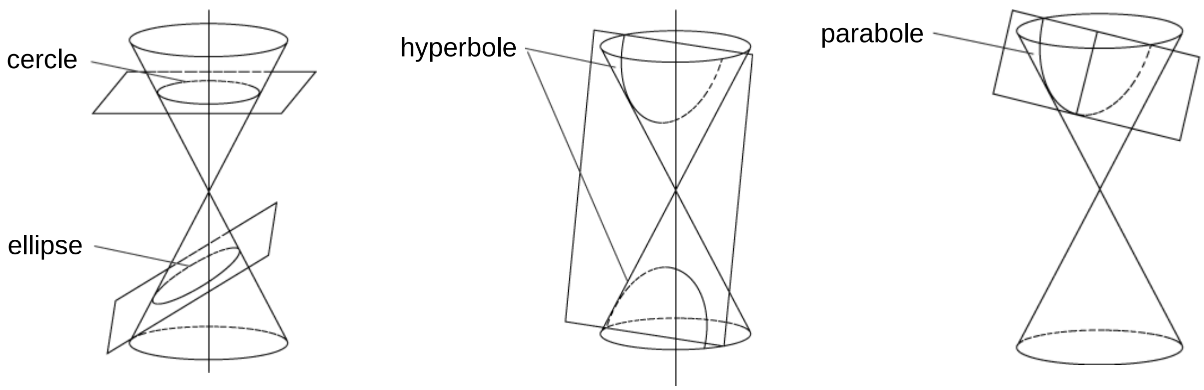
NOTES DE COURS

6.1 SECTIONS CONIQUES ET LIEUX DE POINTS

6.1.1 Les sections d'un cône

Les **coniques** forment une famille de courbes planes résultant de l'intersection d'un plan avec un cône de révolution.



Selon les positions relatives du plan et du cône, on obtient quatre sortes de coniques (à condition que le plan ne passe pas par le sommet du cône). Il suffit de faire varier l'angle d'inclinaison du plan avec l'axe du cône :

- si cet angle mesure 90° (donc si le plan est perpendiculaire à l'axe du cône), l'intersection est un ***cercle*** ;
- si l'angle d'inclinaison est supérieur à l'angle d'ouverture du cône mais inférieur à 90°, c'est une ***ellipse*** ;
- si l'angle d'inclinaison est inférieur à l'angle d'ouverture, c'est une ***hyperbole*** ;
- si les deux angles sont égaux, c'est une ***parabole***.

L'étude des coniques vise à définir, à l'aide d'une équation, la relation entre les coordonnées « x » et « y » d'un point P qui parcourt le *lieu*. La forme générale de l'équation d'une conique est :

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

► En 5e secondaire, le paramètre B (du terme Bxy) sera toujours nul, car il n'apparaît que lorsqu'il y a rotation de conique. Vous l'étudierez peut-être dans un cours plus avancé de géométrie.

Dans ce chapitre, nous étudierons les quatre types de coniques mentionnés ci-dessus.

6.1.2 Les lieux géométriques

Par définition, un *lieu géométrique* est un ensemble de points ayant une propriété métrique commune. Cette propriété est toujours liée au concept de distance.

Voici quelques définitions de lieux géométriques connus. Essayons de les nommer.

- Lieu d'un point situé à égale distance des extrémités d'un segment de droite :

  ____

- Lieu d'un point situé à égale distance de deux droites concourantes :

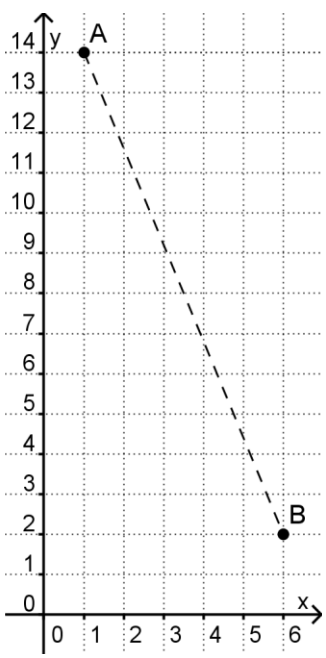
  ____

- Lieu d'un point situé à égale distance d'un point fixe :

  ____

La notion de lieu géométrique prend un tout autre sens lorsqu'on le considère dans le plan cartésien. À ce moment, on cherche à définir le lieu géométrique en termes de la **relation** entre des coordonnées « x » et « y » d'un point P parcourant ce lieu.

Rappels de géométrie analytique



Soit deux points $A(x_A\,,\ y_A)$ et $B(x_B\,,\ y_B)$.

Les coordonnées du **point milieu** du segment AB sont données par :

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2},\ \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

La **distance** entre les points A et B est donnée par :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

6.1.3 Lieux de points et coniques

Il est possible de définir les coniques en termes de lieux de points :

- Cercle : Lieu d'un point dont la distance par rapport à un point fixe, appelé centre, est constante.
- Ellipse : Lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.
- Hyperbole : Lieu d'un point dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes, appelés foyers, est constante.
- Parabole : Lieu d'un point à égale distance d'un point fixe, appelé foyer, et d'une droite fixe, appelée directrice.

Nous reverrons en détail chacune de ces définitions au cours du chapitre.

6.1.4 Lieux de points et équations

C'est à René Descartes et à Pierre de Fermat que nous devons la géométrie analytique et la recherche d'équations de lieux dans le plan cartésien.

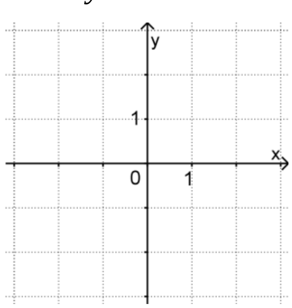
Rechercher l'équation d'un lieu, c'est rechercher la relation entre les coordonnées *x* et *y* d'un point *P* qui parcourt ce lieu.

Une équation de lieu bien connue est celle de la droite.

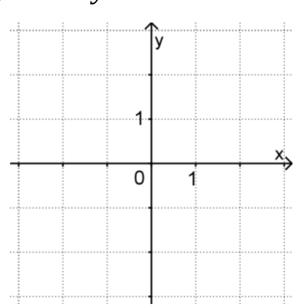
<u>Théorème de l'équation de la droite</u>
Le lieu d'un point est une droite si et seulement si son équation peut être exprimée sous la forme $Ax + By + C = 0$ où les coefficients A et B ne sont pas nuls en même temps.

<u>Exemple</u> : Représenter graphiquement les lieux de points suivants.

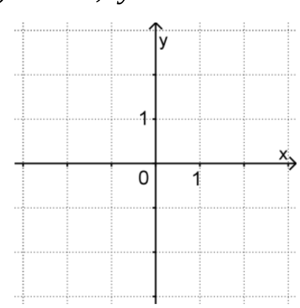
a) $2x + 0y - 4 = 0$



b) $3x + 2y + 4 = 0$



c) $0x + 0{,}5y + 1 = 0$



Mise au point #1 ► Corrigé à la page 53

1. Décrire les lieux correspondant aux équations suivantes :

a) $2x + 3y - 2 = 0$	b) $3y = 4$	c) $-2x + 6 = 2$

2. Trouver l'équation du lieu de P(x, y) sachant qu'il parcourt une droite passant par les points de coordonnées (–5, 4) et (3, –2).

3. Quelle est l'équation du lieu du point P qui est équidistant de A(-3, -2) et B(4, 1) ?

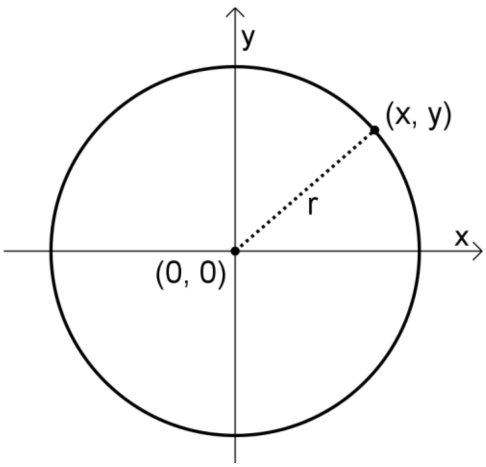
4. Nommer au moins 5 points qui possèdent la caractéristique suivante : « être situé à 5 unités du point O(0, 0) ».

6.2 LE CERCLE

Définition : Lieu d'un point dont la distance par rapport à un point fixe, appelé *centre*, est constante. Cette distance est le *rayon* du cercle.

6.2.1 Équation du cercle centré à l'origine

Quelle est l'équation du cercle centré à l'origine ci-dessous ?



L'équation d'un cercle centré à l'origine est donnée par :

où r est le rayon du cercle

► Un point appartient à un cercle s'il vérifie son équation.

Mise au point #2 ► Corrigé à la page 53

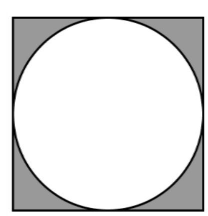
1. Voici l'équation d'un cercle : $x^2 + y^2 = 49$. Donner les coordonnées du centre du cercle et la mesure de son rayon.

