Projeto de Cálculo Numérico

Lucas Baganha Galante, 182364
Marcelo Biagi Martins, 183303
Rafael Figueiredo Prudencio, 186145
Tiago Loureiro Chaves, 187690

25 de fevereiro de 2019

1 Modelo de Lotka-Volterra

Seja o modelo de dinâmica populacional do tipo presa-predador, dado pelas equações (1) e (2),

$$\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} = c_1 u_1 - d_1 u_1 u_2 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = c_2 u_1 u_2 - d_2 u_2 \tag{2}$$

onde

- u_1 = população de presas;
- u_2 = população de predadores;
- $c_1 > 0$ = taxa de crescimento da presa;
- $c_2 > 0$ = taxa de conversão da presa em predador;
- $d_1 > 0$ = taxa de predação;
- $d_2 > 0$ = taxa de decaimento dos predadores na ausência das presas.

2 Método de Euler

Seja o problema de valor inicial (PVI) composto pelas equações (1) e (2) mais as condições iniciais $u_1(0) = u_1^0$ e $u_2(0) = u_2^0$ no intervalo $[0, T]$. Dividiremos o intervalo em N subintervalos de tamanho

$$\Delta t = \frac{T}{N}$$

O Método de Euler é dado pelas equações (3) e (4).

$$u_1^{n+1} = u_1^n + \Delta t(c_1 u_1^n - d_1 u_1^n u_2^n) \tag{3}$$

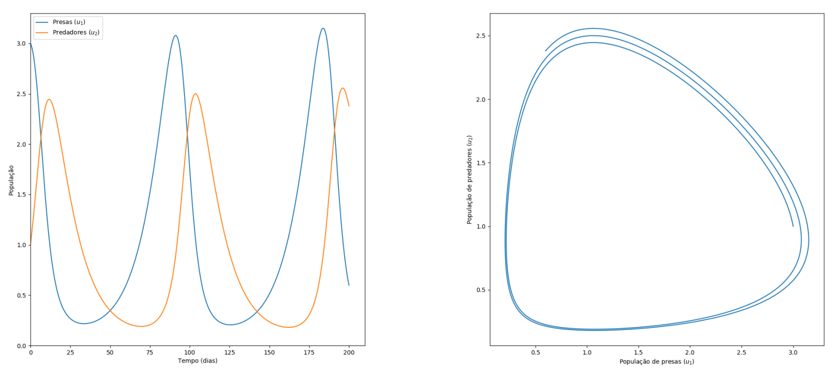
$$u_2^{n+1} = u_2^n + \Delta t(c_2 u_1^n u_2^n - d_2 u_2^n) \tag{4}$$

3 Simulações Numéricas

Nesta seção apresentaremos algumas simulações para o modelo, obtidas a partir do Método de Euler, com diferentes valores de N, T e dos coeficientes c_1, c_2, d_1 e d_2.

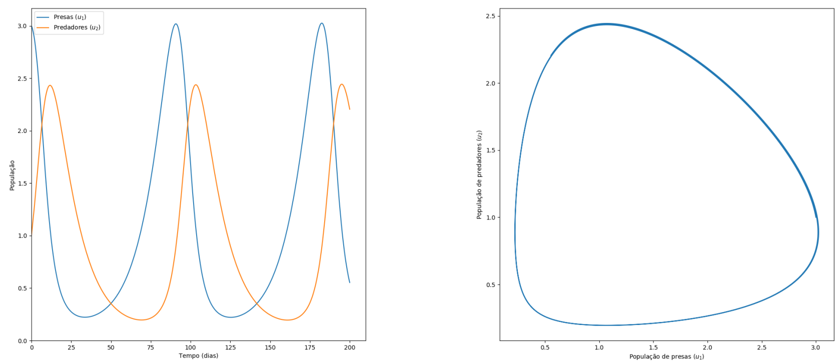
3.1 Caso $c_1 = 0,08;\ c_2 = 0,07;\ d_1 = 0,09;\ d_2 = 0,075$

Nesta simulação adotamos as condições iniciais $u_1(0) = 3$ e $u_2(0) = 1$, $T = 200$ dias e aplicamos o método com $N = 2000$ e $N = 20000$ subintervalos. Os resultados das simulações são dados pelas figuras 1 e 2, respectivamente.



(a) (b)

Figura 1: Gráficos das aproximações obtidas para $u_1(t)$ e $u_2(t)$ usando o método de Euler com o intervalo $[0, T] = [0, 200]$ subdividido em $N = 2000$ subintervalos ($\Delta t = 0.1$), com constantes $c_1 = 0,08$, $c_2 = 0,07$, $d_1 = 0,09$, $d_2 = 0,075$ e valores iniciais $u_1(0) = 3$ e $u_2(0) = 1$. Em (a) temos o gráfico da população de presas e predadores em função do tempo, e em (b) o gráfico da população de predadores em função da de presas.

