Chapitre 4
Mathématique financière

NOTES DE COURS

Mathématique CST5
Collège Regina Assumpta
2020 – 2021

Nom : ______________________________

Groupe : _____

1. Vocabulaire financier

Voici la signification de quelques termes propres aux mathématiques financières.

- **Intérêts :** Somme d'argent calculée sur un capital.
- **Taux d'intérêt (i) :** Pourcentage utilisé pour calculer de l'intérêt sur un capital.
- **Capital initial (C_0) :** Somme d'argent placée ou empruntée initialement.
- **Capital accumulé (C_n) :** Somme d'argent placée ou empruntée, durant une durée *n*, qui comprend le capital initial auquel s'ajoutent les intérêts.
- **Période d'intérêt :** Intervalle de temps entre deux calculs consécutifs des intérêts.
- **Semestre :** Période de six mois consécutifs. Dans une année, il y a deux semestres.
- **Trimestre :** Période de trois mois consécutifs. Dans une année, il y a quatre trimestres.

2. Intérêt simple

Un capital produit des intérêts simples si les intérêts sont **calculés uniquement sur le capital initial** et ce, durant toute la durée d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt. Cela signifie qu'à la fin de chaque période, les intérêts générés pendant celle-ci ne sont pas ajoutés au capital pour le prochain calcul des intérêts.

Exemple : Jovani a emprunté une somme de 2000 $ à un taux d'intérêt simple annuel de 2 % pour une durée de 3 ans. Quelle somme aura-t-il à rembourser ?

3. Capitalisation à intérêts simples

La capitalisation est une opération qui permet de déterminer la **valeur future** d'un capital. Elle consiste à intégrer des intérêts au capital afin d'obtenir un capital accumulé après un certain temps.

La capitalisation à intérêts simples peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$C_n = C_0(1 + n \times i) \quad \text{où} \quad \begin{cases} C_n \text{ est le capital accumulé;} \\ C_0 \text{ est le capital initial;} \\ n \text{ est la durée (c'est-à-dire le nombre de périodes);} \\ i \text{ est le taux d'intérêt simple.} \\ \textbf{Note}\text{: Au besoin, on transforme la durée } n \text{ de façon à obtenir} \\ \quad\quad \text{la même unité de temps que le taux d'intérêt } i. \end{cases}$$

Exemple 1 : Jovani a emprunté une somme de 2000 $ à un taux d'intérêt simple annuel de 2 % pour une durée de 3 ans. Quelle somme aura-t-il à rembourser ?

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

Exemple 2 : Nidia a placé une somme de 5 400 $ à un taux d'intérêt simple mensuel de 1,1 %. Elle veut déterminer le capital accumulé après 5 ans.

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

Exemple 3 : Alexandru a emprunté une somme de 1 250 $ à un taux d'intérêt simple trimestriel de 1,5 %. Il veut déterminer le capital accumulé après 3 ans et demi.

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

4. Intérêt composé

Les intérêts sont dits **composés** si, à la fin de chaque période, les intérêts générés au cours de celle-ci sont **ajoutés au capital** pour un prochain calcul d'intérêts. Les intérêts générés rapportent alors eux-mêmes des intérêts.

Exemple : Motoharu a emprunté une somme de 2000 $ à un taux d'intérêt composé annuel de 2 % pour une durée de 3 ans. Quelle somme aura-t-il à rembourser ?

5. Capitalisation à intérêts composés

La capitalisation à intérêts composés peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$C_n = C_0(1+i)^n$ où

- C_n est le capital accumulé;
- C_0 est le capital initial;
- n est la durée (c'est-à-dire le nombre de périodes);
- i est le taux d'intérêt composé.

Note: Au besoin, on transforme la durée n de façon à obtenir la même unité de temps que le taux d'intérêt i.

Exemple 1 : Motoharu a emprunté une somme de 2000 $ à un taux d'intérêt composé annuel de 2 % pour une durée de 3 ans. Quelle somme aura-t-il à rembourser ?

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

Exemple 2 : Lara a placé une somme de 5 400 $ à un taux d'intérêt composé mensuel de 1,1 %. Elle veut déterminer le capital accumulé après 5 ans.

