Tutorat Mathématiques

Université François Rabelais

Analyse

Formes à (re)connaître

Ce sont les formes principales que l'on retrouve dans les intégrales de fractions rationnelles, dans les intégrations par parties et dans les changements de variable. À ajouter à votre formulaire si elles n'y sont pas...

- $\frac{u'}{u^n} \xrightarrow{\int} -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ $n > 1$
- $\frac{u'}{u^2+\alpha^2} \xrightarrow{\int} \frac{u'}{\alpha} \arctan(\frac{u}{\alpha})$
- $u'u^n \xrightarrow{\int} \frac{u^{n+1}}{n+1}$ $n > 0$
- $\frac{u'}{u} \xrightarrow{\int} \ln|u|$

Intégrale d'une fraction rationnelle

$I(x) = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}dx$ (On considéra toutes les $cte = 0$)

1. Essayer de faire apparaître une forme $\frac{u'}{u}$ en modifiant un peu la fraction.

$I(x) = \displaystyle\int \frac{x-1}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+5}dx$ Multiplication par 2 dans l'intégrale, on compense par $\frac{1}{2}$.

$I(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4-4}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+5}dx$ On a fait apparaître la forme $\frac{u'}{u}$.

$I(x) = \displaystyle\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - \frac{4}{x^2+2x+5}dx$ On sépare en deux fractions.

$I(x) = \frac{1}{2}(\ln|x^2+2x+5| - \displaystyle\int \frac{4}{x^2+2x+5}dx)$

2. Pour l'intégrale restante, essayer de faire apparaître une forme $\frac{u'}{u^2+\alpha^2}$, pour cela mettre le dénominateur sous sa forme canonique.

$x^2 + 2x + 5 = (x+1)^2 + 4$

$I(x) = \frac{1}{2}(\ln|x^2+2x+5| - 4\displaystyle\int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx)$

$I(x) = \frac{1}{2}(\ln|x^2+2x+5| - \frac{4}{\sqrt{4}}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{4}}))$

$I(x) = \frac{1}{2}(\ln|x^2+2x+5| - 2\arctan(\frac{x+1}{2}))$

Intégrale du partielle de Mai 2011

Soit l'intégrale I définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx$

- À faire, c'est très simple... ;)
- $\frac{3}{2}\displaystyle\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx$ On reconnait la forme $\frac{u'}{u^n} \xrightarrow{\int} -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$ avec $n = 2$

$\frac{3}{2}\displaystyle\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+2)^2}dx = -\frac{3}{2}\frac{1}{x^2+2x+2}$

- Trouver les réels a et b tels que : $x^2 + 2x + 2 = (x + a) + b^2$ revient à rechercher la forme canonique :

$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1$ On trouve alors $a = b = 1$.

- On procède au changement de variable $u = x + 1 \iff x = u - 1$

$\frac{dx}{du} = \frac{(u-1)'}{(u)'} \iff \frac{dx}{du} = 1 \iff dx = du$

$\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \int \frac{du}{((u-1)+1)^2+1)^2} = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$

- Pour l'intégration par parties on pose u et v telles que :

$v' = 1 \to v = u$

$w = \frac{1}{u^2+1} \to w' = -\frac{2u}{(u^2+1)^2}$

ATTENTION !! Ici, il ne faut pas poser $v' = \frac{1}{1+u^2} \to v = \arctan(x)$; c'est juste, mais on ne retrouve pas de $\arctan(x)$ dans la formule que l'on recherche, faire ceci nous ferait tourner en rond et on n'aboutirait pas au résultat recherché. Plus généralement, si rien ne semble s'arranger au bout de la deuxième IPP, c'est que l'on a mal posé u et v.

$\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = [v.w] - \int v.w'du = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{(u^2+1)-1}{(u^2+1)^2}du$

$\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{(u^2+1)}{(u^2+1)^2}du - \int \frac{1}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2(\int \frac{du}{u^2+1} - \int \frac{du}{(u^2+1)^2})$

$\displaystyle\int \frac{du}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{u^2+1} = \frac{u}{u^2+1} - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} \iff 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$

On retrouve bien : $2\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{du}{u^2+1}$

- Par suite (On considère toute $cte = 0$) :

$2\displaystyle\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{u}{u^2+1} + \arctan(u) \iff \int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{1}{2}(\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \arctan(x+1))$

- On trouve I telle que : $I = \frac{1}{2}[-\frac{3}{x^2+2x+2} + (\frac{x+1}{(x+1)^2+1} + \arctan(x+1))]$
- On pose $X \in [0, +\infty[$, dès lors $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{3x+4}{(x^2+2x+2)^2}dx = I(X) - I(0)$

$\displaystyle\lim_{X\to+\infty} I(X) = \frac{\pi}{4}$ et $I(0) = -\frac{3}{4} + \frac{2+\pi}{8}$

Par conséquent, cette intégrale converge vers $\frac{\pi}{4} - (\frac{2+\pi}{8} - \frac{3}{4})$