Chapitre 4
Fonctions exponentielles et logarithmiques
CORRIGÉ DES NOTES DE COURS

Pages 3-4 Exercices préalables

1. 3^4

2. a) 27 b) 49 c) 64 d) 1 e) $\frac{1}{1000}$ f) 128 g) 100 h) 64

3. $\sqrt[7]{279\,936^3} = 279\,936^{3/7} = 216$

4. $\dfrac{2^{-17}a^3b^{-5}}{3^{12}b^8c^{-5}} = \dfrac{a^3c^5}{2^{17}3^{12}b^5b^8} = \dfrac{a^3c^5}{2^{17}3^{12}b^{13}}$

5. a) $\dfrac{1}{4^2}$ ou $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ b) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^1$ c) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^1$ d) $3^5 \cdot 4^2$ e) $\dfrac{3x^2}{2}$

   f) $\dfrac{4^4}{2^9}$ ou $\dfrac{1}{2^1}$ ou $\left(\dfrac{1}{2}\right)^1$ g) $\dfrac{3}{(x-4)^2}$ h) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^4$ i) $2^4 \cdot 3^6$

6. a) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^5$ b) $7^{3/2}$ c) $5^{11/6}$ d) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2$ e) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{1/3}$

7. a) $2^3 \cdot 5^4$ b) 2^5a^6 c) $\dfrac{8^{13}}{6^{1/2}}$ d) $3^2 \cdot 7^{2/3}$

8. a) L'égalité est fausse : $9 = 3^2$ b) L'égalité est vraie. c) L'égalité est vraie.

   d) L'égalité est fausse : $\left(\dfrac{27}{125}\right)^3 = \left(\dfrac{3}{5}\right)^9$ e) L'égalité est vraie.

9. a) $p - 20\%(p) = 100\%(p) - 20\%(p) = 80\%(p) = 0{,}8p$

   b) $p + 5\%(p) = 100\%(p) + 5\%(p) = 105\%(p) = 1{,}05p$

   c) $p - \dfrac{p}{2} = \dfrac{2p}{2} - \dfrac{p}{2} = \dfrac{2p-p}{2} = \dfrac{p}{2} = 0{,}5p$

Page 5 Mise au point #1

1. a) 125 b) $\frac{1}{8}$ c) 1 d) 3 e) −3 f) 7
   g) 2 h) −4 i) $\frac{1}{3}$ j) 2 k) −1 l) 1

2. a) 486, 1458, 4374 b) 4, $\frac{4}{9}$, $\frac{4}{81}$ c) 2,5 ; 25 ; 250 d) 12, 3, $\frac{3}{4}$

3. a) 65, 325 b) 36, ..., 2916 c) $\frac{5}{8}$, …, 160 d) 14, …, 224

4. a) 5^7 b) $-2^4 \times 3^2$ c) $2^{15} \times 3^2$ d) $-2^5 \times 3^5$

Pages 6-7 Exemples

1. *Réponse* : 88 insectes

Temps écoulé (semaines)	0	1	2	3	…	t
Nombre d'insectes	180 224	90 112	45 056	22 528	…	$180\,224 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

2. *Réponse* : 640 bactéries

Temps écoulé (heures)	0	1	2	3	…	t
Population	5	20	80	320	…	$5 \cdot 4^t$

3. *Réponse* : environ 0,11 hectares (soit l'équivalent d'une région circulaire de seulement 38 m de diamètre!)

Temps écoulé (semaines)	0	1	2	3	…	t
Superficie (hectares)	200	150	112,5	84,375	…	$200 \cdot 0{,}75^t$

4. *Réponse* : environ 0,000 000 002 m (disons qu'elle ne rebondit plus!)