$C_n =$ ______ $C_0 =$ ______ $n =$ __________ $i =$ __________

Exemple 3 : Nishan a emprunté une somme de 1 250 $ à un taux d'intérêt composé trimestriel de 1,5 %. Il veut déterminer le capital accumulé après 3 ans et demi.

$C_n =$ ______ $C_0 =$ ______ $n =$ __________ $i =$ __________

6. Actualisation à intérêts composés

L'actualisation est une opération qui permet de déterminer la **valeur initiale** d'un capital connaissant sa valeur accumulée après un certain temps.

Exemple 1 : Leticia a accumulé 6 250 \$ après un placement de 5 ans à un taux d'intérêt composé annuel de 5 %. Quel était le montant initial placé ?

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

Exemple 2 : Janelle a remboursé 503,50 \$ en 6 ans à un taux d'intérêt composé semestriel de 0,5 %. Quel montant avait-elle emprunté ?

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

7. Taux d'intérêt composé

Il est possible de déterminer le taux d'intérêt composé d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt en isolant la variable i dans la formule de capitalisation à intérêts composés.

Exemple 1 : Rachel a prêté 600 $ à Vincent pour qu'il achète un habit pour le bal. Elle lui demande de la rembourser en 12 mois selon un taux d'intérêt composé trimestriel. Elle aimerait obtenir 800 $ lorsque Vincent l'aura remboursé. Quel doit être le taux d'intérêt composé trimestriel ?

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

Exemple 2 : Naïda-Maud a emprunté 4 600 $ à Christophe dans le but de s'acheter sa première voiture. Dans 10 ans, lorsque Naïda-Maud aura terminé de rembourser Christophe, elle aura payé réellement 6 532 $. Quel est le taux d'intérêt composé mensuel ?

$C_n =$ ________ $C_0 =$ ________ $n =$ ________________ $i =$ ________________

8. Durée d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt à intérêts composés

Il est possible de déterminer la durée d'un placement, d'un prêt ou d'un emprunt à intérêts composés en isolant la variable n dans la formule de capitalisation à intérêts composés.

Exemple 1 : Sandra a placé 12 800 $ à taux d'intérêt composé annuel de 3,1 %. Elle veut savoir dans combien d'années elle aura accumulé 17 000 $?

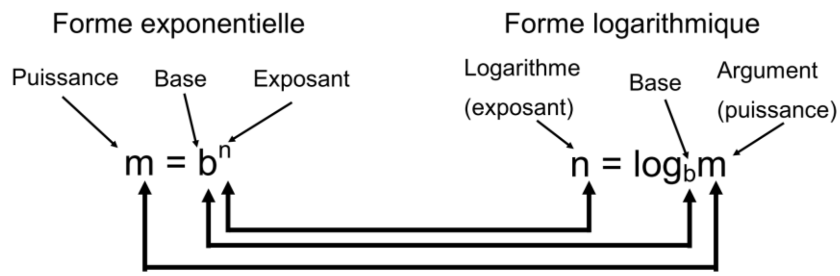
$C_n =$ ______ $C_0 =$ ______ $n =$ __________ $i =$ __________

Exemple 2 : Armani a emprunté 500 $ à un taux d'intérêt composé mensuel de 0,4 %. Elle veut avoir un capital accumulé de 800 $. En combien de temps doit-elle rembourser son emprunt ?

$C_n =$ ______ $C_0 =$ ______ $n =$ __________ $i =$ __________

9. Logarithme

Un logarithme est un exposant. Ainsi, dans l'expression $n = \log_b m$, n correspond à l'exposant qu'il faut attribuer à b pour obtenir m. L'expression « $\log_b m$ » se lit « logarithme de m en base b » où $m > 0$, $b > 0$ et $b \neq 1$.



