

LE FOND DE SCÈNE – *Solutionnaire*

1) Équation du demi-cercle

$$x^2 + y^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 = 100$$

2) Équation de la parabole

Puisque le sommet et le foyer sont sur une même droite verticale, l'équation sera de la forme : $x^2 = 4cy$

Puisque la distance entre le sommet et le foyer est $9/8$, l'équation de la parabole

est : $x^2 = 4 \cdot \frac{9}{8}y$ d'où $x^2 = \frac{9}{2}y$ (note : y doit être positif dans cette équation)

3) Intersection (par substitution)

$$x^2 + y^2 = 100 \Leftrightarrow \frac{9y}{2} + y^2 = 100$$

$$y^2 + \frac{9y}{2} - 100 = 0$$

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4,5 \pm \sqrt{4,5^2 - 4(1)(-100)}}{2} = \frac{-4,5 \pm \sqrt{420,25}}{2} = \frac{-4,5 \pm 20,5}{2}$$

$$y_1 = \frac{-4,5 + 20,5}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$y_2 = \frac{-4,5 - 20,5}{2} = \frac{-25}{2} = -12,5 \text{ à rejeter (voir note précédente)}$$

$$x^2 = \left(\frac{9}{2}\right)8 = 36$$

Donc $x_1 = 6$ et $x_2 = -6$

Les deux points d'intersection E et F sont $(-6, 8)$ et $(6, 8)$.

4) Équation de l'hyperbole

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$5^2 = a^2 + 3^2$$

$$a^2 = 25 - 9 = 16$$

$$a = 4$$

Comme les foyers sont sur une même droite verticale, l'équation de l'hyperbole à la forme :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \text{donc} \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$$

5) Équation de la droite

$$y = ax + b$$

$$y = x + 0,75$$

6) Intersection (par substitution)

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(x + 0,75)^2}{9} = -1$$

$$\frac{x^2}{16} - \frac{(x^2 + 1,5x + 0,5625)}{9} = -1$$

$$\frac{9x^2}{144} - \frac{16(x^2 + 1,5x + 0,5625)}{144} = \frac{-144}{144}$$

$$9x^2 - 16(x^2 + 1,5x + 0,5625) = -144$$

$$9x^2 - 16x^2 - 24x - 9 = -144$$

$$-7x^2 - 24x + 135 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-24) \pm \sqrt{(-24)^2 - 4(-7)(135)}}{2(-7)} = \frac{24 \pm \sqrt{576 + 3780}}{-14} = \frac{24 \pm 66}{-14}$$

$$x_1 = \frac{24 - 66}{-14} = \frac{-42}{-14} = 3$$

$$x_2 = \frac{-45}{7} \text{ à rejeter car cette abscisse engendre une ordonnée négative, donc en dehors de la scène.}$$

Pour $x = 3$ dans l'équation de la droite, on obtient $y = 3,75$.

Le point d'intersection G de la droite et de l'hyperbole est (3 ; 3,75).

7) Base du triangle

Le triangle EFG a un côté horizontal (EF) et sa longueur est 12 m.

8) Hauteur du triangle

La hauteur est verticale car elle est perpendiculaire à la base EF.

$$h = 8 - 3,75 = 4,25 \text{ m}$$

9) Aire du triangle

$$A = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{(12)(4,25)}{2} = 25,5 \text{ m}^2$$

Le triangle sera donc suffisamment grand pour accueillir l'autre élément de décor.

