Collège Regina Assumpta

Mathématique SN5

Chapitre 1 – Optimisation linéaire

Notes de cours et exercices

Nom : ______________________________

Groupe : _____

2023-2024

NOTES DE COURS

RÉVISION DE LA DROITE

En mathématique, vous avez bien étudié la droite. Vous savez qu'elle se présente principalement sous deux formes :

1) forme fonctionnelle : $y = ax + b$ (la plus couramment utilisée)
2) forme générale : $Ax + By + C = 0$

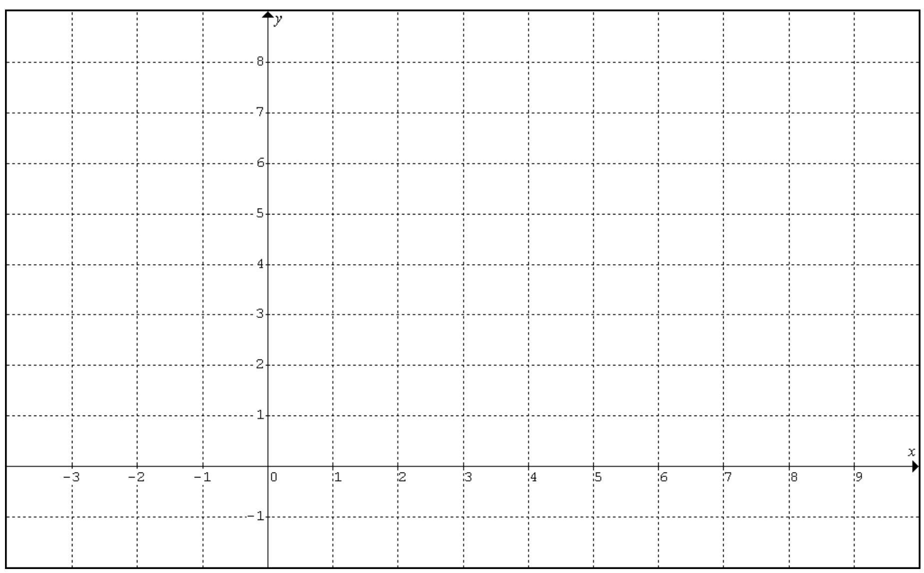
Tracer une droite à partir de la forme fonctionnelle

En observant le modèle, on note que l'ordonnée à l'origine nous est donnée. On a donc le couple ______________ appartenant à la droite.

Le coefficient de x est ce qu'on appelle le ____.

Cette donnée mesure l'*inclinaison* de la droite. On l'appelle aussi la ________________.

Exercice Tracer le graphique de $y = -\frac{3}{7}x + 4$.

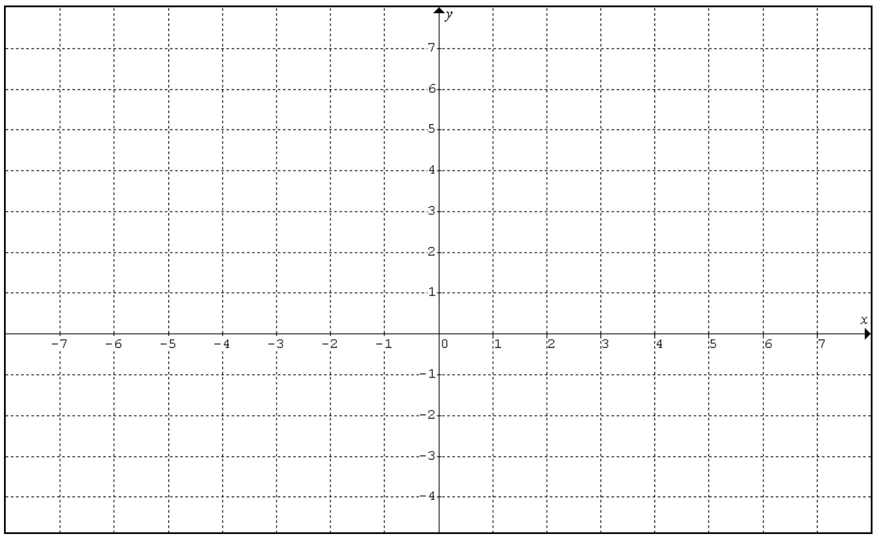


Si on souhaite trouver un autre couple appartenant à une droite, il serait futé de substituer x par un ____.

Exercice

Une droite passant par le point (1 , 2) a une pente (taux de variation) de $-\frac{2}{3}$.

Tracer le graphique en trouvant un couple de part et d'autre (de chaque côté) du point donné.



Ainsi, on peut avancer de 3 en abscisses et descendre de 2 en ordonnées <u>ou</u> reculer de 3 en abscisses et monter de 2 en ordonnées, car arithmétiquement :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+3} \text{ ou } \frac{+2}{-3}$$

<u>Tracer une droite à partir d'une forme **non** fonctionnelle</u>

On peut éviter d'isoler *y* en calculant les **coordonnées à l'origine**.

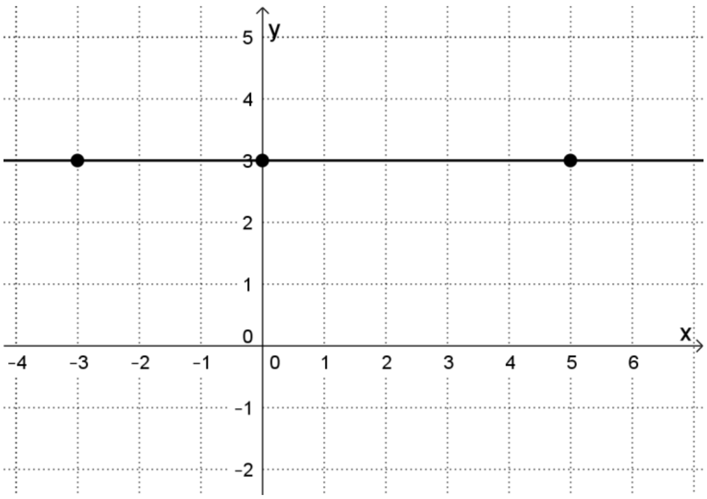
Soit la droite d'équation $2x - 3y = 12$

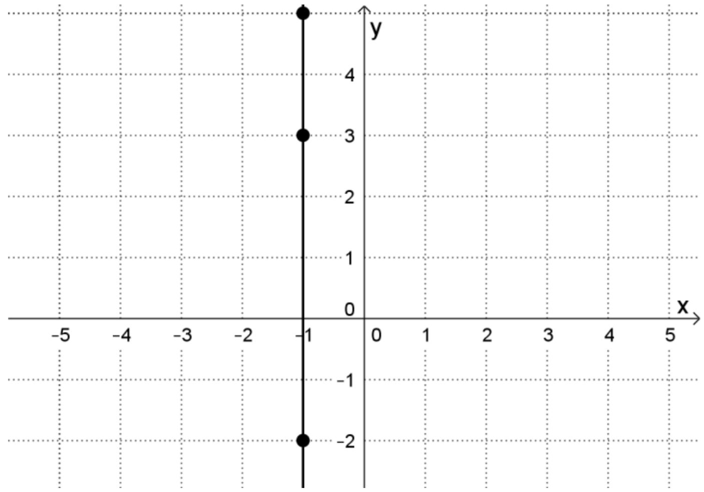
pour $x = 0$, on obtient ________________________________

pour $y = 0$, on obtient ________________________________

Croquis :

Formes x = constante et y = constante





Toute droite d'équation $x = a$ (où $a \in \mathbb{R}$) est une droite ___________________________.

Toute droite d'équation $y = b$ (où $b \in \mathbb{R}$) est une droite ___________________________.

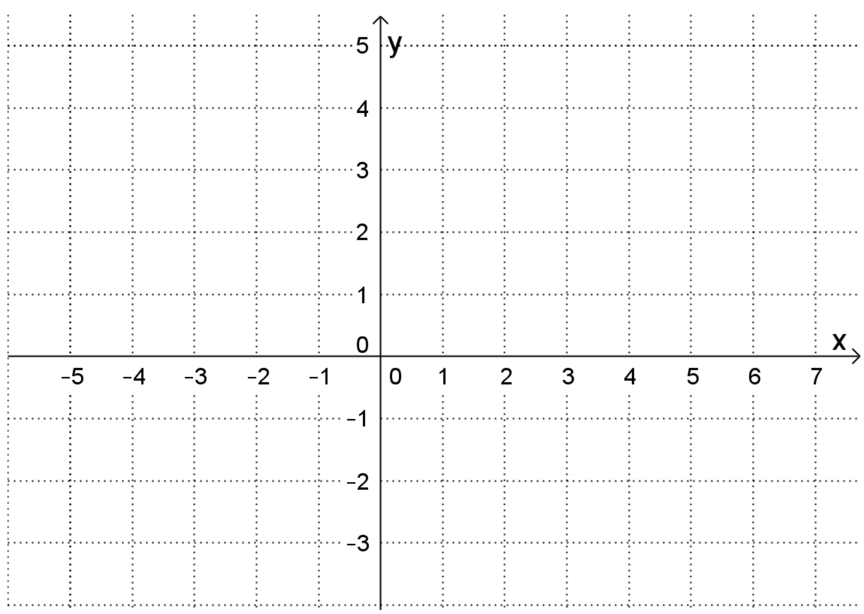
L'équation d'une droite confondue à l'axe des ordonnées est : __________

L'équation d'une droite confondue à de l'axe des abscisses est : __________

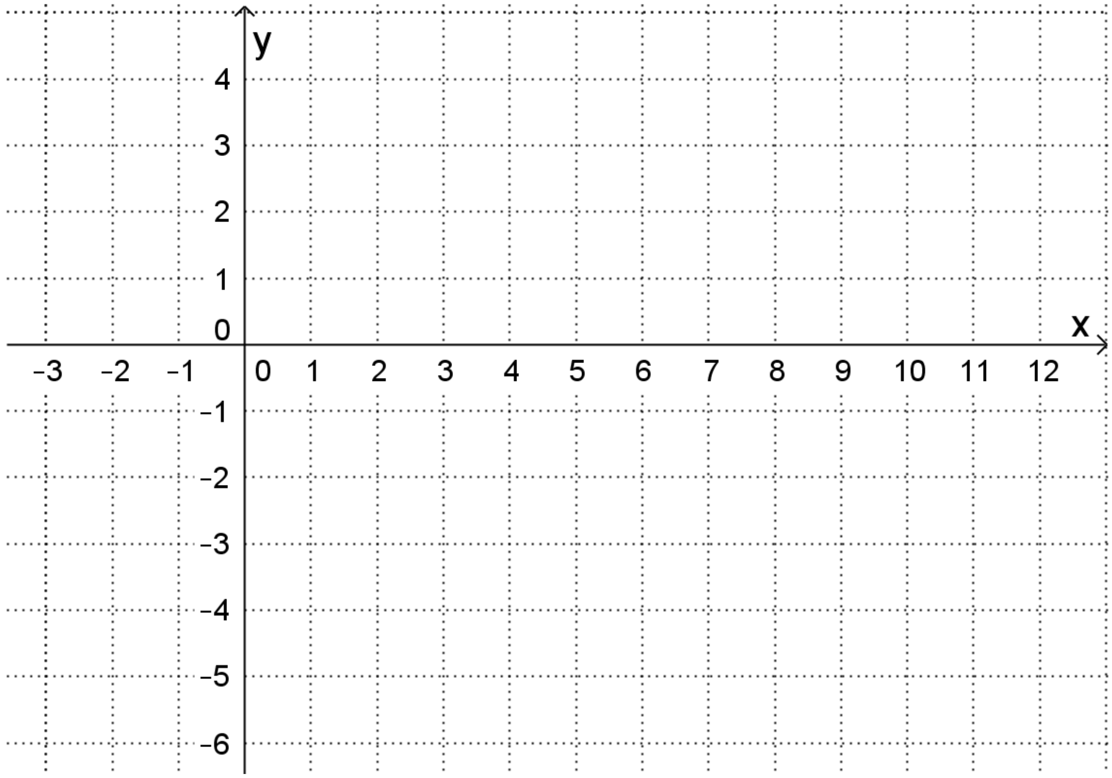
Exercices

Représenter les droites suivantes dans le plan cartésien.