Exemples : Transforme les égalités exponentielles sous forme logarithmique.

a) $81 = 3^4 \quad \leftrightarrow \quad 4 = \log_3 81$

b) $32 = 2^5 \quad \leftrightarrow$ ______________

c) $10^3 = 1000 \quad \leftrightarrow$ ______________

d) $3^{-2} = \frac{1}{9} \quad \leftrightarrow$ ______________

e) $78\,125 = 5^x \quad \leftrightarrow$ ______________

10. Loi du changement de base

Il est seulement possible de calculer le logarithme de deux bases sur les calculatrices, soit la base 10 et la base e (appelée *base naturelle*).

On peut effectuer un changement de base à l'aide de l'équivalence suivante, ce qui permet de calculer le logarithme d'un nombre dans n'importe quelle base. Généralement on choisira 10 comme valeur de d afin de pouvoir calculer la valeur d'un logarithme à l'aide d'une calculatrice. On utilise alors la touche « LOG » pour la base 10.

$$\log_b m = \frac{\log_d m}{\log_d b}$$

Exemples : Calcule les logarithmes suivants.

a) $\log_4 1024 =$

b) $\log_5 15\,625 =$

c) $\log_9 73559{,}16 =$

d) $\log_{3{,}2} 104{,}86 =$

e) $\log 34 =$

f) $\log_3(27) \times \log_6(345) =$

11. Résolution d'une équation exponentielle ou logarithmique

Il est possible de résoudre une équation exponentielle ou logarithmique en passant d'une expression écrite sous une forme exponentielle à une expression écrite sous la forme logarithmique et vice versa.

Exemples : Résous les équations suivantes.

a) $7(1{,}06)^n = 1400$

b) $4{,}5(3)^{5t} = 100{,}35$

c) $5\log_6(4x) = 20$

d) $8\log_5(250p) = 24$

12. Autres contextes monétaires

Plusieurs contextes monétaires de la vie courante, comme le taux d'inflation, l'augmentation des salaires, la valeur des actions, le prix de certains biens, etc., peuvent être modélisés au moyen de formules exponentielles.

Dans un contexte monétaire exponentiel, la valeur finale peut être calculée à l'aide de la formule suivante :

$$V_n = V_0(1 \pm i)^n \quad \text{où} \quad \begin{cases} V_n \text{ est la valeur finale;} \\ V_0 \text{ est la valeur initiale;} \\ n \text{ est la durée (c'est-à-dire le nombre de périodes);} \\ i \text{ est le taux d'intérêt simple.} \\ \textbf{Note}\text{: Au besoin, on transforme la durée n de façon à obtenir} \\ \qquad \text{la même unité de temps que le taux d'intérêt i.} \end{cases}$$

On choisira l'opération précédent le taux selon le contexte. Si la valeur finale doit être plus petite que la valeur initiale, on optera pour une soustraction. Si la valeur finale doit être plus grande que la valeur initiale, on optera pour une addition.

Exemple 1 : Anna vient d'acheter une nouvelle voiture au prix de 21 500 $ en 2008. Une voiture se déprécie d'environ 18 % par année. Si elle désire la vendre en 2020, quel montant peut-elle espérer obtenir ?

Exemple 2 : Lorsque Madame Blanchette a commencé à conduire, en 2004, le coût moyen de l'essence était de 85,2 ¢/L. En 2016, le coût de l'essence était d'en moyenne 108,8 ¢/L. Quel a été le taux moyen d'inflation annuel entre ces années ?

Exemple 3 : Une personne publie une photo de son chat disparu sur les réseaux sociaux. Après une heure, 43 personnes ont partagé la photo, puis ce nombre augmente de 18 % toutes les heures.

a) Combien de personnes auront partagé la photo 10h après sa parution ?

b) À quel moment 2283 personnes auront partagé la photo ?

Exemple 4 : Au cours d’une expérience, on laisse tomber une balle d’une hauteur de 75 m. Au 15^e bond, la balle monte à une hauteur de 0,36 m. Sachant que la hauteur de chaque rebond diminue chaque fois du même pourcentage par rapport à la hauteur précédente, quel est ce pourcentage de diminution ?