2. Est-ce que les points suivants appartiennent au cercle décrit par la relation suivante : $x^2 + y^2 = 169$? Justifier.

   a) (5, 12) b) (–7, 11) c) (0, –13)

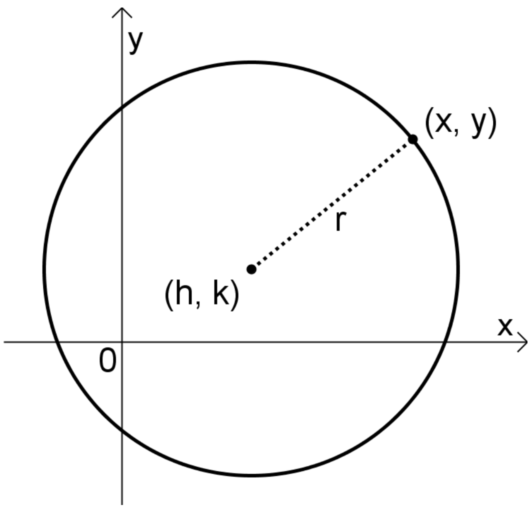
3. a) Quelle est l'aire de la partie ombragée de la figure ci-contre sachant que la diagonale du carré mesure $9\sqrt{2}$ unités?

   b) Quelle est l'équation du cercle si l'on considère que le point de rencontre des diagonales du carré est l'origine du plan cartésien ?



6.2.2 Équation du cercle translaté

Nous avons vu que l'équation du cercle centré à l'origine est $x^2 + y^2 = r^2$ mais qu'en est-il de l'équation du cercle lorsqu'il est translaté dans le plan cartésien ?



L'équation canonique du cercle translaté est :

où (h, k) est le centre du cercle translaté et r, le rayon.

- Le passage de la forme *canonique* à la forme *générale* se fait en effectuant le développement de l'équation. Ainsi, l'**équation du cercle translaté** sous forme générale est donnée par :

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 - r^2 = 0$$

On se souvient que l'équation générale d'une conique est : $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Quelles conditions doit-on poser sur les coefficients A, B et C pour obtenir un cercle?

1)

2)

3)

Exemple 1 : Écrire l'équation du cercle suivant sous sa forme générale :

$$(x+6)^2+(y-1)^2=50$$

L'équation générale du cercle est : ____.

- Le passage de la forme *générale* à la forme *canonique* se fait en complétant des carrés parfaits en « x » et « y ».

Exemple 2 : Écrire l'équation du cercle suivant sous sa forme canonique :

$$x^2+y^2-2x+12y+16=0$$

L'équation canonique du cercle est : ____.

On peut alors dire que les coordonnées du centre du cercle translaté sont : ___________

et que le rayon mesure ______ unités.

Mise au point #3 ► Corrigé à la page 53

1. Exprimer l'équation donnée sous sa forme générale.

   a) $(x-2)^2+(y-3)^2=16$

   b) $(x+4)^2+(y-2)^2=25$

   c) $(x-\sqrt{2})^2+(y+1)^2=9$

2. Exprimer l'équation donnée sous sa forme canonique.

a) $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 36 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

e) $2x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 4 = 0$

3. Les équations suivantes sont-elles celles d'un cercle? Justifier vos réponses.

a) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 10 = 0$

b) $x^2 + 2y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 4y - 4 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2xy + 4y - 4 = 0$

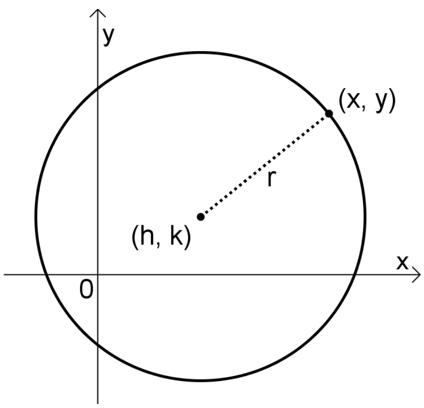
f) $x^2 - y^2 = 16$

6.2.3 Régions associées

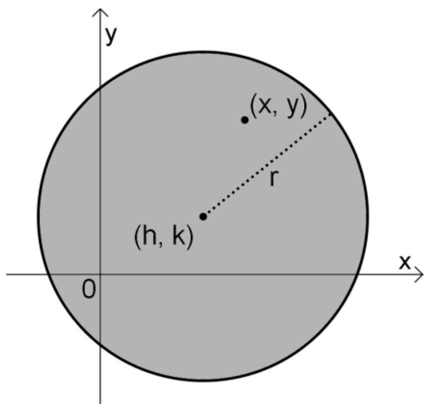
L'équation $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ décrit le lieu des points dont la distance au centre est r. Graphiquement, cela signifie que tous les points ____________ le cercle satisfont cette équation.

L'inéquation $(x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2$ décrit le lieu des points dont la distance au centre est inférieure à r. Graphiquement, cela signifie que tous les points ______________________ du cercle satisfont cette inéquation.

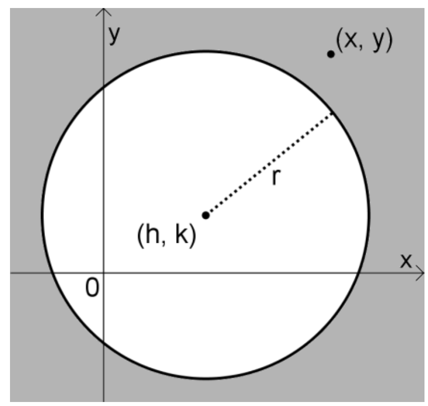
L'inéquation $(x-h)^2 + (y-k)^2 > r^2$ décrit le lieu des points dont la distance au centre est supérieure à r. Graphiquement, cela signifie que tous les points ______________________ du cercle satisfont cette inéquation.



$(x-h)^2 + (y-k)^2 \quad r^2$



$(x-h)^2 + (y-k)^2 \quad r^2$



$(x-h)^2 + (y-k)^2 \quad r^2$

► Si le symbole d'inégalité est < ou > alors on représente le cercle par ________________________.

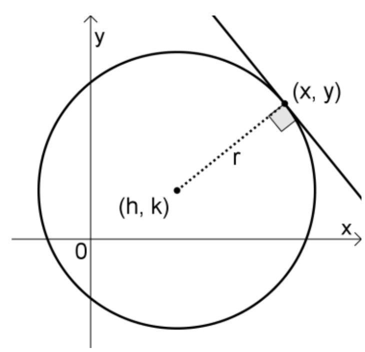
<u>Exemple</u> : Le point A(-3, 7) est-il à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle d'équation

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 100 ?$$

6.2.4 Tangente à un cercle

Définition : Droite interceptant un cercle en <u>un et un seul point</u>.

Toute droite tangente à un cercle possède une caractéristique géométrique particulière. Cette caractéristique nous permettra de trouver l'équation de cette droite tangente à partir des coordonnées du centre du cercle (h, k) et du point de tangence (x, y).



Tout rayon aboutissant au point de tangence est ______________________________ à la tangente.

Rappel : Position relative de droites

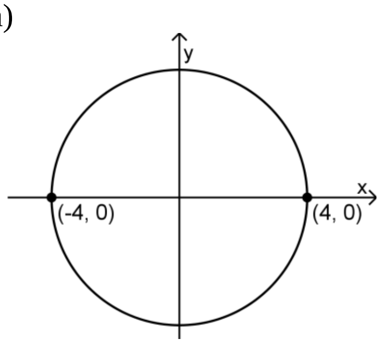
Considérant les pentes m_1, m_2 de deux droites, nous pouvons déduire la position relative des droites. En effet :

si $m_1 = m_2$ alors les droites sont ______________________ ;

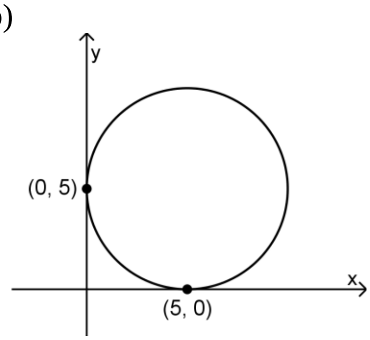
si $m_1 \times m_2 = -1$ alors les droites sont ______________________.

Exercice 1 : Quelle est l'équation de chacun des cercles.

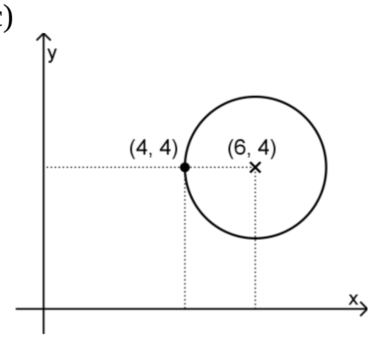
a)



b)



c)

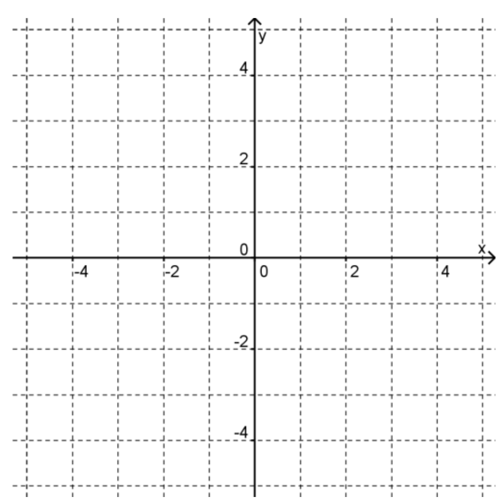


______________________ ______________________ ______________________

Exercice 2 : Déterminer les coordonnées du centre et le rayon des cercles dont les équations sont données. Indiquer ensuite si chacun des cercles passe par l'origine.