Nombre de bonds	0	1	2	3	…	n
Hauteur de la balle (m)	12	9,6	7,68	6,144	…	$12 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^n$

5. *Réponse* : 3229,91 $

Temps écoulé (années)	0	1	2	3	…	t
Valeur du placement ($)	1200	1224	1248,48	1273,45	…	$1200\cdot 1{,}02^t$

$\boxed{\text{Page 11}}$ Exercice

a) f b) g c) même *intensité* d) g e) g f) f g) f h) même *intensité*

$\boxed{\text{Page 13}}$ Mise au point #2

1. a) $2 = \log(100)$ b) $3 = \log_5(125)$ c) $3 = \log_{1/2}\left(\frac{1}{8}\right)$
   d) $2 = \log_a(25)$ e) $m = \log_a(x)$ f) $x = \log_b(a)$
2. a) 5 b) 3 c) 4 d) 2 e) –3 f) 3
3. a) $\log_3(9) = 2$ b) $\log_5(625) = 4$ c) $\log_{2,5}(t) = s$
   d) $\log_{1/8}(y) = x$ e) $\log_s(w) = v$ f) $\log_c(y) = x$
4. a) $6^2 = 36$ b) $n^z = 100$ c) $(0{,}75)^x = y$ d) $t^r = s$

$\boxed{\text{Page 14}}$ Exemples

1. $f(x) = 5\cdot 3^x$ 2. $g(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^x$ 3. $h(x) = \frac{-1}{10}\cdot 5^x$

$\boxed{\text{Page 15}}$ Mise au point #3

1. a) $m = 3$, $n = -2$ b) $m = 6$, $n = 1{,}5$ c) $m = 100$, $n = 0{,}4$
2. a) $f(x) = 5(3)^x$ b) $f(x) = -4(5)^x$ c) $f(x) = (0{,}75)^x$
3. a) $f(x) = 8(3)^x$ b) $f(x) = -4(5)^x$ c) $f(x) = 0{,}75(0{,}5)^x$

$\boxed{\text{Page 18}}$ Exemples

1. $f(x) = 3(1{,}2)^x - 2$ 2. $g(x) = \frac{1}{8}(2)^x - 4$

Pages 20-21 Exemples

1. a) $N(t) = 250 \cdot 8^t$
   b) 3h20 ou 200 minutes
   c) $N(t) = 230 \cdot 8^t + 20$

2. $H(x) = 150 \cdot 0{,}75^x$

3. $H(x) = 200 \cdot 0{,}4^x$

Nombre de bonds	0	1	2	3	4	5	6
Hauteur de la balle (cm)	**200**	80	**32**	**12,8**	5,12	**2,048**	**0,8192**

4. a) $V = 10000(0{,}8)^{0{,}5t}$ b) environ 2900$

5. a) $N(t) = 5 \cdot 3^{\frac{t}{120}}$ b) $N(t) = 5 \cdot 3^{\frac{t}{2}}$ c) $N(t) = 5 \cdot 3^{30t}$ d) 2846 gouttes d’eau

Page 25 Mise au point #4

1. $a = 12$ $b = 3$ $h = 1$ $k = -0{,}75$ et $c = 0{,}8$

2. a) $y = -3$ b) $y = 4$ c) $y = \frac{-2}{3}$ d) $y = 0$

3. a) $f(x) = 3(4)^{x-10} + 2$ b) $f(x) = -(81)^{x-2} - 5$

4. a) $f(x) = -50(125)^x - 10$ b) $f(x) = \frac{-3}{16}(256)^x + 1$

Page 26 Exercice

1. a) Vrai b) Faux c) Faux d) Faux e) Vrai

Page 28 Mise au point #5

1. a) $x = 6$ b) $x = -1{,}5$ c) $x = -1$ d) $x = \frac{1}{2}$
   e) $x = -4$ f) $x = 4$ g) $x = 2$ h) $x = \frac{1}{4}$

2. a) $x = -4$ b) $x = -20$ c) $x = \frac{-1}{19}$ d) $x = \frac{11}{2}$ e) $x = -5$ f) $x = \frac{5}{2}$

Pages 29-30 Simulations financières

Simulation 1 : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt simple)

Temps écoulé (années)	0	1	2	3	4	5
Intérêt versé durant l'année ($)		120	120	120	120	120
Valeur du placement ($)	2000	2120	2240	2360	2480	2600

► La valeur du placement après t années est donnée par la règle V = **$2000 + 120t$** .

Simulation 2 : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt composé annuellement)

Temps écoulé (années)	0	1	2	3	4	5
Intérêt versé durant l'année ($)		120	127,20	134,83	142,92	151,50
Valeur du placement ($)	2000	2120	2247,20	2 382,03	2 524,95	2 676,45

► La valeur du placement après t années est donnée par la règle V = **$2000\,(1{,}06)^{t}$** .

