# *Chapitre 3*
# *Vecteurs*

## 3.1 NOTION DE VECTEUR

### 3.1.1 Scalaire et vecteur

Un **scalaire** est une quantité entièrement définie par un *nombre réel*.

► Exemples :

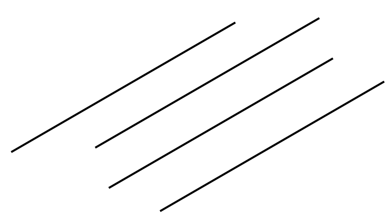
Un **vecteur** est une quantité définie par un *nombre réel* et une *orientation*.
Un vecteur permet de décrire simultanément une **grandeur**, une **direction** et un **sens**.

► Exemples :

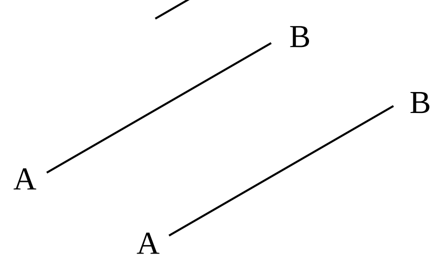
Exemple 1 :
Dans les situations suivantes, indiquer par un X si la quantité est de nature scalaire ou vectorielle.

| | | scalaire | vectorielle |
|---|---|---|---|
| a) | Un moment de la journée | | |
| b) | Le courant d'une rivière | | |
| c) | Le salaire d'un individu | | |
| d) | Le vent qui souffle | | |
| e) | La masse d'une pierre | | |
| f) | Le poids d'une personne | | |

Lorsqu'on trace une ligne droite, on détermine une direction. Des droites parallèles décrivent la même direction. De plus, chaque direction peut se parcourir selon deux sens. On indique généralement le sens choisi en traçant une pointe de flèche.



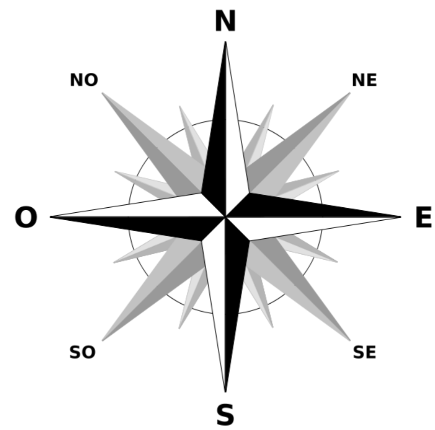
On peut également utiliser deux points et le terme « vers » pour décrire le sens.
Ainsi, « A vers B » décrit un sens et
« B vers A » décrit le sens opposé.



## $\boxed{3.1.2}$ Vecteur et flèche

Il est naturel de représenter un vecteur par une flèche. En effet, une flèche possède :

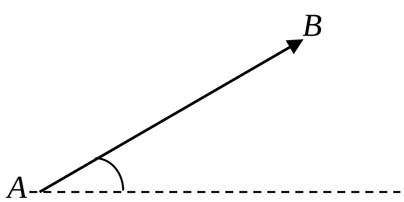
- une origine (départ)
- une extrémité (arrivée)
- une longueur (grandeur, norme)
- une direction (inclinaison) } orientation
- un sens (indiqué par sa pointe) } orientation




Pour décrire l'orientation des vecteurs, on peut utiliser :

- les mots *gauche*, *droite*, *haut*, *bas*,
- la rose des vents (voir ci-contre),
- une droite horizontale orientée.

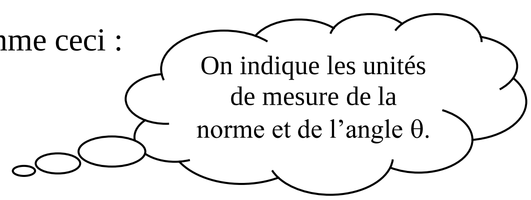
Voici la représentation d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ où…




… la grandeur (norme) est donnée par la longueur de la flèche,

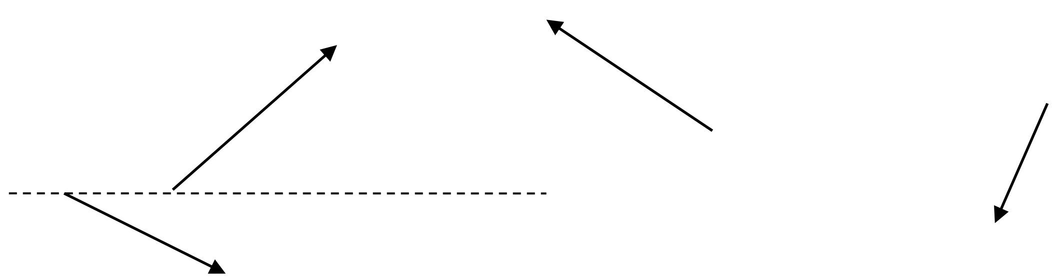
… l'orientation est donnée par l'inclinaison de la flèche (par rapport à l'horizontale) ainsi que par la pointe de la flèche.

Dans l'exemple ci-dessus, on décrit le vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme ceci :




$$\overrightarrow{AB} : \begin{cases} \|\overrightarrow{AB}\| = \\ \\ \theta_{\overrightarrow{AB}} = \end{cases}$$

Pour l'étude des vecteurs, on privilégie la méthode avec la droite horizontale orientée. Ainsi, on utilise **la mesure de l'angle anti-horaire (positif)*** que forme la flèche avec la partie positive de la droite horizontale qui passe par l'origine de la flèche. Cet angle fixe la direction et, en même temps, le sens du vecteur. On dit qu'il donne l'orientation du vecteur.

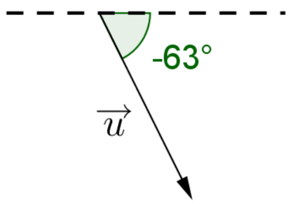


* Généralement, on utilise les mesures d'angle **$\theta \in$ [0°, 360°[**, mais il est permis d'utiliser des mesures négatives.

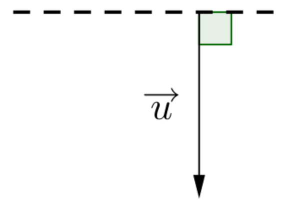
<u>Exercice</u> :

Donner l'orientation **positive** de chacun des vecteurs $\vec{u}$ suivants.

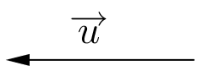
a)



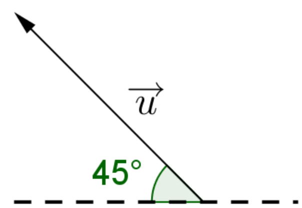

b)



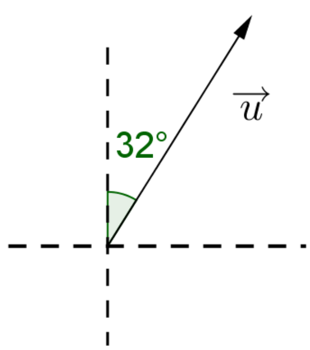

c)



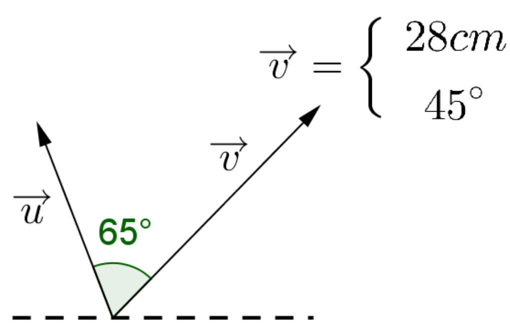

d)



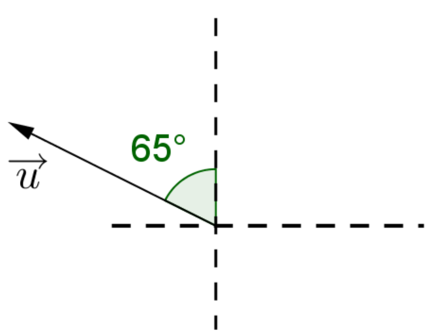

e)



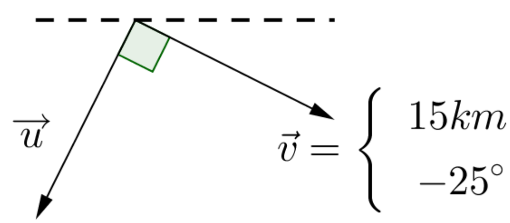

f)




g)



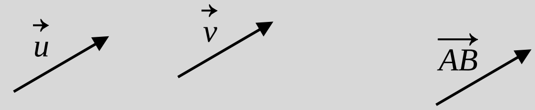

h)



Une flèche qui lie un point de départ $A$ à un point d'arrivée $B$ représente le vecteur $AB$ qu'on note $\overrightarrow{AB}$. Pour désigner un vecteur, on peut également utiliser une lettre minuscule surmontée d'une flèche. Le plus souvent, on emploie $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Définition de vecteurs équipollents (ou égaux)
Deux vecteurs sont **équipollents** si et seulement si les quantités qu'ils représentent ont :

- la même grandeur (même norme),
- la même direction,
- le même sens.




Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, $\vec{u} = \vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

Ces flèches représentent un seul et même vecteur, même si elles n'ont pas la même origine.

Définition du vecteur nul
Un vecteur **nul** est un vecteur de grandeur 0 auquel on attribue toutes les orientations.
On note le vecteur nul $\vec{0}$.

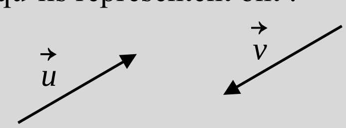
**Attention!** $\|\vec{0}\| = 0$ u

BREF,

1) Si $\vec{u}$ est un vecteur nul alors $\vec{u} = \vec{0}$ et $\|\vec{u}\| = 0$ u
2) Si $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur nul alors $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = 0$ u
   Dans le plan cartésien, on déduit que le point $A$ et le point $B$ sont au même endroit.
3) $\overrightarrow{AA}$ est un vecteur nul, car le point $A$ est à la fois le point de départ et d'arrivée.

Définition de vecteurs opposés
Deux vecteurs sont **opposés** si et seulement si les quantités qu'ils représentent ont :

- la même grandeur (même norme),
- la même direction,
- des sens opposés.




Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs opposés et $\vec{u} = -\vec{v}$ ou encore $-\vec{u} = \vec{v}$.

À tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond un vecteur $\overrightarrow{BA}$, appelé vecteur opposé de $\overrightarrow{AB}$.
L'ordre des lettres a de l'importance.


► On a donc $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ mais $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$

Exemple 2 :

Vous tirez sur un objet dans un sens et votre ami dans le sens opposé avec des forces telles que l'objet reste immobile.


Dire si les énoncés suivants sont vrais. Sinon, faire la correction qui s'impose.

a) $\vec{F_2} = -\vec{F_1}$

b) $\| \vec{F_1} \| = \| \vec{F_2} \|$

c) $\vec{F_1} + \vec{F_2} = 0$

d) $\| \vec{F_1} + \vec{F_2} \| = \vec{0}$

e) $\| \vec{F_1} \| + \| \vec{F_2} \| = 2 \| \vec{F_1} \|$

f) $\| \vec{F_1} + \vec{F_2} \| = \| \vec{F_1} \| + \| \vec{F_2} \|$

g) $\| \vec{F_1} - \vec{F_2} \| = \| \vec{F_1} \| + \| \vec{F_2} \|$

h) $\vec{F_1} = \vec{F_2}$

Exemple 3 :

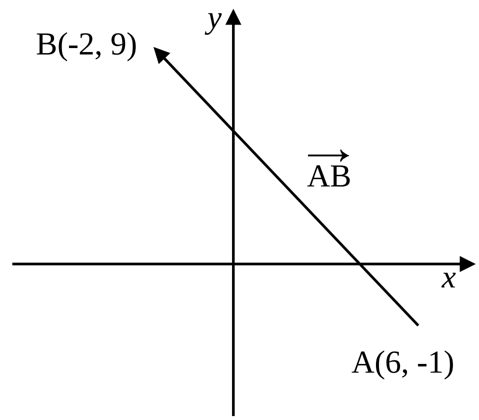
Soit $\vec{v}$ : 20 km à 110°

a) Décrire un vecteur $\vec{r}$ opposé au vecteur $\vec{v}$ .

b) Décrire deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ perpendiculaires à $\vec{v}$ , sachant que leur norme vaut le double de celle de $\vec{v}$ et que $\vec{u} \neq \vec{w}$ .

## 3.1.3 Vecteur et plan cartésien

Soit le vecteur AB illustré ci-dessous. En partant de l'origine du vecteur, on s'est déplacé horizontalement de ________ unités (vers la gauche) et verticalement de ________ unités (vers le haut) pour arriver à l'extrémité du vecteur.




d'où $\overrightarrow{AB}$ = ( , )

$\overrightarrow{AB}$ = ( , )

On parle alors des ________________________________ orthogonales du vecteur.

Les **composantes** d'un vecteur AB défini par A($x_A$, $y_A$) et B($x_B$, $y_B$) sont toujours obtenues de la manière suivante, et ce, peu importe la position relative de A et B :

$\overrightarrow{AB}$ = ( , )

**Attention!** Il ne faut pas confondre un couple représentant…

- un vecteur;
- un point dans le plan cartésien.

Ainsi, le **point** A dont les coordonnées sont $x$ et $y$ est noté ______________

alors que le **vecteur** $\vec{v}$ dont les composantes sont $a$ et $b$ est noté ______________ .

On utilise souvent les composantes d'un vecteur pour le décrire.

Deux vecteurs qui ont les mêmes composantes sont ________________________________.

Exemple 4 :

Soit le point $C(1, 10)$ qui est l'origine du vecteur $\overrightarrow{CD} = (8, -10)$.

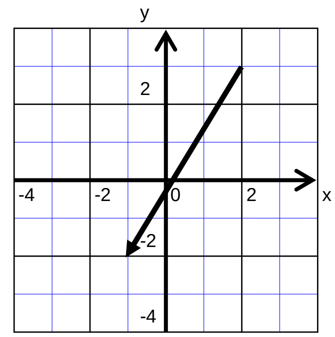
a) Donner les coordonnées de $D$ ____________________

b) Donner les composantes du vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{CD}$ :

Exemple 5 :

Soit le vecteur $\vec{v}$ dans le plan cartésien ci-contre.
Décrire ce vecteur à l'aide de ses composantes.

$\vec{v}$ = (________ , ________)



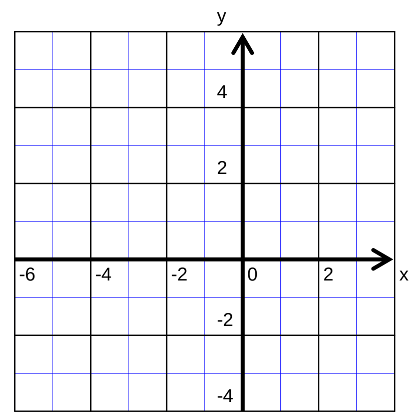

Exemple 6 :

Soit $A$ (-5, 4) et $B$ (3, -3) respectivement l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Décrire les vecteurs sous forme de composantes.

$\overrightarrow{AB}$ = (________ , ________)

$\overrightarrow{BA}$ = (________ , ________)

$-\overrightarrow{BA}$ = (________ , ________)



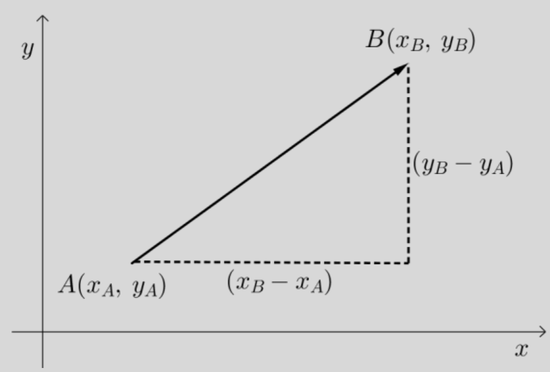

Définition de la norme d'un vecteur (grandeur d'un vecteur)

On appelle **norme d'un vecteur** le nombre réel positif qui caractérise la grandeur de ce vecteur.

Pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$ représenté ci-contre,
la norme est donnée par :

$\|\overrightarrow{AB}\|$ =

De plus, si $\vec{v} = (a, b)$ alors $\|\vec{v}\|$ =

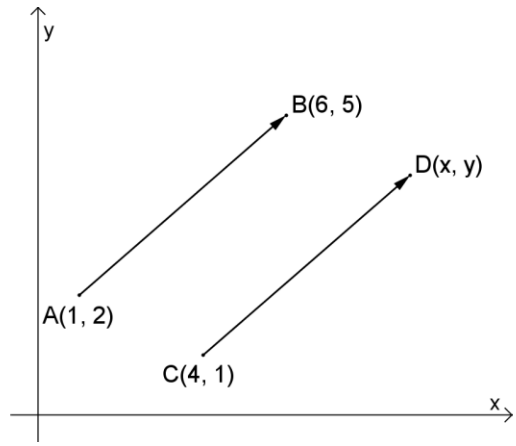



Un **vecteur unitaire** est un vecteur dont la norme vaut 1 unité, et ce, peu importe son orientation.

**<u>Exercices sur les composantes des vecteurs</u> :**

1. Soit les vecteurs <u>équipollents</u> illustrés ci-contre.

   Déterminer les coordonnées du point D.




2. Soit $\vec{v} = (-4, 3)$ et $\vec{u} = (c, d)$.

   Si $\vec{v} = \vec{u}$, alors $c =$ _______ et $d =$ _______

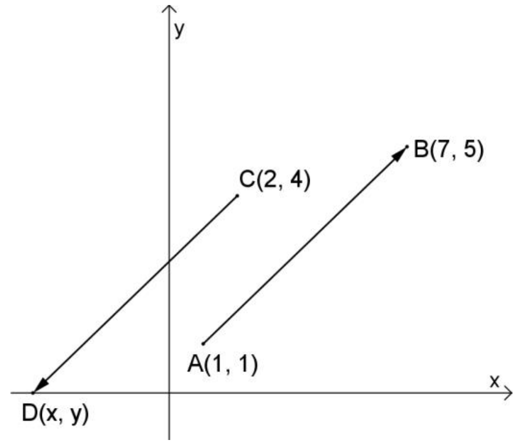
   et $\|\vec{u}\|$ = _______ = _______.