	Centre	Rayon	Passe-t-il par (0, 0) ?
a) $x^2 + y^2 = 9$	________	________	________
b) $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$	________	________	________
c) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 20$	________	________	________

Exercice 3 : L'équation d'un cercle est $x^2 + (y + 1)^2 = 10$.



a) Quel est le rayon de ce cercle ?

b) Quelles sont les coordonnées de son centre ?

c) Représenter ce cercle dans un plan cartésien.

d) Si le point A(1, y) appartient au cercle, quelles sont les valeurs possibles de y ?

Exercice 4 : À partir des coordonnées du centre C et d'un point P du cercle, déterminer l'équation du **cercle** et l'équation de la droite **tangente** au cercle en ce point.

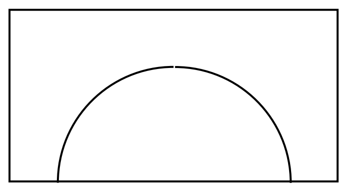
a) C(-2, -1) et P(3, 2)

b) C(3, 0) et P(-3, 8)

c) C(-1, 5) et P(5, -1)

Exercice 5 : Soit les points A(-4, 5) et B(6, 1), les extrémités d'un diamètre d'un cercle. Quelle est l'équation de ce cercle ?

Exercice 6 : L'entrée d'un tunnel a la forme d'un demi-disque. Sa largeur à la base est de 16m. Quelle est la hauteur de la voûte lorsqu'on se trouve à 3m du bord ? (Arrondir le résultat final au dixième près.)



Exercice 7 : Trouver le centre et le rayon des cercles dont les équations sont données.

a) $x^2 + y^2 + 8x = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 12x + 6y + 20 = 0$

Mise au point #4 ► Corrigé à la page 53

1. Déterminer l'équation du cercle de centre (-2, 3) et de rayon 7.

2. Trouver l'équation du cercle dont les extrémités d'un de ses diamètres sont (3, 8) et (-5, 2).

3. Donner l'équation d'une droite tangente au cercle d'équation $x^2 + y^2 = 36$.

4. Un cercle a son centre en (-5, 8) et est tangent à l'axe des ordonnées. Déterminer son équation.

5. Trouver l'équation du cercle dont on donne les coordonnées du centre et d'un point.
   a) O(6, 1) et A(-2, -2)   b) O(-2, 0) et A(0, -4)

6. Donner les coordonnées du centre et la mesure du rayon des cercles suivants :
   a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$ b) $x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 = 0$

   c) $2x^2 + 2y^2 + 12x - 4y + 4 = 0$

7. Quelle est l'équation du cercle dont le centre est (-4, 5) et l'aire de 64π unités carrées ?

8. Quelle est l'équation de la tangente au cercle d'équation $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$ et passant par le point de tangence (2, -1) ?

9. Trouver les points d'intersection du cercle défini par $x^2 + y^2 = 25$ et de la droite d'équation $4x + y - 5 = 0$.

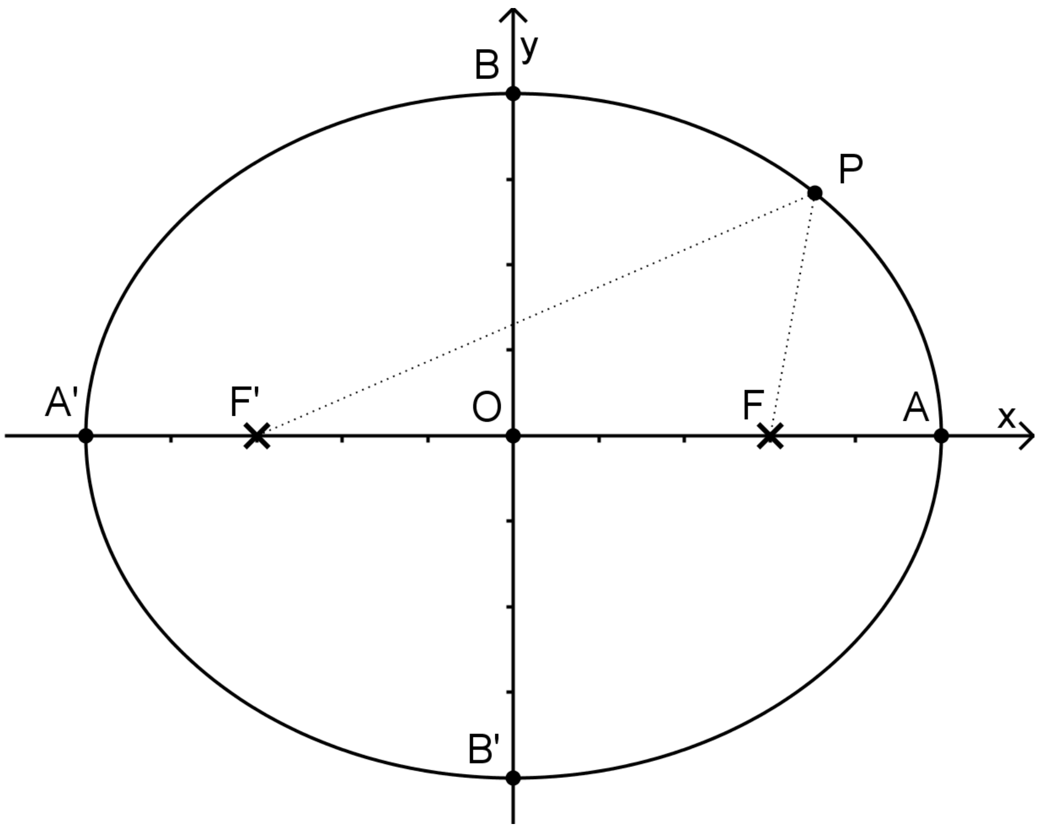
10. Trouver les points d'intersection du cercle défini par $(x-1)^2 + (y+3)^2 = 1$ et de la droite d'équation $y = \frac{2x}{5} - 3$.

6.3 L'ELLIPSE

Définition : Lieu d'un point dont la somme des distances à deux points fixes, appelés *foyers*, est constante.

6.3.1 Un peu de terminologie…

Soit l'ellipse suivante :



F et F'	sont	les foyers
O	est	le centre de l'ellipse
A'A	est	l'axe transversal
$\overline{A'A}$	est	le grand axe
B'B	est	l'axe conjugué
$\overline{B'B}$	est	le petit axe
A, A', B, B'	sont	les sommets

On dit que l'*axe focal* supporte les foyers de l'ellipse.

dans cet exemple…

► L'axe transversal correspond toujours à l'axe focal, qu'il soit horizontal ou vertical.

$$d(\mathrm{PF}) + d(\mathrm{PF'}) = \text{constante}$$
$$d(\mathrm{PF}) + d(\mathrm{PF'}) = \text{mesure du grand axe}$$

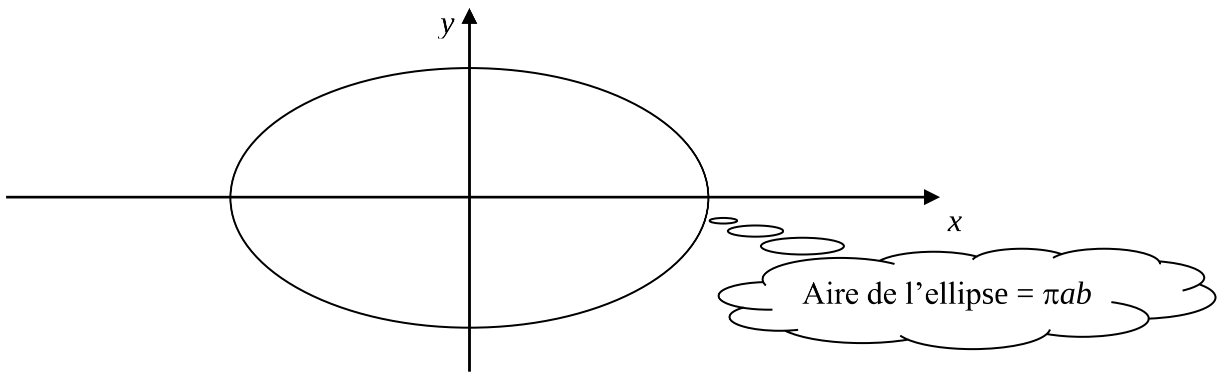
6.3.2 Équation de l'ellipse centrée à l'origine

<u>Théorème de l'équation de l'ellipse</u>
Le lieu d'un point est une ellipse centrée à l'origine avec son grand axe sur l'un des axes si et seulement si son équation canonique est :

où *a* est la demi-mesure de l'axe horizontal et *b* est la demi-mesure de l'axe vertical

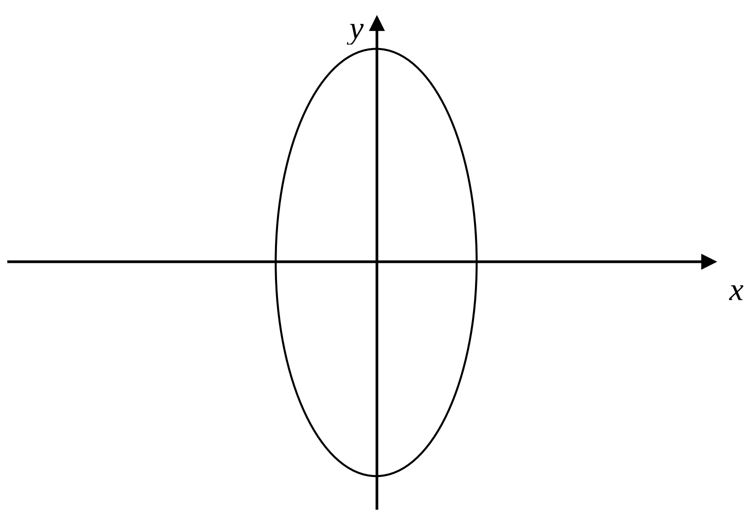
Les coordonnées des sommets de l'ellipse centrée à l'origine sont :

A (_____, _____) A' (_____, _____) B (_____, _____) B' (_____, _____)



Mesure du grand axe = Mesure du petit axe =

L'ellipse centrée à l'origine peut aussi se présenter comme ceci :



Les coordonnées des sommets de l'ellipse centrée à l'origine sont :

A (_____, _____) A' (_____, _____) B (_____, _____) B' (_____, _____)

Mesure du grand axe = Mesure du petit axe =

Démarche algébrique menant à l'équation de l'ellipse centrée à l'origine dans le cas où l'axe focal est sur l'axe des abscisses ($a > b$).

