de ordin 6.
4. Subgrupurile normale ale lui S_4 sunt $\{e\}, K, A_4, S_4$.

Referință: Cornel Băețică, Crina Boboc, Sorin Dăscălescu, Gabriel Mincu, "Probleme de algebră", capitolul 3, exercițiul 66

Rezolvare:

1. Fie $\sigma \in S_4$. Dacă K este subgrup normal în S_4 , atunci $\sigma x \sigma^{-1} \in K, x \in S_4$.
 $\sigma(12)(34)\sigma^{-1} = (\sigma(1)\sigma(2))(\sigma(3)\sigma(4)) \in K$. Analog și pentru celelalte elemente din K , deci K subgrup normal.
2. $|S_4/K| = 6$, deci S_4/K este izomorf cu \mathbf{Z}_6 sau S_3 (*demonstrație tutoriat 3, exercițiul 3*). Dacă S_4/K ar fi izomorf cu \mathbf{Z}_6 atunci acesta ar fi grup ciclic și ar conține un element de ordin 6, pe care îl notez cu $\hat{\sigma}$. Dar $\sigma \in S_4$ permutare deci $\text{ord}(\sigma) \in \{1, 2, 3, 4\}$. Atunci $\hat{\sigma}$ nu poate avea ordin 6. Deci S_4/K nu este izomorf cu $\mathbf{Z}_6 \Rightarrow S_4/K \cong S_3$.
3. A_4 este subgrupul permutărilor pare din S_4 . $\text{ord}(A_4) = 12$. $A_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23), (123), (132), (124), (142), (134), (143), (234), (243)\}$. A_4 are un element de ordin 1, trei elemente de ordin 2 și opt elemente de ordin 3. Dacă X este un subgrup cu 6 elemente, atunci X nu poate fi izomorf cu \mathbf{Z}_6 pentru că nu are niciun element de ordin 6. Deci X ar trebui să fie izomorf cu S_3 . Astfel X trebuie să conțină două elemente de ordin 2, și acestea pot fi doar $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$. Alegând oricare dintre ele o vor genera pe cea de-a treia. Deci nu putem obține un subgrup cu 6 elemente al lui A_4 .

4. Fie X subgrupurile normale ale lui S_4 . Vom analiza două cazuri:
- $X \subseteq A_4$
 - $X \not\subseteq A_4$
- a) În acest caz, conform teoremei lui Lagrange, un subgrup propriu al lui A_4 are ordinul 2, 3, 4 sau 6. Deja am demonstrat că nu există subgrupuri cu 6 elemente. Un grup cu ordinul 4 nu are elemente de ordin 3 (nu ar respecta Lagrange, $3 \nmid 4$). Deci singurul grup cu 4 elemente este K . Subgrupurile cu 3 sau 2 elemente sunt ciclice, generate de o transpoziție sau un ciclu de trei. Acestea nu pot fi grupuri normale.
- b) În acest caz, există $\sigma \in X$ permutare impară. σ poate fi o transpoziție sau un ciclu de lungime 4. Dacă σ este transpoziție $\sigma = (ij)$, atunci $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(i)\tau(j)) \in X \ \forall \tau \in S_4$. Deci X conține toate transpozițiile, iar acestea generează S_4 (vezi problema următoare). Dacă σ este ciclu de lungime 4, $\sigma = (ijkl)$, atunci X va conține toți ciclii de lungime 4. $\sigma^2 = (ik)(jl) \in X$, deci X va conține și toate produsele de câte două transpoziții. Dar $(ijkl)(iljk) = (jlk) \in X$, deci X conține toți ciclii de lungime 3 $\Rightarrow X = S_4$.

Exercițiul 4

Să se arate că S_n este generat de fiecare din următoarele mulțimi de permutări:

- $(12), (13), \dots, (1, n)$
- $(12), (23), \dots, (n-1, n)$
- $(12), (12 \dots n)$

Rezolvare:

Știm că orice permutare poate fi descompusă în transpoziții. Este deci suficient să demonstrăm că având permutările date putem forma orice transpoziție. Astfel, fiecare permutare din S_n poate fi descompusă în transpoziții iar fiecare transpoziție în permutările date.

- Vrem să obținem în cazul general transpoziția (a, b) , cu $a, b \leq n$. Având permutările de forma $(1, x)$, se poate observa că $(a, b) = (1, a)(1, b)(1, a)$. Cum avem $(1, a)$ și $(1, b)$ pentru orice a și b în setul nostru de permutări, putem obține orice transpoziție și deci S_n este generat de acest set.
- Observăm că în acest set de mulțimi dacă facem produsul elementelor în stilul $(1, 2)(2, 3)(3, 4) \dots (a-1, a)$ vom obține o permutare circulară a primelor a elemente la stânga. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a-1 & a \\ 2 & 3 & 4 & \dots & a & 1 \end{pmatrix} \in S_{11}$. Vedem că dacă am permuta circular la dreapta primele $a-1$ elemente acum am obține permutarea $(1, a)$ pentru orice a . Deci, am obține toate permutările de la punctul anterior iar desprinde ele știm deja că generează pe S_n . Pentru a permuta circular la dreapta primele $a-1$ elemente trebuie să permutăm circular la stânga de $a-1$ ori primele n elemente. Deci $(1, a) =$

$(1, 2)(2, 3)(3, 4) \dots (a-1, a) ((1, 2)(2, 3)(3, 4) \dots (a-2, a-1))^{a-2}$. Prin urmare, setul dat de permutări generează S_n .

3. În mod analog ca subpunctul de mai sus, putem să încercăm să generăm elementele de forma $(a-1, a)$ având permutările date. Dacă le putem genera pe toate ne putem folosi de punctul anterior în a argumenta concluzia. Observăm că $(a-1, a) = (1, 2, \dots, n)^{a-1}(1, 2)(1, 2, 3, \dots, n)^{n-a+1}$. Astfel, putem genera orice element din multimea anterioară de permutări iar cum acestea generează toată mulțimea S_n , avem deci concluzia că elementele date generează toată mulțimea.