

Tutoriat 8 - Rezolvări

Inele. Polinoame.

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 13 ianuarie 2021 -

Exercițiul 1

Arătați că:

- $\mathbf{Q}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.
- $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - X) \cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.
- $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - 1) \not\cong \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$.

Rezolvare

- Putem rescrie $\mathbf{Q}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbf{Q}[X]/((X - 1)(X + 1))$. Pentru a arăta că $(X - 1)$ și $(X + 1)$ sunt comaximale, trebuie să arătăm că suma lor generează tot $\mathbf{Q}[X]$. Este suficient să arătăm că suma idealelor conține elementul unitate.

Observăm că $(X + 1) - (X - 1) = 2$. Înmulțind relația cu $\frac{1}{2}$ (putem face această operație întrucât lucrăm în mulțimea numerelor raționale) obținem 1.

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}[X]/((X - 1)(X + 1)) &\cong \mathbf{Q}[X]/(X - 1) \cap (X + 1) \\ \mathbf{Q}[X]/(X - 1) \cap (X + 1) &\cong \mathbf{Q}[X]/(X - 1) \times \mathbf{Q}[X]/(X + 1)\end{aligned}$$

Clasele de echivalență ale lui $\mathbf{Q}[X]/(X - 1)$ sunt resturile obținute prin împărțirea oricărui polinom la $X - 1$, deci sunt polinoame de grad 0, de forma $\{a \mid a \in \mathbf{Q}\}$, deci $\mathbf{Q}[X]/(X - 1) \cong \mathbf{Q}$. Analog pentru $\mathbf{Q}[X]/(X + 1) \cong \mathbf{Q}$.

În concluzie, $\mathbf{Q}[X]/(X^2 - 1) \cong \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$.

- Demonstrația decurge asemănător pentru $\mathbf{Z}[X]/(X^2 - X)$, cu observația că $X^2 - X = X(X - 1)$. Sunt comaximale deoarece $X - (X - 1) = 1$.

- Spre deosebire de primul subpunct, aici nu mai putem înmulți relația cu $\frac{1}{2}$, întrucât lucrăm cu mulțimea numerelor întregi.

Presupunem că inelul factor ar fi izomorf cu $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$. Ne uităm la elementele idempotente ale acestor două inele.

Observație: deoarece $X^2 - 1$ aparține idealului prin care factorizăm, $\widehat{X^2 - 1} = \widehat{0}$, de unde $\widehat{X^2} = \widehat{1}$.

Fie $\widehat{aX + b}$ un element idempotent.

Atunci $(\widehat{aX + b})^2 = \widehat{aX + b}$, $\widehat{a^2 X^2 + 2abX + b^2} = \widehat{aX + b}$, $\widehat{a^2 + 2abX + b^2} = \widehat{aX + b}$.

$$\begin{cases} \widehat{a^2 + b^2} = \widehat{b} \\ \widehat{2ab} = \widehat{a} \end{cases} \quad \text{Singurele soluții ale ecuațiilor în } \mathbf{Z} \text{ sunt } a = 0 \text{ și } b \in \{0, 1\}.$$

Deci obținem 2 elemente idempotente.

În $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, sunt 4 elemente idempotente: $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Având număr diferit de idempotenți, inelele nu sunt izomorfe.

Exercițiul 2

Fie idealul $I = (X^3, X^5)$ al inelului de polinoame $\mathbf{Q}[X]$.

1. Dați un exemplu de polinom care aparține lui I și are 4 termeni nenuli.
2. Dați un exemplu de polinom care nu aparține lui I și are 3 termeni nenuli.
3. Este adevărat că $I = (X^3)$? Dar că $I = (X^5)$? Justificați.
4. Determinați elementele nilpotente din inelul factor $\mathbf{Q}[X]/I$.
5. Determinați elementele idempotente din inelul factor $\mathbf{Q}[X]/I$.
6. Sunt izomorfe inelele $\mathbf{Q}[X]/I$ și $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$? Justificați.

Rezolvare

- (1) Cum $X^5 \in I$, un astfel de polinom este $X^5 + X^6 + X^7 + X^8$.
- (2) Fie $P = X^2 + X^1 + 1$. Presupunem ca $P \in I$. Atunci $P = X^3 * A + X^5 * B$, unde A, B sunt polinoame. Observăm că P poate fi rescris ca $P = X^3 * C$, cu C polinom. Comparând gradele posibile pentru $X^3 * C$ și pentru P , rezultă că P nu poate fi egal cu $X^3 * C$. Contradicție. Prin urmare $P \notin I$ și P are 3 termeni nenuli, deci este un polinom valid pentru cerință.
- (3) Orice polinom din I poate fi scris sub forma $X^3 * A + X^5 * B$ cu A, B polinoame. Astfel, aranjând termenii, putem scrie mai departe că un polinom din I este de forma $X^3 * C$ cu C polinom. Putem observa imediat că $I = (X^3)$. De asemenea, din ultima relație, avem că $I \neq (X^5)$ deoarece $I = (X^3)$ și $X^3 \in (X^3)$ dar $X^3 \notin (X^5)$.
- (4) Elementele din grupul factor sunt de forma $P = aX^2 + \widehat{bX} + c = X(b + \widehat{aX}) + c$,

cu $a, b, c \in \mathbf{R}$. P este nilpotent dacă $\exists n \in \mathbf{N}$ a.î. P^n este multiplu de X^3 . Din ultima relație, dacă scriem P^n folosind binomul lui Newton observăm ca acesta este multiplu de $X^3 \iff c = 0$. Prin urmare, există o infinitate de elemente nilpotente, acestea fiind de forma $aX^2 + bX$.