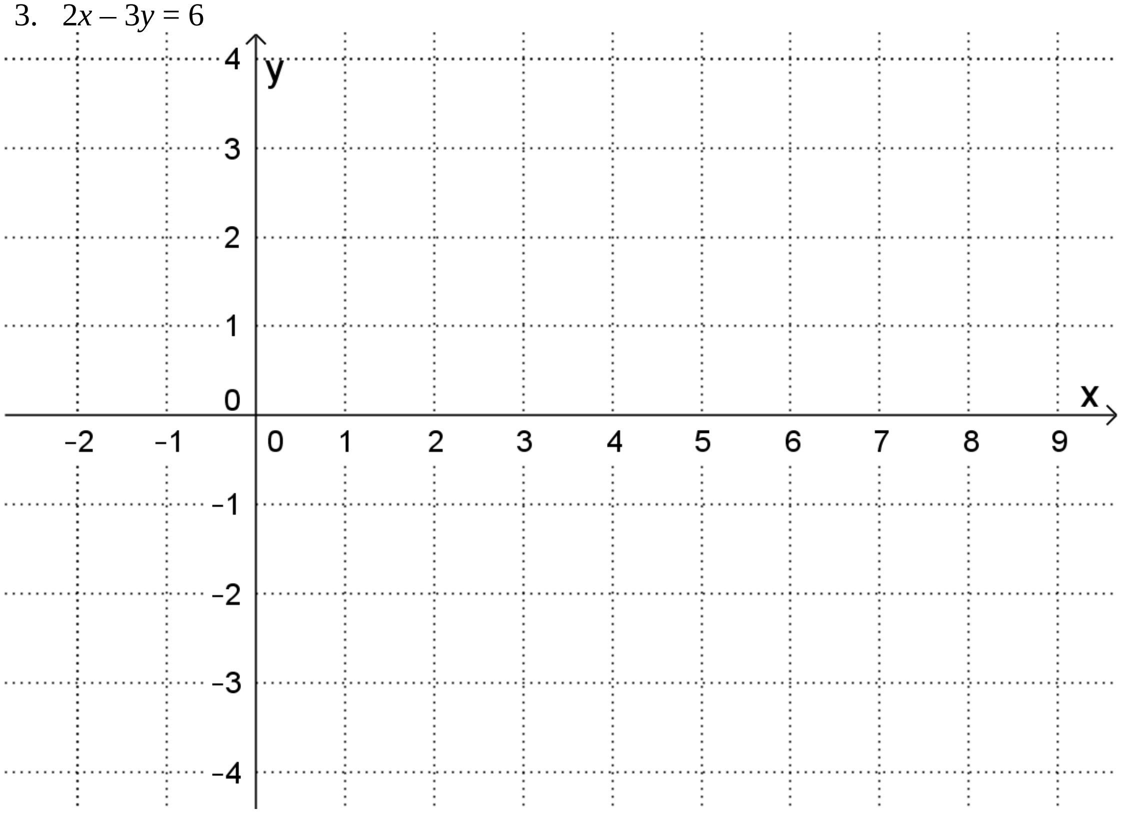
1. $y = -3x + 1$



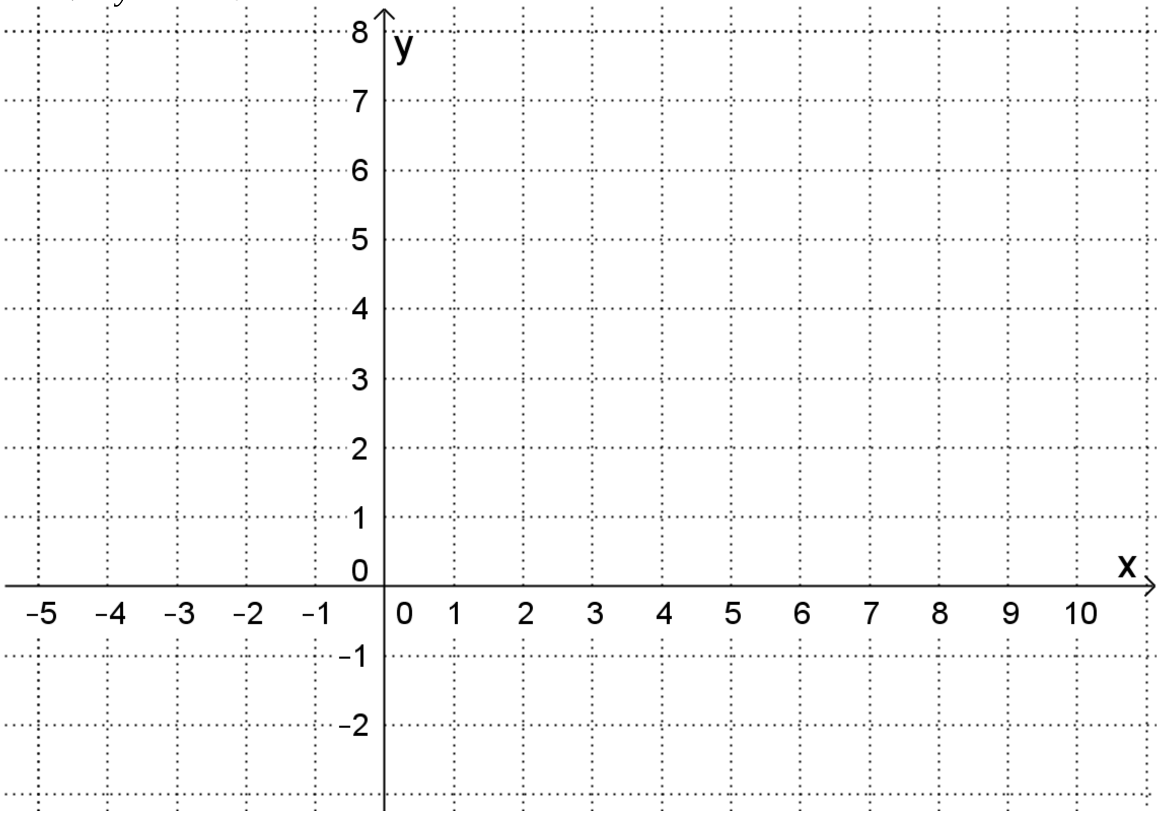
2. $y = -\frac{2}{5}x - 2$



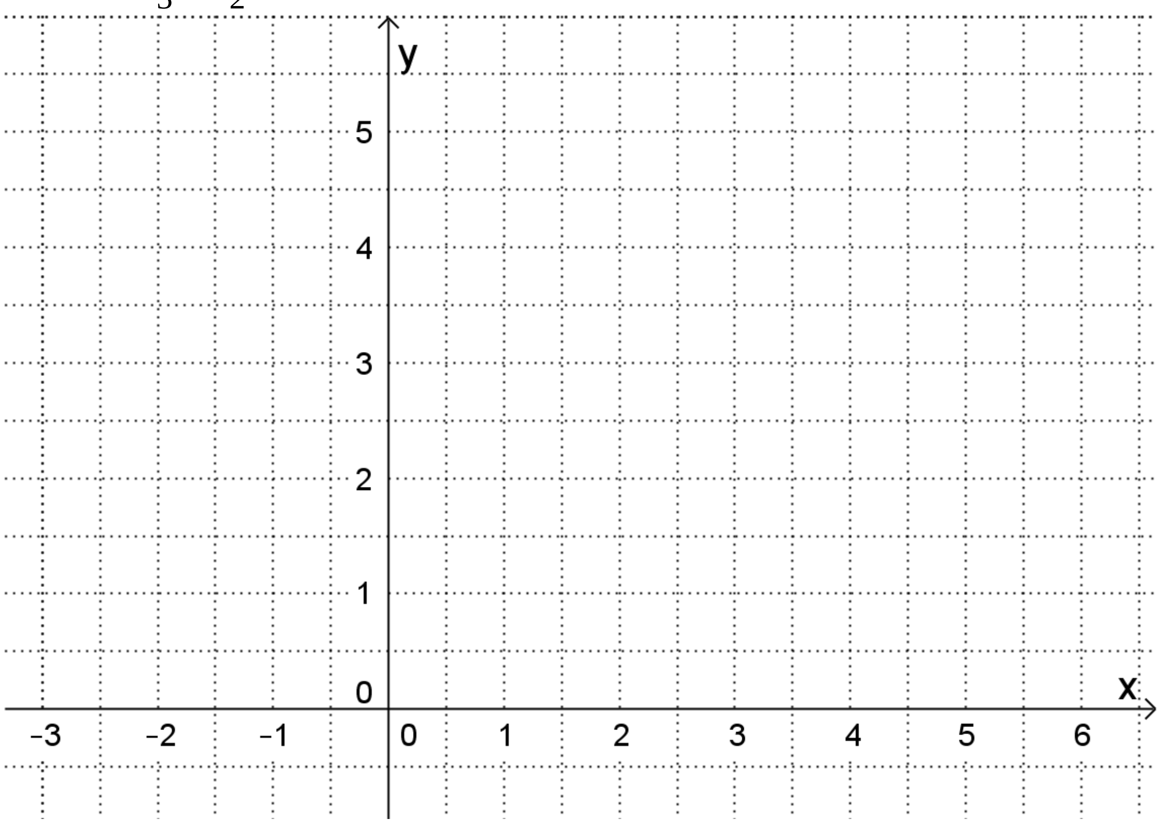
3. $2x - 3y = 6$



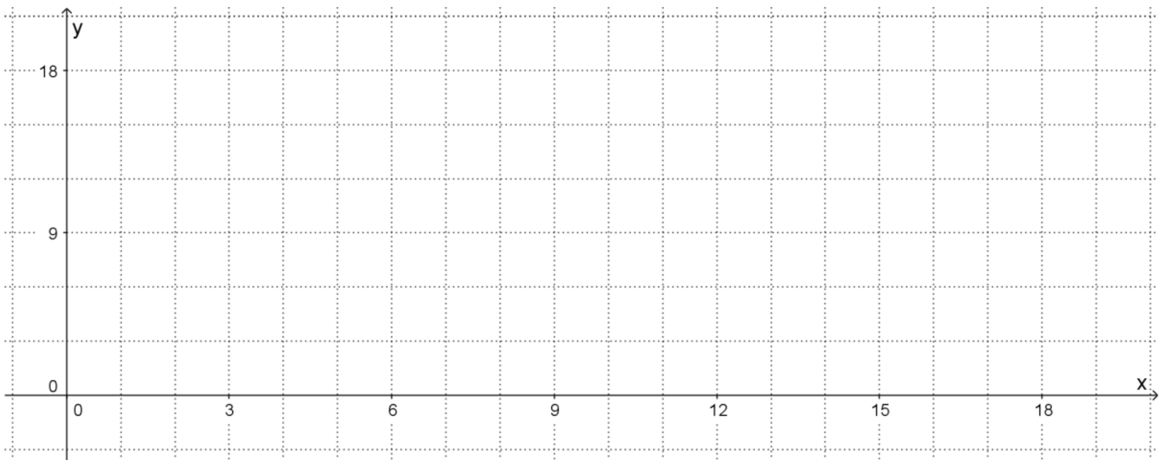
4. $4y + x = 20$



5. $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{3}{2}$



<u>**DÉFI**</u> **: Seulement en utilisant la définition du taux de variation** (raisonnement de l'escalier, **sans substituer *x*** par une valeur numérique), représenter la droite $y = -\frac{2}{5}x + 12$ dans le plan cartésien ci-dessous.



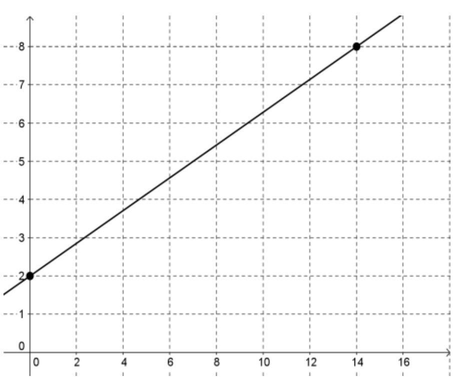
Note importante au sujet du taux de variation…

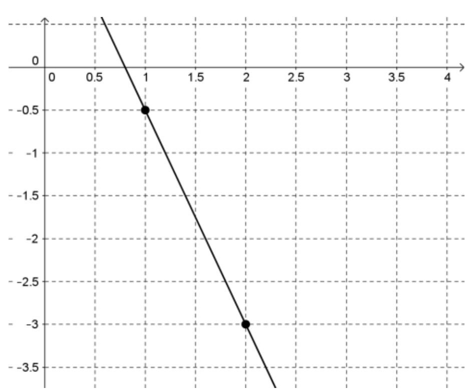
On peut se permettre de compter des carreaux lorsque ____________________________

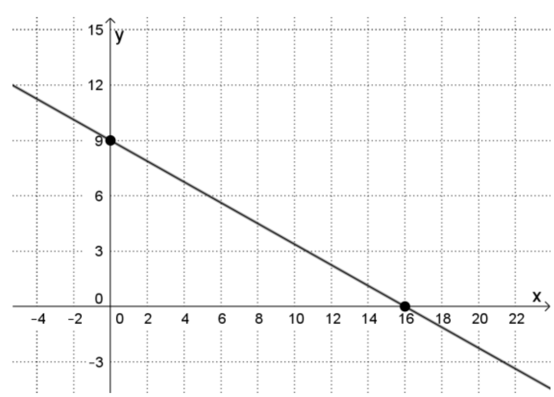
et le quadrillage ______________________________ sur les deux axes.

Sinon, il faut considérer _______________________ !

<u>Exercice :</u> Donner la pente de chacune des droites suivantes.







Pente =

Pente =

Pente =

TECHNIQUES ALGÉBRIQUES PRÉALABLES…

Exercice 1 : Simplifie chacune des expressions algébriques suivantes à sa plus simple expression. *Tous les dénominateurs sont non nuls.*

a) $\dfrac{\frac{a}{t}}{\frac{t}{a}}$

b) $\dfrac{\frac{m}{r}\cdot mr^2}{r}$

c) $\dfrac{n^2-3n}{n}$

d) $8\cdot c^2\cdot 5\cdot\dfrac{1}{4c}$

e) $\dfrac{x}{\frac{4}{7}}$

f) $\dfrac{\frac{x}{4}}{7}$

g) $\dfrac{1}{\frac{2}{3}}$

h) $\dfrac{n}{n+1}$

Utilisez la page suivante pour effectuer vos calculs…

i) $\sqrt{f^2+1}$ j) $\dfrac{\frac{5t}{4n}\cdot\frac{8n}{a}}{t\cdot a}$ k) $\dfrac{16n^2-25}{5-4n}$ l) $\dfrac{n^2-n}{n-1}$

Exercice 2 :
Dire si la valeur de l'expression est : 0, *indéterminée* ou *impossible*.

a) $\dfrac{1}{0}$ b) $\dfrac{0}{1}$ c) $\dfrac{0}{0}$

Exercice 3 : Écrire les expressions suivantes à l'aide d'une seule fraction (réduite).

a) $\dfrac{2}{b}+\dfrac{25}{b}$ b) $\dfrac{2}{7}+\dfrac{5}{3}$ c) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+1}$ d) $\dfrac{1}{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}}$ e) $1+\dfrac{3}{a+1}$

Exercice 4 : Effectue les opérations et simplifie le résultat s'il y a lieu.

a) $\dfrac{1}{a}(a+3)^2$ b) $(2b)\cdot(5b)\cdot(4c)$

Exercice 5 :

Écrire P **en termes de *a* seulement** sachant que P = $x - 5y$; $x = 7a - 1$ et $y = \dfrac{1}{2}x$

Calculs…

Faire vos calculs à la page suivante.

Exercice 6 : Simplifier chacune des expressions suivantes.

a) $\sqrt{(x-5)(x-5)}$ b) $\dfrac{a^3x+3ax}{a^2bx+3bx}$ c) $\dfrac{3a^2-75}{6a-30}$ d) $5-\dfrac{21p^2-p}{p}$ e) $\dfrac{\frac{1}{2}a\cdot\frac{a}{3}}{\frac{1}{6}}$ f) $\dfrac{a^2-7}{a+\sqrt{7}}$

Exercice 7 : Effectuer chacune des opérations.

a) $\dfrac{d}{ce}+\dfrac{e}{cd}+1$ b) $(3x^2-x-10)\div(x-2)$

Exercice 8 : **Sans calculatrice**, mettre en évidence **le coefficient** de *x* dans chaque cas :

a) $5x-\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{2}x-2$ c) $4-3x$ d) $\dfrac{5x}{3}+1$

e) $1{,}5x+1$ f) $\dfrac{x+1}{2}$ g) $-x+1$ h) $\dfrac{2x+12}{6}$

Exercice 9 : Résoudre les équations suivantes dans IR:

a) $\dfrac{11\text{m}}{2}+\dfrac{3}{2}=\dfrac{13\text{m}}{4}-\dfrac{\text{m}}{2}-\dfrac{5}{2}$ b) $3\text{x}+\dfrac{\text{x}}{2}+\dfrac{\text{x}}{5}=37$

c) $\dfrac{12-5\text{x}}{3}-\dfrac{5(2x-1)}{6}-\dfrac{7}{9}=\dfrac{3(2x+5)}{18}$ d) $\dfrac{2\text{b}}{3}+1=b+\dfrac{2}{3}$

Faites vos calculs ici.

Encore une fois, faites vos calculs à la page suivante.

Exercice 10 : Résoudre les équations suivantes dans IR:

a) $7a - \frac{2a}{7} \div 2 = 9a - 3$

b) $\frac{\frac{7x}{2}}{\frac{14x}{4}} + \frac{x}{5} = 0$

c) $\frac{5t}{3} - \frac{t}{2} = 4 + \frac{t}{6} + 2$

d) $\frac{2b}{3} + 1 = b + \frac{2}{3}$

e) $\frac{2c}{5} + \frac{1}{5} = 1 - \frac{c}{5} + \frac{2}{5}$

f) $\frac{1}{2}v + 7 = \frac{2}{9}v + \frac{1}{6}v - 4$

g) $\frac{4r - 18}{9} - 3 = \frac{1}{3} + \frac{5r - 11}{6}$

h) $\frac{5p - 2}{2} - \frac{p + 1}{3} = \frac{3p + 5}{6}$

i) $\frac{x + 8}{3} - \frac{x - 8}{5} = 3 + \frac{3x - 13}{15}$

j) $\frac{x}{3} + \frac{3(x - 1)}{4} = 2 - \frac{x - 3}{12}$

k) $\frac{3}{4}(x - 2) + \frac{2}{3}(x - 1) = 1 - \frac{3}{5}(2x + 1)$

l) $\frac{3}{4}\left(\frac{x + 1}{3} - \frac{3x + 2}{21}\right) = \frac{2}{3}$

DÉFI m) $\sqrt{10}\, t + \sqrt{5}\, t = 15$ (valeur exacte, bien sûr !)

Calculs…

<u>LES SYSTÈMES DE DEUX ÉQUATIONS À DEUX INCONNUES</u>

<u>Résolution par comparaison</u> : lorsque la même variable est isolée dans les 2 équations.
Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} y = a_1 x + b_1 \\ y = a_2 x + b_2 \end{cases}$$

Il suffit de poser $y = y$ pour résoudre l'équation suivante à une inconnue.

$$\mathbf{a_1}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{b_1} = \mathbf{a_2}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{b_2}$$

Une fois la valeur de l'inconnue déterminée, on peut substituer sa valeur dans une des équations initiales pour obtenir la valeur de la seconde variable.

Le couple-solution d'un système d'équations se note sous la forme (*x* , *y*)

Exercice : Déterminer le couple-solution du système d'équations suivant dans IR et représenter ce système à l'aide d'un croquis.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{x}{3} + 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

Notes :

1. Le système d'équations n'admet **aucune** solution lorsque : $a_1 = a_2$ **et** $b_1 \neq b_2$, car dans ce cas, les droites sont ___________________________________.

2. Le système d'équations admet **une infinité** de solutions lorsque : $a_1 = a_2$ **et** $b_1 = b_2$, car dans ce cas, les droites sont _____________________________.

<u>Résolution par substitution</u>

Lorsqu'une variable est déjà isolée dans l'une ou l'autre des équations.

Soit le système d'équations :

$$\begin{cases} y = ax + b \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$$

La valeur algébrique de la variable *y* donnée par la première équation nous permet d'écrire :

$$Ax + B(ax + b) + C = 0 \qquad \text{(équation à une inconnue; } x\text{)}$$

Exercice : Déterminer le couple-solution du système d'équations suivant dans IR.

$$\begin{cases} x = -y + 3 \\ -x + 3y = 5 \end{cases}$$

<u>Résolution par élimination</u> (ou réduction)

Cette méthode consiste à éliminer une des deux inconnues par addition (ou par soustraction). Elle est surtout employée lorsqu'aucune des deux inconnues n'est isolée dans l'une ou l'autre des équations données.

<u>Exercice</u>

Résoudre les systèmes d'équations suivants par la méthode de réduction.

a) $\begin{cases} 2x + 5y = 33 \\ -2x + y = -3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 7y = 9 \\ x - y = -9 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ -2x + y = 6 \end{cases}$ d) $\begin{cases} -2x - 6y = -9 \\ 3x + 5y = 7{,}5 \end{cases}$

<u>Exercices :</u> Résous les systèmes d'équations suivants dans IR.
Utiliser la page suivante pour faire vos calculs.

a) $\begin{cases} y = -5x + 2 \\ y = x - 22 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = -x \\ y = x + 19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y = 2x + 26 \\ y = -3x + 1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 2y + 5 \\ x = -y + 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} y = -2x + 1 \\ x = 16 \end{cases}$ f) $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ x + 2 = y \end{cases}$ g) $\begin{cases} 2x = 2y - 16 \\ 2x = 4y + 10 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x = -y + 20 \\ 3x - 2y = 5 \end{cases}$

i) $\begin{cases} y = -x + 4 \\ x = -5y + 4 \end{cases}$ j) $\begin{cases} x = \frac{1}{7}y - 1 \\ \frac{1}{2}y = 7x - 1 \end{cases}$ k) $\begin{cases} y = -2x - 5 \\ x + 2y = 20 \end{cases}$ l) $\begin{cases} -x + y = 12 \\ 4x + 4y = 24 \end{cases}$

m) $\begin{cases} 2x + y = -5 \\ x = -y + 14 \end{cases}$ n) $\begin{cases} x - 2 = 2y \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y = 12 \end{cases}$ o) $\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x + 5 \\ \frac{1}{4}x = y + 1 \end{cases}$ p) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 6 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}y = 9 \end{cases}$

q) $\begin{cases} 3x + y = 12 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}$ r) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 2y = 1 \\ -x - y = -1 \end{cases}$ s) $\begin{cases} 3(y - 2) = 4x \\ 2(x - 4) = y - 1 \end{cases}$ t) $\begin{cases} -2x + 4y = 24 \\ -5x + 2y = 12 \end{cases}$

Calculs…

LES INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À UNE INCONNUE

$\leq$: ____

$\geq$: ____

$<$: ____

$>$: ____

Il existe des propriétés algébriques pour les inéquations semblables à celles connues pour les équations. Par contre, il faut se méfier de certaines subtilités…

Par exemple, à partir de l'inégalité suivante : $4 < 8$ …

1. Additionnons ou soustrayons une même quantité aux deux membres de l'inégalité :

2. Multiplions ou divisons par une même <u>quantité positive</u> les deux membres de l'inégalité :

3. Multiplions ou divisons par une même <u>quantité négative</u> les deux membres de l'inégalité :

Note :
Il n'y a qu'en ______________________ et en ____________________ par une même quantité négative que le symbole d'inégalité doit être inversé.

Résoudre l'inéquation suivante et représenter son ensemble-solution dans chacun des référentiels demandés. *Un rappel au sujet des référentiels est disponible à la fin de ce cahier…*

$$5(t - 2) + 1 < 8(t + 1) - 9$$

Ensemble de référence	**Extension**	**Compréhension**	**Graphiquement**	**Intervalles**
Ensemble-solution dans IN				
Ensemble-solution dans IR				

Exercice 1 : Résous et exprime l'ensemble-solution graphiquement et sous la forme demandée.

a) $\frac{2y}{3} - 5 \leq y + \frac{1}{2}$

Intervalle : _______________

Graphiquement :

IR

b) $\frac{2}{3}(x + 1) - \frac{3x - 1}{2} \geq \frac{5}{6}(x + 4) - 2$

Intervalle : _______________

Graphiquement :

IR

Cas particuliers…

a) $2(x+1) \geq 2x-4$

b) $3a+21 \leq \frac{1}{3}(9a)$

Exercice 2 : Traduire les affirmations suivantes par une inéquation et détermine la (les) solution(s). ***Prends soin d'identifier ton inconnue !!!***

a) Trouve les quatre plus grands entiers impairs consécutifs dont la somme est plus petite que 105.

b) La longueur d'un rectangle est égale à 2 fois sa largeur. Si le périmètre n'excède pas 1 200 cm, quelle est la plus grande largeur possible?

c) Trouve les trois plus grands entiers pairs consécutifs dont la somme est plus petite que 61.

d) Trouve le plus petit entier tel que le produit de cet entier et de $-\frac{3}{7}$ soit inférieur à 22.

e) Trouve le plus petit entier positif tel qu'en retranchant 5 au résultat obtenu en multipliant ce nombre par 4, on obtienne un résultat supérieur à 8.

