Correction

Université Fraçois Rabelais

Par la suite, on considérera que $\lim_{x\to 0} \varepsilon_n(x) = 0$ et $\lim_{x\to 0} o(x^n)\ \forall n > 0$

Développements limités

- $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$

$D_f = \mathbb{R}$

On peut utiliser la méthode des coefficients indéterminés également, c'est une méthode que nous n'avons pas abordée, c'est pourquoi je vous en fais tout de même part :

$DL_4(0) : f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x)$

Dès lors, $\forall x{\neq}0$

$(1 + x^3) = f(x).(1 + x^2)$

Par unicité du développement limité :

$(1 + x^3) = a_0 + a_1x + (a_0 + a_2)x^2 + (a_1 + a_3)x^3 + (a_2 + a_4)x^4$

Par identification on obtient le système suivant :

$$(S)\ \begin{cases} a_0 = & 1 \\ a_1 = & 0 \\ a_0 + a_2 = & 0 \\ a_1 + a_3 = & 1 \\ a_2 + a_4 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 = & 1 \\ a_1 = & 0 \\ a_2 = & -1 \\ a_3 = & 1 \\ a_4 = & 1 \end{cases}$$

$f(x) = 1 - x^2 + x^3 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$

- $u(x) = e^x. \ln(x + 1)$

$D_u =]-1, +\infty[$

$DL_2(0) : e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

$DL_2(0) : \ln(x + 1) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_2(x)$

$$\begin{aligned} DL_4(0) : u(x) &= (1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)).(x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + x^4\varepsilon_2(x)) \\ &= x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + x^2 - \tfrac{1}{2}x^3 + \tfrac{1}{3}x^4 + \tfrac{1}{2}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^4 + o(x^4) \\ &= x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^4) \end{aligned}$$

$u(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$

- $v(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \sqrt{x}.\frac{1}{1+x}$

$D_v = \mathbb{R}^+$

Pour effectuer un développement limité en a, on se ramène en 0 en posant l'écart $h = x - a$
Pour un $DL_n(1)$, on pose $h = x - 1 \Longleftrightarrow x = h + 1$

$DL_2(0) : \sqrt{h+1} = (h+1)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}h - \frac{1}{8}h^2 + h^2\varepsilon(h) = \frac{1}{2}(2 + h - \frac{1}{4}h^2 + \frac{h^2}{2}\varepsilon(x))$

$DL_2(0) : \frac{1}{2+h} = \frac{1}{2(1+\frac{h}{2})} = \frac{1}{2}.\frac{1}{1+\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2}h + \frac{1}{4}h^2 + h^2\varepsilon_2(h))$

$DL_2(0) : v(h) = \frac{1}{4}(2 + h - \frac{h^2}{4} + \frac{h^2}{2}\varepsilon(x))(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + h^2\varepsilon_2(h))$
$= \frac{1}{4}(2 - h + \frac{h^2}{2} + h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h))$
$= \frac{1}{4}(2 - \frac{h^2}{4}) + o(h)$

$v(x) = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{16} + o(x-1)$

- $g(x) = \frac{x}{\arctan(x)}$

$D_g = \mathbb{R}^*$

$DL_5(0) : \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x) = x(1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + x^4\varepsilon(x))$

$DL_5(0) : g(x) = \frac{x}{x(1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+x^4\varepsilon(x))} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{3}+\frac{x^4}{5}+x^4\varepsilon(x)} = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + x^4\varepsilon_2(x)$

$g(x) = 1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + x^4\varepsilon_2(x)$

- $h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$h(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}$

$D_h =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$DL_3(0) : \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$ On anticipe la réduction de degré causée par $\frac{1}{x}$.

$\frac{1}{x}(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x) = \lambda(x)$

$\lim_{x\to 0}\lambda(x) = 1 \neq 0$, On ne peut pas appliquer le développement limité de $e^{\lambda(x)}$ directement.

Pour cela, on se ramène en 0.