$P(x, y)$ $F(c, 0)$ $F'(-c, 0)$

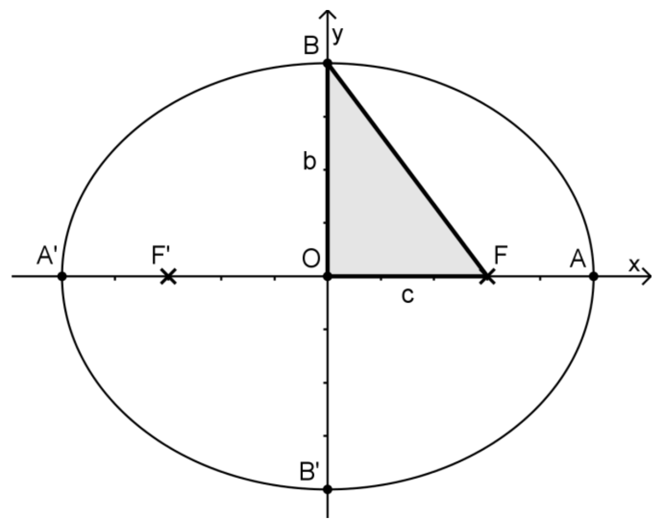
<u>Affirmation</u>	<u>Justification</u>
$d(PF) + d(PF') = 2a$	Par définition de l'ellipse
$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$	Par formule de distance
$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$	Par propriété des équations
$(x-c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2$	Par élévation au carré
$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$	Par développement des carrés
$-4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$	Par propriété des équations
$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$	Par propriété de division des équations
$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2\,((x+c)^2 + y^2)$	Par élévation au carré
$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$	Par propriété de la distributivité
$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$	Par propriété des équations
$(a^2 - b^2)x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2(a^2 - b^2) + a^2y^2$	En substituant c^2 par $a^2 - b^2$
$a^2x^2 - b^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^4 - a^2b^2 + a^2y^2$	Par propriété de la distributivité
$-b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$	Par propriété des équations
$\frac{-b^2x^2}{-a^2b^2} - \frac{a^2y^2}{-a^2b^2} = \frac{-a^2b^2}{-a^2b^2}$	Par propriété de division des équations
d'où $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Par simplification des fractions.

C.Q.F.D.

$\boxed{6.3.3}$ Recherche de coordonnées des foyers de l'ellipse

Pour déterminer les coordonnées des foyers d'une ellipse centrée à l'origine connaissant ses sommets, il faut porter une attention particulière à l'axe transversal de la conique.

Basons notre réflexion sur l'ellipse ci-contre :



Si $a > b$

1º le ΔBOF est rectangle en O

et on a : d(BF) = ______________

2º on a :
d(BF) + d(BF') = d(AF) + d(AF')

= $(a - c)$ + __________

= __________

3º mais d(BF) = __________

4º d'où d(BF) = __________

et d(BF) = $\sqrt{b^2 + c^2}$

5º de cette égalité, on tire : a^2 = __________

donc, c^2 = __________

c = __________ où c est la distance (toujours positive) centre-foyer

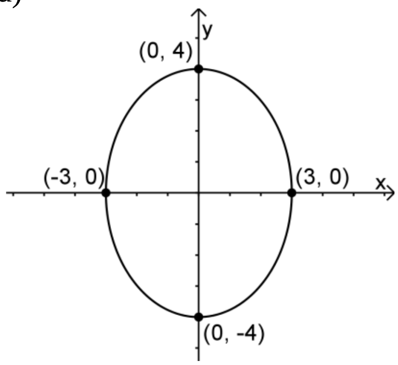
Il est possible de reprendre un raisonnement similaire pour déterminer les coordonnées des foyers d'une ellipse dont l'axe transversal est vertical, c'est-à-dire lorsque $a < b$.

En résumé :

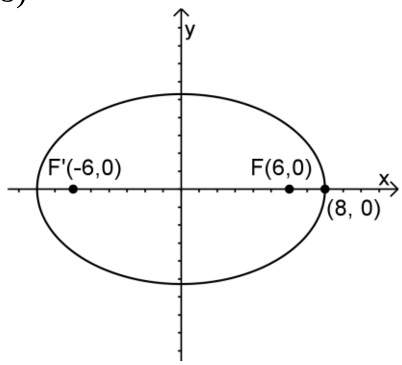
si $a > b$ alors la position des foyers $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ est donnée par la formule c^2 =	si $a < b$ alors la position des foyers $(0, c)$ et $(0, -c)$ est donnée par la formule c^2 =

<u>Exercice 1</u> : Quelle est l'équation de chacune des ellipses suivantes ?

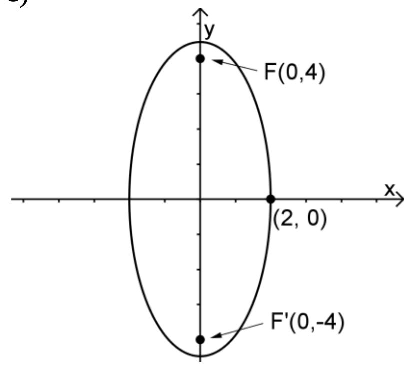
a)



b)

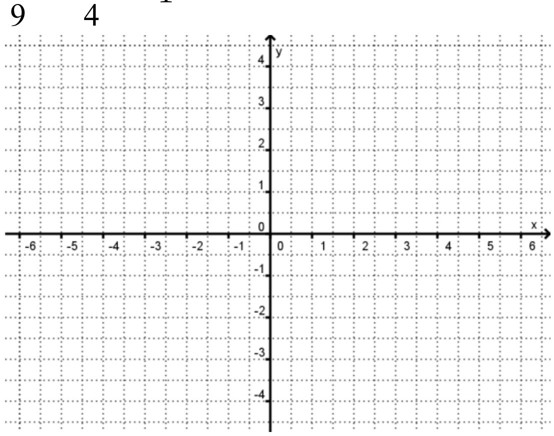


c)

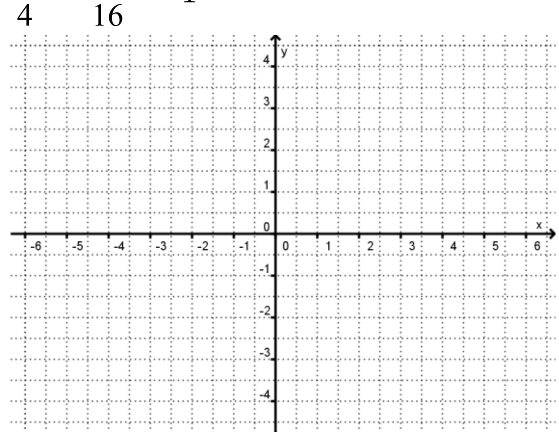


<u>Exercice 2</u> : Construire le graphique des ellipses suivantes :

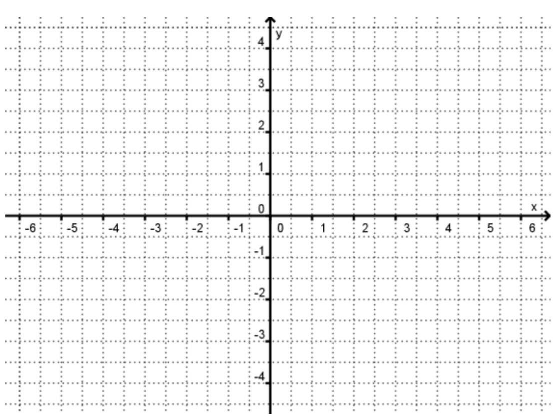
a) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$



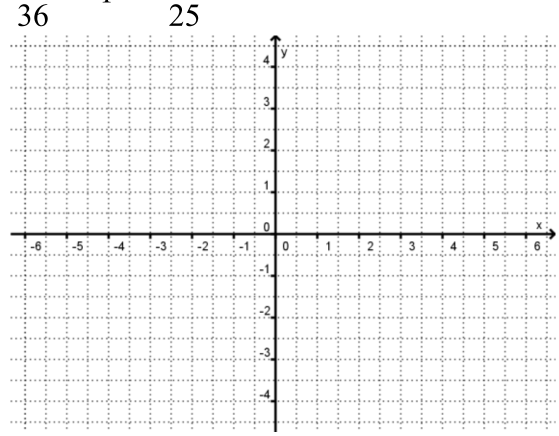
b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$



c) $16x^2 + 25y^2 = 400$



d) $\dfrac{x^2}{36} = 1 - \dfrac{4y^2}{25}$



Exercice 3 : Quelles sont les caractéristiques des ellipses dont les équations sont données.