<u>Exercice 3</u> : Traduire les situations suivantes par une inéquation à une ou deux variables.

a) Le nombre *p* de passagers sur le vol 524 n'est pas supérieur à 250 :

b) La somme de deux nombre *x* et *y* ne dépasse pas 5 :

c) Le double d'un nombre *x* diminué d'un nombre *y* est supérieur à -3 :

d) Un nombre *x* diminué de 25% et augmenté du quadruple d'un nombre *y* est au moins égal à 15 :

e) Un nombre *t* a au moins 9 unités de plus qu'un nombre *u* :

f) *x* adultes et *y* enfants ont assisté à une représentation dans une salle de spectacle ne pouvant contenir que 250 personnes :

g) Les frais de participation à un camp d'hiver sont de 200$ pour un membre de l'organisation et 300$ pour tout autre participant. On pense recueillir un minimum de 10 000$ grâce aux *x* membres et au *y* autres participants :

h) Laura possède *x* cartes de hockey et David en possède *y*. Laura possède au moins 4 fois plus de cartes que David :

i) La valeur maximale d'un portefeuille constitué de *x* actions ordinaires à 3$ chacune et *y* actions privilégiées à 9$ chacune est de 1800$:

j) Un CD audio coûte 22$ et un album (au format mp3) est disponible sur internet au coût de 5$. On peut acheter *x* CD audio et *y* albums au format mp3 en dépensant au plus 300$:

k) Un camion ne peut transporter plus de 9000kg. Il transporte *x* sacs de 100kg de farine et *y* sacs de 70kg de sucre :

l) Nathalie travaille *x* heures par jour et Patricia en travaille *y*. Nathalie travaille au moins deux fois plus d'heures par jour que Patricia :

m) Xaviera possède *x* robes et Yolanda en possède *y*. Yolanda possède au plus trois fois plus de robes que Xaviera :

n) La production quotidienne de la compagnie Bat-Hock-Ski est de *x* bâtons de hockey et de *y* paires de skis. Une machine produit un bâton de hockey en 2 minutes et un ski en 3 minutes. La machine ne peut fonctionner plus de 8 heures par jour :

o) *x* représente le nombre d'ordinateurs vendus et *y*, le nombre d'imprimantes vendues dans un magasin. On vend au moins deux fois plus d'imprimantes que d'ordinateurs :

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE D'INÉQUATIONS À DEUX VARIABLES

Imaginons la situation suivante :

Une forêt est dite *dense* lorsqu'elle comporte au moins 300 arbres par hectare. Dans une forêt du Nord du Québec, on retrouve essentiellement 2 types d'arbres : des feuillus et des conifères.

Soit x le nombre de feuillus et y, le nombre de conifères que l'on dénombre par hectare.

Inéquation associée à cette situation : ____

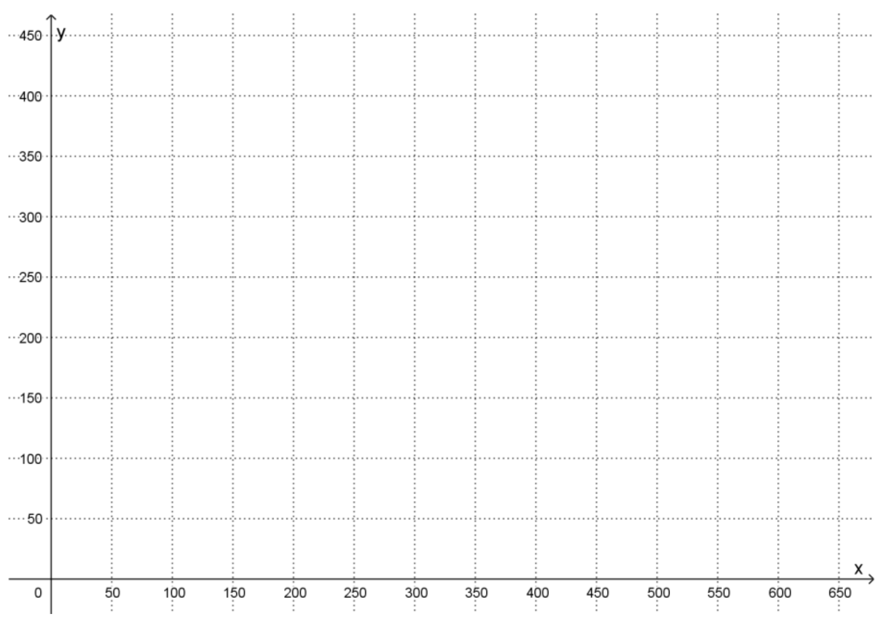
Une forêt est-elle dense si elle comporte :

a) 50 feuillus et 200 conifères par hectare ?_________________

b) 100 feuillus et 200 conifères par hectare ?________________

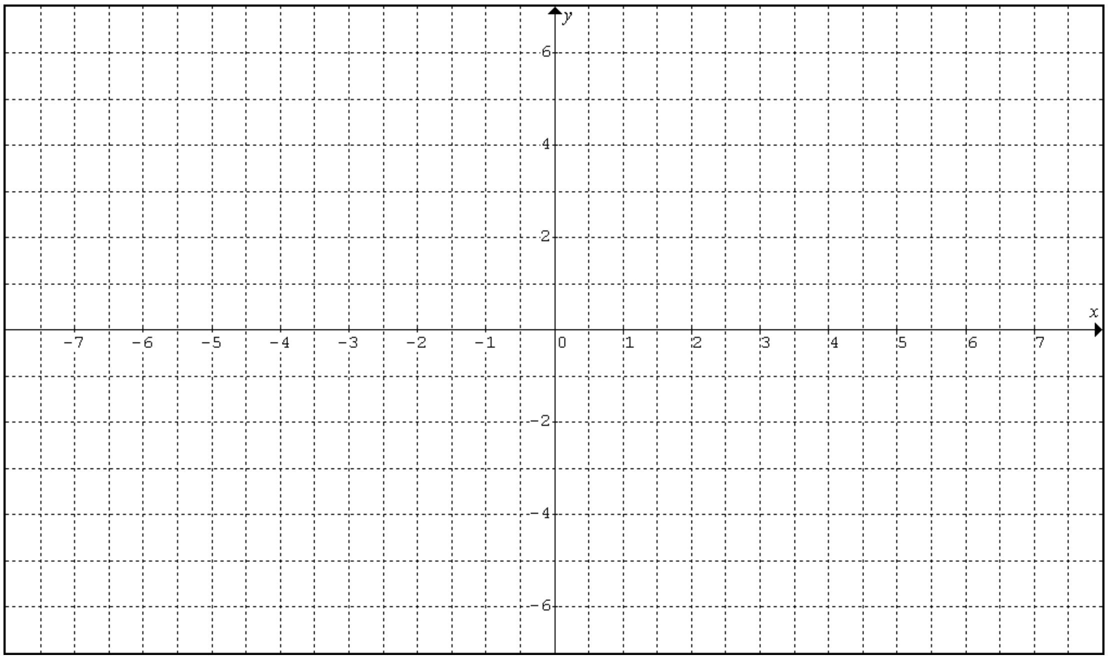
c) 400 conifères et aucun feuillu par hectare ?_______________

Représenter dans le plan suivant l'ensemble des couples (x , y) qui satisfont la condition de densité des forêts.

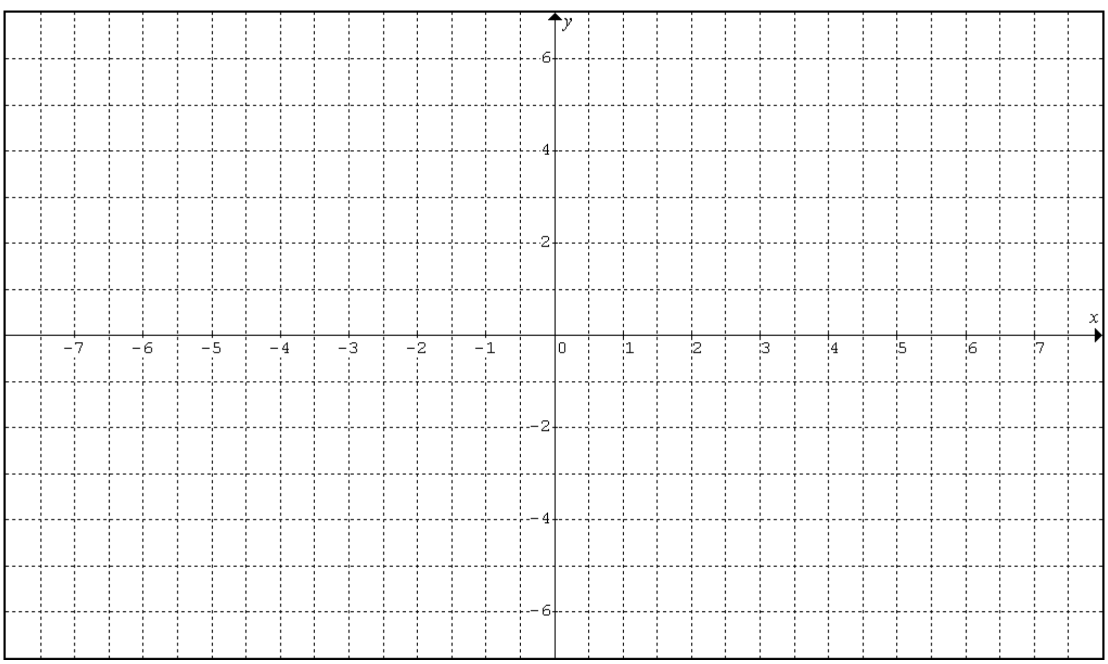


Exercices : Représenter graphiquement les inéquations suivantes dans le plan cartésien.

a) $y \geq 2x + 1$



b) $y \leq -\frac{1}{6}x - 2$



Pour représenter une inéquation du premier degré à deux variables :

1. Tracer la ____ en remplaçant temporairement le symbole d'inégalité par un symbole _______________________.

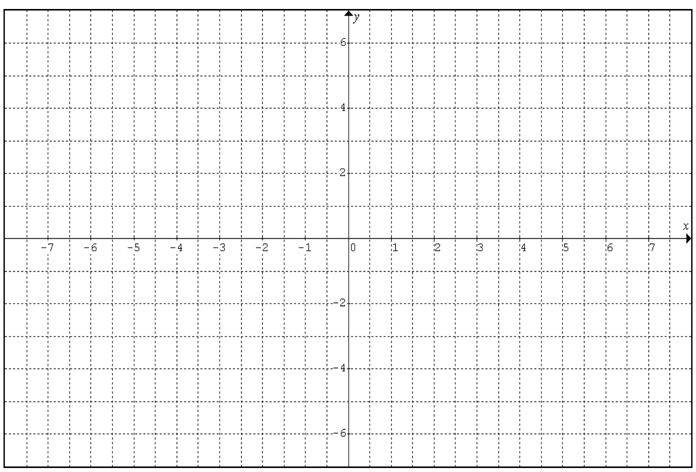
2. Hachurer ou colorier la __________________________________ après avoir vérifié l'inéquation avec le point _________ (ou autre).

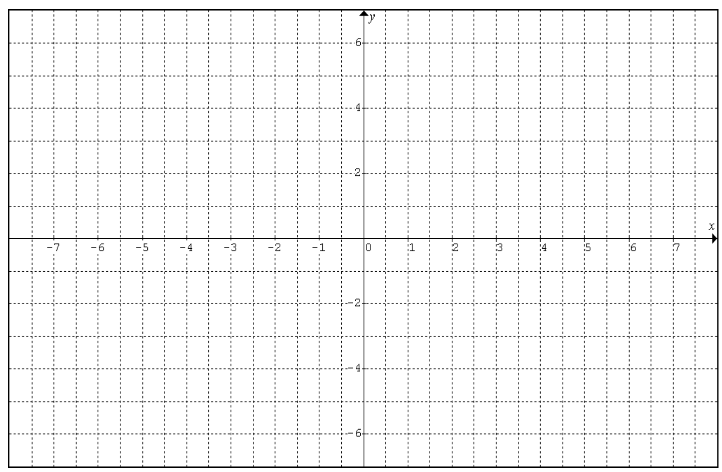
Par contre, dans une inéquation dont le symbole est *strictement inférieur* ou *strictement supérieur*, **les points sur la droite __________________________solutions de l'inéquation**. On trace donc la droite ______________________________.

Exercice : Représenter graphiquement les inéquations suivantes.

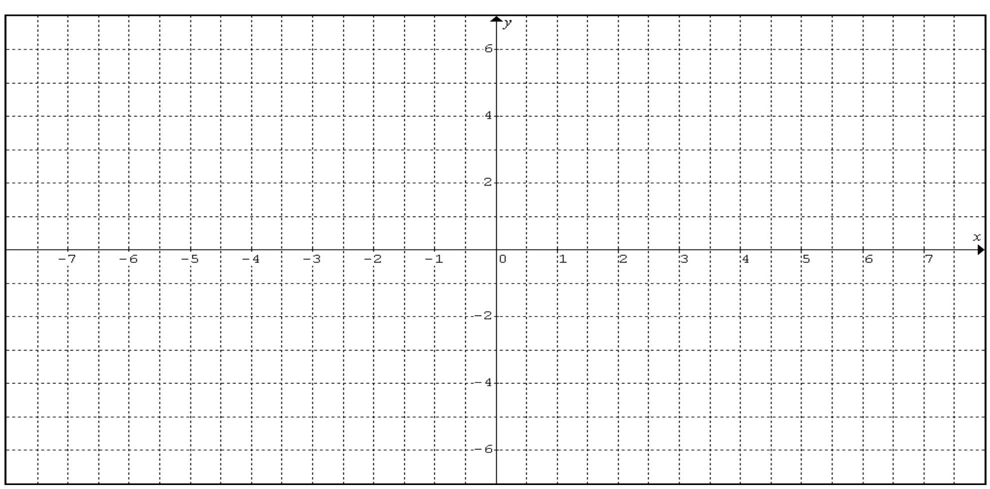
a) $x < 5$

b) $-y < \frac{2x}{7} - 3$





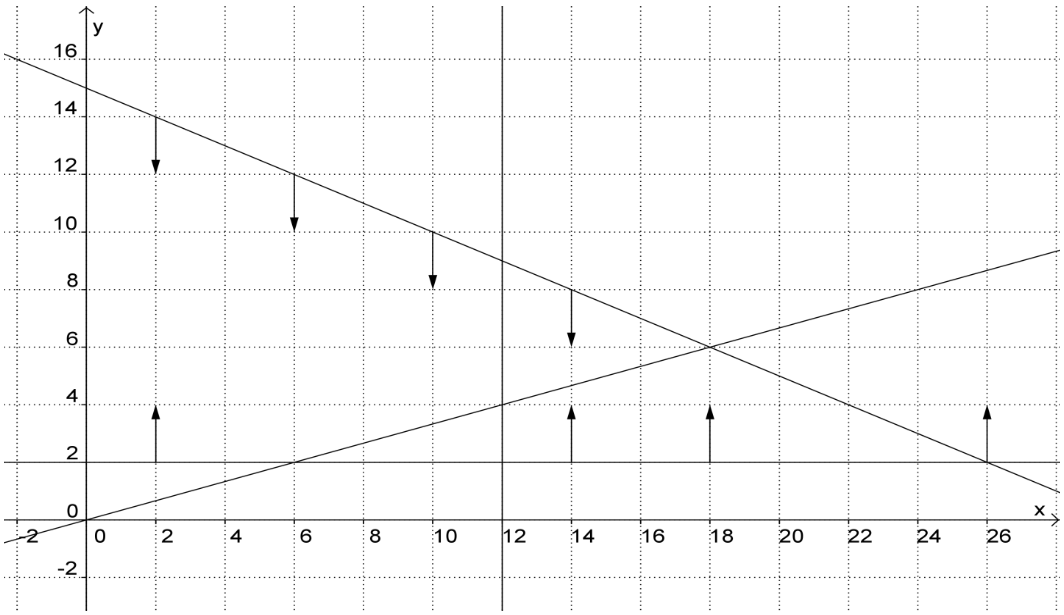
c) $-x > y$



<u>SYSTÈMES D'INÉQUATIONS DU PREMIER DEGRÉ À DEUX VARIABLES</u>

Représenter la solution du système d'inéquations suivant

$y \geq 2$ $\qquad$ $y \leq \dfrac{x}{3}$ $\qquad$ $y \leq -0{,}5x + 15$ $\qquad$ $x \geq 12$



<u>TEST :</u>

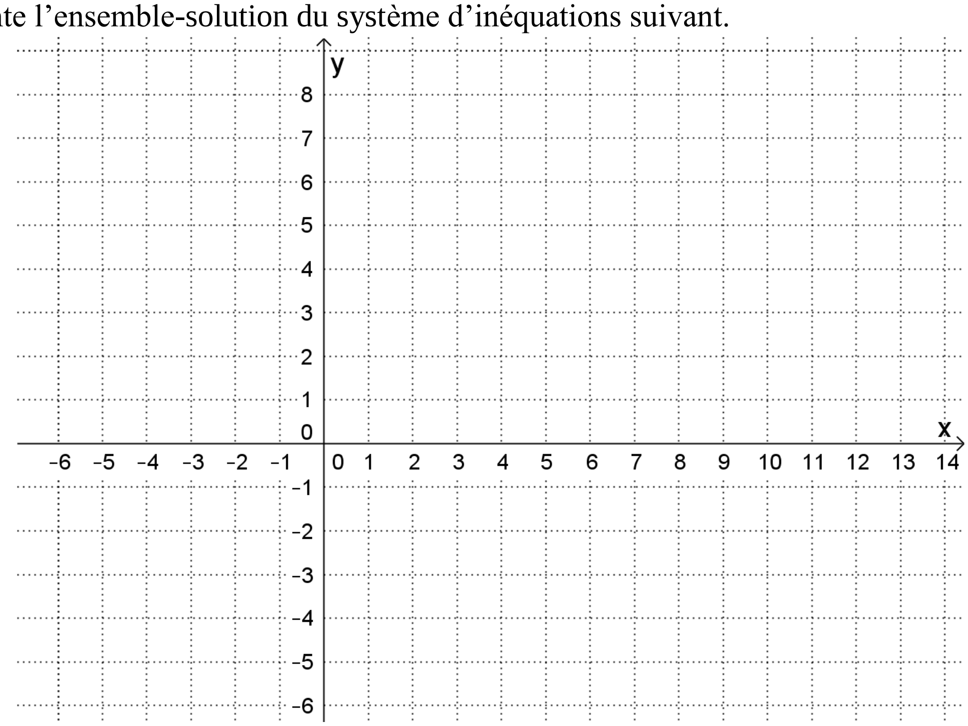
> En optimisation, la solution d'un système d'inéquations est appelée ***polygone de contraintes.***
>
> Une droite délimitant une région-solution du plan est appelée ***droite frontière.***

On observe deux types de polygones de contraintes :

1. Polygone ouvert (comme à la page 22)
2. Polygone fermé (comme dans l'exemple présenté ci-dessus)

<u>Exercice</u> : Représente l'ensemble-solution du système d'inéquations suivant.

$$\begin{cases} 12 \geq x \\ 0 \geq y - 6 \\ y + 8 \geq x \\ 3y \geq -x \\ -2y + 3x \leq 10 \end{cases}$$



L'ALBUM DE FINISSANTS

L'imprimeur d'un album de finissants d'une école secondaire demande 1$ pour l'impression d'une page en noir et blanc, 1,80$ pour une page en couleur et 5$ pour la couverture de l'album. Le comité responsable de l'album désire qu'un livre contienne un minimum de 30 pages, dont au moins 5 de couleur. Imprimer une page en noir et blanc prend 1 minute et le double pour une page de couleur. Toutefois, l'imprimeur refuse de consacrer plus de 1h40 de travail par livre. On veut également que le nombre de pages en noir et blanc soit au moins deux fois plus grand que le nombre de pages en couleur.