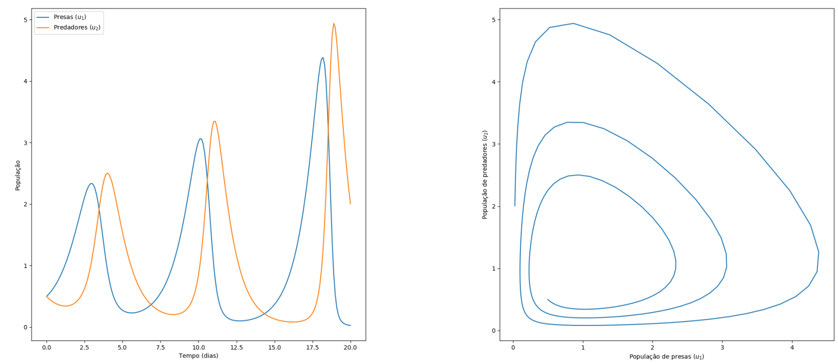


(a) (b)

Figura 2: Gráficos das aproximações obtidas para $u_1(t)$ e $u_2(t)$ usando o método de Euler com o intervalo $[0, T] = [0, 200]$ subdividido em $N = 20000$ subintervalos ($\Delta t = 0,01$), com constantes $c_1 = 0,08$, $c_2 = 0,07$, $d_1 = 0,09$, $d_2 = 0,075$ e valores iniciais $u_1(0) = 3$ e $u_2(0) = 1$. Em (a) temos o gráfico da população de presas e predadores em função do tempo, e em (b) o gráfico da população de predadores em função da de presas.

3.2 Caso $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1$

Nesta simulação adotamos as condições iniciais $u_1(0) = 0,5$ e $u_2(0) = 0,5$, $T = 20$ dias e aplicamos o método com $N = 200$ subintervalos, assim $\Delta t = 0,1$. Desta forma, esperamos que o método de Euler exiba formato espiral, ao invés de cíclico, no gráfico de u_2 *vs* u_1 [1, p. 3]. O resultado da simulação é dado pela figura 3.



(a) (b)

Figura 3: Gráficos das aproximações obtidas para $u_1(t)$ e $u_2(t)$ usando o método de Euler com o intervalo $[0, T] = [0, 20]$ subdividido em $N = 200$ subintervalos ($\Delta t = 0.1$), com constantes $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1$ e valores iniciais $u_1(0) = u_2(0) = 0.5$. Em (a) temos o gráfico da população de presas e predadores em função do tempo, e em (b) o gráfico da população de presas em função da de predadores.

4 Conclusões

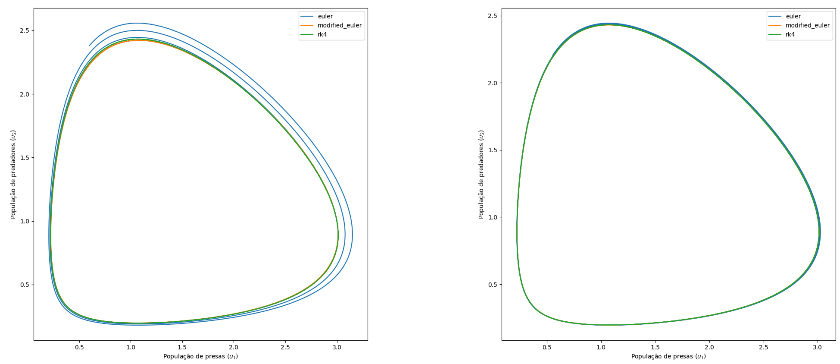
Implementamos um Método de Euler para diferentes valores do modelo de Lotka-Volterra e observamos a sensibilidade do método quando utilizados diferentes tamanhos Δt para os subintervalos analisados em $[0, T]$.

Observamos que quanto mais distante Δt é de 0 (i.e. mais divergente do caso contínuo) mais o gráfico da população de predadores em função da de presas (u_2 vs u_1) se aproxima de uma espiral do que de um ciclo, que seria a solução exata [1, p. 1].

5 Adendos

Aqui mostramos, por curiosidade, uma comparação dos gráficos u_2 vs u_1 das figuras 1b, 2b e 3b ao aplicarmos, além do método de Euler, a modificação sugerida por [1] (para evitar o caráter espiral que ele apresenta em algumas soluções) e também o método de Runge Kutta de 4ª ordem (RK4) [2].

Os valores do caso 3.1 com $N = 2000$ e $N = 20000$ são apresentados nas figuras 4a e 4b, respectivamente. A comparação dos métodos para o caso 3.2 é exibido na figura 5.



(a) (b)

Figura 4: Gráficos comparando os métodos de Euler, modificação de Euler[1] e RK4 para o caso 3.1.

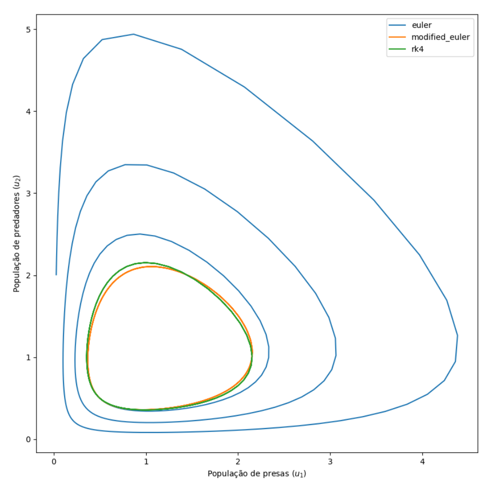


Figura 5: Gráfico comparando o métodos de Euler, modificação de Euler[1] e RK4 para o caso 3.2.

Referências

[1] M. J. Gander, "A non spiraling integrator for the lotka volterra equation," 1996.

[2] "Runge–kutta methods," accessado em novembro de 2018. [Online]. Available: https://en.wikipedia.org/wiki/Runge-Kutta_methodsThe_Runge-Kutta_method