Simulation 3 : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt capitalisé 2 fois/année)

Temps écoulé (années)	0	½	1	1½	2	…	5
Valeur du placement ($)	2000	2060	2121,80	2185,45	2251,02	…	2687,83

► La valeur du placement après t années est donnée par la règle V = **$2000\,(1{,}03)^{2t}$** .

Simulation 4 : Placement de 2000$ pour 5 ans à 6% (intérêt capitalisé mensuellement)

Temps écoulé (années)	0	1/12	2/12	3/12	4/12	…	5
Valeur du placement ($)	2000	2010	2020,05	2030,15	2040,30	…	2697,70

► La valeur du placement après t années est donnée par la règle V = **$2000\,(1{,}005)^{12t}$** .

Pages 31-32 Exercices sur les taux d'intérêts composés

1. a) $V = 2000(1{,}03)^t$ b) $V = 5000(1{,}04)^{2t}$ c) $V = 5000\left(\dfrac{1801}{1800}\right)^{18t}$

où « V » représente la valeur (en $) et « t » le nombre d'années écoulées

2. 1641,94$ 3. 2500$ 4. 9% 5. 20 ans *(détails en classe…)*

Page 33 **Mise au point #6**

1. $f(x) = 8(0,3)^x + 5$

2. a) 1 200$ b) 85% c) 1) 867$
2) ≈ 626,41$
3) ≈ 236,25$

3. a) ≈ 1 338,23$ b) ≈ 2 025,00$

Page 35 **Exemple**

a) i) 65 watts; ii) ≈ 19,25 watts b) décroissante c) dom P : $[0, 1000]$ jours et codom P : $[\approx 2{,}32 ; 65]$ watts

d) i) après ≈ 207,94 jours; ii) après ≈ 628,48 jours

Page 36 **Mise au point #7**

1. a) 6 b) 3 c) –1 d) –3 e) 1,5 f) –0,5
g) 2 h) 1 i) 0 j) –2 k) 0 l) 4

2. a) 1 b) 2 c) 4 d) 128 e) 2 f) $\varnothing$
g) 4 h) $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ i) 1/32

Page 37 – ***Démonstrations des lois des logarithmes…***

Il existe plusieurs façons de démontrer ces lois, mais en voici de bons exemples :

Soit a, b, m et $n \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \neq 1, b \neq 1$

Lois	**Démonstrations**
1. $\log_a(1) = 0$	$a^0 = 1 \Leftrightarrow \log_a(1) = 0$
2. $\log_a(a) = 1$	$a^1 = a \Leftrightarrow \log_a(a) = 1$
3. $a^{\log_a(m)} = m$	1°) $a^{\log_a(m)} = n$ 2°) $\log_a(n) = \log_a(m)$ 3°) $n = m$ 4°) $a^{\log_a(m)} = m$
4. $\log_a(mn) = \log_a(m) + \log_a(n)$	1°) $mn = m \cdot n$ 2°) $a^{\log_a(mn)} = a^{\log_a(m)} \cdot a^{\log_a(n)}$ 3°) $a^{\log_a(mn)} = a^{\log_a(m) + \log_a(n)}$ 4°) $\log_a(mn) = \log_a(m) + \log_a(n)$
5. $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)$	
6. $\log_a(m^n) = n \log_a(m)$	$\log_a(m^n) = \log_a(\underbrace{m \cdot m \cdot m \cdots m}_{n \text{ fois}})$ $= \underbrace{\log_a(m) + \log_a(m) + ... + \log_a(m)}_{n \text{ fois}}$ $= n\log_a(m)$
7. $\log_a(m) = \frac{\log_b(m)}{\log_b(a)}$	1°) $\log_a(m) = n$ 2°) $a^n = m$ 3°) $\log_b(a^n) = \log_b(m)$ 4°) $n\log_b(a) = \log_b(m)$ 5°) $n = \frac{\log_b(m)}{\log_b(a)}$ 6°) $\log_a(m) = \frac{\log_b(m)}{\log_b(a)}$
8. $\log_a\left(\frac{1}{m}\right) = -\log_a(m)$	$\log_a\left(\frac{1}{m}\right) = \log_a(m^{-1}) = -\log_a(m)$
9. $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$	$\log_a(b) = \frac{\log(b)}{\log(a)} = \left(\frac{\log(a)}{\log(b)}\right)^{-1} = (\log_b(a))^{-1} = \frac{1}{\log_b(a)}$
10. $\log_{1/a}(m) = -\log_a(m)$	$\log_{1/a}(m) = \frac{\log(m)}{\log(1/a)} = \frac{\log(m)}{\log(a^{-1})} = \frac{\log(m)}{-\log(a)} = -\log_a(m)$