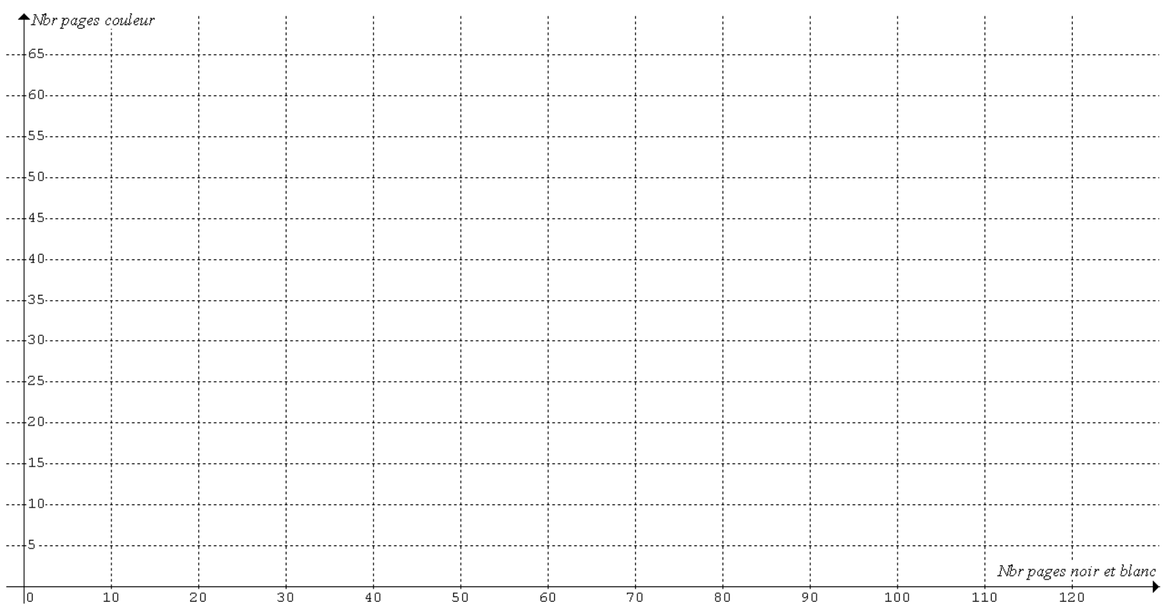
<u>Déterminer le nombre de pages de chaque type que devrait contenir un album pour permettre de maximiser les revenus de l'imprimeur.</u>

Soit *x* le nombre de pages en noir et blanc et *y*, le nombre de pages en couleur.

a) **Détermine le système d'inéquations qui traduit cette situation.**

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________
4. ______________________________
5. ______________________________
6. ______________________________

b) Représente dans le plan cartésien suivant l'ensemble-solution (polygone de contraintes) du système d'inéquations que tu viens de trouver <u>sans oublier d'identifier chacune des droites !!</u>



b) Objectif visé : ____

c) Règle de l'objectif (fonction à optimiser) : ____________________________

d) Tableau des sommets :

Coordonnées des sommets	**Fonction : ____________________________**	**Valeur de la fonction**

e) <u>Réponse finale :</u>

L'imprimeur doit imprimer _______ pages couleurs et _______ pages en noir et blanc pour maximiser ses revenus (qui seront alors de _____________________).

<u>Exercice 2 :</u>

Une entreprise de fabrication de meubles se spécialise dans la confection de fauteuils et de tables à café. Leur production mensuelle est de x fauteuils et y tables à café. Voici les contraintes qui régissent la production de ces biens.

$-x+y\geq 10$ $\qquad$ $x+y\leq 90$ $\qquad$ $y\geq 2x$

Sachant que 22 fauteuils ont été produits le mois dernier, combien de tables à café ont pu être produites ? Donne toutes les possibilités.

<u>Exercice 3</u> : Soit la région-solution suivante (x et y sont des nombres réels).

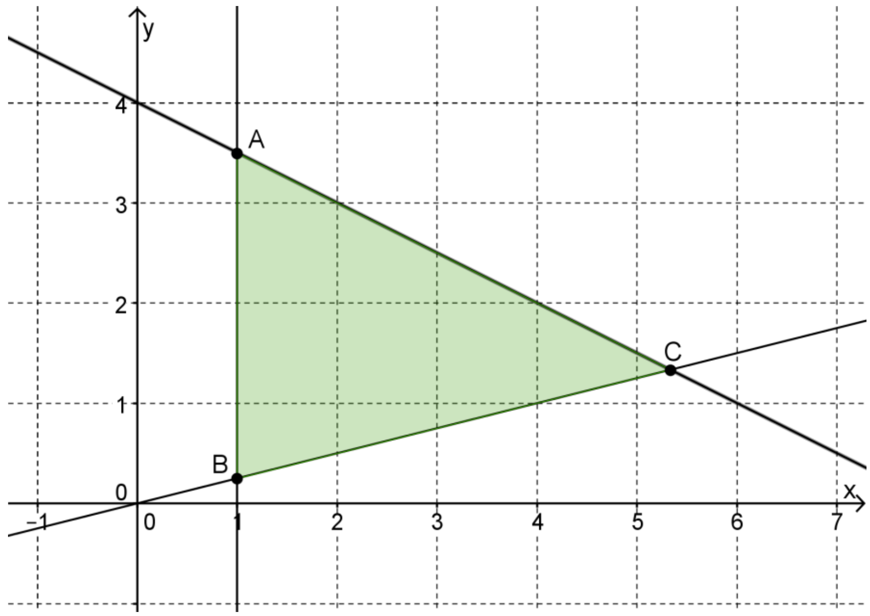
a) Détermine le système d'inéquations formant ce polygone de contraintes.

Le système est :

1. ________________

2. ________________

3. ________________



b) Détermine les coordonnées <u>exactes</u> des sommets A, B, et C.

A : (,   )

B : (,   )

C : (,   )

c) Nous ajoutons la contrainte suivante au système d'inéquation : $0 \leq -3x - 2y + 14$

1 – Représenter le polygone de contraintes ainsi obtenu.

2 – Quel est le couple-solution de ce polygone qui maximise la règle de l'objectif suivante $Z = 36x + 12y$?

LES BOUTONNIÈRES

À l'occasion de la fête des mères, Martine fabrique et vend des boutonnières. Elle offre deux modèles, l'un à 0,50$ et l'autre à 1$. Elle sait qu'elle peut vendre au plus 100 boutonnières dans le temps qui lui est alloué et qu'elle ne peut vendre plus de 60 boutonnières les plus coûteuses. Elle prévoit que le nombre de ventes de la boutonnière la moins coûteuse ne dépassera pas le double de l'autre. Elle projette vendre pour minimum 40$ de boutonnières. De plus, elle reçoit une commission de 0,10$ chaque fois qu'elle vend une boutonnière du premier modèle et de 0,25$ sur le second. Combien de boutonnières de chaque modèle doit-elle vendre pour maximiser sa commission?

Identifier les variables

x : ____

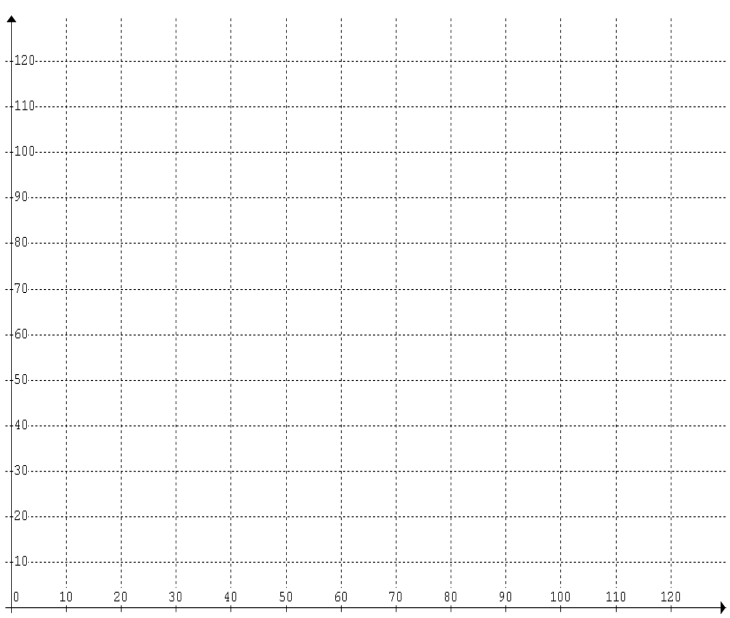
y : ____

Contraintes (numérotées)

Règle de l'objectif : ____________________________

Tableau de sommets :

Polygone de contraintes :



Réponse finale :

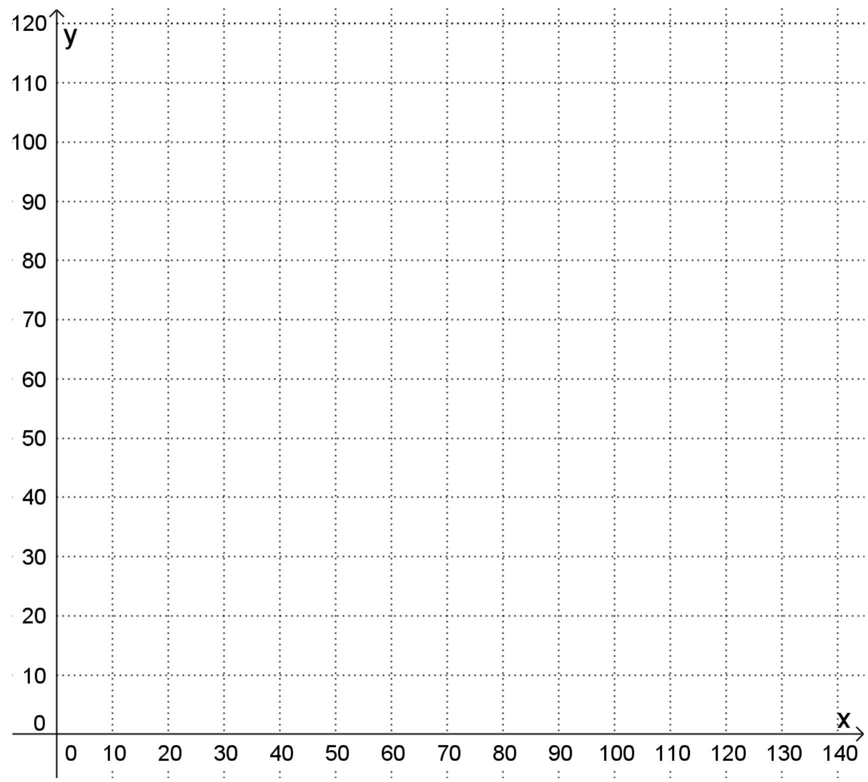
Pour maximiser sa commission, Martine doit vendre__________ boutonnières à 0,50$

et _________ boutonnières à 1$. Elle pourrait donc gagner _______________ $.

Problème 1:

Monsieur Arvizet est propriétaire d'une érablière. Chaque printemps, il produit du sirop qu'il vend au marché local. Il verse son sirop dans des contenants de 2 formats : 1 litre et 3 litres. Cette année, il a produit au moins 60 litres de sirop. Au cours des années antérieures, il a observé que le premier format est au moins trois fois plus en demande que le second. Cependant, il ne peut pas dépasser 60 contenants à cause de son équipement désuet. Il vend son sirop 8$ le contenant de 1 litre et 20$ le contenant de 3 litres.

a) Il recherche le nombre de contenants de chaque type qui vont lui permettre de réaliser un revenu maximal.
b) Il recherche l'écart entre le revenu maximal et minimal possible.
c) Monsieur Arvizet s'achète de l'équipement plus performant qui va lui permettre de produire plus (jusqu'à 100 contenants). Quel est son nouveau revenu maximal possible ?



<u>Réponses :</u>

a) Monsieur Arvizet doit vendre ______ contenants de 1L et _______ contenants de 3L pour réaliser le revenu maximal.

b) L'écart entre le revenu maximal et le revenu minimal est de _____________$.

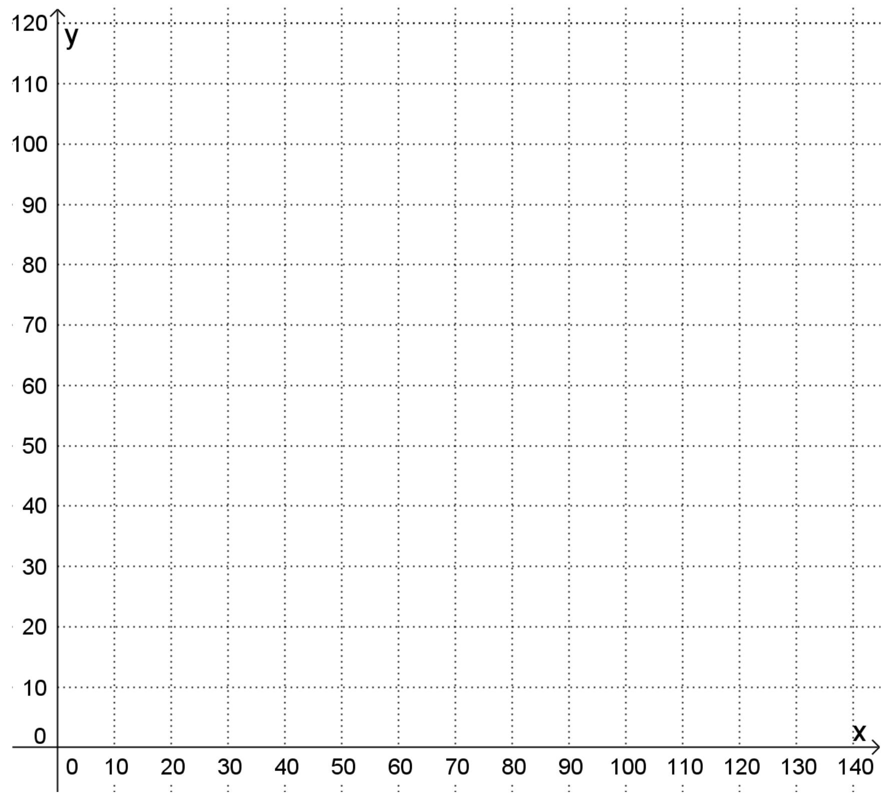
c) Suite à l'achat du nouvel équipement, le nouveau revenu maximal possible est de ____________$.

Problème 2:

Une école organise un *lavothon* afin de recueillir des fonds pour un voyage à Québec. Dix élèves sont prêts à travailler un maximum de 7 heures chacun (et chaque élève lavera une voiture à la fois). Pour un lavage partiel (lavage extérieur) d'une voiture, il faut compter 35 minutes et pour un lavage complet (intérieur et extérieur), il en faut le double. On demande 3$ pour un lavage extérieur et 5$ pour un lavage complet. On prévoit que le nombre de lavages complets ne sera pas supérieur au nombre de lavages partiels. On espère au moins 60 clients et les prévisions optimistes sont de 90 clients. Finalement, les dépenses de la journée s'élèvent à 35$.

a) Combien de lavages de chaque sorte devra-t-on faire pour maximiser les profits ?

b) De combien son profit maximal augmentera-t-il si on prévoit recevoir jusqu'à 100 clients au lieu de 90 ?



Réponses :

a) De manière à maximiser les profits, on devra réaliser _________ lavages partiels et ______ lavages complets.

b) Le revenu maximal augmentera de ________$.

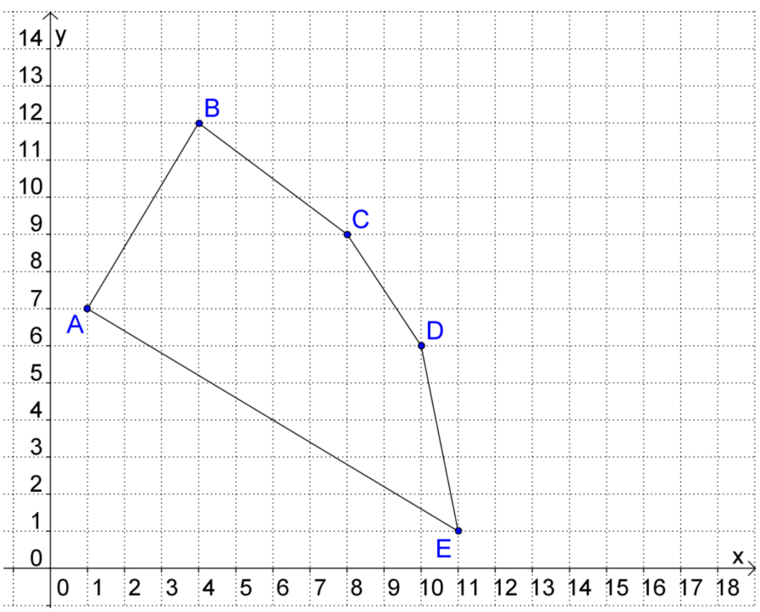
<u>LA DROITE BALADEUSE</u> (ou *optimisation par balayage*)
La droite baladeuse est un outil d'optimisation alternatif au tableau de sommets.

Imaginons une situation d'optimisation donnant lieu à la règle de l'objectif suivante : $P = 5x + 10y$. Nous pouvons constater que cette règle est une équation du premier degré à deux variables. Isolons la variable y.

Selon le modèle fonctionnel d'une droite ($y = ax + b$)

Son taux de variation :____________ $\begin{cases} fixe \\ variable \end{cases}$ et ordonnée à l'origine :______ $\begin{cases} fixe \\ variable \end{cases}$.

Prenons par exemple le polygone de contraintes suivant associé à la même situation.



Sommets	$P = 5x + 10y$	**Valeur de la fonction**
A(1, 7)		
B(4, 12)		
C(8, 9)		
D(10, 6)		
E(11, 1)		

Le sommet du polygone de contraintes engendrant l'ordonnée à l'origine la plus élevée ________________________ la fonction à optimiser.

Le sommet du polygone de contraintes engendrant l'ordonnée à l'origine la plus basse ________________________ la fonction à optimiser.