3. Soit $\vec{r} = (a + b, a - b)$ et $\vec{s} = (5, 3)$

   Décrire $\vec{t} = (2a, -b)$ si $\vec{r} = \vec{s}$.

4. Soit les vecteurs opposés illustrés ci-contre.

   Déterminer les coordonnées du point D.




5. Soit $\vec{p} = (-5, 12)$.

   a) Calculer la norme de $\vec{p}$.

   b) Décrire le vecteur opposé de $\vec{p}$ et donner sa norme.

6. Soit $\vec{s} = (2a+1,\ a+2b)$, $\vec{t} = (3a-1,\ 7a-2b)$ et $\vec{g} = \left(-a+2b,\ \dfrac{a}{a+b}\right)$.

   Si $\vec{s} = \vec{t}$ et $\vec{v} = -\vec{g}$, décrire le vecteur $\vec{v}$ sous forme de composantes.

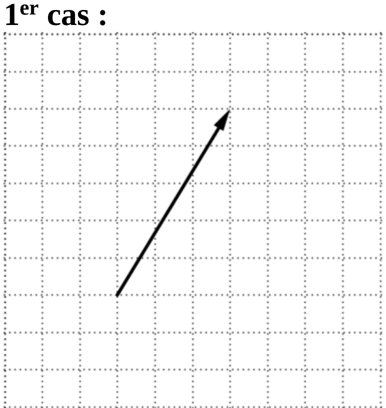
## ORIENTATION D'UN VECTEUR D'APRÈS SES COMPOSANTES

La représentation d'un vecteur dans le plan cartésien permet d'avoir une idée de son orientation (direction et sens).

Pour connaître précisément son orientation, on cherche à déterminer l'angle qu'il forme par rapport à la droite horizontale orientée. L'utilisation des rapports trigonométriques est souvent nécessaire.

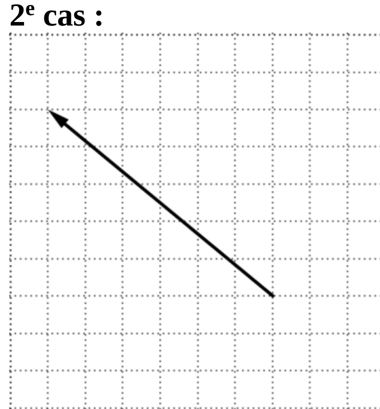
Exemple 7 :
Donner l'orientation des vecteurs suivants. (Chaque carreau vaut une unité.)

**1er cas :**



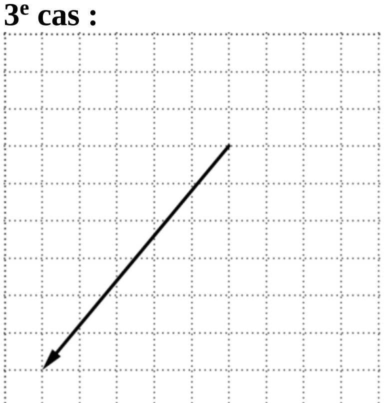
Formule : $\theta =$

**2e cas :**



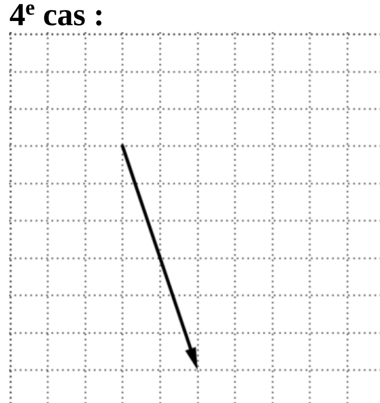
Formule : $\theta =$

**3e cas :**



Formule : $\theta =$

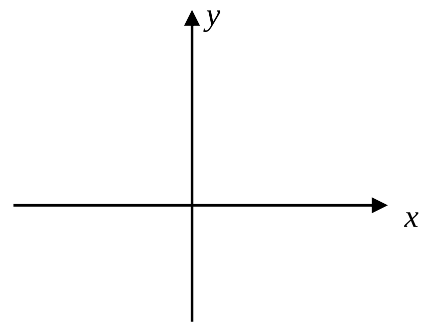
**4e cas :**



Formule : $\theta =$

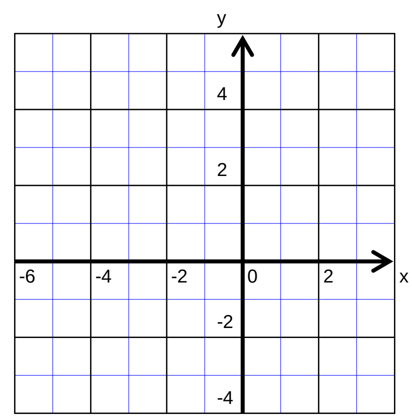
<u>Exemple 8</u> :

Soit le vecteur $\vec{w}$ = (-17, 11), quelle est son orientation?




<u>Exemple 9</u> :

Décrire le vecteur $\overrightarrow{CD}$ sachant que $C$ (–2, 3) et $D$ (2,–4) en donnant sa norme et son orientation.




$$\overrightarrow{CD} : \begin{cases} \|\overrightarrow{CD}\| = \\ \theta_{\overrightarrow{CD}} = \end{cases}$$

<u>Exemple 10</u> :

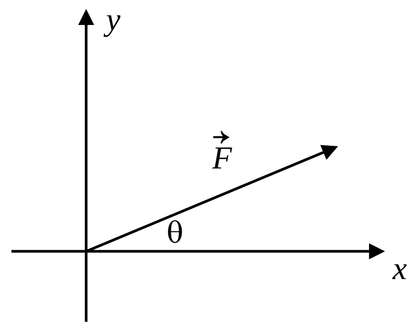
a) Soit $\vec{r}$ = (-4, -7). Déterminer l'orientation du vecteur $\vec{r}$ .

b) Soit $\vec{s}$ = (2, 6). Déterminer l'orientation du vecteur $\vec{s}$ .

## COMPOSANTES D'UN VECTEUR D'APRÈS SA NORME ET SON ORIENTATION

Décrire le vecteur $\vec{F}$ dont la norme est donnée par $\|\vec{F}\|$.

- Composante horizontale :



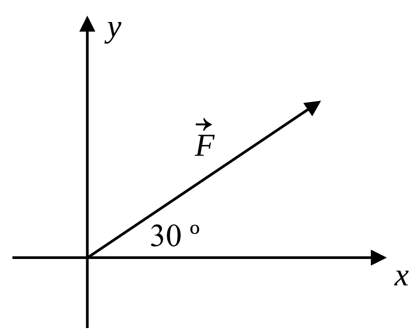

- Composante verticale :

On peut alors écrire le vecteur avec ses composantes :

$\vec{F}$ = ( ______________ , ______________ )

Exemple 11 :

Déterminer les composantes du vecteur $\vec{F}$ ci-contre.




avec $\|\vec{F}\| = 16$ u

- $F_x =$

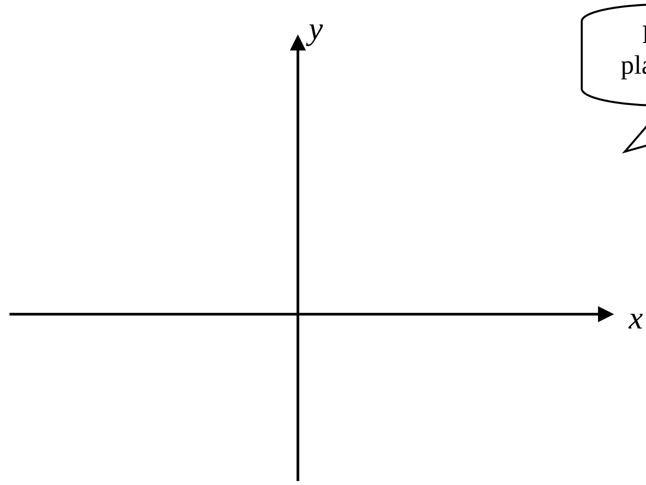
- $F_y =$

Donc $\vec{F} =$

<u>Exemple 12</u> :

Trouver les composantes des vecteurs ci-dessous et, en bonus, décrire le vecteur résultant.

$\vec{F}_1$ : 15 N à 55º $\qquad$ $\vec{F}_2$ : 10 N à 255º $\qquad$ $\vec{F}_3$ : 20 N à 325º




Représenter chaque vecteur dans le plan cartésien avec son origine à (0, 0).

| | En *x*… | En *y*… |
|---|---|---|
| $\vec{F}_1$ | | |
| $\vec{F}_2$ | | |
| $\vec{F}_3$ | | |
| $\vec{F}_R$ | | |

Faire la somme en *x* et en *y* afin d'exprimer le vecteur résultant.