Exemple 5 : Il y a un an, Rodline et Solenn ont tous les deux acheté des actions de compagnies différentes. Rodline a acheté pour 235,68 $ d’actions dont la valeur a augmenté de 4 % par mois depuis l’achat. Quant à Solenn, la valeur de ses actions est maintenant de 252,88 $ et a baissé de 4 % par mois depuis l’achat. Qui de Rodline ou Solenn avait les actions ayant la plus grande valeur 7 mois après leur achat ?

EXERCICES

Les exercices sont tirés des reproductibles Point de Mire CST5 aux éditions CEC.

1. Dans chaque cas, récrivez l'expression sous la forme logarithmique.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ ________________

b) $10^4 = 10\,000$ ________________

c) $343 = \left(\frac{1}{7}\right)^{-3}$ ________________

d) $6^{-2} = \frac{1}{36}$ ________________

e) $8^x = y$ ________________

f) $d^{-6} = f$ ________________

g) $\left(\frac{1}{m}\right)^n = p$ ________________

h) $\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{j}} = \frac{1}{k}$ ________________

2. Dans chaque cas, récrivez l'expression sous la forme exponentielle.

a) $\log_8 4096 = 4$ ________________

b) $\log_4 16384 = 7$ ________________

c) $\log_9 \frac{1}{59049} = -5$ ________________

d) $\log \frac{1}{1000} = -3$ ________________

e) $\log_7 m = \frac{1}{n}$ ________________

f) $\log_{\frac{1}{a}} p = 3$ ________________

g) $s = \log_u t$ ________________

h) $\frac{1}{u} = \log_{\frac{1}{v}} \frac{1}{w}$ ________________

3. Sans utiliser de calculatrice, déterminez la valeur de chacun des logarithmes.

a) $\log_3 81 =$ ____________

b) $\log_8 8 =$ ____________

c) $\log 100 =$ ____________

d) $\log_4 \frac{1}{16} =$ ____________

e) $\log_{\frac{2}{7}} 1 =$ ____________

f) $\log_7 \frac{1}{49} =$ ____________

g) $\log_{25} 5 =$ ____________

h) $\log_{\frac{1}{6}} 6^3 =$ ____________

4. Sans utiliser de calculatrice, déterminez la valeur de ces expressions.

a) $3\log_8 1 + 2\log_2 8 - 4\log_9 9 + \log 100 =$

b) $4\log_{27} 27 + \log 10^{-2} + \log \frac{1}{10} - \log_5 25 =$

c) $5\log_c 1 + \log_d d^4 - \log_m m + \log_{7^2} 7^6 =$

d) $-4\log_p \frac{1}{p} + 3\log_{\frac{1}{q}} q + 2\log_{r^2} r - \log_s \left(\frac{1}{s}\right)^2 =$

5. Résolvez chacune des équations exponentielles.

a) $3^x = 10$ **b)** $5(4)^x = 60$ **c)** $80(5)^{3x} = 44$

6. Résolvez chacune des équations logarithmiques.

a) $\log_8 x = 5$ **b)** $2\log_4 x = 6$ **c)** $15\log_5(150x) = 30$

Réponses des exercices

1. a) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8} = 3$

   b) $\log 10000 = 4$

   c) $\log_{\frac{1}{7}} 343 = -3$

   d) $\log_6 \frac{1}{36} = -2$

   e) $\log_8 y = x$

   f) $\log_d f = -6$

   g) $\log_{1/m} p = n$

   h) $\log_{1/i} \frac{1}{k} = \frac{1}{j}$

2. a) $8^4 = 4096$

   b) $4^7 = 16\,384$

   c) $9^{-5} = \frac{1}{59049}$

   d) $10^{-3} = \frac{1}{1000}$

   e) $7^{\frac{1}{n}} = m$

   f) $\left(\frac{1}{a}\right)^3 = p$

   g) $u^s = t$

   h) $\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{u}} = \frac{1}{w}$

3. a) 4 b) 1 c) 2 d) -2 e) 0 f) -2 g) $\frac{1}{2}$ h) -3

4. a) 4 b) -1 c) 6 d) 4

5. a) $x \approx 2{,}1$ b) $x \approx 1{,}79$ c) $x \approx -0{,}12$

6. a) $x = 32\,768$ b) $x = 64$ c) $x = \frac{1}{6}$