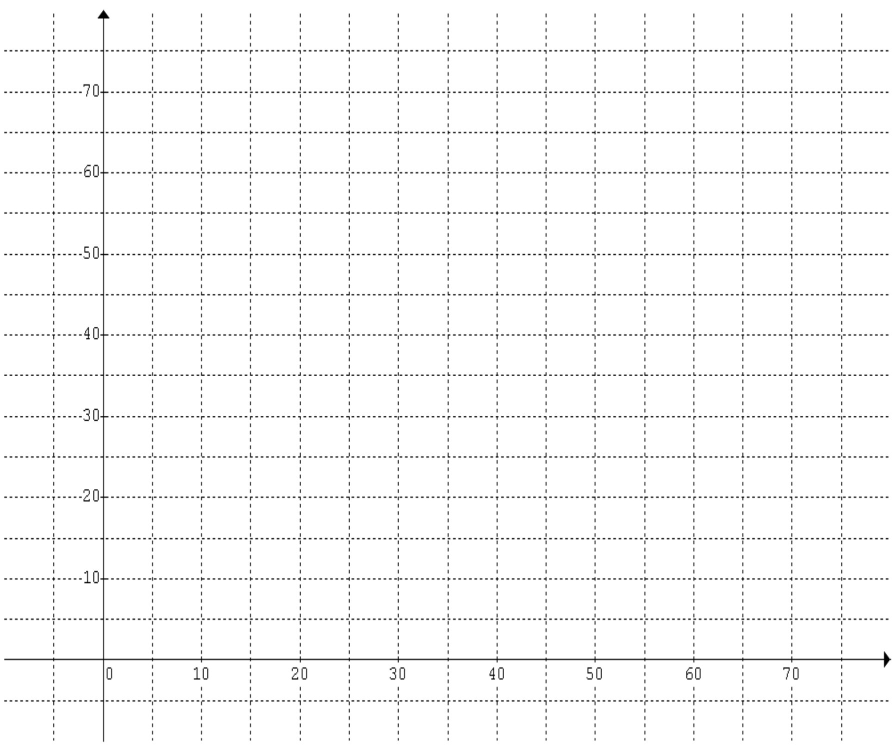
Le sommet B continuerait-il de maximiser la situation si la fonction à optimiser avait été $P = 9x + 10y$?

LES JEUNES ENTREPRENEURS

Cynthia est membre de l'équipe des Jeunes entrepreneurs de son école. Son projet est de peindre des motifs sur des vases et des sucriers. Elle met 2 heures pour peindre les motifs d'un vase et 3 heures pour ceux d'un sucrier. Durant l'année scolaire, elle consacrera un maximum de 120 heures à son projet et prévoit peindre un maximum de 50 objets. Pour répondre à la demande de ses clients, elle doit peindre au moins 10 sucriers. Chaque vase sera ensuite vendu 14 \$ et les sucriers seront vendus à 10 \$ chacun.
Soit x le nombre de vases et y, le nombre de sucriers à peindre.

Combien de vases et de sucriers Cynthia doit vendre pour maximiser ses bénéfices et à combien s'élèveront-ils ?

<u>Polygone de contraintes et droite baladeuse.</u>

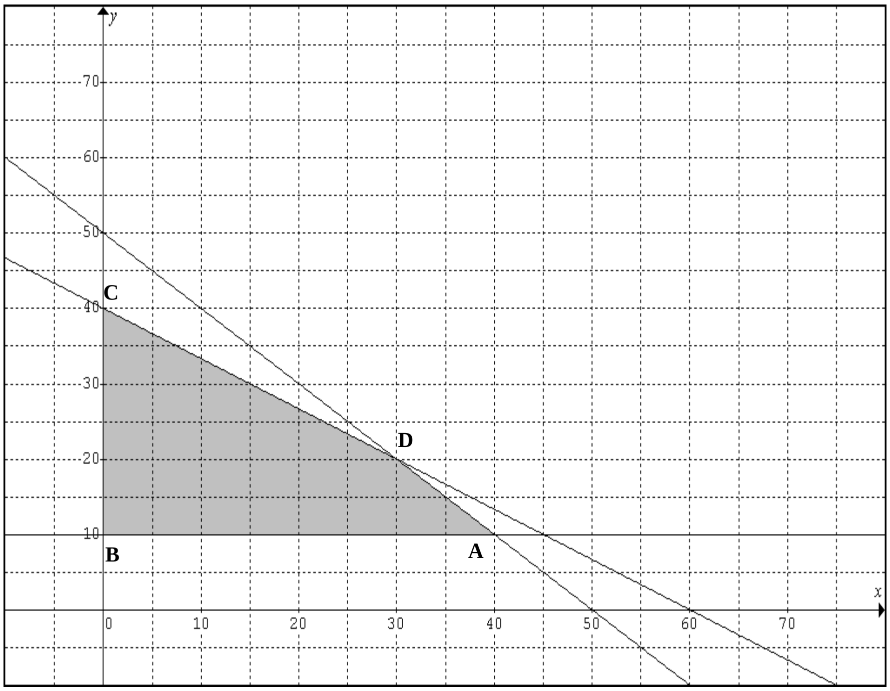


<u>Réponse finale :</u>
Cynthia doit peindre _________ vases et _________ sucriers pour maximiser ses

bénéfices qui seront de ___________ \$.

<u>LA DROITE BALADEUSE</u> (*multitude de solutions*)

Reprenons le contexte *Jeunes Entrepreneurs* et modifions le texte de la façon suivante : *Chaque vase sera ensuite vendu 10 $ et les sucriers seront vendus à 15 $ chacun.* Le polygone de contraintes sera-t-il modifié ? _______________.



Sommets	Valeur de la fonction $P = 10x + 15y$
A(40, 10)	
B(0, 10)	
C(0, 40)	
D(30, 20)	

Déterminons d'autres couples-solutions…

Nombre de vases							
Nombre de sucriers							

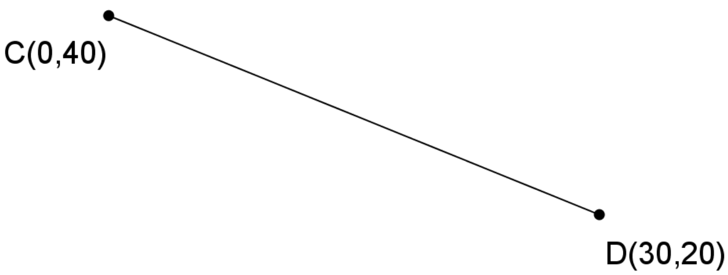
Comme deux sommets du polygone de contraintes maximisent la situation, _______________ _______________________ à coordonnées _____________________ sur ce segment sont des solutions du problème d'optimisation.

La droite baladeuse et le segment qui contient l'ensemble des couples-solutions ont le même __ __________________________________.

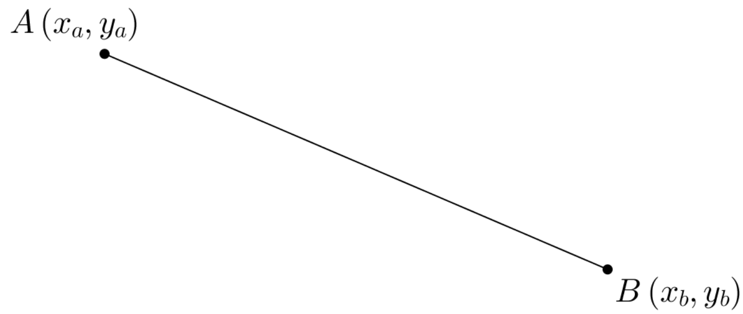
<u>ATTENTION!</u> Travaillez TOUJOURS avec un taux de variation _______________________!

Calcul du **nombre** de solutions sur un segment

Dans la situation précédente…



En général…



Exercice :
Détermine l'abscisse du point B sachant que A(180 , 61) et B(x , 11) sont deux sommets qui maximisent la fonction objectif $V = 2x + 3y$.

Faites vos démarches à la page suivante…

Exercice 1:
Soit la fonction T = 4x + 5y – 24 dans un contexte où x et y sont des nombres entiers.

a) Quel est le taux de variation de la droite baladeuse associée à cette fonction ?

b) Quelle expression représente l'ordonnée à l'origine de la droite baladeuse associée à cette fonction ?

c) Un polygone de contraintes (convexe) est formé par les 5 sommets suivants :
A(5 , 220) ; B(45 , 200) ; C(85 , 168) ; D(109 , 138) et E(40 , 40)
Donner le maximum de la fonction T, dire combien de couple(s) maximise(nt) la fonction et en nommer au moins 4.

Exercice 2 :
Monsieur Arvizet achète des vélos et des trottinettes qu'il revend dans son magasin. Il a un budget maximal de 20 000$ pour faire ses achats. Il doit acheter au moins deux vélos pour chaque trottinette. Un vélo lui coûte 200$ et une trottinette 60$. Il paye un loyer mensuel de 500$ en plus du salaire d'un employé qui travaille 17 jours par mois, 7 heures par jour au taux de 9$ l'heure. Chaque vélo est revendu 350$ contre 110$ pour chaque trottinette. Il désire maximiser son profit net mensuel. Donner la règle de la fonction P à optimiser.

Exercice 3 :
On vous présente la fonction à optimiser Z = 6x + 7y – 50 et un polygone de contraintes dont les sommets ont pour coordonnées :
A(40 , 210) B(38 , 15) C(125 , 16) D(264 , 18)

Combien de couples de coordonnées entières maximisent cette fonction ? Nommez-en au moins 4.

Exercice 4 :
Le couple (20, 5) maximise une fonction objectif de la forme Z = Ax + By. La valeur maximale de Z est 105. La valeur minimale de Z est 40 et est obtenue par le couple (5, 15). Donner la règle complète de cette fonction.

Exercice 5 :
Un polygone de contraintes est formé par les sommets suivants :
A(120 , 150) B(225 , 115) C(170 , 12) D(100 , 25)
Combien de couples de coordonnées entières maximisent la fonction N = 7x + 21y ?

Démarches…

Exercice 6 :

Soit la règle de l'objectif $T = rx + ty$ où x et y sont les variables d'optimisation. Le sommet A d'un polygone de contraintes dont les coordonnées sont (1,9) maximise cette fonction. T vaut alors 29. Le sommet B(5,4) minimise cette fonction et sa valeur est alors de 22. Détermine les valeurs des coefficients **r** et **t**.

Exercice 7 :

Le *profit* est en économie la différence entre les revenus et le dépenses. On le calcule ainsi :

Profit* = *Revenus – Dépenses

Ce profit peut être : - positif (*Revenus* > *Dépenses*). C'est un gain d'argent.
- nul (*Revenus* = *Dépenses*)
- négatif (*Revenus* < *Dépenses*). C'est une perte d'argent.

Donner la règle du *profit* dans chacune des situations suivantes :

a) x : Nombre de réfrigérateurs y : Nombre de cuisinières

Une firme peut produire au maximum 350 appareils ménagers. Pour satisfaire à la demande, elle doit produire au moins 175 cuisinières et au plus 150 réfrigérateurs. Un réfrigérateur se vend 700\$ et une cuisinière 400\$. On sait qu'il en coûte 300\$ pour produire un réfrigérateur et le tiers de moins pour une cuisinière. De plus, la firme doit débourser 35\$ par appareil pour la livraison. Le rapport cuisinière/réfrigérateur est d'au plus ½.

b) x : Nombre de tables y : Nombre de chaises

Le minimum et le maximum de pièces que peut produire une compagnie de meubles sont respectivement 900 et 1500. Une table nécessite 3 heures de travail tandis qu'une chaise en prend 2 et demie. Une table coûte 40% de son prix de vente à produire et une chaise 47%. On produit au moins 4 fois plus de chaises que de tables. Une table se vend 150\$ et une chaise 60% du prix d'une table. Le transport coûte 5% des revenus bruts de l'entreprise. La compagnie estime que ses revenus bruts seront d'au moins 160 000\$.

Exercices récapitulatifs

Vrai ou faux ?

a) Le sommet maximisant la règle de l'objectif est toujours celui qui engendre l'ordonnée à l'origine la plus élevée de la droite baladeuse :

b) Si une situation d'optimisation est illustrée par un polygone ouvert, la situation ne peut être optimisée :

c) La droite baladeuse est un outil très utile lorsqu'on travaille dans un croquis :

SAÉ # 1

Soit les contraintes suivantes associées à une situation d'optimisation:

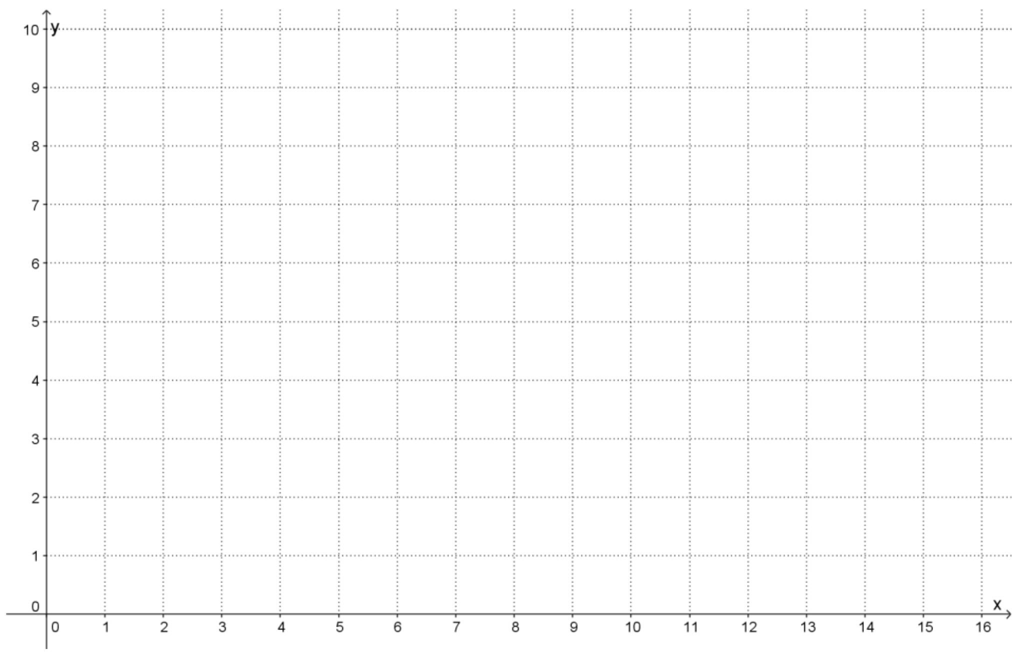
$x \in \mathbb{N}$ $\quad y \in \mathbb{N}$ $\quad x \geq 4$ $\quad y \geq \dfrac{x}{3}$ $\quad 5x + 2y \leq 71$ $\quad y \leq \dfrac{-1}{5}x + 9$

Déterminer les coordonnées du couple-solution engendrant une valeur maximale pour chacune des fonctions à optimiser suivantes :

a) R = 0,4x + y

b) V = 2x + y

.



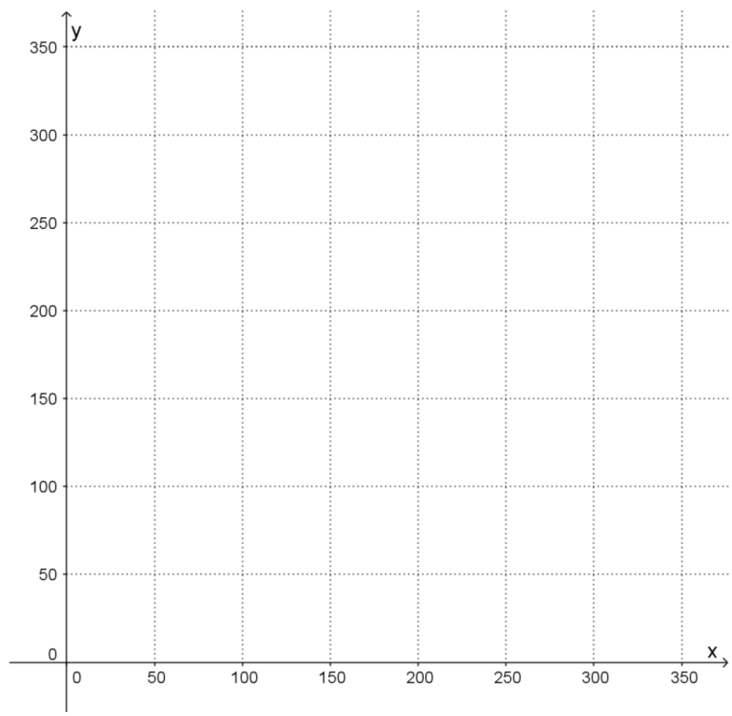
SAÉ # 2

Une usine de réparation de téléphones cellulaires reçoit hebdomadairement des appareils défectueux. Certains peuvent être réparés mais d'autres, trop endommagés, sont malheureusement envoyés au recyclage, ce qui représente pour l'usine une perte financière de 10$ par appareil. Pour sa part, un appareil remis à neuf rapporte 50$ à l'usine.
Un maximum de 350 appareils sont envoyés à l'usine par semaine et de ce lot, au moins 125 peuvent être réparés. De plus, on s'attend à ce que la quantité d'appareils à recycler soit au moins les deux tiers du nombre d'appareils réparables.

Soit x le nombre d'appareils pouvant être réparés et y, le nombre d'appareils à recycler.

À l'aide de la droite baladeuse <u>uniquement</u> déterminer le nombre d'appareils réparables et non réparables que l'usine doit espérer recevoir lui permettant de maximiser ses bénéfices hebdomadaires.

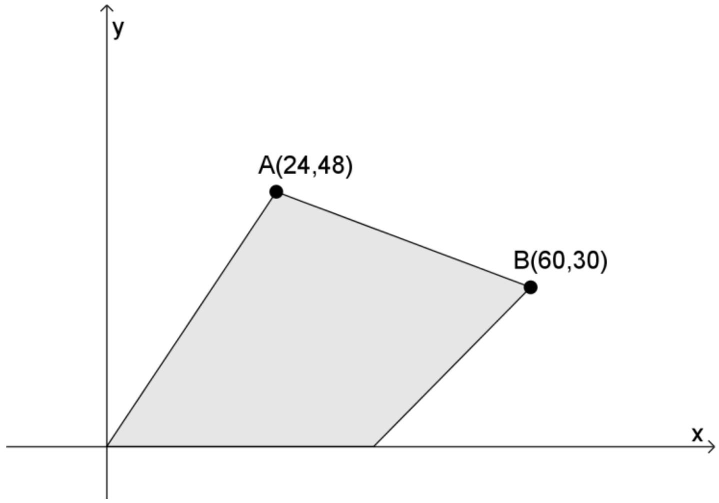
Astuce : Réfléchir sur le signe de l'expression algébrique représentant l'ordonnée à l'origine de la baladeuse…



Exercice 1 :

Soit une situation d'optimisation dont la règle de l'objectif est R = $ax + 3y$ (avec $a > 0$).

Le polygone de contraintes associé à cette situation d'optimisation est le suivant.



Détermine **les valeurs possibles** du coefficient *a* pour que la situation soit maximisée :

a) au sommet B seulement.

b) au sommet A seulement.

c) Combien de couples maximisent cette situation lorsque $a = 1{,}5$ et sachant que x et y représentent des entiers ?

Faites vos calculs à la page suivante…

Exercice 2 :

Un polygone de contraintes est l'ensemble-solution du système d'inéquations suivant :

$x \geq 5$ $\qquad$ $x \leq 10$ $\qquad$ $x + y \leq 16$ $\qquad$ $x - 2y \leq k \quad (k \in \text{IR})$

Quelle doit être la valeur **maximale** de *k* pour que l'ensemble-solution de ce système n'appartienne qu'au premier quadrant?