(5) Analog subpunctului anterior, $P = \widehat{ax^2 + bX} + c$. Trebuie să rezolvăm ecuația $P^2 = P$, de unde $(b^2 + 2ac)X^2 + 2bcX + c^2 = aX^2 + bX + c$. Avem două soluții, și anume 0 și 1 care sunt idempotenții triviali. Prin urmare, idempotenții inelului factor sunt idempotenții triviali.

(6) În $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}$ singurul element nilpotent este $(0, 0)$. În inelul factor, conform (4), există o infinitate de elemente nilpotente. Prin urmare, cele două inele nu pot fi izomorfe.

Exercițiul 3

Fie polinomul $P(X) = X^4 - X^2 + 1$ având rădăcinile complexe $\alpha_1, \dots, \alpha_4$.

1. Descompuneți polinomul $P(X)$ în factori ireductibili peste fiecare dintre corpurile \mathbf{R} , \mathbf{Q} , \mathbf{Z}_2 , \mathbf{Z}_3 .
2. Calculați $\alpha_1^5 + \dots + \alpha_4^5$.
3. Determinați explicit coeficienții unui polinom nenul care să aibă ca rădăcini pe $2\alpha_1 - 1, \dots, 2\alpha_4 - 1$.

Rezolvare

1. $P(X) = X^4 - X^2 + 1 = X^4 + 1 - X^2 = X^4 + 2X^2 + 1 - 3X^2 = (X^2 + 1)^2 - 3X^2 = (X^2 + 1 - \sqrt{3}X)(X^2 + 1 + \sqrt{3}X)$.

Știm că un polinom este ireductibil peste \mathbf{C} , dacă este descompus în polinoame de gradul întâi. Însă, peste \mathbf{R} , un polinom este ireductibil dacă este descompus în polinoame de gradul întâi sau în polinoame de gradul al doilea cu $\Delta < 0$.

Calculăm Δ pentru cele două polinoame de gradul al doilea în care l-am descompus pe $P(X)$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 3 - 4 = -1 < 0$. Deci forma este ireductibilă peste \mathbf{R} .

Vom arăta că $P(X)$ este ireductibil peste \mathbf{Q} . Presupunem că există $\frac{m}{n}, (m, n) = 1, m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}^*$ astfel încât $P(\frac{m}{n}) = 0$, $\frac{m}{n}$ rădăcină a lui $P(X)$.

TEOREMĂ

Fie $f \in \mathbb{Z}[X], f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n, a_0 \neq 0, a_n \neq 0$.

Dacă $\frac{p}{q}, (p, q) = 1$, este o rădăcină rațională a polinomului f , atunci $p \mid a_0$ și $q \mid a_n$.

Atunci $m \mid 1$ și $n \mid 1$, deci $\frac{m}{n} \in \{+1, -1\}$.

$P(1) = 1 \neq 0, P(-1) = 1 \neq 0$. Astfel, presupunerea făcută este falsă, deci

$P(X)$ este ireductibil peste \mathbf{Q} .

Peste \mathbf{Z}_2 , $P(X) = X^4 + X^2 + 1 = (X^2 + X + 1)^2$. $f(X) = (X^2 + X + 1)^2$. f este ireductibil peste \mathbf{Z}_2 întrucât $f(\widehat{0}) = \widehat{1}$ și $f(\widehat{1}) = \widehat{1}$.

Peste \mathbf{Z}_3 , $P(X) = X^4 + \widehat{2}X + \widehat{1} = (X^2 + \widehat{1})^2$. $X^2 + \widehat{1}$ este ireductibil peste \mathbf{Z}_3 .

2. $P(\alpha_i) = 0$, $i \in \overline{(1, 4)}$. Deci $\alpha_i^4 - \alpha_i^2 + 1 = 0 \iff \alpha_i^4 = \alpha_i^2 - 1$.
 $\alpha_i^5 = \alpha_i^3 - \alpha_i$. $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^5 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^3 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i$
Conform relațiilor lui Viete, $s_1 = p_1 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0$. $s_2 = -1$, $s_3 = 0$, $s_4 = 1$. Dorim să aflăm $p_3 = \sum_{i=1}^4 \alpha_i^3$. Conform formulelor lui Newton
 $p_3 - p_2 s_1 + p_1 s_2 - 3 s_3 = 0$
 $p_3 - s_1 = 0 \Rightarrow p_3 = 3 s_3 = 0$
În concluzie, $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^5 = 0$.
3. $2\alpha_i - 1 = \beta_i \iff \alpha_i = \frac{\beta_i + 1}{2}$
Răspunsul este polinomul $Q(X) = P(\frac{X+1}{2}) = (\frac{X+1}{2})^4 - (\frac{X+1}{2})^2 + 1$.