	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Mesure du grand axe
a) $\dfrac{x^2}{225} + \dfrac{y^2}{81} = 1$			
b) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$			
c) $\dfrac{x^2}{49} + \dfrac{y^2}{13} = 1$			

Exercice 4 : Déterminer les coordonnées des foyers connaissant deux des sommets de l'ellipse.

a) A(8, 0) et B'(0, -4)

b) A(2, 0) et B(0, 3)

Exercice 5 : L'équation d'une ellipse est $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{18} = 1$.

a) Quelles sont les coordonnées de son centre ?

b) Quelles sont les mesures du grand axe et du petit axe ?

c) Quelles sont les coordonnées des foyers de cette ellipse ?

d) Si le point A(1, y) appartient à cette ellipse, quelle est la valeur de y ?

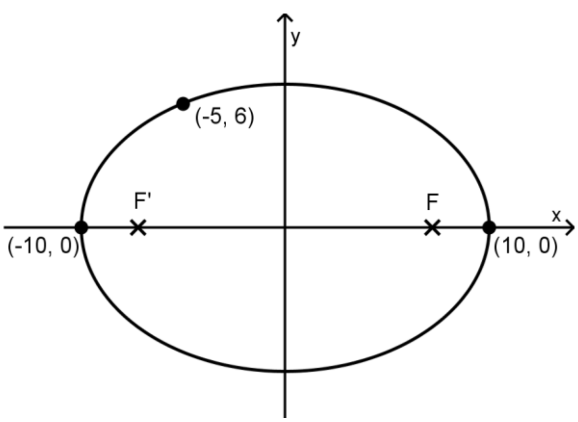
<u>Exercice 6</u> : Chacune des ellipses décrites est centrée à l'origine. Déterminer leur équation.

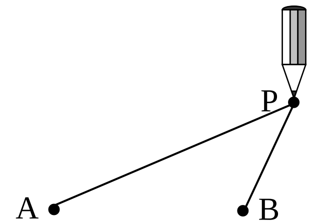
a) Deux sommets se trouvent aux points (0, 1) et (0, -1). Le grand axe mesure 10 unités.

b) La distance entre les deux foyers est de 8 unités et l'un des sommets se trouve au point (-3, 0).

c) Les foyers de l'ellipse ont pour coordonnées (4, 0) et (-4, 0). Le grand axe mesure 12 unités.

<u>Exercice 7</u> : Quelles sont les coordonnées des foyers de l'ellipse représentée ci-dessous ?





Exercice 8 : Émilie s'apprête à tracer une ellipse sur une grande feuille à l'aide d'une ficelle de 40cm. Elle fixe les extrémités de la ficelle aux points A et B distants de 24cm. Avec son crayon au point P, elle tend ensuite la ficelle et trace l'ellipse. Déterminer la mesure du grand axe et celle du petit axe.

Exercice 9 : Lors de son voyage à Rome, François a visité le Colisée avec un groupe de touristes. Le guide qui les accompagnait leur a expliqué que ce monument avait la forme d'une ellipse longue de 187 m et large de 155 m. François a remarqué qu'il y avait deux entrées principales aux extrémités du grand axe.

a) Alors qu'il se trouvait à l'une des entrées, quelle distance séparait François du plus proche foyer de l'ellipse ?

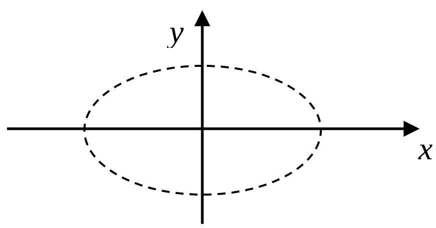
b) Après avoir estimé la position du foyer, François s'y est rendu. Quelle est, au mètre près, la largeur du Colisée à cet endroit ?

$\boxed{6.3.4}$ **Régions associées**

Comme l'ellipse est constituée des points dont la somme des distances aux foyers est égale à la mesure du grand axe, il est facile de déduire que :

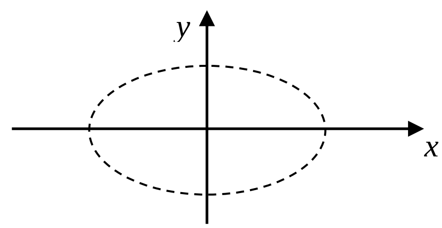
l'INTÉRIEUR de l'ellipse est constitué des points dont la somme des distances aux foyers est INFÉRIEURE à la mesure de grand axe et correspond à l'inéquation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad\quad 1$$



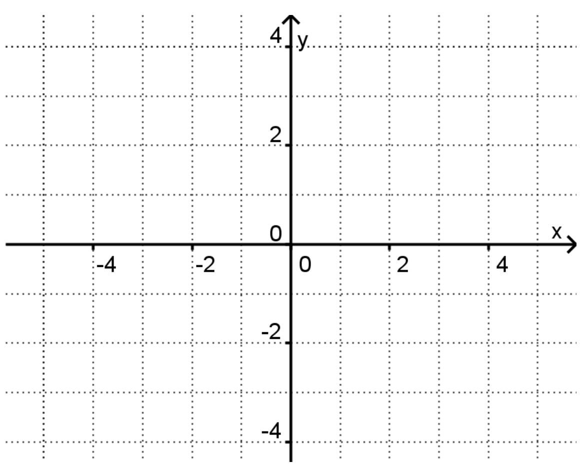
l'EXTÉRIEUR de l'ellipse est constitué des points dont la somme des distances aux foyers est SUPÉRIEURE à la mesure du grand axe et correspond à l'inéquation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad\quad 1$$

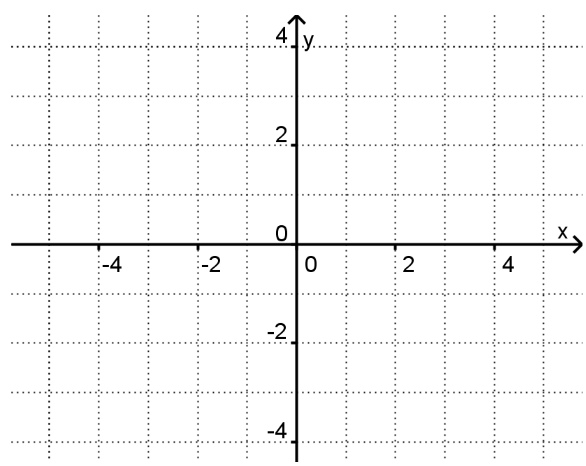


<u>Exemple 1</u> : Déterminer graphiquement la région du plan associée aux inéquations suivantes :

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} \geqslant 1$



b) $\frac{x^2}{4} + y^2 < 1$



Exemple 2 : Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1$ et le cercle centré en (2, 0) passant les foyers de l'ellipse. Le cercle est-il entièrement compris à l'intérieur de l'ellipse?

Exemple 3 : Soit le cercle d'équation $x^2+y^2-8y+11=0$.

a) Déterminer l'inéquation associée à la région extérieure (seulement) de l'ellipse dont les foyers ont pour coordonnées $\left(\pm\sqrt{10}, 0\right)$ et dont un des sommets coïncide avec le centre du cercle.

b) Déterminer les abscisses des points de cette ellipse ayant 1 pour ordonnée.

6.3.5 Équation de l'ellipse translatée (*enrichissement*)

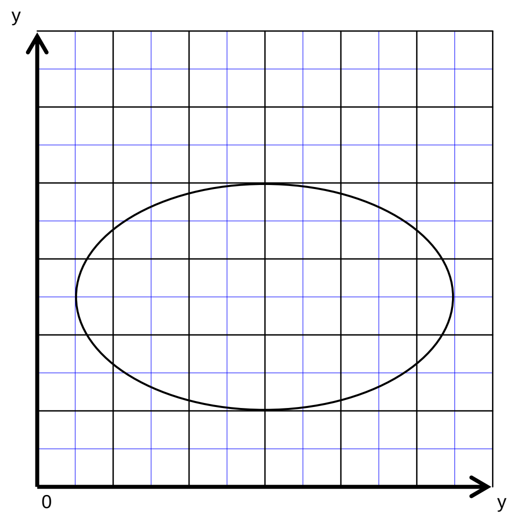
L'équation canonique d'une ellipse translatée est donnée par :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

où a est la demi-mesure de l'axe horizontal et
b est la demi-mesure de l'axe vertical
(h, k) sont les coordonnées du centre de l'ellipse

L'ellipse translatée peut se présenter de deux façons différentes :

Ellipse translatée « horizontale »



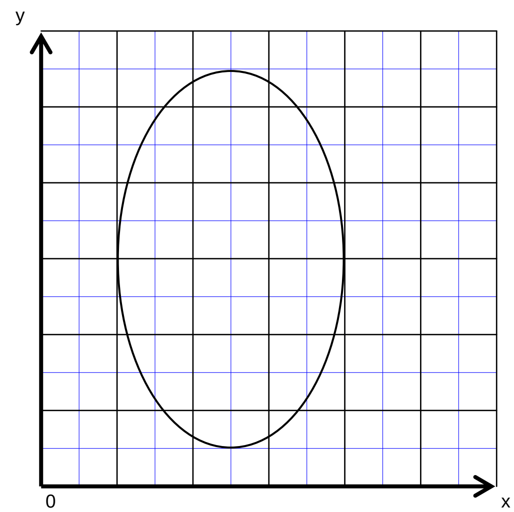
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a > b$$

F1 (_____, _____); F2 (_____, _____)

A (_____, _____) ; A' (_____, _____)

B (_____, _____) ; B' (_____, _____)

Ellipse translatée « verticale »



$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \text{avec } a < b$$

F1 (_____, _____); F2 (_____, _____)

A (_____, _____) ; A' (_____, _____)

B (_____, _____) ; B' (_____, _____)

L'équation générale d'une ellipse a la forme : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.
Il s'agit d'une ellipse (et non d'une autre conique) si et seulement si :

1) 2)

Exemple 1 : Soit l'équation de l'ellipse $\frac{(x+5)^2}{64} + \frac{(y-2)^2}{100} = 1$

a) Quelles sont les coordonnées du centre de l'ellipse?

b) Quelles sont les mesures respectives du grand et du petit axe?

c) Est-ce que l'ellipse est horizontale ou verticale?

d) Quelle serait l'équation de cette ellipse sous forme générale?

