Tutoriat 1 - Rezolvări
Funcții. Relații de echivalență. S.C.I.R.

Savu Ioan Daniel, Tender Laura-Maria

- 2 noiembrie 2020 -

Exercițiul 1

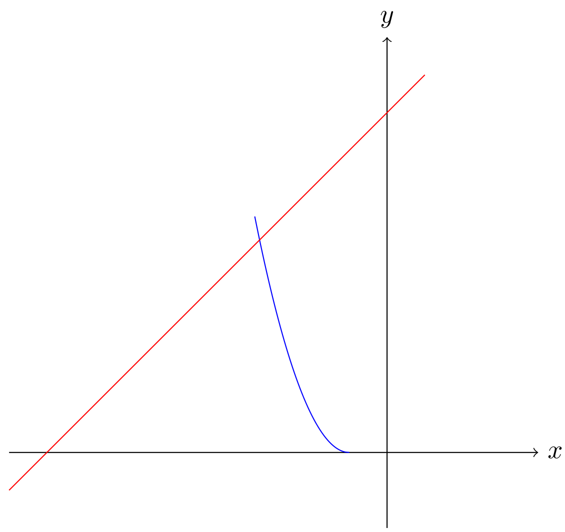
Fie f : $\mathbb{R} -> \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + m, x \leq -1 \\ mx - 9, x > -1 \end{cases}$ cu m $\in \mathbb{R}$.

a) Realizați graficul funcției pentru m=1.
b) Determinați imaginea funției f în funcție de parametrul real m.
c) Găsiți valorile lui m pentru care funcția dată este:
  c.1 injectivă
  c.2 surjectivă
  c.3 bijectivă

Rezolvare:

a) Pentru m = 1, $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, x \leq -1 \\ x - 9, x > -1 \end{cases}$.

Vom studia cum se comporta funcția pe cele două ramuri: $f/_{(-\infty,-1]}$ și $f/_{(-1,\infty)}$.
Ramura superioară este de gradul al II-lea, graficul este o parabolă cu vârful în jos. Vom afla punctul de minim. Pentru $ax^2 + bx + c$, vârful parabolei este $(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$. Astfel obținem că punctul de minim este (-1, 0).
Ramura inferioară este liniară. $f/_{(-1,\infty)}$ este strict crescătoare. Fie $x, y \in (-1, \infty)$, $x < y$. Atunci f(x) = x - 9, f(y) = y - 9. f(x) < f(y) $\iff$ x - 9 < y - 9 $\iff$ x < y, ceea ce este adevărat. Cum $f_{/(-1,\infty)}$ este strict crescătoare minimul este atins pentru x = -1 în punctul (-1, -10).



b) Vom studia funcția similar subpunctului a) însă în funcție de parametrul real m.
Astfel, punctul de minim al primei ramuri este (-1, m-1). Iar $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Deci Im$f_{(-\infty,-1]}$ este $[m-1,\, +\infty)$.
Vom studia monotonia funcției pentru $(-1, +\infty)$. Analog demonstrației de la subpunctul a), pentru $m > 0$ funcția este strict crescătoare.Pentru $m < 0$ funcția este strict descrescătoare. Pentru m = 0, $f/_{(-1,\,+\infty)}$ = -9, constantă.
Pentru $m > 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Pentru $m < 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$.
Astfel, dacă $m > 0$, Im$f_{(-1,\,+\infty)} = (-m-9,\, +\infty)$. Dacă $m < 0$, Im$f_{(-1,\,+\infty)}$ $= (-\infty,\, -m-9)$. Dacă m = 0, Im$f_{(-1,\,+\infty)}$ = -9.

În concluzie, Imf = $\begin{cases} (min(4m-4,\, -m-9),\, +\infty),\, m < 0 \\ \{-9\} \cup [-1,\, +\infty),\, m = 0 \\ (-\infty,\, -m-9] \cup [4m-4,\, +\infty),\, m > 0 \end{cases}$.

