Tutoriat 5

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 2 decembrie 2020 -

Exercițiul 1

Determinați elementele de ordin 30 din $\mathbf{Z}_{240}$.

Rezolvare:

Căutam elementele $\widehat{x}$ cu ordinul 30 în $\mathbf{Z}_{240} \iff \widehat{x}^{30} = \widehat{0}$ și nu exista $k < 30$ astfel încât $\widehat{x}^k = \widehat{0} \iff x^{30} \equiv 0 \pmod{240}$ și nu exista $k < 30$ astfel încât $x^k \equiv 0 \pmod{240}$.
Fie $\widehat{k} \in \mathbf{Z}_n$, atunci $\text{ord}(\widehat{k}) = \frac{n}{(n,k)}$.
Cum $\mathbf{Z}_{240}$ este un grup ciclic, relațiile de mai sus se pot rescrie $30x \equiv 0 \pmod{240}$. Astfel, căutăm elementele $\widehat{x}$ pentru care $\frac{240}{(240,x)} = 30 \iff (240, x) = 8$.
$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 8 \mid x$ dar $16 \nmid x, 3 \nmid x, 5 \nmid x$.
$\widehat{x} \in \{\widehat{8}, \widehat{56}, \widehat{88}, \widehat{104}, \widehat{136}, \widehat{152}, \widehat{184}, \widehat{232}\}$.

Exercițiul 2

(i) Fie G_1, G_2 două grupuri și $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$ elemente de ordin finit. Arătați că $\text{ord}(x_1, x_2) = [\text{ord}(x_1), \text{ord}(x_2)]$.
(ii) Determinați ord([3], [4]) în grupul $\mathbf{Z}_{24} \times \mathbf{Z}_{36}$.

Rezolvare:

i) Fie $m = \text{ord }(x_1)$ și $n = \text{ord }(x_2)$. $x_1^m = e_1$ (în G_1) și $x_2^n = e_2$ (în G_2).
Fie p $= \text{ord}(x_1, x_2)$, atunci $(x_1, x_2)^p = e \iff (x_1^p, x_2^p) = (e_1, e_2) \iff m \mid p$ și $n \mid p$ și p minim $\iff p = [m, n]$.

ii) Conformm i) ord([3], [4]) = [ord(3), ord(4)] în $\mathbf{Z}_{24}$, respectiv $\mathbf{Z}_{36}$.
$\text{ord}(3) = \frac{24}{(3,24)} = 8$, $\text{ord}(4) = \frac{36}{(4,36)} = 9$.
ord([3], [4]) $= 8 \cdot 9 = 72$.

Exercițiul 3

Determinați morfisemele între grupurile aditive $\mathbf{Z}_m$ și $\mathbf{Z}_n$.

Rezolvare:

Fie $\{f : \mathbf{Z}_m \to \mathbf{Z}_n |\ f(\widehat{x}+\widehat{y}) = f(\widehat{x}) + f(\widehat{y}), f(\widehat{0}) = \widehat{0}\}$ morfismele căutate.

Notăm $f(\widehat{1}) = \widehat{a}$, $a \in \mathbf{Z}_n$. Atunci f($\widehat{x}$) $= f(\widehat{1}+\widehat{1}+...\widehat{1}) = x \cdot \widehat{a}$, $x \in \mathbf{Z}_m$.

f($\widehat{m}$) $= m \cdot \widehat{a} = \widehat{0} \Rightarrow n|m \cdot a$. Notăm $(n, m) = d \Rightarrow \frac{n}{d} \mid a \Rightarrow a = \frac{n}{d} \cdot k$.
În concluzie, $\widehat{a} = \{\widehat{0}, \widehat{\frac{n}{d}}, ..., \widehat{\frac{(d-1)n}{d}}\}$.

Exercițiul 4

Fie grupul abelian $G = \mathbf{Z}_4 \times \mathbf{Z}_{10}$.

1. Se consideră elementul $x = (\widehat{2}, \widehat{2})$ al lui G. Aflați ordinul lui x și scrieți toate elementele subgrupului $H = < x >$.
2. Cu ce grup este izomorf G/H?
3. Aflați ordinul maxim al elementelor lui G și dați un exemplu de element de ordin maxim.
4. Determinați toate elementele de ordin 20 din G.

(Examen algebră, 26.01.2018, seria 10)

Rezolvare:

1. Putem alfa ordinul elementului x prin relația ord(x) = cmmmc(ord($\widehat{2}$ în $\mathbf{Z_4}$), ord($\widehat{2}$ în $\mathbf{Z_{10}}$)). Totodată, ordinul este numărul de elemente din subgrupul $H = \{(\widehat{0}, \widehat{0}), (\widehat{0}, \widehat{2}), (\widehat{0}, \widehat{4}), (\widehat{0}, \widehat{6}), (\widehat{0}, \widehat{8}), (\widehat{1}, \widehat{0}), (\widehat{1}, \widehat{2}), (\widehat{1}, \widehat{4}), (\widehat{1}, \widehat{6}), (\widehat{1}, \widehat{8})\}$.
2. Observăm că elementele din G/H sunt de forma $G/H = \{(\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{0}}), (\overline{\overline{0}}, \overline{\overline{1}}), (\overline{\overline{1}}, \overline{\overline{0}}), (\overline{\overline{1}}, \overline{\overline{1}})\}$. Astfel, $G/H \cong Z_2 \times Z_2$. Această relație de izomorfism se poate argumenta construind tabelele legilor pentru cele două grupuri. În general, avem că $Z_n / < x > \cong Z_{n/ord(x)}$
3. Cum am precizat și la punctul 1), ordinul elementului $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \mathbf{Z_4} \times \mathbf{Z_{10}}$ este cmmmc(ord(x), ord(y)). Din teorema lui Lagrange știm că ord(x) | 4 și ord(y) | 10. Alegând convenabil ord(x) = 4 și ord(y) = 10, avem ordinul maxim din grup, și anume cmmmc(4, 10) = 20. Un astfel de element cu ordin maxim este $(\widehat{1}, \widehat{1})$.

4. Mai intâi trebuie să determinăm toate combinațiile de numere cu cmmmc-ul 20. Acestea sunt (4, 10) și (4, 5). Elementele corespunzătoare ordinelor 4 și 10 sunt $(\widehat{1},\widehat{1}),(\widehat{1},\widehat{3}),(\widehat{1},\widehat{7}),(\widehat{1},\widehat{9}),(\widehat{3},\widehat{1}),(\widehat{3},\widehat{3}),(\widehat{3},\widehat{7}),(\widehat{3},\widehat{9})$. Elementele corespunzătoare sunt $(\widehat{1},\widehat{2}),(\widehat{1},\widehat{4}),(\widehat{1},\widehat{6}),(\widehat{1},\widehat{8}),(\widehat{3},\widehat{2}),(\widehat{3},\widehat{4}),(\widehat{3},\widehat{6}),(\widehat{3},\widehat{8})$. Acestea sunt toate elementele pentru care ordinul lor in G este 20.