Tutoriat 2 - Rezolvări
Funcții. Relații de echivalență.

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 10 noiembrie 2020 -

Exercițiul 1

Fie A, B două mulțimi finite cu $|A|$ = a și $|B|$ = b. Calculați:
i) Numărul funcțiilor strict crescătoare de la A la B.
ii) Numărul funcțiilor crescătoare de la A la B.

Rezolvare:

Ținând cont de faptul ca elementele mulțimiilor sunt comparabile, pentru ușurință, le putem înlocui cu numerele lor de ordine. Astfel, $A = \{1, 2, ...a\}$ și $B =$ $= \{1, 2, ..., b\}$
i) Fie x_1, x_2, ..., x_a elementele mulțimii A cu $x_1 < x_2 < ... < x_a$. Fie y_1, y_2, ..., y_b elementele mulțimii B cu $y_1 < y_2 < ... < y_b$. f : A $\rightarrow$ B strict crescătoare $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2) < ... < f(x_a)$.
Problema ne cere să găsim în câte moduri putem să alegem $f(x_1), f(x_2), ...f(x_a)$ astfel încât să fie respectată condiția de funcțe crescătoare. Cum pentru fiecare alegere a unei mulțimi de elemente inclusă în B există o singură modalitate de a le aranja crescător, problema dată devine echivalentă cu următoarea: în câte moduri putem alege a numere din b numere. Dacă $b < a$ nu există nicio funcție strict crescătoare. Pentru $b \geq a$ răspunsul este C_b^a.

ii) Condiția de funcție crescătoare este $f(x_1) \leq f(x_2) \leq ... \leq f(x_a)$. Diferența față de punctul anterior provine din faptul că acum putem alege din mulțimea B același element de mai multe ori. Pentru a scăpa de această deosebire, putem să rescriem inegalitatea de mai sus în modul următor
$f(x_1) < f(x_2) + 1 < f(x_3) + 2 < ... < f(x_a) + a - 1$
Construim următoarea funcție $g : \{1, 2, ..., a\} \rightarrow \{1, 2, ..., b, b + 1, ..., b + a - 1\}$
$g(x_k) = f(x_k) + k - 1$. Problema inițială devine echivalentă astfel cu a determina numărul de funcții strict crescătoare de la $\{1, 2, ..., a\}$ la $\{1, 2, ..., b, b + 1, ..., b + a - 1\}$. Analog, acest număr este C_{b+a-1}^a.

Exercițiul 2

Să se determine p $\in \mathbb{N}^*$ astfel încât funcția f : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, f(n) = $[\frac{n}{p}]$ + $[\frac{n+1}{p}]$ + $[\frac{n+2}{p}]$ să fie bijectivă.

Rezolvare:

f(n) = $[\frac{n}{p}]$ + $[\frac{n+1}{p}]$ + $[\frac{n+2}{p}]$
f(n+1) = $[\frac{n+1}{p}]$ + $[\frac{n+2}{p}]$ + $[\frac{n+3}{p}]$
f(n+1) - f(n) = $[\frac{n+3}{p}]$ - $[\frac{n}{p}]$ ≥ 0 $\forall n, p \Rightarrow$ funcția este crescătoare.
Pentru p = 1, f(n) = 3n + 3. f(0) = 3 și cum funcția este crescătoare nu există x $\in \mathbb{N}$ astfel încât f(x) = 0, deci funcția nu este surjectivă.
Pentru p = 2, f(0) = 1 deci nici în acest caz funcția nu este surjectivă.
Identitatea lui Hermite [a] + $[a + \frac{1}{n}]$ + [a + $\frac{2}{n}$] + ... + $[a + \frac{n-1}{n}]$ = [na] $\forall a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$*
Pentru p = 3, alegând a = $\frac{n}{p}$, conform identității enunțate mai sus f(n) = n, care este bijectivă.
Pentru p > 3 f(0) = f(1) = 0, deci funcția nu este injectivă.
Astfel f bijectivă pentru p = 3.

Exercițiul 3

Să se arate că funcția f : $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ f(m, n) = $\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ + m este o funcție bijectivă.

Rezolvare:

Funcția este surjectivă dacă $\forall x \in \mathbb{N}$ $\exists$ m, $n \in \mathbb{N}$ astfel încât f(m, n) = x.
$\frac{(m+n)(m+n+1)}{2}$ + m = x
(m+n)(m+n+1) + 2m = 2x
Fie m + n = k, relația se rescrie astfel k^2 + k + 2m = 2x
Pentru orice x căutam cel mai mare k cu proprietatea că k^2 + k $\leq$ 2x. Atunci deducem că $(k+1)^2$ + k + 1 > 2x. Atunci m = $\frac{2x-k^2+k}{2} \in \mathbb{N}$, iar n = k - m.
m $\leq$ k $\iff$ $\frac{2x-k^2+k}{2}$ $\leq$ k $\iff$ $2x - k^2 + k \leq$ 2k
$\iff$ $2x \leq k^2 + 3k$ $\iff$ $2x < k^2 + 3k + 2$ (conform alegerii k maxim).
Astfel funcția este sujectivă.
k(k+1) $\leq$ 2x < (k+1)(k+2) = k^2 + 3k + 2.
Pentru a demonstra că funcția este injectivă vom presupune ca există un alt k' care îndeplinește egalitatea.
2x = k'^2 + k' + 2m
Cum k' nu e maxim, $(k'+1)^2$ + k' + 1 $\leq$ 2x
Cum m $\leq$ k', k'^2 + 3k' + 2 = k'^2 + k' + 2k' + 2 > k^2 + k' + 2m = 2x (contradicție).

Exercițiul 4

Fie A mulțimea $\{1, 2, ..., 2000\}$. Să se determine numărul relațiilor de echivalență pe A ale căror mulțimi factor sunt formate din două clase de echivalență.

Rezolvare:

Știm că oricărei relații de echivalență pe o mulțime îi corespunde într-un mod bijectiv o partiție a mulțimii. Trebuie să determinăm în câte moduri putem să partiționăm A în două mulțimi, B și C.
Dacă B are 1 element, atunci avem C_{2000}^{1} posibilități.
Dacă B are 2 elemente, atunci avem C_{2000}^{1} posibilități.
...
Dacă B are 999 elemente, atunci avem C_{2000}^{999} posibilități.
Daca B are 1000 elemente, atunci avem $\frac{C_{2000}^{1000}}{2}$ posibilități (deoarce nu contează ordinea pentru B și C, iar o alegere a elementelor lui B determina elementele lui C).
Nu vom lua cazurile pentru care B are mai mult de 1000 de elemente deoarece se regăsesc in cazurile de mai sus, B C fiind echivalent cu C B.
Folosindu-ne de prorpietățiile combinăriilor, și anume
$C_n^k = C_n^{n-k}$
$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$ rezultatul este
$N = 2^{n-1} - 1$