Exercice 3 :

Un polygone de contraintes est la solution du système d'inéquations suivant :

$x \geq 0$ $\qquad$ $y \geq 0$ $\qquad$ $y \leq \frac{3}{4}x + 3$ $\qquad$ $y \leq -3x + b \quad (b \in \text{IR})$

a) Quelles valeurs peut-on attribuer à *b* pour que le point (7 , 3) soit une solution de ce système d'inéquations?

b) Quelle valeur doit-on attribuer à *b* pour que l'abscisse du point de rencontre avec la 3e contrainte soit 4 ?

Exercice 4 :

Les coordonnées des sommets d'un polygone de contraintes sont :

B(-3 , 4) $\qquad$ C(3 , 5) $\qquad$ D(2 , 1)

Les droites d'équations $y = 5x + 3$ et $x + y = 2$ se croisent – elles à l'intérieur du polygone de contraintes?

Exercice 5 :

Un polygone de contraintes est la solution du système d'inéquations suivant :

$x \geq 0$ $\qquad$ $y \geq 0$ $\qquad$ $2y \leq ax + b$ $\qquad$ $y \leq 2x + 1$

où *a* et *b* sont des constantes réelles.

Le sommet formé par le point de rencontres des 2 dernières contraintes maximise la fonction $R = 3x + 2y$.

Quelle est la valeur maximale de R en fonction de *a* et *b* ?

Calculs…

EXERCICES

Les inéquations à une variable

Exercice 1:
La variable *p* désigne le prix d'un jus d'orange. Traduire chacun des énoncés par une inéquation.

a) Trois jus d'orange coûtent moins de 4$.

b) Trois jus d'orange coûtent au moins 4$.

c) Quatre jus d'orange coûtent plus de 5$.

d) Quatre jus d'orange coûtent au plus 5$.

Exercice 2:
La variable *x* désigne le périmètre (en cm) d'un triangle. Traduire chacun des énoncés par une inéquation.

a) Le périmètre d'un triangle mesure plus de 10 cm.

b) Le périmètre d'un triangle mesure au plus 10 cm.

c) Le demi-périmètre d'un triangle mesure moins de 5 cm.

d) Le demi-périmètre d'un triangle mesure au moins 5 cm.

Exercice 3:
On désigne par *w* la masse à vide (en kg) d'une camionnette. Traduire chacun des énoncés suivants par une inéquation.

a) Deux camionnettes, chargées de 500 kg chacune, pèsent au moins 7000 kg.

b) Deux camionnettes, chargées de 500 kg chacune, pèsent moins de 7000 kg.

c) Trois camionnettes, chargées de 600 kg chacune, pèsent plus de 9000 kg.

d) Trois camionnettes, chargées de 600 kg chacune, pèsent au plus 9000 kg.

Exercice 4:

Résoudre chaque inéquation et représenter l'ensemble-solution en extension, en compréhension et graphiquement.

a) $2y-5\leq y+1$ dans IN.

b) $6x-30\geq 2(x-10)$ dans IR.

Exercice 5:

Dire si chacune des paires d'inéquations suivantes ont le même ensemble-solution dans IR.

a) $x-5\leq 1$ et $x\leq 6$

Réponse :______________

b) $x+2\leq 3$ et $x\leq 5$

Réponse :______________

c) $2x<10$ et $x\leq 5$

Réponse :______________

d) $-3x\leq 15$ et $x\geq 5$

Réponse :______________

Faire vos calculs à la page suivante.

Exercice 6:

Soit a, b et c trois nombres réels. Compléter par le symbole ≤ ou ≥ qui convient.

a) Si $a \geq b$ alors $a + c$ _____ $b + c$

b) Si $a \geq b$ alors $a - c$ _____ $b - c$

c) 1. Si $a \geq b$ et $c > 0$ alors $a \times c$ _____ $b \times c$

2. Si $a \geq b$ et $c < 0$ alors $a \times c$ _____ $b \times c$

d) 1. Si $a \geq b$ et $c > 0$ alors $\frac{a}{c}$ _____ $\frac{b}{c}$

2. Si $a \geq b$ et $c < 0$ alors $\frac{a}{c}$ _____ $\frac{b}{c}$

Exercice 7:

Résoudre les inéquations suivantes, d'abord dans le référentiel IN, puis dans IR.

Présenter l'ensemble-solution en extension (pour IN) et en intervalles (pour IR).

a) $3x + 10 \leq 19$

b) $1 - 2x > 5$

c) $7x + 2 \geq -19$

d) $18 > -6x + 36$

Page de calculs…

Faire vos calculs à la page suivante.

Exercice 8:

Résoudre les inéquations suivantes dans le référentiel IR et donner l'ensemble-solution en intervalle.

a) $4x + 2 \leq 5x + 3$

b) $4(3x + 1) \geq 2(5x + 3) - 4x$

c) $(4 - x) - 2(3x - 1) \geq 4(x - 3)$

d) $\frac{x + 7}{5} - \frac{x - 8}{3} > 4 + \frac{2x - 8}{15}$

Exercice 9:

Résoudre.

$$\left\{ x \in Z \mid \frac{x^2 - 4}{-2} < \frac{x(1{,}5x - 7)}{-3} \right\}$$

Exercice 10:

Déterminer l'ensemble-solution des inéquations suivantes dans le référentiel demandé. Illustrer chaque ensemble sur une droite numérique.

a) $\{x \in IN \mid 3x - 4 > 6 - x\}$

b) $\{x \in IN \mid 12 - 11x \leq 8 - (6 + x)\}$

c) $\{x \in Z \mid 14 + 2x < 6\}$

d) $\left\{ x \in Z \mid \frac{5}{2}x + 14 \geq \frac{13}{2}x \right\}$

e) $\left\{ x \in IR \mid \frac{6 - x}{3} > 14 \right\}$

f) $\left\{ x \in IR \mid \frac{2x - 6}{-2} \leq \frac{1 - x}{3} \right\}$

Page de calculs…

<u>Les inéquations à deux variables</u>

<u>Exercice 1</u>: Traduire chacun des énoncés suivants par une inéquation.

a) Soit x : longueur du rectangle en mètre et y : largeur du rectangle en mètre

i) La différence entre la longueur et la largeur d'un rectangle est inférieure à 3 mètres.

ii) La différence entre la longueur et la largeur d'un rectangle est plus que 3 mètres.

iii) La différence entre la longueur et la largeur d'un rectangle est au plus 3 mètres.

iv) La différence entre la longueur et la largeur d'un rectangle est au moins de 3 mètres.

b) Soit r : nombre d'heures pour coudre un robe et c : nombre d'heures pour coudre un chemisier

i) Pour coudre deux robes et trois chemisiers, une couturière doit travailler plus de dix heures.

ii) Pour coudre deux robes et trois chemisiers, une couturière doit travailler moins de dix heures.

iii) Pour coudre deux robes et trois chemisiers, une couturière doit travailler au maximum dix heures.

iv) Pour coudre deux robes et trois chemisiers, une couturière doit travailler au minimum dix heures.

c) Soit m : longueur du rectangle en mètre et n : largeur du rectangle en mètre

i) L'aire d'un terrain rectangulaire est au plus égale à 1200 m^2.

ii) L'aire d'un terrain rectangulaire est au moins égale à 1200 m^2.

iii) L'aire d'un terrain rectangulaire est strictement supérieure à 1200 m^2.

iv) L'aire d'un terrain rectangulaire est strictement inférieure à 1200 m^2.

Exercice 2:
Jacinthe, Nadine et Jeff ont tous trois un travail d'été. Jacinthe fait du travail de secrétariat à 12$ l'heure à la compagnie de sa mère. Nadine garde les enfants de sa voisine. Elle est payée 9,50$ l'heure. Jeff travaille pour une compagnie d'entretien de pelouses à 11$/h.

Si *x* représente le nombre d'heures par semaine durant lesquelles Jacinthe a travaillé, *y* celles de Nadine et *z* celles de Jeff, traduire chacune des situations suivantes par une inéquation.

a) Jacinthe a travaillé moins de 10 heures cette semaine.

b) Nadine a gardé les enfants au plus 20 heures.

c) Jeff a travaillé au maximum 25 heures cette semaine.

d) La semaine prochaine, Jacinthe travaillera au moins 30 heures.

e) Le nombre d'heures que Jeff a travaillé n'excède pas la moitié du nombre d'heures où Nadine a gardé.

f) Nadine gagnera au minimum 120$ la semaine prochaine.

g) Jeff a gagné plus de 130$.

h) Jacinthe gagnera au plus 224$ par semaine.

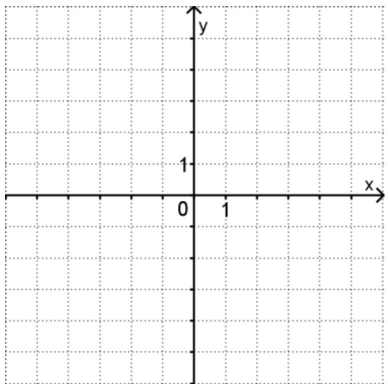
i) La semaine dernière, le salaire de Jacinthe dépassait le double du salaire de Nadine.

j) Ensemble, Nadine et Jeff ont gagné moins de 425$.

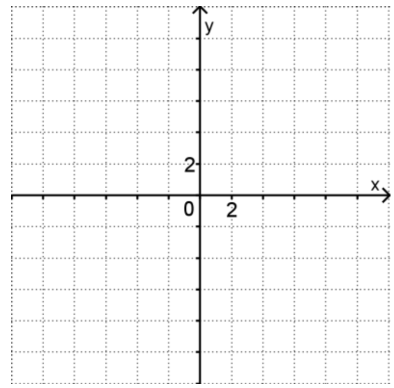
<u>**Tracé de la droite dans le plan cartésien**</u>

<u>Exercice 1</u>: Tracer chacune des droites suivantes dans le plan fourni.

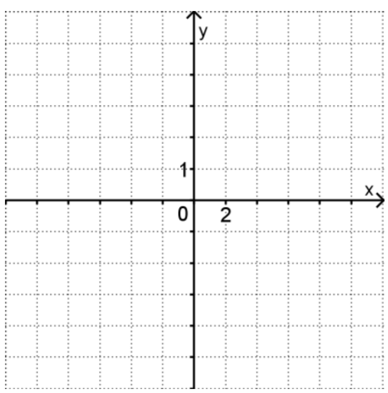
a) $y = \dfrac{5x}{3} + 2$.



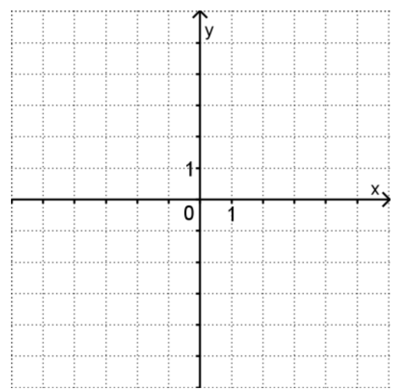
b) $y = \dfrac{-3x}{4} + 10$.



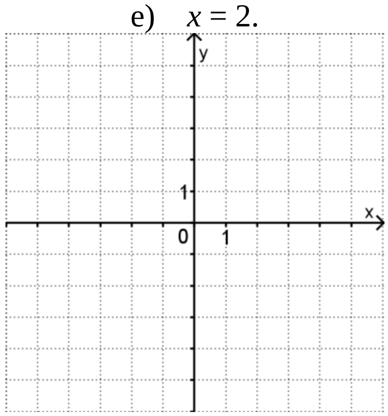
c) $y = 2 + x$



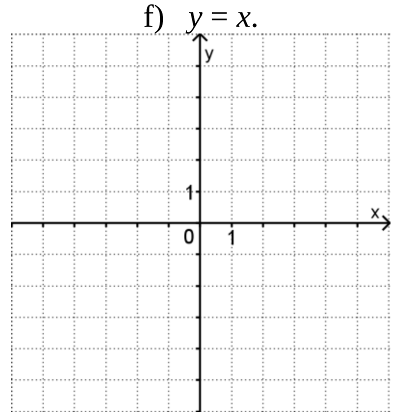
d) $y = -3$



e) $x = 2$.



f) $y = x$.



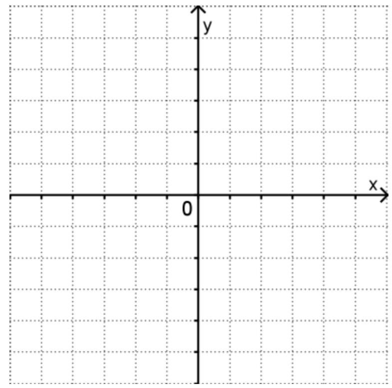
► L'équation d'une droite confondue à l'axe des ordonnées est : _______________

► L'équation d'une droite confondue à l'axe des abscisses est : _______________

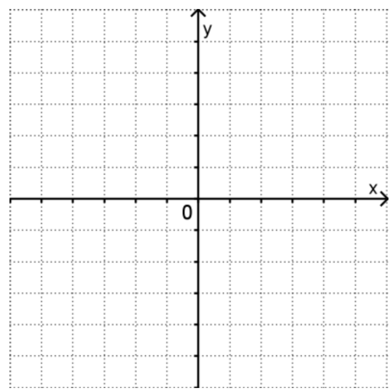
Exercice 2: Tracer chacune des droites suivantes dans le plan fourni. La graduation des axes est laissée à votre discrétion.

Tu peux toujours te faire une table de valeurs pour vérifier ton dessin.

a) $2x + 3y = 24$.



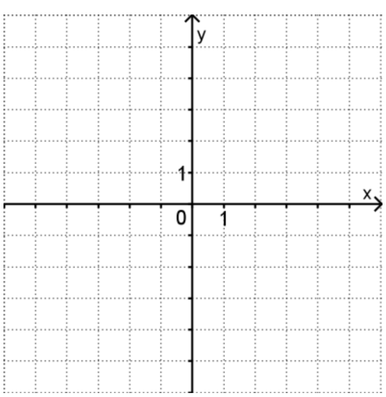
b) $25x - 15y = 1500$



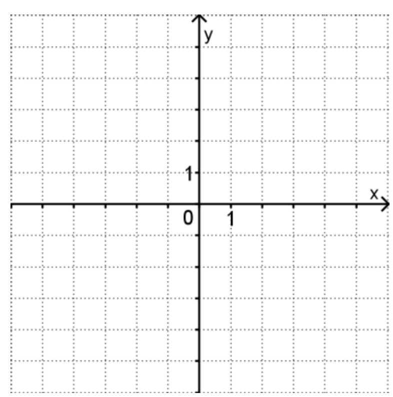
Représentation d'inéquations à deux variables

Exercice 1: Représenter l'ensemble-solution des inéquations suivantes :

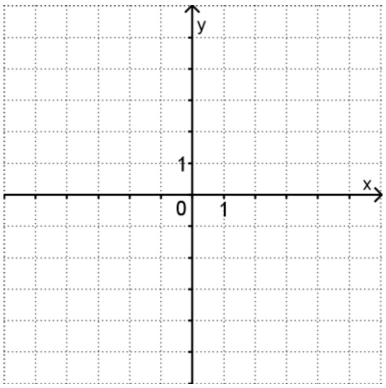
a) $4x + 5y \leq 10$



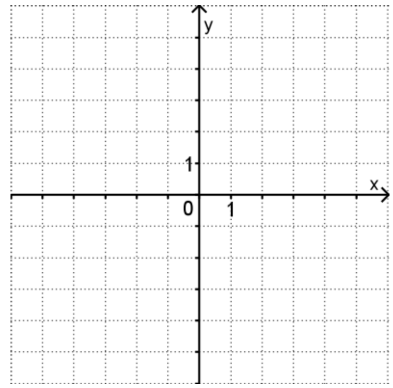
b) $2y > 2 + x$



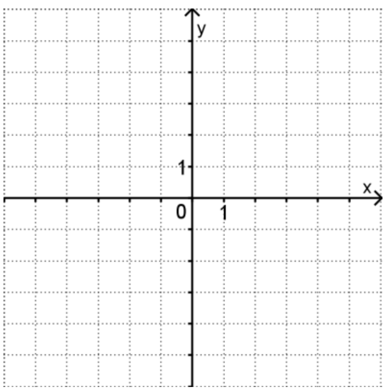
c) $y < x - 2$



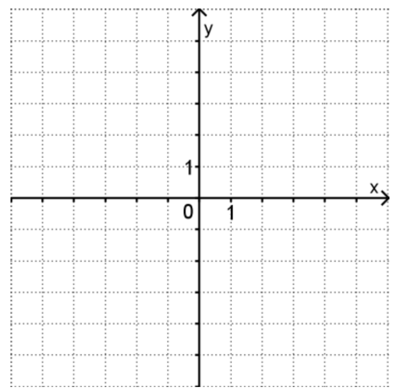
d) $y \geq x$



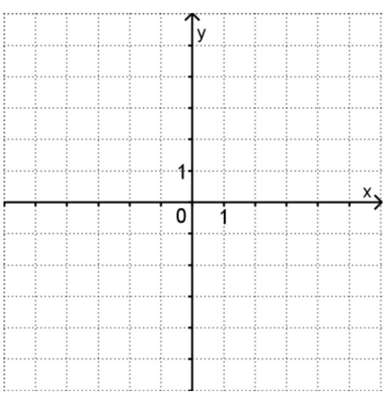
e) $x + y > 0$



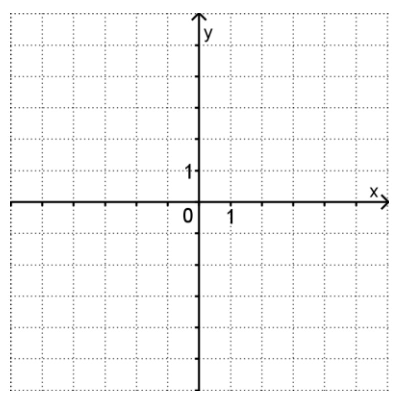
f) $x \geq 2$



g) $3x - 2y - 6 \leq 0$



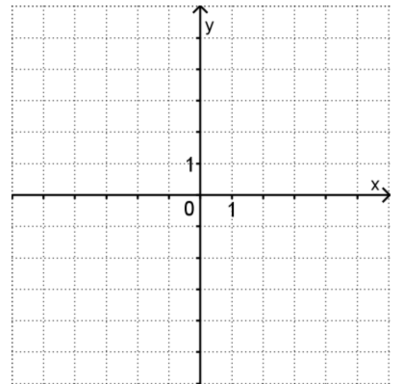
h) $y < 2$



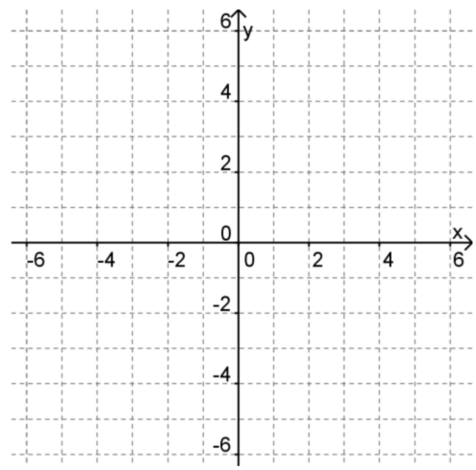
<u>Représentation de systèmes d'inéquations à deux variables</u>

Exercice 1: Représenter l'ensemble-solution des systèmes d'inéquations suivants:

