Tutorat Mathématiques : Examen

Université François Rabelais

Analyse

Démonstration des formules d'Euler

À l'aide des formules de Maclaurin ou d'une étude de la fonction f proposée, démontrer les formules d'Euler.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{e^{ix}}$

$$\forall x \in \mathbb{R} | e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

On rappellera que les formules de Maclaurin correspondent à un dévelopement limité en 0 à l'ordre n écrit sous forme d'une somme.

exemple : $e^t = 1 + t + ... + \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$

Vrai ou faux ??

Répondre par vrai ou faux aux questions suivantes en démontrant si c'est vrai ou en donnant un contre-exemple si c'est faux.

1. L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par α est inférieure à 2α ?
2. Si f est paire alors : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq 0$?
3. Toute fonction intégrale sur $[a, b]$ est continue ?
4. Si une fonction f est telle que : $\forall x \in [-1, 1]$, $f(x) < x^3$ alors : $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)dx < 0$?

Bonus :

Il existe $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels, tels que pour tout x réel et $i \in \mathbb{N}^*$: $f_i(x) = a_i \cos(ix) > 0$?

Développements limités

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$

1. Calculer le développement limité de la fonction f en 0 à l'ordre 2.
2. En déduire que la fonction f peut-être prolongée par continuité en 0 en posant $\tilde{f}(0) = 1$.
3. Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
4. Donner l'équation T_0, de la tangeante à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $x = 0$ et la position relative de T_0 par rapport à la courbe $\mathcal{C}$.

Bonus :

Déterminer une asymptote $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f en $+\infty$ et -∞.

Intégration

Fraction rationnelle

Soit l'intégrale I définie telle que : $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+x+1}dx$

1. Montrer que I est de la forme : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\alpha x+\beta}{x^2+x+1} + \frac{\gamma}{x^2+x+1}dx$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la forme canonique de $x^2 + x + 1$.
3. En déduire l'intégrale I et la calculer.

Changement de variable

Soit l'intégrale $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$

1. À l'aide des formules d'Euler (ou d'une autre méthode), montrer que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.
2. En posant le changement de variable $u = \frac{x}{2}$, montrer que l'intégrale est de forme $\frac{\tan'}{\tan}$.
3. En déduire la forme de $\varphi(x)$.

Intégration par parties (Intégrales de Wallis)

Soit l'intégrale $\mathcal{W}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathcal{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$

1. Calculer les intégrales $\mathcal{W}_0$ et $\mathcal{W}_1$.
2. Déterminer que : $\mathcal{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx$.
3. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\cos^2(x)dx$, en réalisant une intégration par parties de cette intégrale en déduire une relation de récurrence de $\mathcal{W}_n$.