c) 1. f este injectivă dacă f(x) = f(y) => x = y. În primul rând vom studia injectivitatea pe ramuri. Cunoaștem că $f/_{(-\infty,\,-1]}$ și $f/_{(-1,\,+\infty)}$ sunt monotone, deci injective.
Caut valorile lui m pentru care funcția nu este injectivă. Fie x, y, $x \in (-\infty, -1]$, iar $y \in (-1, +\infty)$ cu proprietatea că f(x) = f(y). f(x) $\in [m-1,\, +\infty)$ => $\exists$ y f(y) $\geq$ m-1.
Pentru m > 0, funcția nu este injectivă întrucât $\forall y \in (max(4m-4, -m-9),\, +\infty)$ $\exists x_1 \in (-\infty,\, -1)$ și $x_2 \in (-1,\, +\infty)$ astfel încât $f(x_1) = f(x_2) = y$.
Pentru m = 0, funcția nu este injectivă (f(0) = f(1) = -9).
Pentru m $\leq$ 0, funcția nu este injectivă dacă m - 1 < -m - 9 $\iff$ 2m < -8 $\iff$ m < -4.
Deci, funcția este injectivă pentru m $\in [-4, 0)$.

c) 2. Funcția este surjectivă dacă $\forall$ y $\in \mathbb{R}$, $\exists x \in \mathbb{R}$ astfel încât f(x) = y.

Cu alte cuvinte, Imf = $\mathbb{R}$. Analizând cazurile obținute la b), pentru a funcția poate fi surjectivă dacă m < 0. De asemenea $(-\infty,\ -m-9] \cup [m-1,\ +\infty) = \mathbb{R}$.
m - 1 $\leq$ -m - 9 $\iff$ 2m $\leq$ -8 $\iff$ m $\leq$ -4.
Deci, f este surjectivă pentru m $\in (-\infty, -4]$.
c) 3. O funcție este bijectivă $\iff$ funcția este injectivă și surjectivă. Folosim rezultatele obținute la subpunctele anterioare și găsim că f este bijectivă pentru m $\in (-\infty, -4] \cap [-4, 0] = \{-4\}$.

Exercițiul 2

Fie E o mulțime și $A \subseteq E$. Funcția $\xi : E -> \{0, 1\}$, $\xi_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$
se numește funcția caracteristică a lui A în E. (Curs 2, Seria 13, pagina 3)
Fie $A, B \subseteq E$, cunoaștem regulile lui de Morgan:
$C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$
$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$
Demonstrați regulile lui de Morgan cu ajutorul funcției caracteristice.

Rezolvare:

Pentru doua submultimi A și B ale unei mulțimi T, funcția caracteristică are următoarele proprietăți:

1) $\xi_A = \xi_B \iff A = B$
2) $\xi_{A \cap B} = \xi_A * \xi_B$
3) $\xi_{A \cup B} = \xi_A + \xi_B - \xi_A * \xi_B$
4) $\xi_{C_T A} = 1 - \xi_A$
5) $\xi_A^2 = \xi_A$

Putem aplica proprietățile de mai sus în relațiile lui de Morgan, obținând:
$\xi_{C_E(A \cup B)} = 1 - (\xi_A + \xi_B - \xi_A * \xi_B)$
$\xi_{(C_E A) \cap (C_E B)} = 1 - (\xi_A^2 + \xi_B^2 - \xi_A * \xi_B) = 1 - (\xi_A + \xi_B - \xi_A * \xi_B)$
Din cele două relații de mai sus, împreună cu proprietatea 1, deducem:
$C_E(A \cup B) = (C_E A) \cap (C_E B)$
În mod analog,
$\xi_{C_E(A \cap B)} = 1 - \xi_A * \xi_B$
$\xi_{(C_E A) \cup (C_E B)} = (1 - \xi_A) + (1 - \xi_B) - (1 - \xi_A) * (1 - \xi_B) = 1 - \xi_A * \xi_B$
de unde:
$C_E(A \cap B) = (C_E A) \cup (C_E B)$.

Exercițiul 3

Arătați că relația de congruență modulo n este relație de echivalență.

Rezolvare:

- preluată din Tutoriat 1, anul 2019-2020, de la Gabriel Majeri

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ fixat. Atunci spunem că $a \equiv b \mod n$ dacă $n \mid (a-b)$.

Pentru a demonstra că este relație de echivalență, trebuie să demonstrăm că este *reflexivă*, *simetrică* și *tranzitivă*.

1. Reflexivitate
   Fie $a \in \mathbb{N}$. Atunci $n \mid (a-a) = 0$. Astfel $a \equiv a \mod n$. Deci $\equiv$ este reflexivă.

2. Simetrie
   Fie $a, b \in \mathbb{N}$ cu $a \equiv b \mod n$. Din definiție, $n \mid (a-b)$. Atunci $n \mid -(a-b)$. De unde rezultă că $n \mid (b-a)$. Deci $b \equiv a \mod n$. Astfel $\equiv$ este simetrică.

