CORRIGÉ

Section A

1. D 2. D 3. B 4. A 5. B 6. C

Section B

7. Le vecteur v est $\vec{v} = (0{,}8\ ;\ -2)$

8. La longueur du câble AB est de 9 m

9. Les coordonnées des deux points sont (6, 8) et (– 8, 6).

10. Le revenu maximal hebdomadaire que la direction peut espérer est 285 000$.

Section C

11. Le navire en panne

1° Distance parcourue avant le changement de cap
$$\frac{1}{2}h \times 34\frac{km}{h} = 17\ km$$

2° Distance après le changement de cap
$$\frac{20}{60}h \times 39\frac{km}{h} = 13\ km$$

3° Distance entre le port et le lieu de la panne
L'angle entre les deux vecteurs est 180° – 39,31° = 140,69°
Selon la loi des cosinus, on a que :
$$d^2 = 17^2 + 13^2 - 2(17)(13)\cos(140{,}69^\circ)$$
$$d^2 = 289 + 169 - 442(-0{,}7737) \approx 800$$
$$d = \sqrt{800} \approx 28{,}28$$

4° Temps pour atteindre le lieu de la panne
$$\frac{28{,}28\ km}{113{,}12\ km/h} = 0{,}25\ h = \frac{1}{4}\ h$$

5° Le temps requis à l'hélicoptère pour se rendre au bateau est : ¼ d'heure (ou 15 minutes).

12. La durée du jour

1° Déterminer les divers paramètres de la fonction sinusoïdale

La valeur du paramètre a : la valeur maximale est 15 h 30 ou 15,5 h. La valeur minimale est 8 h 30 ou 8,5 h
$$A = \frac{\max - \min}{2} = \frac{15{,}5 - 8{,}5}{2} = \frac{7}{2} = 3{,}5\ \text{h}$$
La valeur du paramètre b
Puisque la fonction monte au maximum, descend au minimum et revient au milieu en un an, la période est de 1 an ou encore 365 jours.

$$b = \frac{2\pi}{\text{période}} = \frac{2\pi}{365}$$

Si on considère le 20 mars comme point de départ, t = 0 sera à cette date. La valeur de k, ordonnée moyenne de la fonction, est de 12 h puisque que c'est la longueur du jour le 20 mars. Donc h = 0 et k = 12.

La forme d'une fonction sinusoïdale est $f(t) = A\sin b(t-h)+k$

Par conséquent, la fonction recherchée est : $f(t) = 3,5\sin\left(\frac{2\pi}{365}\right)(t)+12$

2° Déterminer durée du jour le 1er juin 2012
Le premier juin 2012, on a t = 73

$f(t) = 3,5\sin\left(\frac{2\pi}{365}\right)(73)+12 = 3,5\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)+12 \approx 3,5(0,95106)+12 \approx$ 15,3287 h ou 15 h 20 m

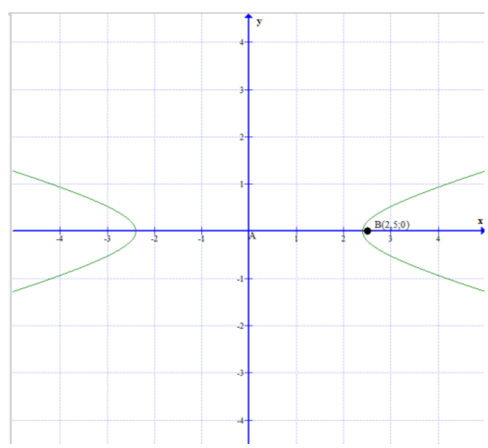
NOTA : la calculatrice doit être en radian pour effectuer ce calcul.

3° La durée du jour à Québec le 1er juin 2012 sera de 15 h 20.