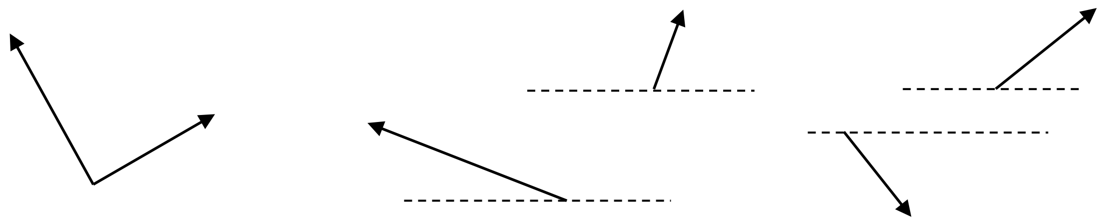
Nous étudierons plus en détail l'addition de vecteurs à partir de la page 17.

## 3.2 RELATIONS ENTRE DEUX VECTEURS

### 3.2.1 Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs représentés par des flèches perpendiculaires l'une à l'autre sont dits **orthogonaux**.

(1) Sans repère cartésien

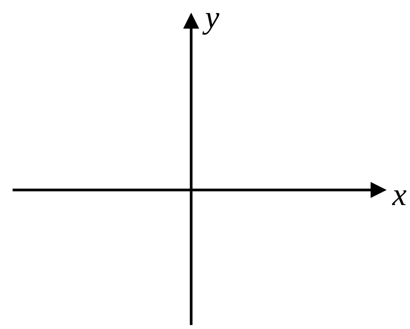


$\vec{u} \perp \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{s} \perp \vec{t}$ $\qquad$ $\vec{r} \perp \vec{w}$

(2) Avec repère cartésien

Soit les vecteurs : $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (4, -6)$

Comment peut-on prouver que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux?




DONC, deux vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ sont **orthogonaux**

si l'angle formé <u>entre</u> les vecteurs est de ______ ou ______

ou encore si ____________________________________

<u>Exemple 1</u> :
Soit les vecteurs $\vec{u} = (4 ; 5)$ ; $\vec{v} = (-7{,}5 ; 6)$ et $\vec{w} = (10 ; -8)$

a) $\vec{u}$ est-il orthogonal à $\vec{w}$ ?

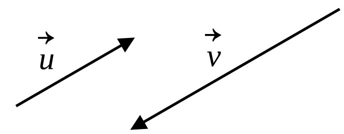
b) $\vec{v}$ est-il orthogonal à $\vec{w}$ ?

c) $\vec{u}$ est-il orthogonal à $\vec{v}$ ?

### 3.2.2 Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs de même direction (représentés par des flèches parallèles), peu importe leur *sens* et leur *grandeur* (norme), sont dits **colinéaires** ou **linéairement dépendants**.

Par exemple, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car ils ont la même direction (même inclinaison), leurs flèches sont parallèles

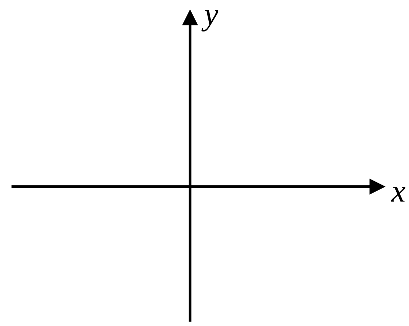



Exemple 2 :

Les vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{t}$ sont-ils colinéaires?

$\vec{s}$ : $\|\vec{s}\|$ = 15 u à 40º  et

$\vec{t}$ : $\|\vec{t}\|$ = 35 u à 220º

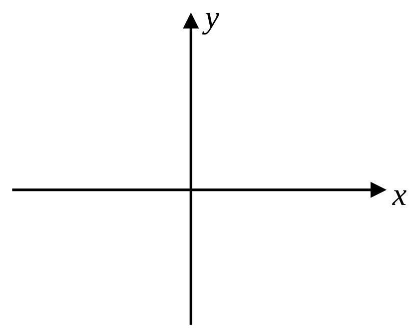



Exemple 3 :

Les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires?

$\vec{r} = (-3, 7)$

$\vec{w} = (6, -14)$




DONC, deux vecteurs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ sont **colinéaires**…

si l'angle formé entre les vecteurs est de ______ ou ______

ou encore si ______________________________________

Exemple 4 :

Soit $\vec{r} = (3, 7)$ et $\vec{v} = (15, 35)$.

Ces vecteurs sont ______________________________ car ______________________

Notons qu'on peut réécrire $\vec{v} =$

Les composantes du vecteur $\vec{v}$ sont un même multiple des composantes du vecteur $\vec{r}$.

Cette observation montre bien un lien (une *dépendance*) entre les deux vecteurs.

On peut écrire que $\vec{v} =$ ou $\vec{r} =$

On se servira de cette propriété dans la section sur les bases vectorielles (voir page 34).

Deux vecteurs parallèles sont dits **linéairement dépendants**.

Deux vecteurs non parallèles sont dits **linéairement indépendants**.

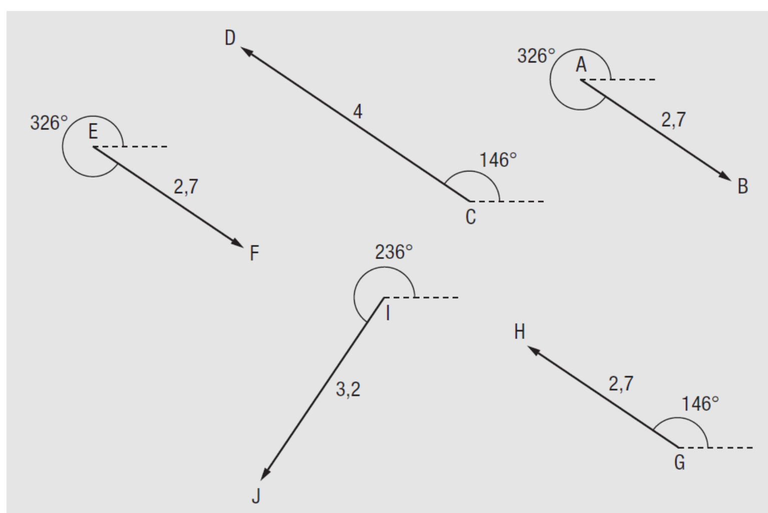
Exemple 5 :

Soit $\vec{v} = (5, b)$ et $\vec{t} = (-10, 12)$.

Quelle valeur faut-il attribuer à $b$ pour que ces vecteurs soient colinéaires?

Exemple 6 :

Soit les vecteurs illustrés ci-contre, énumérer les vecteurs mutuellement…




a) équipollents :

b) opposés :

c) colinéaires :

d) orthogonaux :

## 3.3 OPÉRATION SUR LES VECTEURS

### 3.3.1 Addition et soustraction de deux vecteurs

On peut additionner des vecteurs entre eux. Il en résulte un vecteur qu'on appelle *résultante*.

Pour additionner des vecteurs, on peut utiliser deux méthodes différentes.

(1) MÉTHODE DE L'ENCHAÎNEMENT DES VECTEURS POUR L'ADDITION (MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE)

On veut additionner le vecteur $\vec{B}$ au vecteur $\vec{A}$.

$\overrightarrow{A}$ : $\begin{cases} \|\overrightarrow{A}\| = 4\ u \\ \theta_{\vec{A}} = 40^\circ \end{cases}$  $\overrightarrow{B}$ : $\begin{cases} \|\overrightarrow{B}\| = 2{,}5\ u \\ \theta_{\vec{B}} = 310^\circ \end{cases}$

Cette première méthode consiste à enchaîner le vecteur $\vec{B}$ au vecteur $\vec{A}$. On place l'origine de $\vec{B}$ sur l'extrémité de $\vec{A}$, sans changer ni la grandeur ni la direction de chacun des vecteurs.

Si on appelle $\vec{R}$ le vecteur résultant de la somme de $\vec{A}$ et $\vec{B}$,
alors $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$, et ce vecteur $\vec{R}$ va de l'origine de $\vec{A}$ à l'extrémité de $\vec{B}$.

-------------------------------------------

Remarquez que $\|\vec{R}\| \neq \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$ et $\theta_{\vec{R}} \neq \theta_{\vec{A}} + \theta_{\vec{B}}$

On peut additionner plus de deux vecteurs à la fois. Il s'agit d'enchaîner tous les vecteurs un après l'autre, <u>toujours en enchaînant l'origine avec l'extrémité</u>. Et dans l'enchaînement, <u>il est important de conserver la grandeur et l'orientation de chacun des vecteurs</u>.

Le vecteur résultant $\vec{R}$ va alors de l'origine du premier vecteur à l'extrémité du dernier vecteur enchaîné.