Exemple 2 : Trouver les coordonnées du centre, des sommets et des foyers de l'ellipse d'équation :

$$x^2 + 4y^2 - 10x + 16y + 37 = 0$$

<u>Exemple 3</u> : Un archéologue a quadrillé le terrain d'une cité pour une recherche sur le site de ***C**onique de la **R**ome **A**ntique* dont les fortifications forment une ellipse. Un des foyers de cette ellipse se trouve au point $F_1(1, -4)$. Au centre de la cité, un lac circulaire a été repéré. Par analyse des données recueillies par un sondage échographique, l'ordinateur nous livre l'équation du périmètre (en km) de ce lac : $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 51 = 0$. Le petit axe de l'ellipse mesure 6 km.

a) Donner l'équation décrivant cette ellipse.

b) Calculer l'aire de la cité.

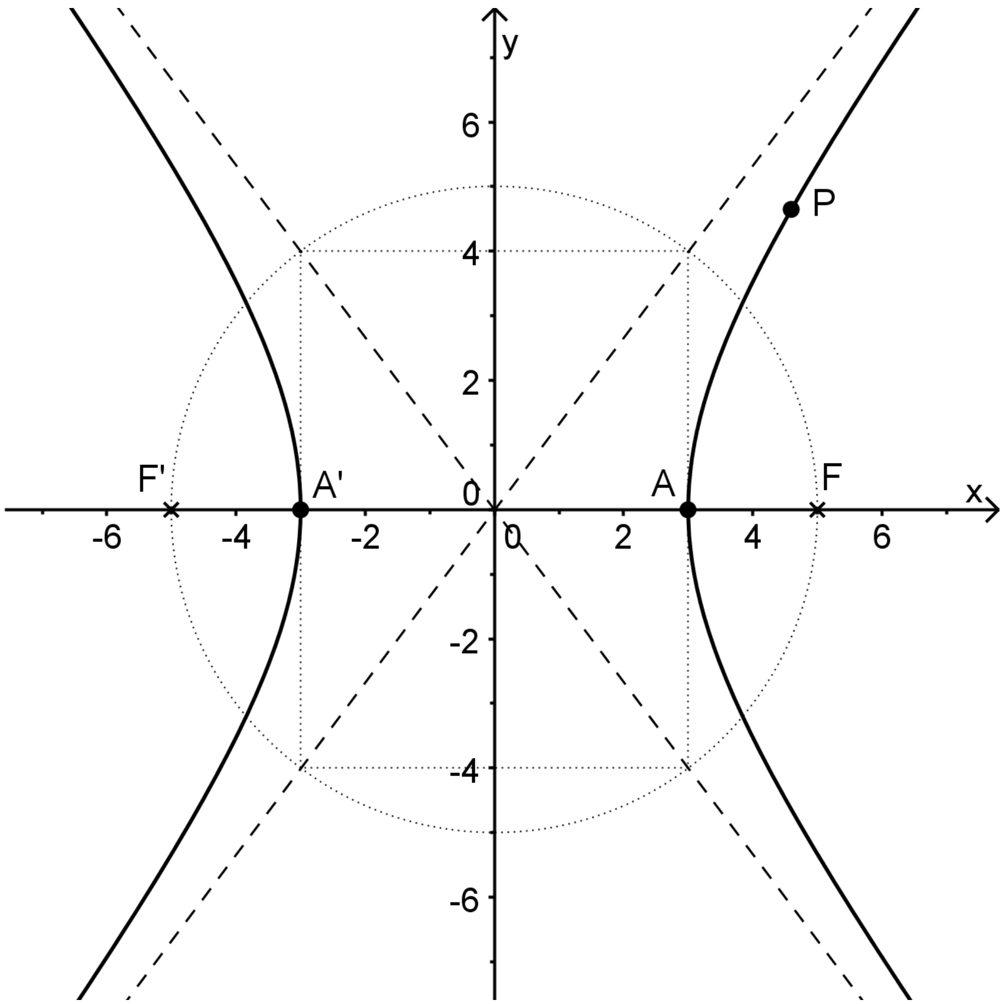
c) Un canal linéaire avait été creusé à travers la cité. L'ordinateur de repérage donne l'équation $x + 2y + 2 = 0$. Trouver les coordonnées des points de rencontre du canal avec la muraille.

6.4 L'HYPERBOLE

Définition : Lieu d'un point dont la valeur absolue de la différence des distances à deux points fixes, appelés *foyers*, est constante.

6.4.1 Un peu de terminologie…

Soit l'hyperbole suivante :



O	est	le centre de l'hyperbole	
F et F'	sont	les foyers de l'hyperbole	
A et A'	sont	les sommets de l'hyperbole	
axe des *x*	est	l'axe transversal (axe focal)	*dans cet exemple…*
axe des *y*	est	l'axe conjugué	

$$\left| d(PF) - d(PF') \right| = \text{constante}$$

$$\left| d(PF) - d(PF') \right| = \text{distance entre les deux sommets de l'hyperbole}$$

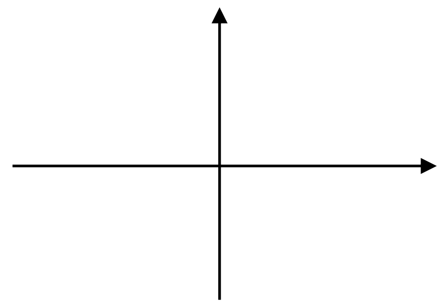
$\boxed{6.4.2}$ Équation de l'hyperbole centrée à l'origine

L'équation de l'hyperbole centrée à l'origine s'exprime de deux façons différentes selon l'orientation de son axe focal dans le plan cartésien.

Théorème de l'équation de l'hyperbole
Le lieu d'un point est une hyperbole centrée à l'origine avec son axe focal sur l'un des axes si et seulement si son équation canonique est :

1er cas : axe focal sur l'axe des abscisses

Croquis



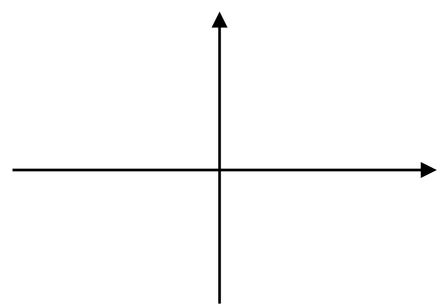
où $A(a, 0)$ et $A'(-a, 0)$ sont les coordonnées des sommets
et $F(c, 0)$ et $F'(-c, 0)$ sont les coordonnées des foyers

$$|d(PF) - d(PF')| =$$

2e cas : axe focal sur l'axe des ordonnées

Croquis

$\Leftrightarrow$



où $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$ sont les coordonnées des sommets
et $F(0, c)$ et $F'(0, -c)$ sont les coordonnées des foyers

$$|d(PF) - d(PF')| =$$

Dans les deux cas, la relation entre les constantes a, b et c est :

et les équations des asymptotes sont :

et

Démarche algébrique menant à l'équation de l'hyperbole centrée à l'origine dans le cas où l'axe focal est sur l'axe des abscisses ($a > 0$ et $c > 0$).

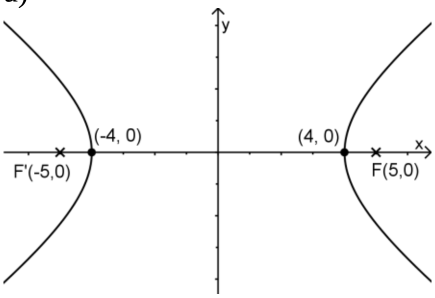
A(a, 0) F(c, 0) F'($-c$, 0)

<u>Affirmation</u>	<u>Justification</u>
$\lvert d(AF) - d(AF') \rvert = 2a$	Par définition de l'hyperbole
$\left\lvert \sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} \right\rvert = 2a$	Par formule de distance
$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$	Par définition de la valeur absolue
$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$	Par propriété des équations
$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2+y^2$	Par élévation au carré
$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2$	Par développement des carrés
$-4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$	Par propriété des équations
$cx + a^2 = \pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$	Par propriété de division des équations
$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2\left((x+c)^2+y^2\right)$	Par élévation au carré
$c^2x^2 + 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$	Par élévation au carré et propriété de la distributivité
$c^2x^2 + a^4 = a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2$	Par propriété des équations
$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$	Par propriété des équations
$(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$	Par mise en évidence de x^2 et a^2
$\dfrac{(c^2-a^2)x^2}{a^2(c^2-a^2)} - \dfrac{a^2y^2}{a^2(c^2-a^2)} = \dfrac{a^2(c^2-a^2)}{a^2(c^2-a^2)}$	Par propriété de division des équations
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{(c^2-a^2)} = 1$	Par simplification des fractions
d'où $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	En substituant $c^2 - a^2$ par b^2

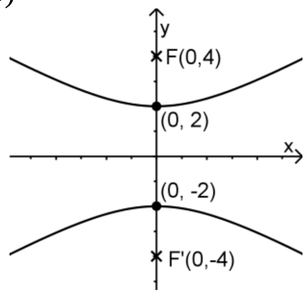
C.Q.F.D.

