Tutorat Mathématiques : Correction examen

Université François Rabelais

Analyse

Démonstration des formules d'Euler

Pour la démonstration suivant les formules de Maclaurin, se référer à la correction du TD de la première séance. Sinon, on posait la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{e^{ix}}$.

$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec :

$u(x) = \cos(x) + i\sin(x) \overset{'}{\to} u'(x) = -\sin(x) + i\cos(x)$

$v(x) = e^{ix} \overset{'}{\to} v'(x) = ie^{ix}$

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)} = \frac{e^{ix}(-\sin(x)+i\cos(x))-ie^{ix}(\cos(x)+i\sin(x))}{(e^{ix})^2} = \frac{e^{ix}(-\sin(x)+i\cos(x)-i\cos(x)+\sin(x))}{(e^{ix})^2} = \frac{0}{e^{ix}} = 0$$

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0 \Longrightarrow \exists! \alpha \in \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R} | f(x) = \alpha$
On choisit $x = 0$: $f(0) = \frac{\cos(0)+i\sin(0)}{e^0} = 1$
Dès lors, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1$

$$f(x) = \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{e^{ix}} \Longleftrightarrow 1 = \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{e^{ix}} \Longleftrightarrow e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$$

Vrai ou faux ??

1. L'intégrale sur $[-1, 1]$ d'une fonction majorée par α est inférieure à 2α. $\to$ Vrai

Preuve :

$\forall x \in [-1, 1], f(x)dx < \alpha$. Par linéarité, on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx < [\alpha x]_{-1}^{1} \Longrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx < 2\alpha$

- Si f est paire alors : $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx \geq 0$? $\to$ Faux

Preuve :

$f(x) = -1$ est paire et $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = -1 + 0 = -1 < 0$

- Toute fonction intégrale sur $[a, b]$ est continue ? $\to$ Faux

Preuve :

Les fonctions en escalier sur $[a, b]$ sont intégrables pourtant elles ne sont pas continues.

- Si une fonction f est telle que : $\forall x \in [-1, 1],\ f(x) < x^3$ alors : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$? $\to$Vrai

Preuve :

Comme x^3 est une fonction impaire, par conséquent : $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$,

Par linéarité de l'intégrale, $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)dx < \int_{-1}^{1} x^3 dx \Longrightarrow \int_{-1}^{1} f(x)dx < 0$.

- Il existe $a_1, a_2, ..., a_n$ des réels, tels que pour tout x réel et $i \in \mathbb{N}^*$: $f_i(x) = a_i \cos(ix) > 0$? $\to$ Faux

Preuve :

$f_i(x) = a_i \cos(ix)$ est une fonction périodique de période 2π, on étudie donc : $\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f_i(x)$, or pour $i \in \{1, 2, ..., n\}$
$\displaystyle\int_{0}^{2\pi} a_i \cos(ix) = [\tfrac{a_i}{i} \sin(ix)]_0^{2\pi} = 0$. L'intégrale est nulle, dès lors $f_i(x)$ ne peut être strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Développements limités

Soit la fonction f telle que $f(x) = \frac{x}{e^x - 1} D_f = \mathbb{R}^*$

- $DL_2(0)$: $f(x) = \frac{x}{1+x+\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x)-1} = \frac{x}{x(1+\frac{x}{2}+x\varepsilon(x))} = \frac{1}{1+\frac{x}{2}+x\varepsilon(x)} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + x^2\varepsilon_2(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon_i(x) = 0\ i \in \{1, 2\}$
- $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$. La fonction f peut donc bien être prolongée par continuité en posant $\tilde{f}(0) = 1$.
- f est dérivable en $a \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \tau_a(x)$ existe $\Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe.

Ici, $a = 0$ et on a montré que $f(0) = 1$. On a alors : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{4} = -\frac{1}{2}$

- L'équation de la tangeante est donnée par les deux premiers termes du développement limité, on a :

$T_0 : y = 1 - \frac{x}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - T_0 = \frac{x^2}{4} \geq 0$, dès lors, $\mathcal{C}$ est toujours au dessus de T_0.