<u>Exemple 1</u> :

Soit les vecteurs suivants :

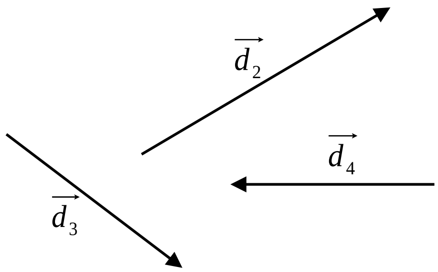
$\overrightarrow{A}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{A} \| = 3\ u \\ \theta_{\vec{A}} = 45^\circ \end{cases}$ $\overrightarrow{B}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{B} \| = 10\ u \\ \theta_{\vec{B}} = 180^\circ \end{cases}$ $\overrightarrow{C}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{C} \| = 2{,}5\ u \\ \theta_{\vec{C}} = 325^\circ \end{cases}$ $\overrightarrow{D}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{D} \| = 4\ u \\ \theta_{\vec{D}} = 270^\circ \end{cases}$

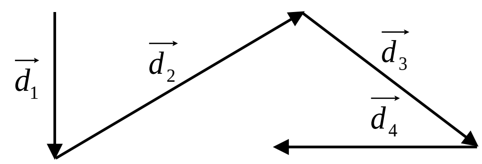
Si $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D}$, quelle est la grandeur et l'orientation du vecteur résultant $\vec{R}$?

Solution par la méthode de l'enchaînement…

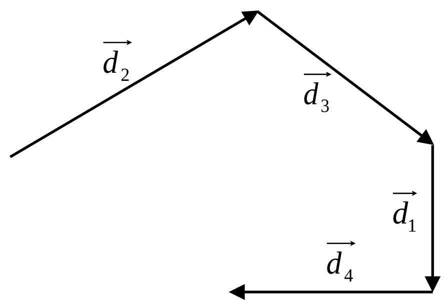
► La méthode que nous venons de voir est approximative et sert de croquis pour bien appliquer la méthode algébrique (voir page 20).

*Exercice* : À partir des vecteurs suivants, représentons la résultante $\vec{R} = \vec{d_1} + \vec{d_2} + \vec{d_3} + \vec{d_4}$ .

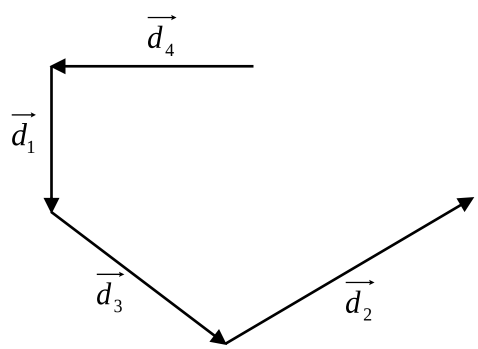



Représentons maintenant la somme vectorielle $\vec{d_2} + \vec{d_3} + \vec{d_1} + \vec{d_4}$ .




Représentons finalement la somme vectorielle $\left(\vec{d_4} + \vec{d_1}\right) + \left(\vec{d_3} + \vec{d_2}\right)$.




Ces exemples nous montrent bien deux propriétés fondamentales quant à l'addition de vecteurs : la **commutativité** et l'**associativité** de l'addition.

____________________ ____________________

(2) <u>MÉTHODE DES COMPOSANTES POUR L'ADDITION (MÉTHODE LA PLUS PRÉCISE)</u>

Un vecteur a toujours deux composantes (voir page 12) :

- une composante horizontale (le long de l'axe des abscisses) et
- une composante verticale (le long de l'axe des ordonnées).

<u>Exemple 2</u> :

Soit les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ suivants. On veut additionner le vecteur $\vec{B}$ au vecteur $\vec{A}$.

$\overrightarrow{A}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{A} \| = 3\ u \\ \theta_{\vec{A}} = 40^\circ \end{cases}$ $\qquad$ $\overrightarrow{B}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{B} \| = 5\ u \\ \theta_{\vec{B}} = 235^\circ \end{cases}$

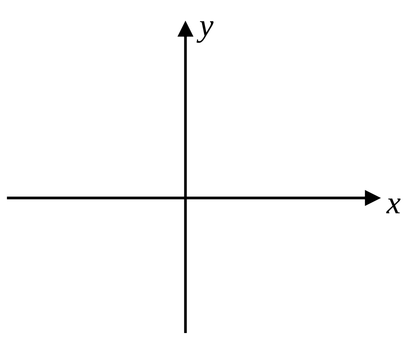
(1) <u>Tableau des composantes</u>

| | en $x$… | en $y$… |
|---|---|---|
| $\vec{A}$ | | |
| $\vec{B}$ | | |
| $\vec{R}$ | | |

La composante horizontale du vecteur résultant est obtenue par la somme des composantes horizontales de chacun des vecteurs : $x_R = x_A + x_B$

La composante verticale du vecteur résultant est obtenue par la somme des composantes verticales de chacun des vecteurs : $y_R = y_A + y_B$

(2) <u>Représentation graphique de $\vec{R}$</u>




(3) <u>Détermination de $\|\vec{R}\|$ et de $\theta_{\vec{R}}$</u>

$\overrightarrow{R}$ : $\begin{cases} \| \overrightarrow{R} \| = \\ \theta_{\vec{R}} = \end{cases}$

*Exercice* :
Monsieur Arvizet lâche la barre et coupe le moteur de son bateau, le laissant ainsi aller à la dérive. Imprudent le gaillard! Le bateau est alors soumis à un vent de 60 km/h orienté à 30° ainsi qu'à un fort courant marin dont la vitesse est de 45 km/h suivant une orientation de 110°.

Fais un croquis de la direction que prendra le bateau de Monsieur Arvizet et illustrant également la vitesse à laquelle il se déplacera.

Questions d'estimation :

1- Le bateau de Monsieur Arvizet se déplacera-t-il à 105 km/h ? ____________
2- Le bateau se déplacera-t-il selon une orientation de 140° ? ____________

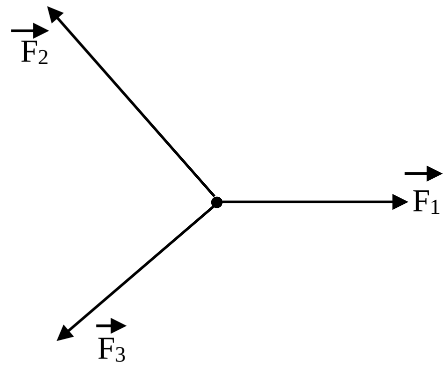
| | Comp. horiz. | Comp. vertic. |
|---|---|---|
| $\vec{v}$ | | |
| $\vec{c}$ | | |
| $\vec{r}$ | | |

donc $\vec{r} \approx ($ , $)$

Déterminer la norme et l'orientation de la vitesse résultante.

Exercice :

Trois forces sont appliquées en un point.




$\vec{F_1} : 50N,\ 0°$ $\vec{F_2} : 80N,\ 125°$ $\vec{F_3} : 60N,\ 220°$

À l'aide d'une démarche algébrique (sans faire de dessin), décrire la résultante $\vec{R}$ .

Force résultante :

$\| \vec{R} \| =$

Orientation :

*<u>Soustraction de deux vecteurs</u>*

La soustraction de vecteurs se base sur la définition du vecteur opposé. On définit l'opération $\vec{A} - \vec{B}$ comme étant l'addition de $-\vec{B}$ au vecteur $\vec{A}$, ainsi :

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}).$$

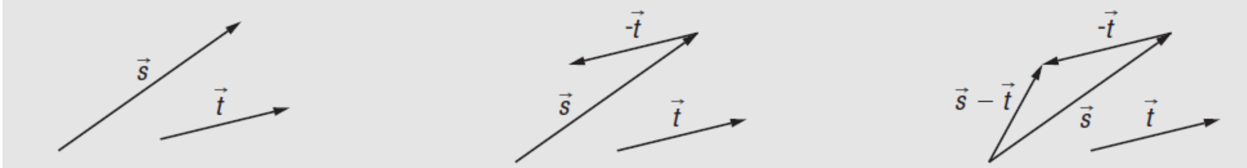
*Rappels :*

Le vecteur opposé d'un vecteur $\vec{A}$ est le vecteur $-\vec{A}$.
C'est le vecteur qui additionné à $\vec{A}$ donne le vecteur nul : $\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$.
Les vecteurs $\vec{A}$ et $-\vec{A}$ ont la même grandeur mais des orientations opposées.

On veut représenter $\vec{s} - \vec{t}$.

On représente le vecteur opposé au vecteur *t* de façon à ce que son origine coïncide avec l'extrémité du vecteur *s*.

Le vecteur somme est défini par l'origine du vecteur *s* et l'extrémité du vecteur -*t*.




<u>MÉTHODE DE L'ENCHAÎNEMENT DES VECTEURS POUR LA SOUSTRACTION</u>

On veut soustraire le vecteur $\vec{B}$ du vecteur $\vec{A}$.

$\vec{A}$ : $\begin{cases} \|\vec{A}\| = 3\ u \\ \theta_{\vec{A}} = 60° \end{cases}$  $\vec{B}$ : $\begin{cases} \|\vec{B}\| = 5\ u \\ \theta_{\vec{B}} = 190° \end{cases}$

L'enchaînement du vecteur $-\vec{B}$ au vecteur $\vec{A}$ donne le vecteur résultant. $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$.

$\vec{R}$ : $\begin{cases} \|\vec{R}\| \approx \\ \theta_{\vec{R}} \approx \end{cases}$

MÉTHODE DES COMPOSANTES POUR LA SOUSTRACTION

Exemple 3 :

Soit les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ suivants. On veut soustraire le vecteur $\vec{B}$ du vecteur $\vec{A}$.