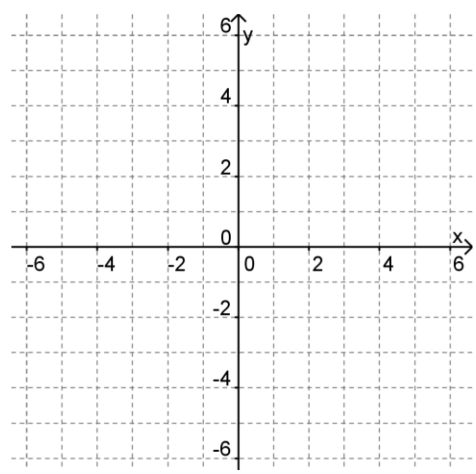
a) $\begin{cases} 2x + 3y \leq 9 \\ 3y + 3 > 2x \end{cases}$



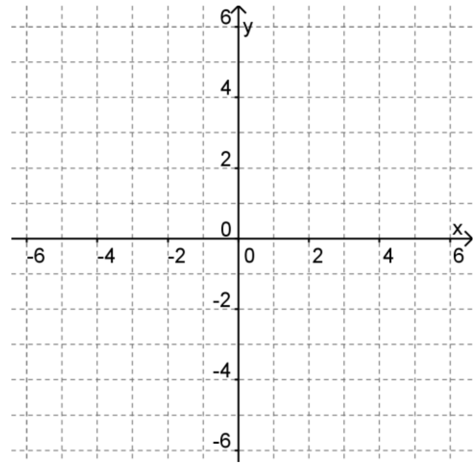
b) $\begin{cases} 2x + 3y \geq 6 \\ x - y \leq 4 \end{cases}$



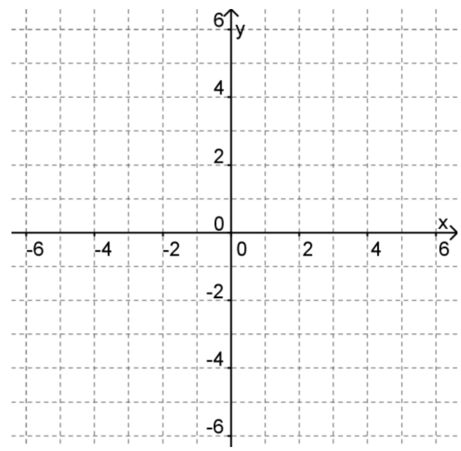
c) $\begin{cases} x + 2y \leq 6 \\ 2x - y \geq 4 \end{cases}$



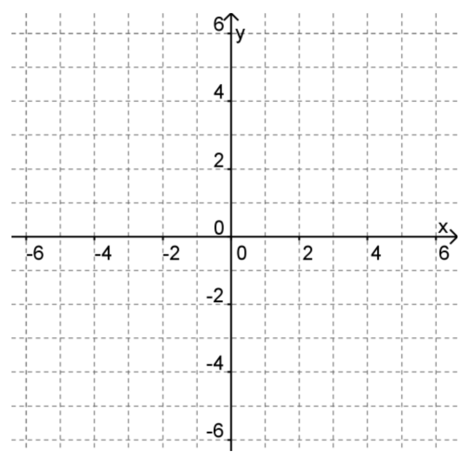
d) $\begin{cases} 2x + y \leq 8 \\ x - 3y \geq 6 \end{cases}$



e) $\begin{cases} 3x - 4y \geq 1 \\ x + 2y \leq 6 \end{cases}$



f) $\begin{cases} 4x + 2y \leq 6 \\ y > -2x + 7 \end{cases}$



Exercice 2:

Après avoir identifié les variables, Traduire la situation par un système d'inéquations et le résoudre graphiquement.

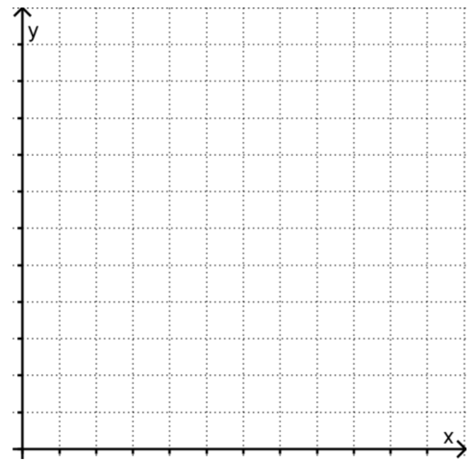
a) La longueur d'un rectangle est supérieure à sa largeur. Son périmètre est inférieur à 24 cm.

Variables :

x :________________________________

y :________________________________

Système :



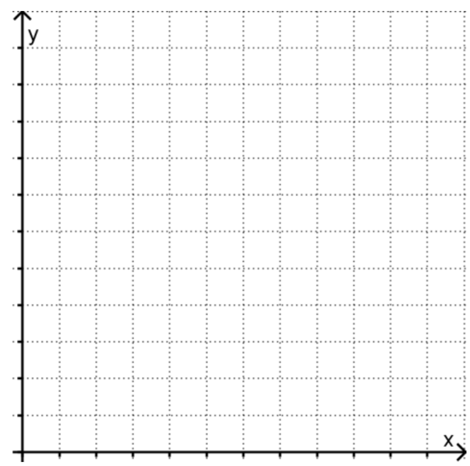
b) Au bal de fin d'année, il y aura au moins deux fois plus d'élèves que d'autres participants dans une salle pouvant contenir un maximum de 1000 personnes.

Variables :

x :________________________________

y :________________________________

Système :



Exercice 3:

Quel serait le référentiel de référence (IN, Z, Q, IR) approprié à chacune des situations du numéro précédent? Justifier.

a)

b)

<u>La règle de l'objectif</u>

<u>Exercice 1</u>:

Après avoir clairement identifié les variables intervenant dans chacune des situations, décrire quel est l'objectif poursuivi (maximiser ou minimiser) et donner la règle qui permet de calculer soit le minimum ou le maximum recherché.

a) Marc-Antoine fait des travaux de traitement de texte sur son ordinateur. Il a calculé qu'une page de texte seulement nécessitait 30 minutes de travail et qu'une page de texte avec graphisme nécessitait une heure de travail. Il a au plus 12 heures par semaine à consacrer à cette activité. Cependant, il a observé que le nombre de pages de texte avec graphisme ne dépasse jamais 10 pages par semaine, et que le nombre de pages de texte seulement n'est jamais supérieur au triple du nombre de pages de texte avec graphisme. Il demande 2,50$ pour une page de texte seulement et 4$ pour une page de texte avec graphisme. Il s'intéresse au plus grand revenu qu'il pourrait obtenir.

Variables x :____

y :____

Décrire en mots l'objectif poursuivi par Marc-Antoine :

____

Règle de l'objectif :____

b) Marita et François veulent prendre des vacances. Ils veulent se reposer au moins 15 jours. Ils ont calculé qu'une journée de vacances passée au Québec coûtait en moyenne 80$ et qu'une journée passée aux États-Unis coûtait 150$. Ils veulent cependant passer au moins deux fois plus de temps aux États-Unis qu'au Québec, mais leur permis de séjour aux États-Unis leur accorde un maximum de 10 jours. De plus, ils ont obtenu un forfait assurance-voyage pour 160$. Ils recherchent les vacances les moins coûteuses que possible qui satisfont à ces contraintes.

Variables x :____

y :____

Décrire en mots l'objectif poursuivi par Marita et François :

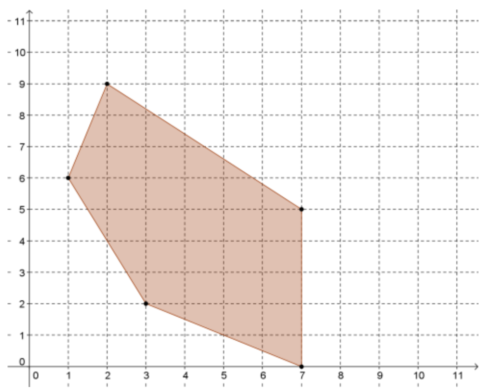
____

Règle de l'objectif :____

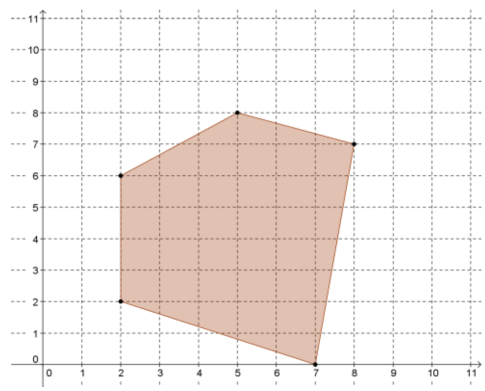
La droite baladeuse

Exercice: Voici quatre polygones de contraintes, chacun accompagné d'une fonction à optimiser. Pour chaque polygone :
a) Tracer la droite baladeuse passant par le sommet qui maximise ET par celui qui minimise la fonction donnée.
b) Donner les valeurs maximales et minimales de chaque fonction.

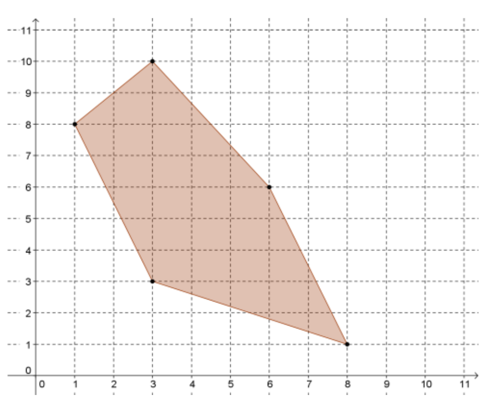
a) B = $x + y$



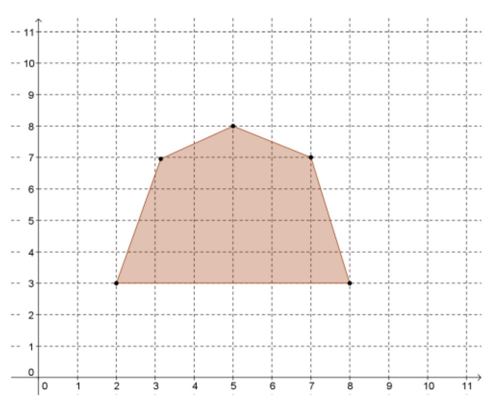
b) C = $x + 4y$



c) Z = $12x + 3y$



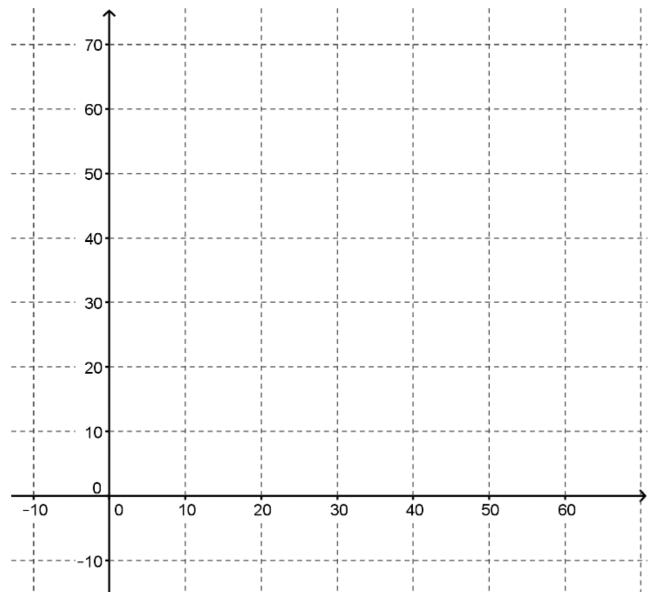
d) M = $x + 5y$



Résolution de problèmes

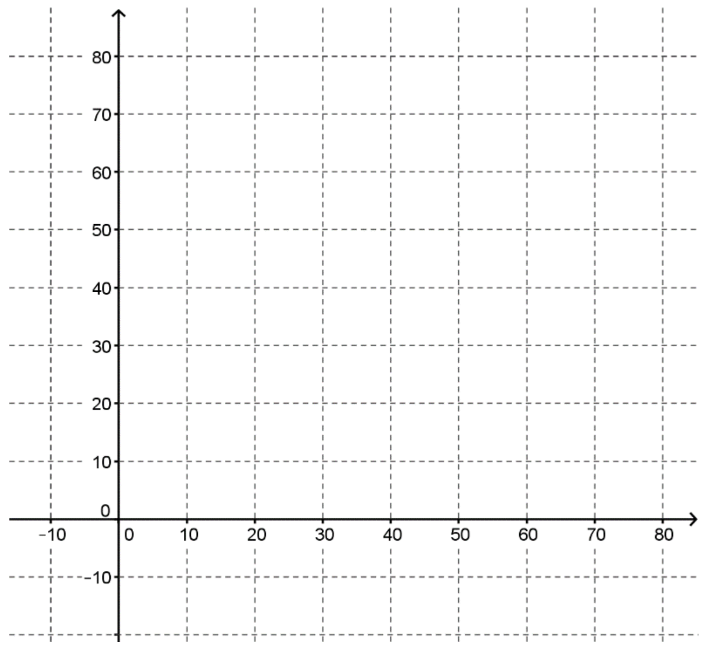
Problème 1:

Un atelier d'usinage produit des hélices et des systèmes d'engrenages destinés à la fabrication de bateaux. Il faut environ 2 h pour produire une hélice et 3 h pour un système d'engrenages. Un règlement concernant la pollution par le bruit limite le fonctionnement des machines à 98 h par semaine. Le volume de l'espace réservé à l'entreposage est de 200 m^3. La boîte contenant une hélice occupe un espace de 1 m^3 et la boîte contenant un système d'engrenages requiert un espace de 3 m^3. Une étude de marché conclut que l'atelier doit produire au moins 2 fois plus d'hélices que de systèmes d'engrenages. En vendant une hélice 800$ et un système d'engrenages 3000$, on recherche le revenu maximal. Combien d'hélices et de systèmes d'engrenages doit-on vendre et à combien s'élève le revenu maximal?



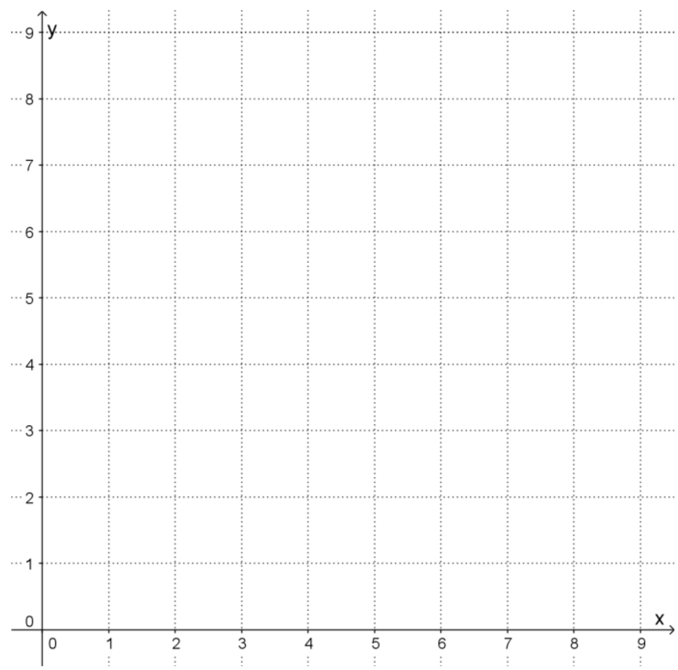
Problème 2:
À vos ordres, capitaine !

Monsieur Arvizet est technicien en navigation et espère devenir un jour capitaine de bateau. Lors d'un stage rémunéré d'une durée d'un mois, il doit travailler sur un catamaran et sur un voilier. Le nombre d'heures de travail par mois sur le catamaran est supérieur (d'au plus 40 h) au nombre d'heures de travail sur le voilier. Monsieur Arvizet doit travailler de 20 h à 40 h par mois sur le voilier. Le stage a une durée totale de 60 h à 100 h. Sur le catamaran, il est payé 4\$/h et sur le voilier, 7\$/h. Comment Monsieur Arvizet doit-il partager son temps si il désire tirer le revenu maximal de son stage ?



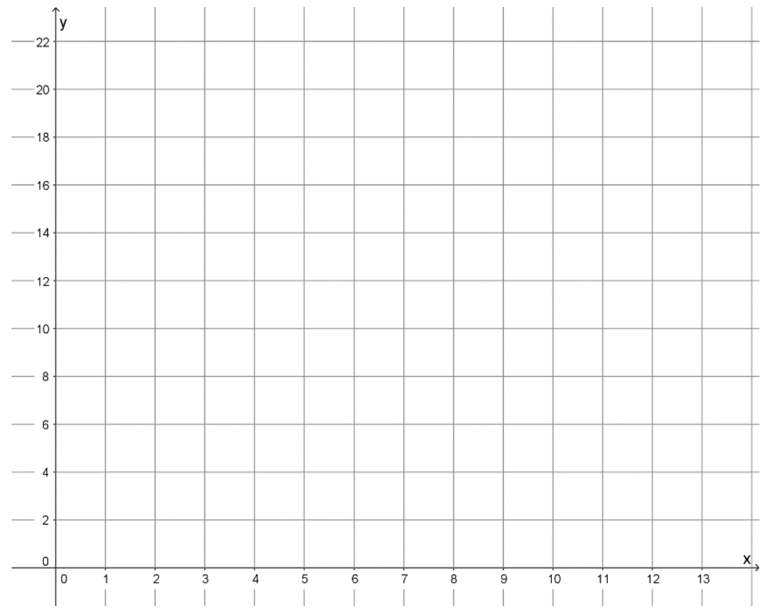
Problème 3:
Faire rouler son argent.

Alain, un mordu de la roulette au casino, a développé une technique de jeu qu'il qualifie d'infaillible. Il place un jeton par case sur un certain nombre de cases noires et de cases rouges. La différence entre le nombre de cases rouges choisies et la moitié du nombre de cases noires choisies ne doit pas dépasser 4, tandis que la différence entre le nombre de cases noires et le sixième du nombre de cases rouges ne doit pas dépasser 3. Si le total des cases choisies est supérieur à 1 et qu'il parie 10$ par case noire et 5$ par case rouge, combien Alain aura-t-il parié au maximum ?



<u>Problème 4</u>:
À vos skis!

Pour faire une excursion en ski de fond, il faut louer des autobus. Les autobus du modèle A et du modèle B sont disponibles. Le modèle A transporte 20 passagers et le modèle B, 12 passagers. Le nombre de modèles A disponibles ne dépasse pas 5 et celui du modèle B ne dépasse pas 10. Le responsable désire connaître combien il lui en coûtera au minimum selon ces conditions, sachant que la location du modèle A coûte 200 $ l'unité et la location du modèle B, 100 $ l'unité. De plus, le responsable doit transporter au moins 240 personnes.



