Correction

Université François Rabelais

Parité de fontions

- f paire $\Longrightarrow f'$ impaire **et** f impaire $\Longrightarrow f'$ paire

$f(x) = f(-x)$

$(f(x))' = (f(-x))' \Longleftrightarrow f'(x) = -f'(-x) \Longleftrightarrow -f'(x) = f'(-x)$

$-f(x) = f(-x)$

$(-f(x))' = (f(-x))' \Longleftrightarrow -f'(x) = -f'(-x) \Longleftrightarrow f'(x) = f'(-x)$

- f impaire $\Longrightarrow F$ paire **et** f paire $\Longrightarrow F$ impaire

$g(x) = F(x) - F(-x)$

$g'(x) = f(x) + f(-x) \Longleftrightarrow g'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Longrightarrow \forall x \in D_g, \exists \alpha \in \mathbb{R} | g(x) = \alpha$

$g(0) = F(0) - F(0) = 0$

La fonction g est nulle, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = F(-x)$. Par conséquent F est paire.

Contre-exemple

Soit $f(x) = 1$, une primitive F de f peut-être telle que $F(x) = x + 1$.
F n'est pas impaire.

P.S : Plus généralement, F sera généralement impaire si $F(0) = 0$.

Quelques applications

Autour de la fonction $\arctan(x)$

- Soit le développement limité de $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + ... + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$

Par linéarité de l'intégration on peut intégrer terme à terme

$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int 1dx - \int x^2dx + ... + (-1)^n \int x^{2n}dx + \int o(x^{2n})dx \Longleftrightarrow \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O(x^{2n+1})$

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que f est une fonction impaire, montrer que $\displaystyle\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$, $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$.

On pose la nouvelle variable : $u = -x \Longleftrightarrow -u = x$

Si $x = \alpha \Longrightarrow u = -\alpha$

Si $x = -\alpha \Longrightarrow u = \alpha$

$\frac{dx}{du} = -1 \Longleftrightarrow dx = -du$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) = \int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)(-du) = -\int_{\alpha}^{-\alpha} f(-u)du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(-u)du = \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)(-dx) = -\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$$

$$\Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) + f(x)dx = 0 \Longrightarrow \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx = 0$$

- Voir cours de Mme Moreau... :)
- La fonction $\frac{1}{1+x^2}$ est paire car $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+(-x)^2}$. La fonction $\arctan(x)$ est impaire.

Nous avons précisé que le produit de deux fonctions suit la règle des signes, on a donc : *paire* $\times$ *impaire* $\Longrightarrow$ *impaire*.

D'après ce que nous avons démontré précédement, l'intégrale d'une fonction impaire entre deux bornes opposées est toujours égale à 0, ceci vaux aussi pour $\pm\infty$.

Par conséquent $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = 0$.

- La fonction $\frac{\arctan(x)}{1+x^2}$ est de la forme $u'(x)u^{\alpha}(x) \xrightarrow{\int} \frac{u^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}$ après intégration. (Ici $\alpha = 1$), On obtient $\frac{\arctan^2(x)}{2}$.

On pose $X \in [0, +\infty[$: $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{0}^{X} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = \lim_{X\to+\infty} \frac{\arctan^2(X)}{2} - \frac{\arctan^2(0)}{2} = \frac{\pi^2}{8}$

D'après la question précédente, on en déduit que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\arctan(x)}{1+x^2} dx = -\frac{\pi^2}{8}$

Approche des fonctions trignométriques hyperboliques : $\sinh(x)$ et $\cosh(x)$

Soit la fonction f définie telle que $f(x) = \displaystyle\int_{-x}^{1/x} -\frac{2(e^t - e^{-t})}{2+(e^t)^2+(e^{-t})^2} dt$.

- Soit la fraction $-\frac{2(e^x - e^{-x})}{2+(e^x)^2+(e^{-x})^2}$:

$$-\frac{2(e^x - e^{-x})}{2+(e^x)^2+(e^{-x})^2} = -\frac{4\sinh(x)}{2(1+\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2})} = -\frac{2\sinh(x)}{1+\cosh(2x)} = -\frac{2\sinh(x)}{\cosh^2(x)-\sinh^2(x)+\cosh^2(x)+\sinh^2(x)} = -\frac{\sinh(x)}{\cosh^2(x)}$$

- La fonction φ est de la forme $\frac{u'(x)}{u^n(x)}$ (avec $n = 2$), on a donc Φ de la forme $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}(x)}$.

Dès lors, on a $\Phi(x) = \frac{1}{\cosh(x)}$.

- La fonction Φ est une primitive d'une fonction impaire (quotient d'une fonction paire $[\cosh(x)]$ et d'une fonction impaire $[\sinh(x)]$) elle est donc une fonction paire.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cosh(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+e^{-x}}{2} = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\cosh(x)} = 0$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) - \Phi(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 0 - 1 = -1$

- La question précédente nous a donnés une limite de la fonction f telle que : $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = \int_{0}^{+\infty} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt$.

Ici va avoir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \int_{-\infty}^{0} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt$. Par la relation de Chales, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt$.
Or on sait que $-\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt$ est une fonction impaire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt = 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt = \int_{-\infty}^{0} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt + \int_{0}^{+\infty} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt \iff 0 = \int_{-\infty}^{0} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt - 1$$

$$\implies 1 = \int_{-\infty}^{0} -\frac{\sinh(t)}{\cosh^2(t)}dt = \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

On pose la fonction g telle que : $g(x) = \int_{\ln(x)}^{e^{1/x}} \Phi(t)dt$. $D_g =]0, +\infty[$

- On a trouvé $\Phi(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x+e^{-x}}$

On pose le changement de variable $u = e^x$, dès lors $\frac{du}{dx} = u \iff dx = \frac{du}{u}$

$$\Psi(x) = \int \Phi(x)dx = \int \Phi(u)\frac{du}{u} = \int \frac{2}{u+\frac{1}{u}}.\frac{du}{u} = \int \frac{2}{u^2+1}du = 2\arctan(u) + cte = 2\arctan(e^x)$$

- $g'(x) = (\Psi(e^{\frac{1}{x}}) - \Psi(\ln(x)))' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\Phi(e^{\frac{1}{x}}) - \frac{1}{x}\Phi(\ln(x)) = -(\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\Phi(e^{\frac{1}{x}}) + \frac{1}{x}\Phi(\ln(x)))$

En remplaçant Φ par la fonction qui lui est associée on, retrouve bien : $g'(x) = -(\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2\cosh(e^{\frac{1}{x}})} + \frac{1}{x\cosh(\ln(x))})$

- g' est négative $\forall x > 0$, dès lors, g est strictement décroissante sur D_g.

x	0	α	$+\infty$
signe de g'		$-$	
variation de g	π	0	$-\pi+2\arctan(e)$

- La fonction g est strictement décroissante et continue sur $]0, +\infty[$ de plus $\lim_{x\to0} g(x) = \pi < 0 < \lim_{x\to0} g(x) = -\pi + 2\arctan(e) \simeq -0,71$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\exists! \alpha \in]0, +\infty[$ telle que $g(\alpha) = 0$.