Tutorat Mathématiques

Université François Rabelais

Analyse

Parité de fonctions

Soit f une fonction continue sur un intervalle $E \subseteq \mathbb{R}$.
On rappelle la définition des fonctions paires et impaires :

$$f \text{ paire} \iff \forall x \in E, -x \in E \wedge \forall x \in E, f(x) = f(-x))$$
$$f \text{ impaire} \iff \forall x \in E, -x \in E \wedge \forall x \in E, -f(x) = f(-x)$$

On admettra que le quotient et le produit de fonctions paires et impaires suit la règle des signes.
Démontrer les assertions suivantes :

- f paire $\Longrightarrow f'$ impaire **et** f impaire $\Longrightarrow f'$ paire

On posera pour la première partie de l'assertion $g(x) = F(x) - F(-x)$ et on cherchera un contre-exemple pour la deuxième partie.

- f impaire $\Longrightarrow F$ paire **et** f paire $\not\Longrightarrow F$ impaire

Quelques applications

Autour de la fonction $\arctan(x)$

1. À l'aide du développement limité de $\frac{1}{1+x^2}$ déterminer le développement limité de $\arctan(x)$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est une fonction impaire, montrer que $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$, $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$.
   On pensera à un changement de variable $u = -x$.
3. Démontrer que la fonction $\arctan(x)$ est impaire. (Ref cours de Mme Moreau, chapitre 1 : Fonctions trigonométriques et leur réciproque)
4. En déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx = 0$.
5. Calculer $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$ et en déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan(x)}{1+x^2}dx$.

Approche des fonctions trignométriques hyperboliques : $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$

Soient quelques propriétes sur les fonctions hyperboliques que l'on ne cherchera pas à démontrer ici :

$$\begin{array}{cc} \cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} & \sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \\ (\cosh(x))' = \sinh(x) & (\sinh(x))' = \cosh(x) \\ \cosh(x) \text{ est paire} & \sinh(x) \text{ est impaire} \end{array}$$

Quelques propriétés fondamentales :

- $e^x = \cosh(x) + \sinh(x)$
- $1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$
- $\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$
- $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$
- $(\cosh(x) + \sinh(x))^n = \cosh(nx) + \sinh(nx)$

Soit la fonction f définie telle que $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{1/x} -\frac{2(e^t-e^{-t})}{2+(e^t)^2+(e^{-t})^2}dt$.

1. Simplifier la fraction $-\frac{2(e^x-e^{-x})}{2+(e^x)^2+(e^{-x})^2}$ de manière qu'elle soit composée uniquement de $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$.
2. Donner une primitive Φ de la fonction $\varphi(x) = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$.
3. Montrer que la fonction Φ est paire.
4. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) - \Phi(0)$.
5. En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$.

On pose la fonction g telle que : $g(x) = \displaystyle\int_{\ln(x)}^{e^{1/x}} \Phi(t)dt$.

1. En reprenant la définition de $\cosh(x)$ et en appliquant le changement de variable $u = e^x$ déterminer une primitive Ψ de $\Phi(x)$.
2. Retrouver la dérivée de g telle que $g'(x) = -(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\cosh(e^{\frac{1}{x}})} + \frac{1}{x\cosh(\ln(x))})$
3. Établir le tableau de variations de la fonction g.
4. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.