<u>Exemple 1</u> : Quelle est l'équation de chacune des hyperboles suivantes ?

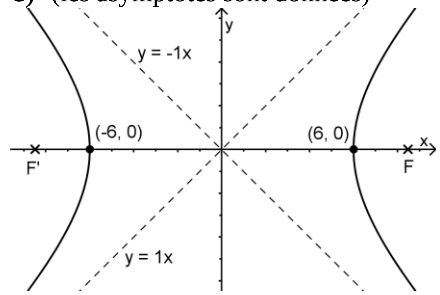
a)



b)



c) (les asymptotes sont données)

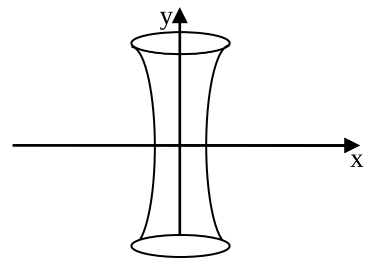


______ ______ ______

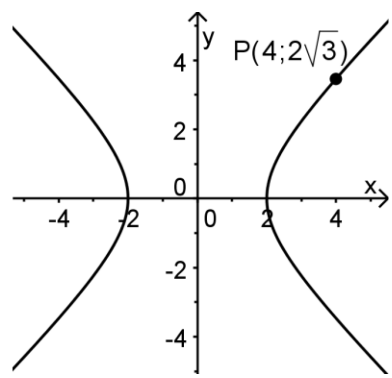
<u>Exemple 2</u> : Quelles sont les caractéristiques des hyperboles dont les équations sont données ?

	Coordonnées des sommets	Coordonnées des foyers	Équations des asymptotes
a) $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$			
b) $\frac{x^2}{24} - \frac{y^2}{25} = 1$			
c) $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$			
d) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{8} = 1$			
e) $x^2 - y^2 = 1$			

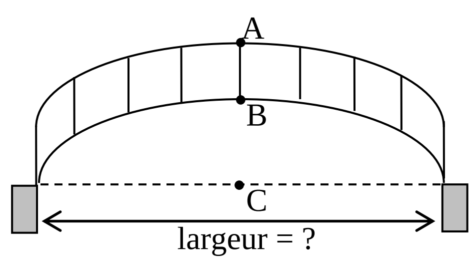
Exemple 3 : Une designer a utilisé une hyperbole d'équations $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{200} = 1$ pour créer un vase dont voici une représentation. Sachant que le diamètre de la base et le diamètre de l'ouverture sont de 12 cm chacun, déterminer la hauteur du vase.



Exemple 4 : Quelles sont les équations des asymptotes de l'hyperbole ci-contre ?



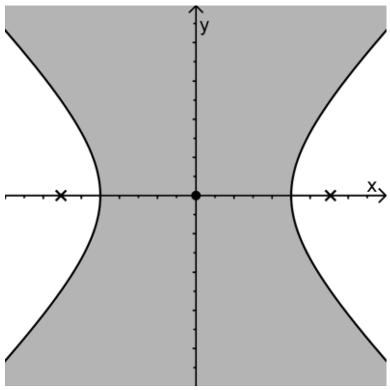
Exemple 5 : Le tablier d'un petit pont enjambant un ruisseau a la forme d'une branche d'une hyperbole. Les points A, B et C du dessin représentent respectivement le centre de cette hyperbole, l'un de ses sommets et l'un de ses foyers. Le sommet B se trouve exactement à 1 m du centre et du foyer. Enfin, le foyer C se situe à la même hauteur que les deux extrémités du pont. Quelle est la largeur du pont ?



6.4.3 Régions associées

Pour déterminer laquelle des deux régions possibles est associée à l'inéquation, on utilise les coordonnées du centre de l'hyperbole. Si les coordonnées vérifient l'inéquation, il s'agit de cette région ; sinon, il s'agit de l'autre région du plan.

Région « intérieure »

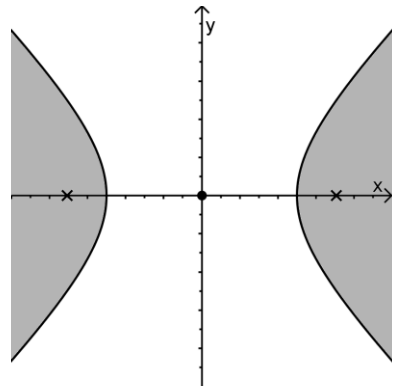


$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad 1$$

Région qui contient ______________________

de l'hyperbole

Région « extérieure »



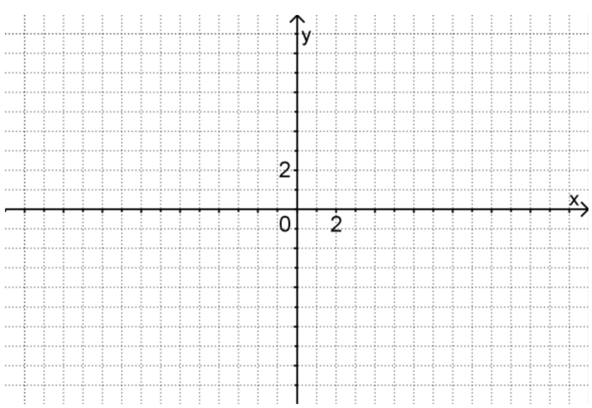
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad 1$$

Région qui contient ______________________

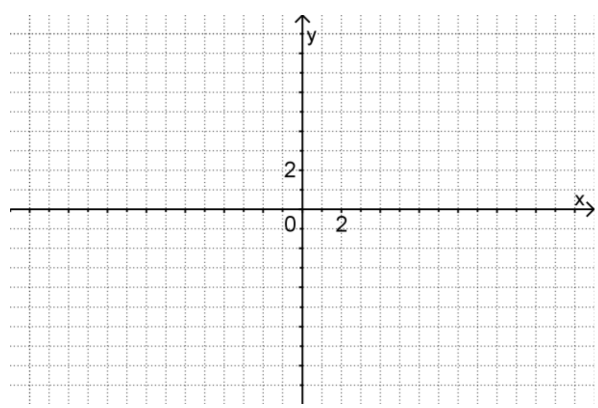
de l'hyperbole

<u>Exemple</u> : Pour chacune des hyperboles suivantes, déterminer les coordonnées du centre, des sommets et des foyers; puis donner les équations de ses asymptotes; enfin représenter graphiquement la région associée aux inéquations.

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{25} \geqslant 1$

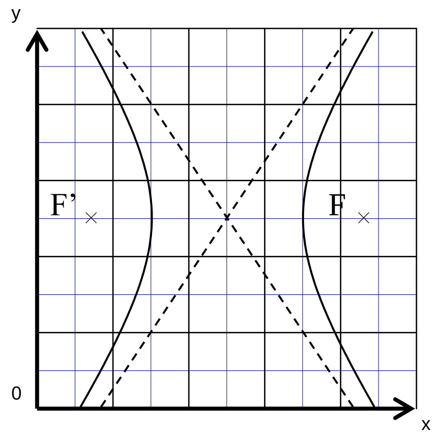
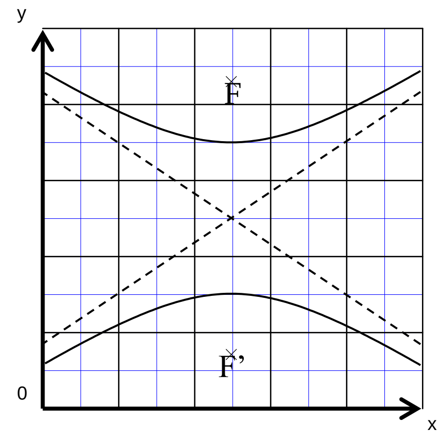


b) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{45} \geqslant -1$



6.4.4 Équation de l'hyperbole translatée (*enrichissement*)

L'équation canonique de l'hyperbole translatée varie légèrement selon l'aspect de cette dernière. Comme l'ellipse, l'hyperbole translatée peut se présenter de deux façons différentes :

<table>
<tr><th></th><th>Hyperbole translatée « horizontale »
(ouverte vers la gauche et la droite)</th><th>Hyperbole translatée « verticale »
(ouverte vers le haut et le bas)</th></tr>
<tr><td>Graphique cartésien</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Équation canonique</td><td>$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
où
a est la distance au sommet de l'hyperbole et
b est la distance entre le sommet et le point d'intersection entre la perpendiculaire à l'axe focal passant par le sommet et un cercle de rayon c centré aux coordonnées (h, k).</td><td>$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = -1$$
ou
$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$
où
b est la distance au sommet de l'hyperbole et
a est la distance entre le sommet et le point d'intersection entre la perpendiculaire à l'axe focal passant par le sommet et un cercle de rayon c centré aux coordonnées (h, k).</td></tr>
<tr><td>Centre</td><td>C (_____, _____)</td><td>C (_____, _____)</td></tr>
<tr><td>Foyers</td><td>F (_____, _____) ; F' (_____, _____)</td><td>F (_____, _____) ; F' (_____, _____)</td></tr>
<tr><td>Sommets</td><td>A (_____, _____) ; A' (_____, _____)</td><td>B (_____, _____) ; B' (_____, _____)</td></tr>
</table>

L'équation générale d'une hyperbole a la forme : $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Il s'agit d'une hyperbole (et non d'une autre conique) si et seulement si ______________.