Intégration

Fraction rationnelle

Soit l'intégrale I définie telle que : $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x}{x^2+x+1} dx$

- $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx = \int_{0}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{x^2+x+1} dx$. On a alors $\alpha = 2, \beta = 1, \gamma = -1$.
- $x^2 + x + 1$, On fait un début d'identité remarquable.

$x^2 + x + 1 = x^2 + 2.\frac{1}{2}.x + (\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$

- $I = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{2x+1-1}{x^2+x+1} dx = \int_{0}^{1} \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx - \int_{0}^{1} \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx$

L'intégrale se compose de deux intégrales :

(1) : $\frac{u'}{u} \xrightarrow{\int} \ln|u|$ avec ici $u = x^2 + x + 1$

(2) : $\frac{u'}{u^2+\alpha^2} \xrightarrow{\int} \frac{u'}{\alpha}\arctan(\frac{u}{\alpha})$ avec ici $u = x + \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ou $-\frac{\sqrt{3}}{2}$)

$I = [\ln|x^2+x+1| - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))]_0^1 = \ln(3) - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{3}{\sqrt{3}}) - (-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}))$

$I = \ln(3) - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{2\pi}{6\sqrt{3}} = \ln(3) - \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

Changement de variable

Soit l'intégrale $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$.

- $e^{i2x} = (e^{ix})^2 = (\cos(x) + i\sin(x))^2 = \cos^2(x) - \sin^2(x) + 2i\sin(x)\cos(x)$

On sait que $\sin(x) = \Im(e^{ix})$ par conséquent : $\sin(2x) = \Im(e^{i2x}) = 2\sin(x)\cos(x)$

- On pose $u = \frac{x}{2} \iff 2u = x$, on a donc : $dx = 2du$.

$\varphi(u) = \displaystyle\int \frac{2}{\sin(2u)}du = \int \frac{2}{2\sin(u)\cos(u)}du = \int \frac{\cos(u)}{\sin(u)\cos^2(u)}du = \int \frac{1}{\tan(u)}.\frac{1}{\cos^2(u)}\,du$

On trouve bien $I(x)$ de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \tan(\frac{x}{2})$ et $u'(x) = \frac{1}{\cos^2(\frac{x}{2})}$

- La primitive d'une fonction de la forme $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est $\ln|u(x)|$

Ainsi : $\varphi(x) = \displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx = \ln|\tan(\frac{x}{2})| + cte.$

Intégration par parties (Intégrale de Wallis)

Soit l'intégrale $\mathcal{W}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\mathcal{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx$

- $\mathcal{W}_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1dx = \frac{\pi}{2}$ et $\mathcal{W}_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx = -\cos(\frac{\pi}{2}) + \cos(0) = 1$
- $\mathcal{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)\sin^2(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x)(1-\cos^2(x))dx$

Par linéarité de l'intégrale et en développant par $\sin^{n-2}(x)$, on retrouve bien :

$\mathcal{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}dx - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}\cos^2(x))dx$

- On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2}(x).\cos^2(x)dx$, on réalise une intégration par parties :

$u'(x) = \cos(x)\sin^{n-2}(x) \xrightarrow{\int} u(x) = \frac{1}{n-1}\sin^{n-1}(x)$ (Forme $u'(x)u^n(x) \xrightarrow{\int} \frac{u^{n+1}(x)}{n+1}$)

$v(x) = \cos(x) \xrightarrow{'} v'(x) = -\sin(x)$

$I_n = [(u.v)(x)]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2}(u.v')(x)dx = 0 + \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi/2}\sin^n(x) = \frac{1}{n-1}\mathcal{W}_n$

Dès lors, On peut exprimer $\mathcal{W}_n$ par la relation de récurrence suivante :

$\mathcal{W}_n = \mathcal{W}_{n-2} - \frac{1}{n-1}\mathcal{W}_n \iff \mathcal{W}_n(1 + \frac{1}{n-1}) = \mathcal{W}_{n-2} \iff \mathcal{W}_n = \frac{n-1}{n}\mathcal{W}_{n-2}$