3. Tranzitivitate
   Fie $a, b, c \in \mathbb{N}$ cu $a \equiv b \mod n$ și $b \equiv c \mod n$. Conform definiției $n \mid (a-b)$ și $n \mid (b-c)$. Atunci facem suma și obținem $n \mid ((a-b)+(b-c)) \implies n \mid (a-c)$. Deci $a \equiv c \mod n$. Astfel $\equiv$ este tranzitivă.

Conform celor trei proprietăți demonstrate mai sus $\equiv$ este relație de echivalență.

Exercițiul 4

Definim pe mulțimea numerelor complexe $\mathbb{C}$ următoarea relație binară:

$$x \rho y \iff x - y \in \mathbb{R}$$

a) Să se arate că ρ este relație de echivalență.
b) Aflați clasa de echivalență a lui π în raport cu ρ.
c) Aflați clasa de echivalență a lui $1+2i$ în raport cu ρ.
d) Aflați clasa de echivalență a lui $a+bi$, cu $a, b \in \mathbb{R}$, în raport cu ρ.
e) Determinați un sistem complet și independent de reprezentanți pentru ρ.
(Restanță algebră, seria 13, 04.06.2020)

Rezolvare:

a) Pentru a demonstra că ρ este relație de echivalență vom arăta că ρ este reflexivă, simetrică și tranzitivă.
ρ este reflexivă $\iff x\,\rho\,x\ \forall x \in \mathbb{R} \iff x - x \in \mathbb{R} \iff 0 \in \mathbb{R}$, ceea ce este adevarat.
ρ este simetrică $\iff \forall\, a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $a\,\rho\,b$ atunci $b\,\rho\,a$.
$a\,\rho\,b \iff a - b \in \mathbb{R}$. Dacă a - b $\in \mathbb{R}$, atunci -(a-b) = b-a $\in \mathbb{R} \iff b\,\rho\,a$.
ρ este tranzitivă dacă $a\,\rho\,b$ și $b\,\rho\,c$ atunci a ρ c.
a $\rho\,b \iff a - b \in \mathbb{R}$ b $\rho\,c \iff b - c \in \mathbb{R}$
Atunci a - c = (a - b) + (b - c) $\in \mathbb{R} \iff a\,\rho\,c$.

b) Clasa de echivalență a lui π în raport cu ρ este $[\pi] = \{x \mid x\,\rho\,\pi\}$,

$[\pi] = \{x \mid x\ -\ \pi \in \mathbb{R}\}$
$\pi = \pi + 0 \cdot i$
x = a + b · i
$\pi - x = \pi - a - bi \in \mathbb{R} \iff b = 0$
Deci, clasa de echivalență a lui π este $\mathbb{R}$.

c) Clasa de echivalență a lui 1 + 2i în raport cu ρ este $[1+2i] = \{x \mid x\,\rho\ (1+2i)\}$,
$[1+2i] = \{x \mid x\ -\ (1+2i) \in \mathbb{R}\}$
x = a + b · i
$x - (1+2i) = a - 1 + (b-2)i \in \mathbb{R} \iff b - 2 = 0 \iff b = 2$
Deci, clasa de echivalență a lui 1+2i este $\{a + 2i \mid a \in \mathbb{R}\}$.
d) Clasa de echivalență a lui a + bi în raport cu ρ este $[a+bi] = \{x \mid x\,\rho\ (a+bi)\}$,
$[a+bi] = \{x \mid x\ -\ (a+bi) \in \mathbb{R}\}$
x = c + d · i
$x - (a+bi) = a - c + (b-d)i \in \mathbb{R} \iff b - d = 0 \iff b = d$
Deci, clasa de echivalență a lui a+bi este $\{c + bi \mid c \in \mathbb{R}\}$.

e) O mulțime A este sistem complet și independent de reprezentanți dacă
$\forall\, x, y \in A, x \neg\rho\, y$ și $\forall\, x \in \mathbb{C}\ \exists\, y \in A$astfel încât $x\rho\, y$.
Conform d) clasa de echivalență a lui a+bi este $\{c + bi \mid c \in \mathbb{R}\}$. Un sistem de reprezentanți este $\{ai \mid a \in \mathbb{R}\}$.
$\forall\, x = a + bi \in \mathbb{C}\ \exists\, y = bi \in A$ astfel încât $x\rho\, y \iff x - y = a \in \mathbb{R}$.
$\forall\, x = ai,\ y = bi \in A,\ x \neq y,\ \ x \neg\rho\, y \iff x - y = (a-b)i \notin \mathbb{R} \iff a - b \neq 0$, ceea ce este adevărat.