$\overrightarrow{A}$ : $\begin{cases} \|\overrightarrow{A}\| = 3\ u \\ \theta_{\vec{A}} = 60^\circ \end{cases}$

$\overrightarrow{B}$ : $\begin{cases} \|\overrightarrow{B}\| = 7\ u \\ \theta_{\vec{B}} = 210^\circ \end{cases}$

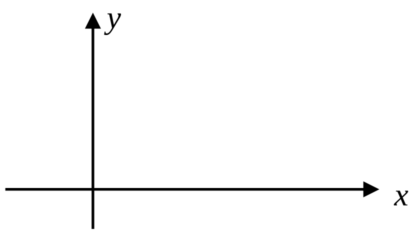
(1) Décrire le vecteur $-\vec{B}$

$-\vec{B}$ : $\begin{cases} \|-\vec{B}\| = \\ \theta_{-\vec{B}} = \end{cases}$

(2) Tableau des composantes ( où $\vec{R} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$ )

| | en $x$… | en $y$… |
|---|---|---|
| $\vec{A}$ | | |
| $-\vec{B}$ | | |
| $\vec{R}$ | | |

(3) Représentation graphique de $\vec{R}$




(4) Détermination de $\|\vec{R}\|$ et de $\theta_{\vec{R}}$

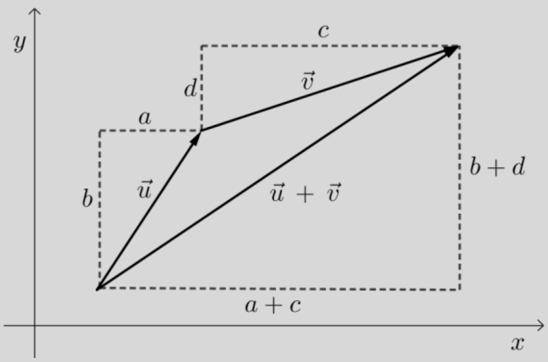
$\overrightarrow{R}$ : $\begin{cases} \|\overrightarrow{R}\| = \\ \theta_{\vec{R}} = \end{cases}$

L'ADDITION ET LA SOUSTRACTION EN BREF…

Soit $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$, deux vecteurs du plan.

**Addition** :

$\vec{u} + \vec{v} = (a, b) + (c, d)$
$= (a + c, b + d)$




**Soustraction** :

$\vec{u} - \vec{v} = (a, b) - (c, d)$
$= (a - c, b - d)$

**Addition du vecteur opposé** :

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + -(\overrightarrow{CD})$
$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

**Relation de Chasles** :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

**Règle du polygone fermé** :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

Exemple 4 : Écrire les sommes vectorielles suivantes sous la forme d'un seul vecteur.

a) $-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN} =$

b) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NP} =$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD} =$

d) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{BE} =$

e) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD} =$

f) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{PO} =$

g) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{BC} =$

h) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} =$

## 3.3.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Il est possible de multiplier un vecteur par un nombre réel appelé *scalaire*.

Étant donné un scalaire $k$ et $\vec{v} = (a, b)$, le produit de $k$ par $\vec{v}$, noté $k\vec{v}$, est un vecteur dont :

- la norme est $\| k\vec{v} \|$ = _______________ ;
- la direction est celle de _______________ ;
- le sens est celui de $\vec{v}$ si $k$ est _______________
  et le sens contraire si $k$ est _______________ ;
- les composantes sont _______________.

Cas particuliers :

$1\vec{v} = \vec{v}$ $\quad -1\vec{v} = -\vec{v}$ $\quad 0\vec{v} = \vec{0}$ $\quad k\vec{0} = \vec{0}$

Exemple 5 :
Soit le vecteur $\vec{A} = (2, -5)$, exprimer les vecteurs suivants :

| | | |
|---|---|---|
| a) $\vec{v} = 3\vec{A}$ | b) $\vec{w} = \frac{-5}{2}\vec{A}$ | c) $\vec{s} = 0\vec{A}$ |

► Il ne faut pas considérer $\frac{\vec{u}}{k}$ comme étant une division d'un vecteur par un scalaire, mais plutôt comme le produit du vecteur $\vec{u}$ par $\frac{1}{k}$. Ainsi, $\frac{\vec{u}}{k} = \frac{1}{k}\vec{u}$.

Exemple 6 :
Soit les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{R}$ suivants :

$$\overrightarrow{A} : \begin{cases} \| \overrightarrow{A} \| = 3\ u \\ \theta_{\vec{A}} = 50^\circ \end{cases} \qquad \overrightarrow{R} = k\vec{A}$$

a) Si $k = 2$ alors $\vec{R} = 2\vec{A}$ donc $\vec{R} = \vec{A} + \vec{A}$

par la méthode de l'enchaînement,

Ainsi, le vecteur résultant $\vec{R}$ est :

$$\overrightarrow{R} : \begin{cases} \| \overrightarrow{R} \| = \\ \theta_{\vec{R}} = \end{cases}$$

b) Si $k = -2$ alors $\vec{R} = -2\vec{A}$ donc $\vec{R} = -(\vec{A}) + -(\vec{A})$

par la méthode de l'enchaînement,

Ainsi, le vecteur résultant $\vec{R}$ est :

$$\overrightarrow{R} : \begin{cases} \| \overrightarrow{R} \| = \\ \theta_{\vec{R}} = \end{cases}$$

## <u>Exercices sur la multiplication d'un vecteur par un scalaire</u>

1. Soit $\vec{n} = ( 2 , -5 )$.

   a) Quelles sont les composantes d'un nouveau vecteur $\vec{v} = k\vec{n}$ si $k = -2$ ?

   b) Quelle est la norme de $\vec{v}$ ?

   c) Quelle est l'orientation de $\vec{v}$ ?

*Faites vos calculs à la page suivante…*

2. Soit $\vec{v} = t\vec{n}$, $\vec{v} = (18 ; -10,8)$ et $\vec{n} = (-12 ; 7,2)$. Déterminer la valeur de *t*.

3. Soit $\vec{v} = (5 , 7)$ et $\vec{n} = (6 ; 8,4)$

   a) Ces vecteurs sont-ils colinéaires ?

   Si oui,

   b) écrire $\vec{v}$ en termes de $\vec{n}$.

4. Soit $\vec{u} = (-1 , 3)$. Si $k_1 = 2$ et $k_2 = -3$ :

   a) donner sous forme de couples de composantes $\vec{n} = k_1(k_2\vec{u})$.

   b) Le nouveau vecteur est-il dans le même sens que $\vec{u}$ ?

   c) Est-il vrai que sa norme sera 6 fois celle de $\vec{u}$ ?

5. Soit $\vec{u} = (2 , 3)$ et $\vec{v} = (4 , -1)$.

   a) Donner les composantes de $\vec{t}$ si $\vec{t} = 4\vec{v} + 3\vec{u}$.

   b) Quelle est la norme de $\vec{t}$ ?

   c) Quelle est son orientation ?

6. Résoudre : $\vec{p} = a\vec{u} + b\vec{v}$, sachant que $\vec{p} = (-3 , 1)$, $\vec{u} = (1 , 2)$ et $\vec{v} = (0 , 1)$.

*Page de calculs…*

## $\boxed{3.3.3}$ Produit scalaire de deux vecteurs

Le produit scalaire est une opération qui fait intervenir deux vecteurs.
Le résultat d'un produit scalaire est une quantité <u>scalaire</u>.

On note le produit scalaire de deux vecteurs à l'aide d'un point.
Ainsi, $\vec{u} \bullet \vec{v}$ correspond au produit scalaire de ces deux vecteurs.
On le lit « produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ » ou « $\vec{u}$ point $\vec{v}$ ».

Produit scalaire =
***« Dot product »***
en anglais…

On peut considérer le produit scalaire en termes :
- de composantes,
- de vecteurs.

<u>PRODUIT SCALAIRE EN TERMES DE **COMPOSANTES VECTORIELLES**</u>

On appelle produit scalaire de deux vecteurs le nombre correspondant à la somme des produits de leurs composantes ainsi définie :

$$\text{si } \vec{u} = (a, b) \text{ et } \vec{v} = (c, d) \text{ alors } \vec{u} \bullet \vec{v} = ac + bd$$

Ex. : 1) $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (4, 12)$
$\vec{u} \bullet \vec{v} = 2 \times 4 + 3 \times 12 = 44$

2) $\vec{u} = (5, 1)$ et $\vec{v} = (-2, 7)$
$\vec{u} \bullet \vec{v} = 5 \times -2 + 1 \times 7 = -3$

<u>PRODUIT SCALAIRE EN TERMES DE **VECTEURS DANS LE PLAN**</u>

*Notion préalable : L'angle entre deux vecteurs est l'angle entre deux flèches <u>de même origine</u>.*

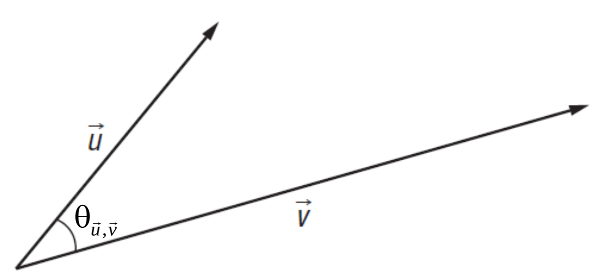
Pour effectuer le produit scalaire de deux vecteurs, il faut :
1. tracer les flèches des vecteurs à partir d'une même origine ;
2. projeter orthogonalement le $1^{er}$ vecteur sur le $2^{e}$ afin d'obtenir le vecteur projection.