Page 38 Exemples

Ex.1 : $\ln(5^x \cdot 6^{2x}) = \ln(5^x) + \ln(6^{2x}) = x \cdot \ln(5) + 2x \cdot \ln(6)$

Ex.2 : $5\log_2(x) + \log_2(x+4) = \log_2\left(x^5\right) + \log_2(x+4) = \log_2\left(x^5 \cdot (x+4)\right) = \log_2\left(x^6 + 4x^5\right)$

Ex.3 : $\log_5(10) = \dfrac{\log(10)}{\log(5)} = \dfrac{1}{\log(5)} \approx 1{,}431$

Ex.4 : $\log_4(8) = \log_4\left(2^3\right) = 3 \cdot \log_4(2) = 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2}$

Ex.5 : $x = \log_5(25) = 2$

Ex.6 : $x = \log_3\left(\dfrac{1}{81}\right) \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{1}{81} \Leftrightarrow 3^x = \dfrac{1}{3^4} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-4} \Leftrightarrow x = -4$

Ex.7 : $x = \log_5(6) = \dfrac{\log(6)}{\log(5)} \approx 1{,}113$

Page 39 Mise au point #8

1. a) $\log_c(2) + \log_c(m) + \log_c(n)$
   b) $\log_5(7) + 2\log_5(x+2)$
   c) $\log_3(4) + 2\log_3(x)$
   d) $\log_2(5) + \log_2(a) - 2\log_2(b)$
   e) $3\log_4(m) + 3\log_4(n) + 3$
   f) $2\log_6(2) + 2\log_6(x+1)$
   g) $\frac{1}{2}\log_4(x) + 2$
   h) $\log(x+2) + \log(x-2)$

2. a) $\log_2(40)$
   b) $\log_4(15)$
   c) $\ln(14)$
   d) $\log(5)$
   e) $\log_2(54)$
   f) $\log(3)$

3. a) $\approx 0{,}954$
   b) $\approx 1{,}146$
   c) $\approx 1{,}653$
   d) $\approx 1{,}954$
   e) $\approx 1{,}699$
   f) $\approx 4{,}225$
   g) $\approx -0{,}301$
   h) $\approx 0{,}383$
   i) $\approx 0{,}812$
   j) $\approx 3{,}196$

4. $\log(5)$

Page 40 Exercices

1. $x \approx 13{,}158$ **2.** $x \approx 2{,}71$ **3.** $x \approx 3{,}576$ **4.** $x \approx -0{,}486$

Pages 41-42 **Exemples**

1. $x = \log_{54}(6) \approx 0,449$

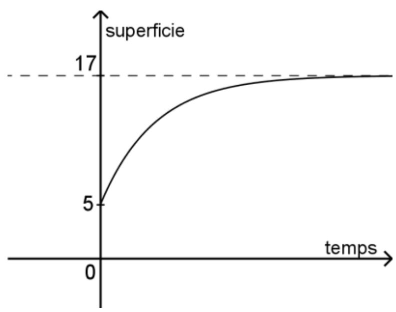
2. $x = \log_{4,9}(7) \approx 1,224$

3. $x = \log_{\frac{1024}{3}}(9) \approx 0,377$

4. $x = \dfrac{9}{7 \cdot \log_3(5) - 15} \approx -1,897$

Page 43 **Mise en situation – La nappe d'huile (version ultime)**

a)



b) Pendant environ 7,66 heures, soit environ 7h40min.

c) La règle devient : $S = -12\left(\dfrac{1}{4}\right)^{t/120} + 17$

Page 44 **Mise en situation – Crise financière**

$$V(t) = \begin{cases} -20 \cdot (5,2)^t + 60 & 0 \le t \le 0,42 \\ 20 & 0,42 \le t \le 1,42 \\ 20 \cdot (0,95)^{3(t-1,42)} & t \ge 1,42 \end{cases}$$