13. Le vaisseau spatial

1° L'équation de l'hyperbole
Comme l'astre F est placé au foyer et que le centre est le point (0, 0), la valeur de c est 2,5 et la position du foyer est (2,5 ; 0).
Comme la parabole a ses foyers sur l'axe des x, l'axe vertical a pour longueur 2b et donc
b = 0,7 UA
Dans les équations relatives aux hyperboles, on a que $c^2 = a^2 + b^2$
d'où $2,5^2 = 0,49 + a^2$
Donc $a^2 = 2,5^2 - 0,49 = 6,25 - 0,49 = 5,76$.
a = 2,4, b = 0,7 et c = 2,5

L'équation de l'hyperbole est $\frac{x^2}{5,76} - \frac{y^2}{0,49} = 1$



2° Déterminer le point de Lagrange

Le sommet est donc (2,4 ; 0) et le point de Lagrange est ce même point (2,4 ; 0).

3° La distance entre l'astre F et le point de Lagrange

$d = |2,5-2,4| = |0,1| = 0,1$ UA

En kilomètres 0,1 x 150 000 000 = 15 000 000 km

4° La distance entre l'astre F et le point de Lagrange est : 15 000 000 km

14. L'équivalence logarithmique

$\log_2 x^2 + \log_2 8 - \log_2 \sqrt{x^3} - \log_2 \sqrt{\frac{1}{y}} =$	
$\log_2 x^2 + \log_2 8 - \log_2 (x^3)^{\frac{1}{2}} - \log_2 \left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{2}} =$	Définition des exposants fractionnaires
$\log_2 x^2 + \log_2 8 - \log_2 (x^3)^{\frac{1}{2}} - \log_2 (y^{-1})^{\frac{1}{2}} =$	Définition des exposants négatifs
$\log_2 x^2 + \log_2 8 - \log_2 x^{\frac{3}{2}} - \log_2 y^{-\frac{1}{2}} =$	Loi des exposants : puissance d'une puissance
$2\log_2 x + \log_2 8 - \left(\frac{3}{2}\right)\log_2 x - \left(-\left(\frac{1}{2}\right)\log_2 y\right) =$	$\log_b M^p = p \log_b M$ et règle des signes
$2\log_2 x + 3 - \left(\frac{3}{2}\right)\log_2 x + \left(\frac{1}{2}\right)\log_2 y =$	Définition du logarithme
$3 + 2A - \left(\frac{3}{2}\right)A + \left(\frac{1}{2}\right)B =$	Substitution
$3 + \left(\frac{1}{2}\right)B + \left(\frac{1}{2}\right)A =$	Calcul
$3 + \frac{A}{2} + \frac{B}{2}$	Simplification

15. Des paraboles et une ellipse

1° Le sommet de la parabole concave vers le haut

$$x^2 = 4(1{,}5)(y - 10)$$

d'où S(0, 10)

2° Le foyer de la parabole concave vers la gauche

$$(y - 5)^2 = -4(2)(x - 2)$$

comme la distance focale, c, est de 2 alors les coordonnées du foyer sont (0, 5) puisque de sommet est (2, 5).

3° L'équation de l'ellipse d'axe focal vertical de F(0, 5) et ayant un sommet à (0, 10)
Pour cette ellipse, cela signifie que $b = 10$ et $c = 5$, il reste à déterminer « a » sachant que :

$$c^2 = b^2 - a^2$$
$$a^2 = b^2 - c^2$$
$$a^2 = 75$$

4° L'équation canonique de l'ellipse est

$$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$$

16. Identité trigonométrique

$(\sin^4 A - \cos^4 A)\sec^2 A =$	
$(\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^2 A - \cos^2 A)\sec^2 A =$	Différence de carrés
$(\sin^2 A - \cos^2 A)\sec^2 A =$	sin²A + cos²A = 1 quel que soit A
$(1 - \cos^2 A - \cos^2 A)\sec^2 A =$	sin²A = 1 – cos² A quel que soit A
$(1 - 2\cos^2 A)\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}\right) =$	La sécante est le rapport inverse du cosinus
$\left(\dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{2\cos^2 A}{\cos^2 A}\right) =$	Multiplication
$\sec^2 A - 2$	Simplification cqfd