<u>Définition du produit scalaire</u>
Le produit scalaire de deux vecteurs correspond au produit de la longueur orientée de la projection orthogonale du $1^{er}$ vecteur sur le $2^{e}$ par la norme du $2^{e}$.

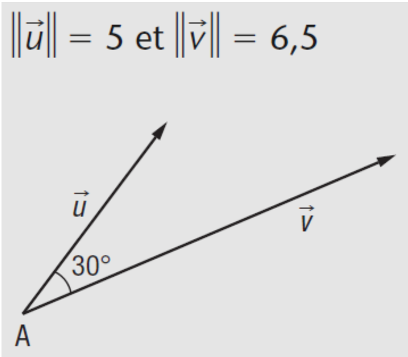
En d'autres termes,

$$\begin{aligned}\vec{u} \bullet \vec{v} &= (\text{longueur orientée de la projection de } \vec{u} \text{ sur } \vec{v}) \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \cos\,\theta_{\vec{u},\vec{v}} \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\,\theta_{\vec{u},\vec{v}}\end{aligned}$$

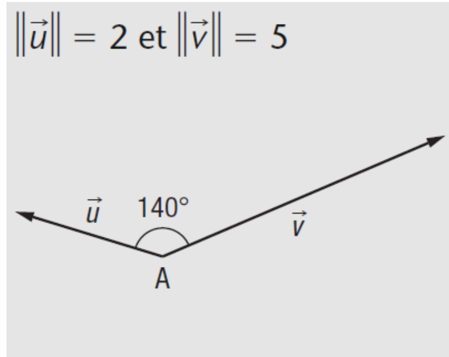
où $\theta_{\vec{u},\vec{v}}$ est le plus petit angle <u>entre</u> $\vec{u}$ et $\vec{v}$



Voici deux exemples :




$\vec{u} \bullet \vec{v} =$

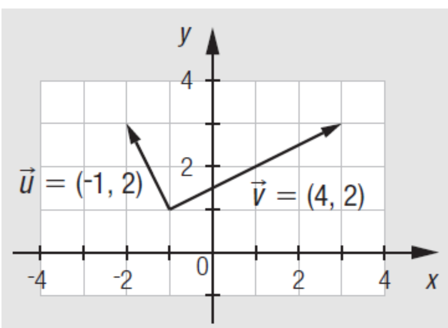



$\vec{u} \bullet \vec{v} =$

**Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul :**

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

Par exemple :



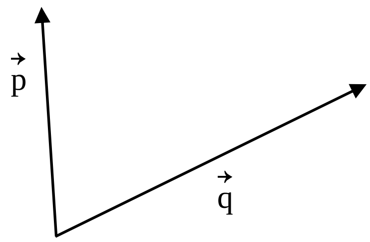

car $\cos \theta_{\vec{u},\vec{v}} = \cos(\_\_\_\_)$

$= \_\_\_\_$

$\vec{u} \bullet \vec{v} =$

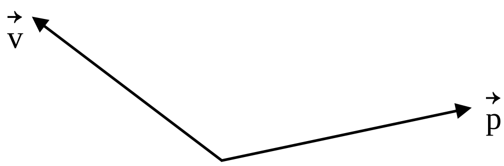
## Exercices sur le produit scalaire de deux vecteurs

1. Soit deux vecteurs :

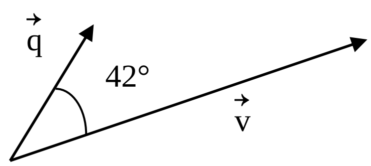



Tracer la projection de $\vec{p}$ sur $\vec{q}$ et la projection de $\vec{q}$ sur $\vec{p}$.

2. Tracer la projection de $\vec{v}$ sur $\vec{p}$.




3. Donner $\vec{q} \bullet \vec{v}$.




$\|\vec{q}\| = 20$ N

$\|\vec{v}\| = 50$ m

4. À quelle valeur de $\vec{q} \bullet \vec{p}$ devrions-nous nous attendre dans une telle situation ?

$\|\vec{q}\| = 20$ N
$\|\vec{p}\| = 75$ m

5. Si l'angle entre deux vecteurs est supérieur à 90°, à quoi devrions-nous nous attendre en ce qui a trait à la valeur du produit scalaire ?

6. Soit $\vec{s}$ et $\vec{t}$. On sait que $\|\vec{s}\|$ = 15 N et $\|\vec{t}\|$ = 12 m. De plus, on a que $\vec{s} \bullet \vec{t}$ = 120,44 J. Trouver l'angle entre les 2 vecteurs.

7. Soit $\vec{q} = ( 5 , -2 )$ et $\vec{t} = ( 1 , 3 )$. Calculer $\vec{q} \bullet \vec{t}$.

8. Seulement en observant les vecteurs suivants, pourriez-vous donner le résultat de $\vec{s} \bullet \vec{v}$ ?
$\vec{s} = ( 2 , 5 )$ et $\vec{v} = ( -10, 4 )$

9. Soit $\vec{C}$ et $\vec{D}$ deux vecteurs. Calculer $\vec{C} \bullet \vec{D}$.

$$\overrightarrow{C} : \begin{cases} \|\overrightarrow{C}\| = 2\ u \\ \theta_{\vec{C}} = 25^{\circ} \end{cases} \qquad \overrightarrow{D} : \begin{cases} \|\overrightarrow{D}\| = 5\ u \\ \theta_{\vec{D}} = 105^{\circ} \end{cases}$$

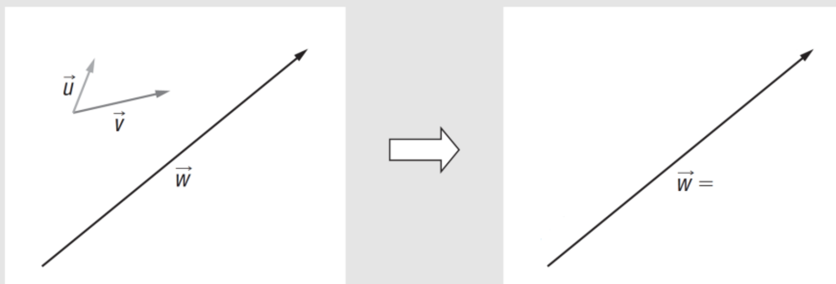
## 3.4 LES BASES VECTORIELLES

### 3.4.1 Combinaison linéaire

Une combinaison linéaire est une manière d'engendrer un vecteur donné à partir de deux autres vecteurs.

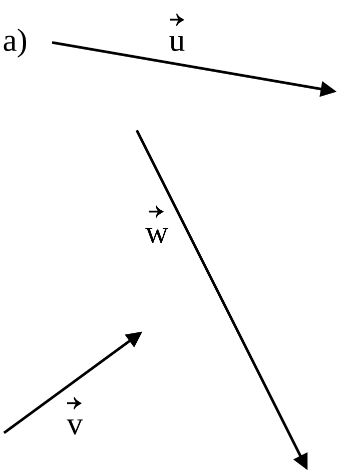
Toute écriture de la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est appelée une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les nombres réels utilisés sont appelés les coefficients de la combinaison.

Ex. : 1) En mettant bout à bout un certain nombre de chacun des vecteurs *u* et *v*, il est possible d'obtenir le vecteur *w* sous la forme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

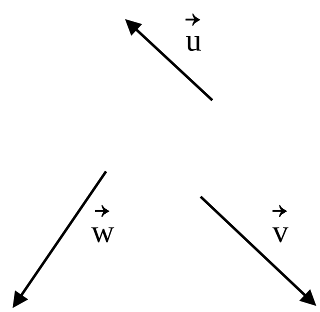



Exercice :
Représenter la combinaison linéaire permettant d'engendrer le vecteur $\vec{w}$ suivant à partir de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ puis **estimer** la valeur des coefficients de la combinaison.

a)




b)




Question bonus : Une combinaison linéaire de la forme $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ est-elle toujours possible pour n'importe quels vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ du plan? Si non, dans quel(s) cas est-ce impossible?

Exemple 1 :
Déterminer le ou les coefficients inconnus dans chaque combinaison linéaire donnée.

a) (3, 4) = a(1, 1) + 1(1, 2)

b) (-8, -1) = a(-1, 4) + b(2, 3)

Exemple 2 :
Exprimer $\vec{v}$ dont les composantes sont (6, 8) comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{r}$ donnés. Soit $\vec{s}$ = (3, 1) et $\vec{r}$ = (4, 2).

Exemple 3 :
Exprimer $\vec{w}$ dont les composantes sont (16, 26) comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donnés. Soit $\vec{u}$ = (2, 5) et $\vec{v}$ = (3, 4).