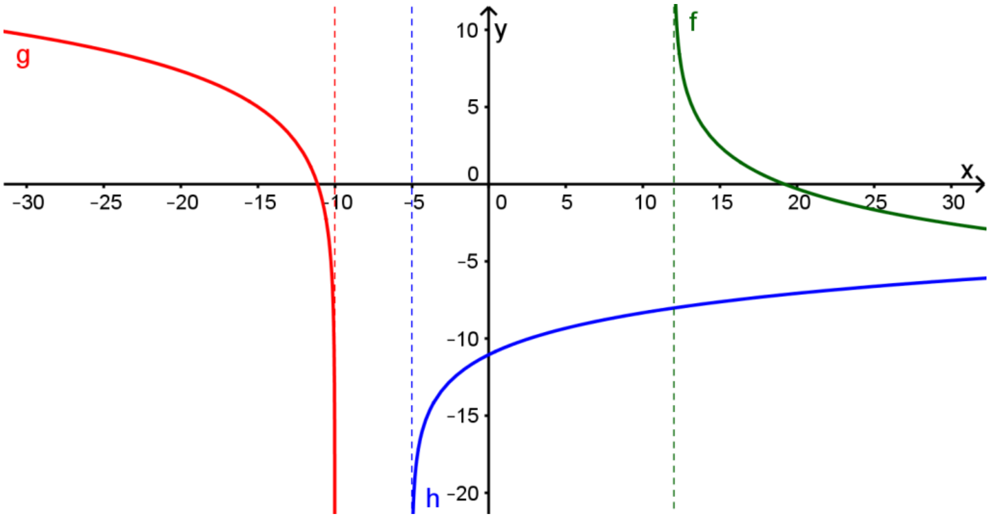
On a $V(0) = 40$. On cherche la valeur de t qui engendre $V(t) = 10$.
Avec la troisième partie de la fonction, on obtient $t \approx 5,9249$ (environ 5 ans et 11 mois).
La réponse finale est donc : **en août 2014**.

Pages 45-47 **Exemples**

1. $x = 19$ **2.** $x = 4$ **3.** $x = \dfrac{1}{2}$ **4.** $x \in \varnothing$ **5.** $x = 4$ **6.** $x = \dfrac{48}{11}$

7. $x = 8$ **8.** $x = \dfrac{3}{2}$

Page 51 Exemple



Page 52 Exemple

a) $f(x) = 2\log_3(-(x-1)) - 4$

- Dom f : $\left]-\infty\ ,\ 1\right[$
- Codom f : $\mathbb{R}$
- Zéro : -8
- Signes : $f(x) \geq 0\ \forall\ x \in \left]-\infty\ ,\ -8\right]$ et $f(x) \leq 0\ \forall\ x \in \left[-8\ ,\ 1\right[$
- Variation : Décroissante sur tout son domaine
- Ordonnée à l'origine : -4
- Équation de l'asymptote : $x = 1$

b) $g(x) = 3\log_{1/4}(-(x+1))$

- Dom g: $\left]-\infty\ ,-1\right[$
- Codom g: $\mathbb{R}$
- Zéro : -2
- Signes : $g(x) \leq 0\ \forall\ x \in \left]-\infty\ ;\ -2\right]$ et $g(x) \geq 0\ \forall\ x \in \left[-2\ ;-1\right[$
- Variation : Croissante sur tout son domaine
- Ordonnée à l'origine : aucune
- Équation de l'asymptote : $x = -1$

Page 53 Situation-problème

Durée des observations : $88{,}641 = 20 \cdot (1{,}015)^t \iff t \approx 100$ ans

Taux moyen pour Ste-Asymptote : $\dfrac{88\,641 - 20\,000}{100} \approx$ **686,41 hab./année**

Taux moyen pour Log City : $\dfrac{P_2(100) - P_2(0)}{100} = \dfrac{99\,481 - 216\,000}{100} \approx$ **–1165,19 hab./année**

Pages 55-56 Exemples

1. $h(x) = \log_{0,5}(x-2)$ **2.** $g(x) = \log_6(x+3)$ **3.** $f(x) = \log_3(0{,}5(x-2))$