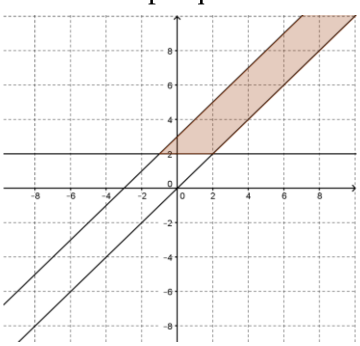
Exercices récapitulatifs

Exercice 1 :
Associez chacun des systèmes d'inéquations suivants à la bonne région-solution.

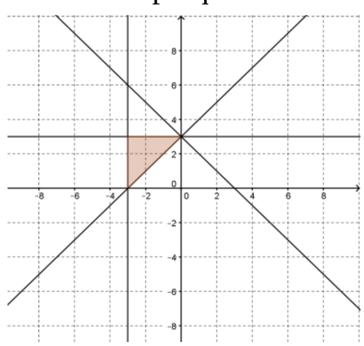
a)	$y \le x+5$	$x+y \ge 5$	$y \ge 0$	
b)	$y \le x$	$x+y \le 5$	$y \ge 0$	
c)	$y \le x$	$x+y \ge 5$	$y \ge 0$	
d)	$-2 \le x$	$x+y \ge -1$	$y \ge x+3$	
e)	$y \ge x$	$y \ge 2$	$x+3 \ge y$	
f)	$x+3 \ge y$	$y \ge x+1$	$y \ge 2$	$x \ge 0$
g)	$y \le x+2$	$y \le x-2$	$x+y \le 2$	$x+y \ge -2$
h)	$y \le x+2$	$y \ge x-2$	$x+y \le -2$	$x+y \ge 2$
i)	$-3 \le x$	$3 \ge y$	$3 \le x+y$	$y \le x+3$
j)	$-3 \le x$	$3 \ge y$	$3 \ge x+y$	$y \ge x+3$

Les régions (voir aussi page suivante) :

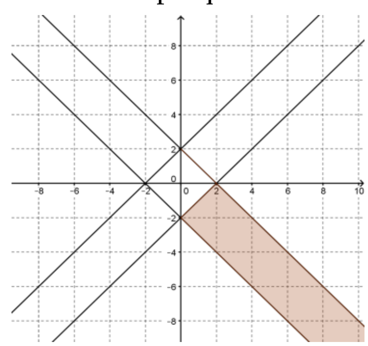
Graphique 1



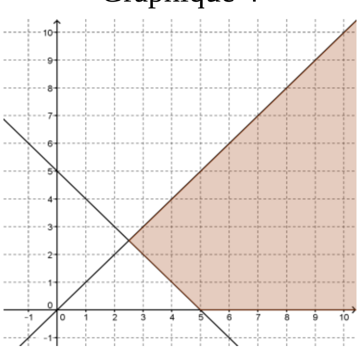
Graphique 2



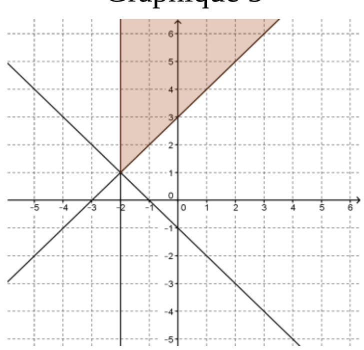
Graphique 3



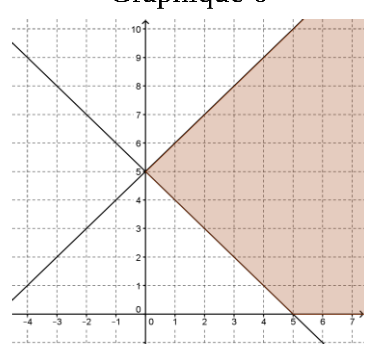
Graphique 4



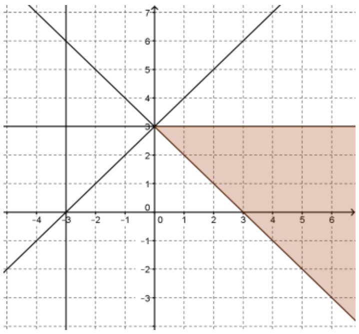
Graphique 5



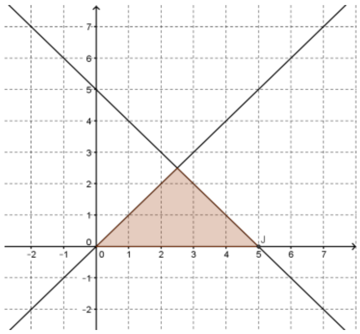
Graphique 6



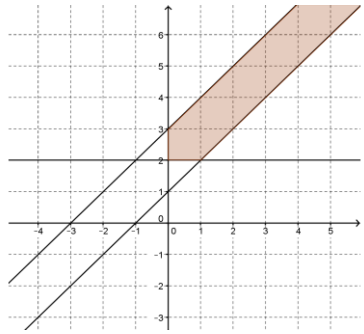
Graphique 7



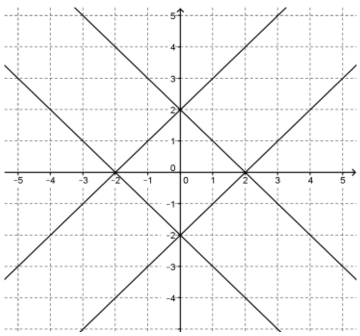
Graphique 8



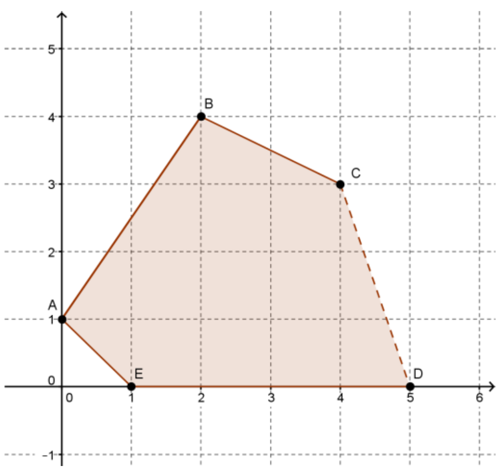
Graphique 9



Graphique 10



<u>Exercice 2</u> : Donner le système d'inéquations qui engendre la région-solution suivante.

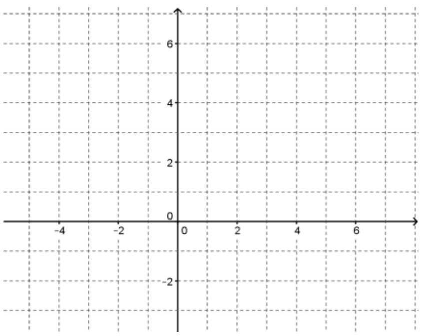


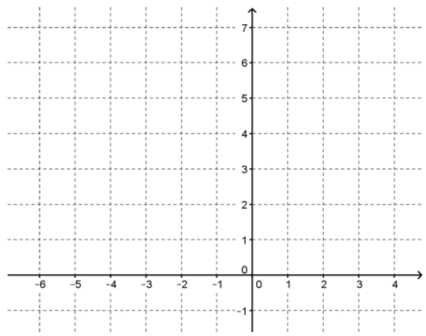
<u>Exercice 3</u> : Résoudre graphiquement les systèmes d'inéquations ci-dessous.

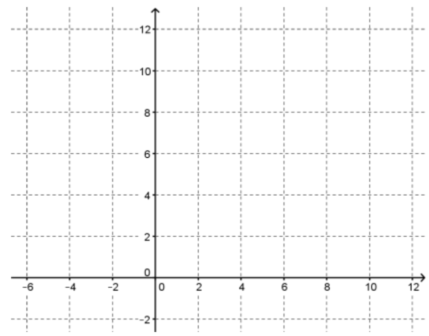
a) $\begin{cases} x \leq -\dfrac{y}{3} + 1 \\ y > \dfrac{2x}{3} + 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ 2x + 7 > 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} y \leq -x + 10 \\ y \leq -2x + 16 \\ y \leq -\dfrac{x}{2} + 8 \end{cases}$







<u>Exercice 4</u> :

Résoudre, en valeur exacte, dans les réels : $\sqrt{2}(x-1) \geq \sqrt{8}x - \sqrt{50}$

<u>Exercice 5</u> : Pour chacune des situations suivantes :
a) Identifier clairement les variables;
b) traduire les contraintes;
c) donner la fonction à optimiser.

Situation 1 :
La compagnie Kinos fabrique de la mousse isolante, un mélange du produit A et du produit B. Chaque mètre cube du produit A pèse 3 kilogrammes et chaque mètre cube du produit B pèse 2 kilogrammes. Pour l'instant, cette compagnie n'a pas besoin de plus de 150 mètres cubes de chaque produit, mais la compagnie Fanos, qui lui vend ces produits en gros et lui les livre, exige que Kinos achète au moins 500 kilogrammes de chaque produit, sinon elle n'est pas intéressée à faire affaire avec elle. La cour de Kinos ne peut recevoir que 450 mètres cubes de marchandise. Sachant que le produit B coûte 5$ le mètre cube et le produit A coûte 6$ le mètre cube, quelle quantité de produit A et de produit B la compagnie Kinos doit-elle acheter pour minimiser ses coûts d'achat?

Situation 2 :
Daphnée confectionne des jupes et des robes. Une jupe demande 1 mètre de tissu, alors qu'une robe en prend 3. Fabriquer une jupe prend une heure tandis que fabriquer une robe en prend 1 heure et demie. Le profit réalisé par la vente d'une jupe est de 17$ alors qu'il est de 50$ pour une robe. Daphnée dispose de 100 mètres de tissu cette semaine. Si elle travaille 10 heures par jour, à un rythme de 6 jours par semaine, combien de robes et de jupes doit-elle confectionner cette semaine pour réaliser le profit maximal?

<u>Exercice 6</u> : À partir du système d'inéquations suivant :

$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ $\quad y \leq 5$ $\quad x + 2y \leq 11$ $\quad x + y \leq 7$

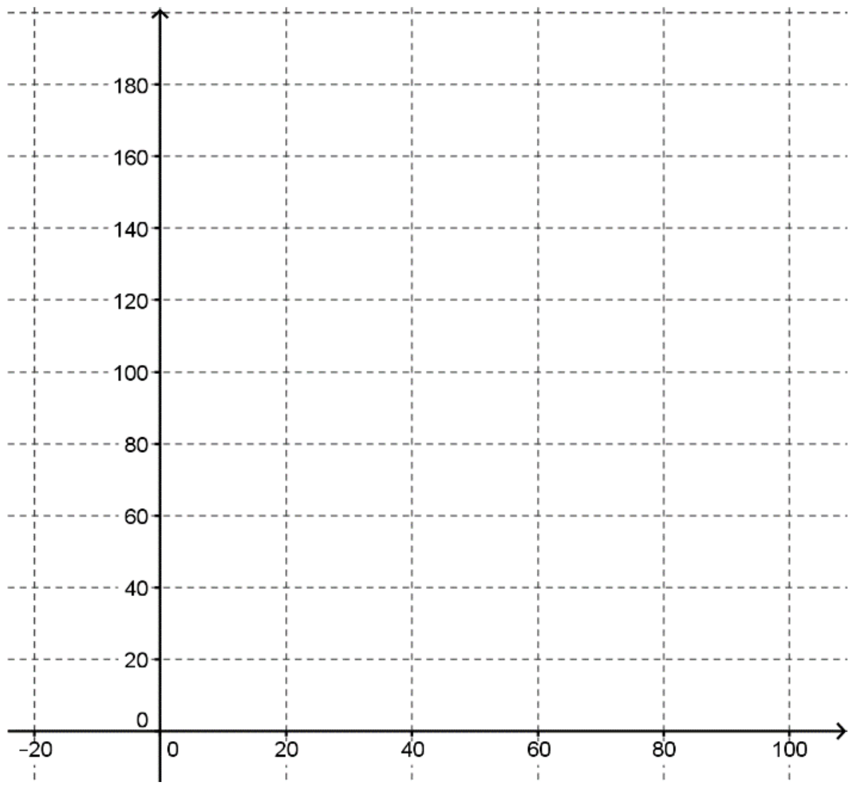
a) Faites un croquis.

b) Donnez les coordonnées de chacun des sommets du polygone de contraintes **que vous aurez trouvées algébriquement**.

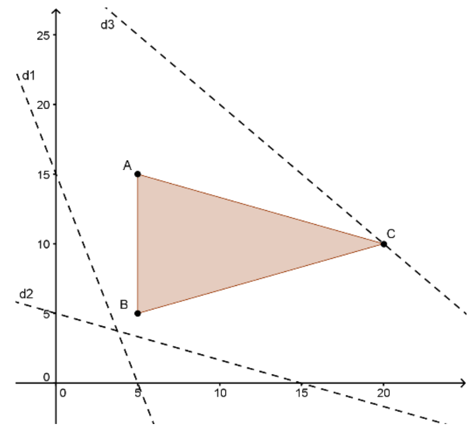
c) Donnez le couple maximisant la fonction Z = 3*x* + 4*y* et précisez la valeur de ce maximum.

<u>Exercice 7</u> :

Léo a décidé de se lancer dans la fabrication de jus de citron et de jus d'orange. L'équipement qu'il possède lui permet de produire au plus 100 litres de jus par jour. Chaque litre de jus d'orange lui coûte 1,50$ à produire tandis que chaque litre de jus de citron lui en coûte 2,00 $. Il vend chaque litre de jus d'orange 2$ et chaque litre de jus de citron 2,75$. Produire un litre de jus de citron lui prend 6 minutes tandis qu'il en faut 3 pour obtenir un litre de jus d'orange. Léo ne peut pas travailler plus de 8 heures par jour. Combien de litres de chaque sorte de jus Léo doit-il produire s'il désire maximiser son profit et quel est ce profit?



Exercice 8 : Soit le polygone de contraintes suivant :



a) Sachant que la fonction à optimiser est donnée par l'équation P = $3x + y$, laquelle des droites baladeuses suggérées doit-on utiliser pour découvrir le sommet optimisant la fonction P ?

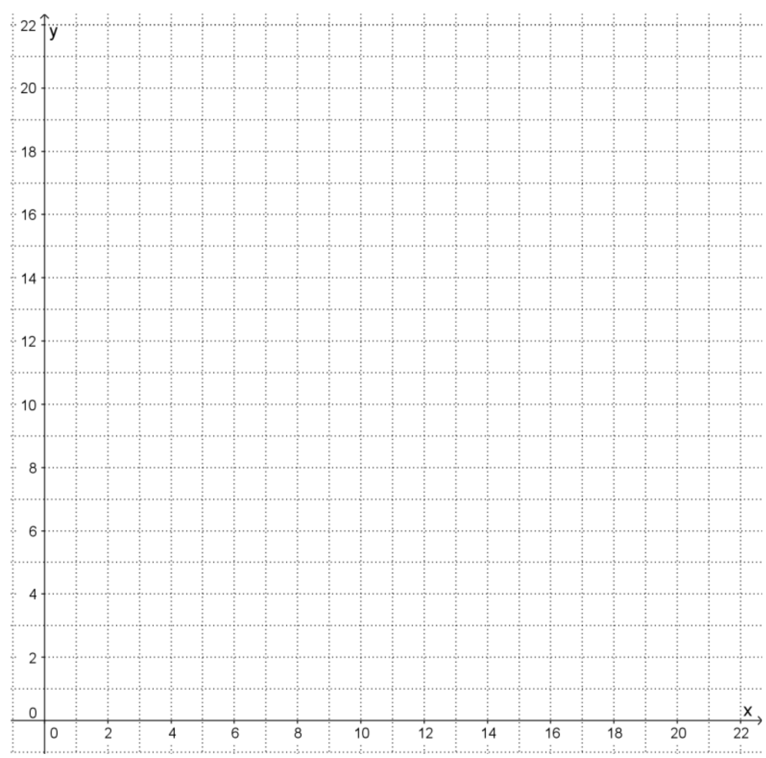
b) Quel sommet minimise P?

c) Quel sommet maximise P?

Exercice 9 :
Soit la situation d'optimisation suivante :
On veut maximiser le coût C en dollars avec C = $3x + 2y$ tel que :

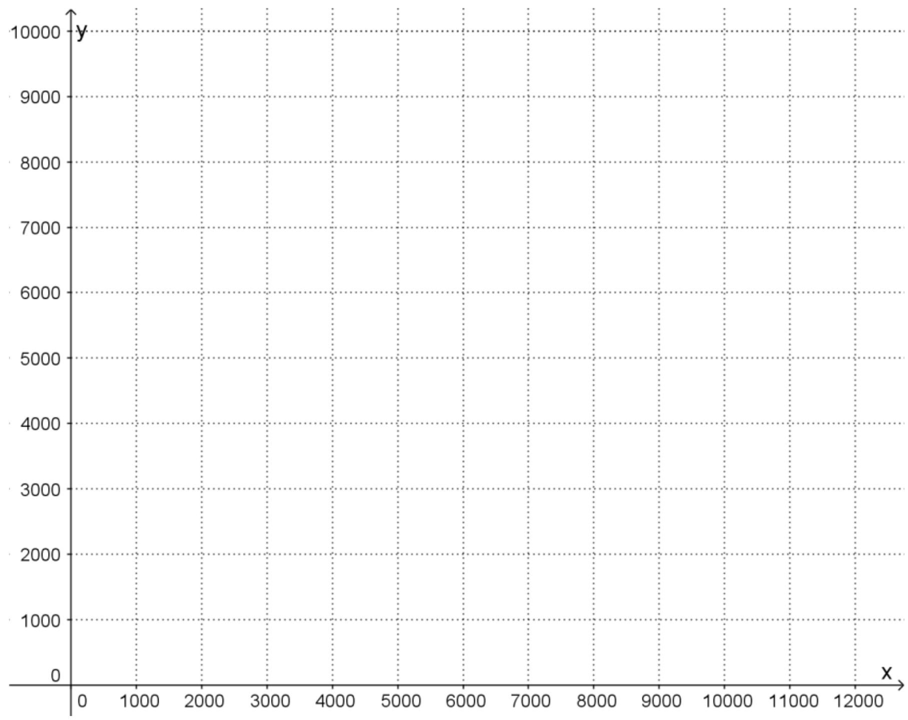
$x \geq 0$ $\quad y \geq 0$ $\quad 2x + y \leq 15$ $\quad x \geq 15 - 2y$

Trouver la solution la plus avantageuse à l'aide de la droite baladeuse.



Exercice 10 :
Une compagnie pharmaceutique fabrique deux types de pastilles, des rouges et des vertes pour soulager le rhume. Chaque pastille contient un analgésique et un décongestionnant. Chaque pastille rouge contient 0,5 mg de décongestionnant et 10 mg d'analgésique, et chaque pastille verte contient 0,8 mg de décongestionnant et 8 mg d'analgésique. La vente d'une pastille rouge rapporte 0,10$ et celle d'une pastille verte 0,08$. Les quantités de décongestionnant et d'analgésique disponibles sont respectivement de 4,8 grammes et de 80 grammes.

Combien de pastilles de chaque sorte la compagnie devrait-elle produire pour maximiser son profit et quel sera ce profit?



Ce document de 74 pages a été préparé par :

Julien Laurencelle, **Youri Lévesque** et **Suzie Mathieu**.