### $\boxed{3.4.2}$ Base vectorielle

Deux vecteurs qui peuvent engendrer n'importe quel vecteur du plan par combinaison linéaire constituent une **base vectorielle**.

Pour constituer une base vectorielle, les deux vecteurs ne doivent pas être ______________________________ (et doivent être non nuls!)

Il existe une ____________________ de bases vectorielles.

La plus simple est celle qui utilise les vecteurs unitaires $\vec{i} = (1, 0)$ et $\vec{j} = (0, 1)$.

Une base vectorielle dont les vecteurs sont unitaires et orthogonaux est dite ***orthonormée***.

Exemple 4 : Exprimer les vecteurs représentés comme une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

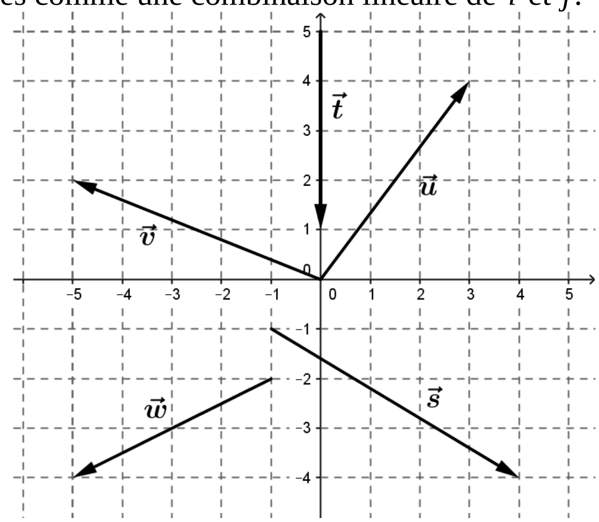
$\vec{u}$ =

$\vec{v}$ =

$\vec{w}$ =

$\vec{s}$ =

$\vec{t}$ =




Exemple 5 :
Exprimer $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sachant que $\vec{u} = (4, -3)$ et $\vec{v} = (-2, 3)$.

a) $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$

b) $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 4\vec{v}$

Exemple 6 :

On donne le vecteur $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Exprimer ce même vecteur comme une combinaison linéaire de $\vec{u} = (2, -1)$ et $\vec{v} = (-1, 3)$.

$\vec{w} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Exemple 7 :

Les vecteurs (1, 0) et (1, 1) forment-ils une base vectorielle?
Si oui, démontrer que tout vecteur $(x, y)$ est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.
Si non, expliquer pourquoi.

## EXERCICES RÉCAPITULATIFS

1. $A(-4, 3)$ et $B(6, 2)$ sont respectivement l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   Décrire le vecteur $\overrightarrow{BA}$ sous forme d'un couple de composantes.

2. Démontrer, de deux manières différentes, que les vecteurs $\vec{u}: 12\text{km}, 210°$ et $\vec{v} \approx (10; -17{,}32)$ sont orthogonaux.

3. Décrire $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux à $\vec{p}$ = (-3 , 5) sachant que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2\|\vec{p}\|$ et $\vec{u} \neq \vec{v}$.

$\vec{u}$ = ( ______ , ______ )   et   $\vec{v}$ = ( ______ , ______ )

4. Déterminer le produit scalaire des vecteurs $\vec{s}$ et $\vec{p}$ illustrés ci-dessous, sachant que $\|\vec{s}\|$ = 45m et $\|\vec{p}\|$ = 11N .

5. Soit $\vec{s} \bullet \vec{p} = 12$ , $\vec{s} = (2, 5)$ et $\vec{p} = (3, d)$. Déterminer la valeur de la composante ***d*.**

6. Calculer $\vec{q} \bullet \vec{t}$ si $\vec{q} = (0, -21)$ , $\|\vec{t}\| = 17$ et $\theta_{\vec{t}} = 337°$ .

7. Vrai ou faux? Les vecteurs $\vec{r} = (1, 1)$ et $\vec{s} = (-1, 1)$ forment une base vectorielle orthonormée.

8. Un vecteur $\vec{v}$ a une norme égale à 100 unités et une orientation de 30°. Exprimer $\vec{v}$ sous forme d'une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ .

9. Déterminer la norme de $\vec{v} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ .

10. Calculer $\vec{i} \bullet \vec{j}$ .

11. Si $\vec{r} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$ , $\vec{s} = 5\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{n} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ,
calculer la norme et l'orientation de $\vec{r} - \vec{s} + 2\vec{n}$ .

12. Soit $\vec{p} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ et $\vec{n} = (4, 6)$ . Écrire $\vec{f} = (5, 7)$ sous forme d'une combinaison linéaire dont la base est formée par $\vec{p}$ et $\vec{n}$ .

13. Soit $\vec{r} = (2\ ,\ -5)$ et $\vec{s} = (-1\ ,\ 2)$. Exprimer $\vec{p}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ si :

a) $\vec{p} = \vec{s} - 2\vec{r}$
b) $\vec{p} = \dfrac{\vec{r} + \vec{s}}{2}$
c) $\vec{p} = (\vec{r} \bullet \vec{s})\ \vec{r}$

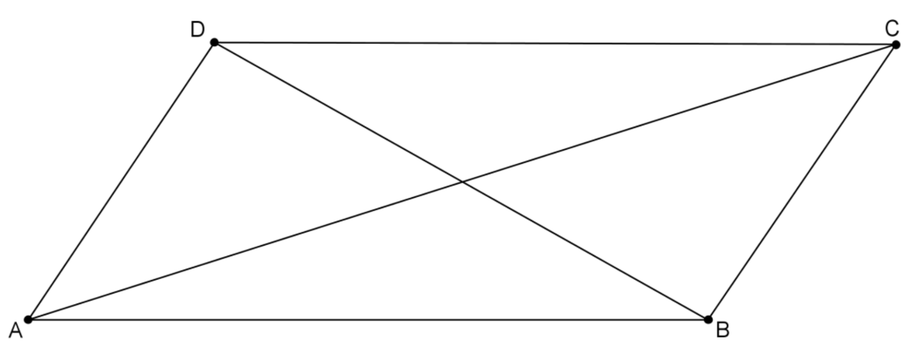
14. Calculer $\vec{u} \bullet \vec{v}$ sachant que $\vec{u} = (-1\ ,\ 6)$ , $\|\vec{v}\| = 12$ et $\theta_{\vec{v}} = 170°$ :

a) par la méthode des composantes.

b) à l'aide de leurs normes et de leurs orientations.

15. Soit le parallélogramme ABCD suivant. Dire si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} = \vec{0}$
c) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$
d) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$
e) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB}$



16. Pour quelle valeur de *a* les vecteurs suivants sont-ils orthogonaux?

$\vec{v} = (a + 1 , a)$ et $\vec{t} = (a - 1 , a - 1)$

17. Quelle déduction pouvons-nous faire dans chaque cas, sachant que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ ?

a) $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

b) $\vec{v} \bullet \vec{w} = 0$

c) $\vec{v} = a\,\vec{z}$

d) $a\,\vec{s} = \vec{0}$

e) $\vec{s} = 2\vec{v} + \vec{0}$

f) $a\vec{s} + b\vec{p} = \vec{0}$

18. Soit trois vecteurs $\vec{u} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $\vec{r} = \vec{u} - \vec{v}$.

a) Vrai ou faux? Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment une base vectorielle orthonormée.

b) Vrai ou faux? $\theta_{\vec{r}} = -90°$

c) Exprimer $\vec{w} = 2\vec{u} - 6\vec{v}$ comme une combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

d) Donner les composantes de $\vec{z}$ de sens opposé à $\vec{r}$ sachant que $\|\vec{z}\| = \frac{1}{5}\|\vec{r}\|$.

Problème 1 : LE BATEAU EN PANNE

Monsieur Arvizet quitte le port et vogue à une vitesse moyenne de 34 km/h pendant 45 minutes dans une direction parallèle au vecteur $\vec{v} = (8\ ,\ 15)$ et dans le même sens. Ensuite, il change de direction en déviant de 39,31° vers la droite. Il continue à une vitesse moyenne de 39 km/h. Après 20 minutes, il tombe en panne. On envoie un mécanicien dans un hélicoptère pour le dépanner.

Quel temps faudra-t-il pour que l'hélicoptère, à partir du port, se rende directement au bateau en panne à une vitesse moyenne de 113,12 km/h ?

Problème 2 : LA CHASSE AU TRÉSOR

Le point de départ d'une chasse au trésor est D(70 , 20).
Sur le parcours menant au trésor T(6073,01 ; 3646,89), Renaud doit trouver la clé permettant d'ouvrir le coffre.

Voici les indications qui lui sont données :

- Renaud ne peut se déplacer comme il veut. Il doit se déplacer selon les vecteurs $\vec{u}$ : 100m ; 30° et $\vec{v}$ : 40m ; 115°.
- Il ne peut changer de direction qu'une seule fois entre le point de départ et le trésor.
- Il trouvera la clé à l'endroit précis où il peut changer de direction.

Déterminer les endroits possibles où Renaud pourrait trouver la clé.