$e^{\lambda(x)} = \exp(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x)) = e^1. \exp(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + x^2\varepsilon(x))$

$DL_1(0) : e^{\lambda(x)} = h(x) = e.(\lambda(x) + o(x))$

$h(x) = e.(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x))$

Limites de fontions

- $h(x) = \frac{\sin(x)}{x(\cos(x))}$, $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

$D_h = \{x \in \mathbb{R} | x{\neq}0 \wedge x{\neq}\ \frac{\pi}{2}\text{mod}(\pi)\}$

$DL_3(0) : \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

$DL_2(0) : \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)$

$h(x) = \frac{x-\frac{x^3}{6}}{x(1-\frac{x^2}{2})} + o(x) = \frac{x(1-\frac{x^2}{6})}{x(1-\frac{x^2}{2})} + o(x) = \frac{1-\frac{x^2}{6}}{1-\frac{x^2}{2}} + o(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{6}}{1-\frac{x^2}{2}} + o(x) = 1$

- $g(x) = \sqrt{x^2+3x+2} + \frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$

$\sqrt{x^2+3x+2}$ existe $\iff x^2+3x+2 \geq 0 \iff (x+1)(x+2) \geq 0$

$D_g =]-\infty, -2[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

Pour faire un développement limité au voisinage de l'infini, on pose $u = \frac{1}{x}$ et la fonction auxiliaire $\varphi(u) = g(\frac{1}{x}) \iff \varphi(\frac{1}{u}) = g(x)$

$g(x) = \sqrt{x^2(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})} + \frac{1}{x} = |x|\sqrt{(1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2})} + \frac{1}{x}$

$\varphi(u) = |\frac{1}{u}|\sqrt{1+3u+2u^2} + u = |\frac{1}{u}|.(1 + \frac{3u+2u^2}{2} + o(u^2)) + u = \frac{1}{u} + \frac{3}{2} + u + o(u)$

$\varphi(\frac{1}{u}) = u + \frac{3}{2} + \frac{1}{u} + o(\frac{1}{u})$

$g(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{2} + x + o(x)$

Détermination des asymptotes :
$g(x) - (\frac{3}{2} + x) = \frac{1}{x}$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
L'asymptote $\mathcal{A}$ en $+\infty$ de g est $\mathcal{A} : y = \frac{3}{2} + x$ et la courbe $\mathcal{C}$ du graphe est au-dessus de $\mathcal{A}$ car la différence est positive.

- $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\arctan(\sin(x))}$

$D_f = \{\forall x > -1 | x{\neq}0\text{mod}(\pi)\}$

$DL_3(0) : \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x)$

$DL_3(0) : \arctan(\sin(x)) = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) + x\varepsilon_2(x))$

$DL_3(0) : \ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x)$

$f(x) = \frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+x^3\varepsilon_3(x)}{x-\frac{x^3}{3!}+x^3\varepsilon(x)+x\varepsilon_2(x))} = \frac{x(1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon_3(x))}{x(1-\frac{x^2}{3!}+x^2\varepsilon(x)+\varepsilon_2(x)} = \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+x^2\varepsilon_3(x)}{1-\frac{x^2}{3!}+x^2\varepsilon(x)+\varepsilon_2(x)} = \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}}{1-\frac{x^2}{3!}} + o(x)$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}}{1-\frac{x^2}{3!}} + o(x) = 1$

Formules de Taylor

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par l'application $f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$

La fonction f est de classe C^n, on peut donc rechercher $f^{(n)}(0), \forall n \in \mathbb{N}$

Pour ceci, on va faire l'inverse de ce que l'on fait d'habitude, on va partir du développement limité en 0 de la fonction et par unicité de ce développement on va en déduire les coefficients des formules de Taylor associés.

$f(x) = x^3 . \frac{1}{1+x^6} = x^3(1 - x^6 + x^{12} - ... + (-1)^l x^{6l}) = x^3 - x^9 + ... + (-1)^l x^{6l+3}$

N.B : Sous la forme d'une serie de Maclaurin, on obtient :

$$f(x) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l x^{6l+3}$$

Les formules de Taylor nous donnent les formules suivantes :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^N)$$

Par unicité :

$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} (-1)^l & \textbf{si } l = 3 + 6n \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

$n = 3 + 6l \iff l = \frac{n-3}{6}$

$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-3}{6}} .n! & \textbf{si } n \equiv 3 \text{mod}(6) \\ 0 & \textbf{sinon} \end{cases}$

Démonstration des formules d'Euler

On rappelle les formules d'Euler suivantes et le developpement en série de Maclaurin de l'exponentielle :

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

et

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

Dès lors on a :

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n x^n}{n!} = (\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n} x^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!})$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$