<u>Exemple 1</u> : Soit l'équation de l'hyperbole $\frac{(x-7)^2}{64} - \frac{(y+3)^2}{121} = 1$

a) Quelles sont les coordonnées du centre de l'hyperbole?

b) Quelle est la distance entre les deux sommets?

c) Quelle est la distance entre les deux foyers?

d) Est-ce que l'hyperbole est horizontale ou verticale?

e) Quelle serait l'équation de cette hyperbole sous forme générale?

<u>Exemple 2</u> : Trouver les coordonnées du centre, des sommets et des foyers de l'hyperbole d'équation, puis donner les équations de ses asymptotes :

$$16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y + 199 = 0$$

Exemple 3 : Déterminer l'équation du cercle tangent aux sommets de l'hyperbole d'équation :

$$9x^2 + 36x - 5y^2 + 30y - 54 = 0$$

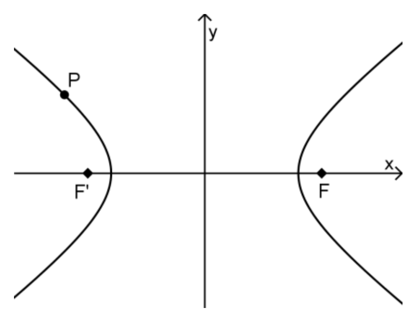
Les sommets de l'hyperbole sont situés entre les foyers.
Les foyers de l'ellipse sont situés entre les sommets.

EXERCICES RÉCAPITULATIFS

1. Identifier (nommer) le lieu décrit par chacune des équations suivantes :
   a) $3x-2y+7=0$
   b) $3x^2-y^2+5=0$
   c) $4x^2=1-4y^2$
   d) $\frac{3x^2}{5}+\frac{1}{2}y^2=3$

2. Soit le cercle d'équation $x^2+y^2-12=0$. Sachant que ce cercle passe par les foyers et par deux sommets d'une ellipse d'axe focal vertical, déterminer l'équation de cette ellipse.

3. Déterminer la règle de l'hyperbole suivante sachant que ses foyers ont pour coordonnées ($\pm$10, 0) et que d(P, F') = 7 et d(P, F) = 23.



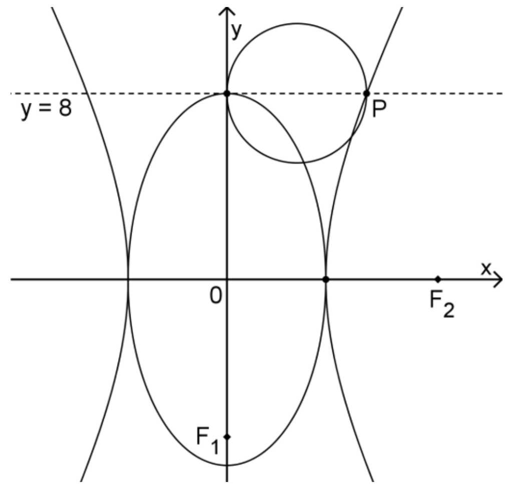
4. Soit l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{144}-\frac{x^2}{25}=1$. Sachant qu'un cercle est centré au foyer supérieur de l'hyperbole et qu'il est tangent aux deux asymptotes :

a) Faire un croquis de la situation.

b) Déterminer les coordonnées des points de tangence.

c) Déterminer l'équation du cercle.

5. Dans le graphique ci-contre :
   - l'ellipse et l'hyperbole sont centrées à l'origine,
   - le cercle rencontre l'hyperbole au point P(6, 8),
   - le foyer F_1 de l'ellipse est situé au point $(0, -\sqrt{46})$.



   a) Donner l'équation du cercle.

   b) Déterminer la mesure du petit axe de l'ellipse.

   c) Trouver les coordonnées du foyer F_2 de l'hyperbole.

6. Trouver les coordonnées des points d'intersection des lieux géométriques définis par ces équations :

   a) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{25}=1$ et $2x-y-3=0$

b) $\frac{x^2}{28} - \frac{y^2}{28} = 1$ et $y = -x$

c) $x^2 - y^2 = 1$ et $2x + y + 5 = 0$

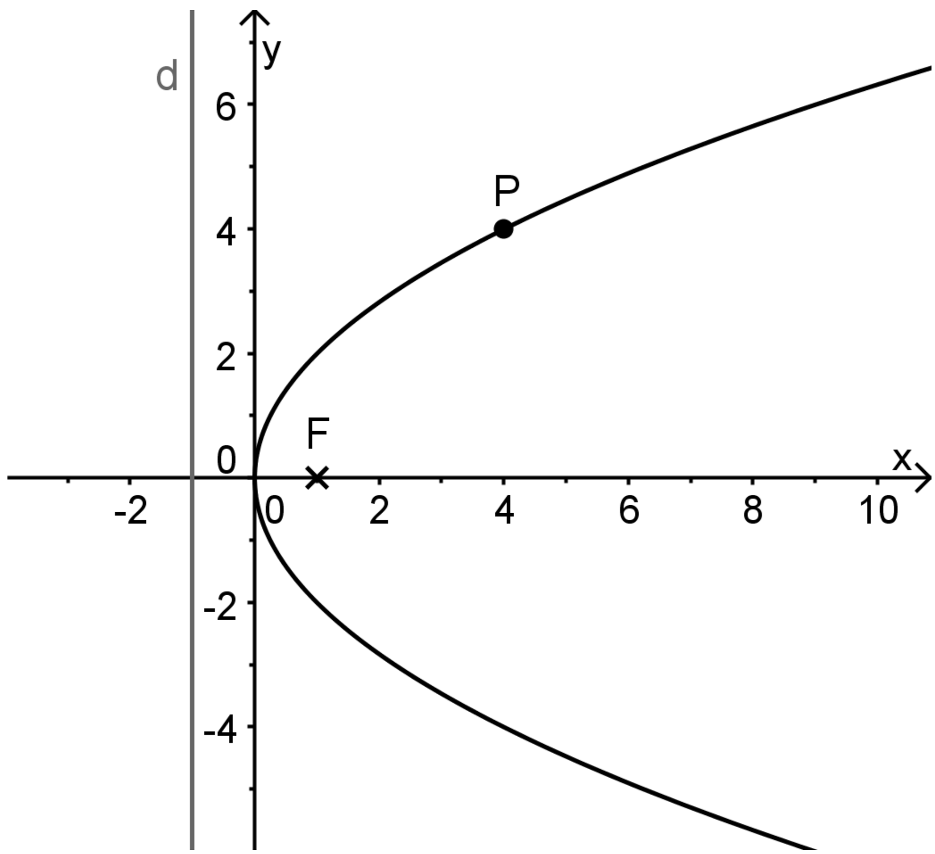
d) $\frac{x^2}{11} + \frac{y^2}{18} = 1$ et $y = \sqrt{18}$

$\boxed{6.5}$ LA PARABOLE

Définition : Lieu d'un point à égale distance d'un point fixe, appelé *foyer*, et d'une droite fixe, appelée *directrice*.

$\boxed{6.5.1}$ Un peu de terminologie…

Soit la parabole suivante :



F	est	le foyer de la parabole
O	est	le sommet de la parabole
d	est	la directrice de la parabole

La ***distance focale*** (notée *c*) est la distance entre le sommet de la parabole et la directrice <u>ou</u> la distance entre le sommet de la parabole et le foyer.

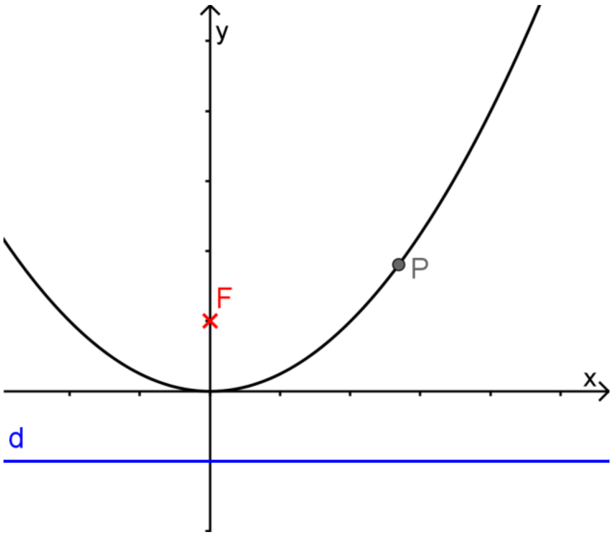
Axe focal de la parabole : droite perpendiculaire à la directrice et qui passe par le foyer.

Sommet : point d'intersection de la parabole et son axe focal.

► La parabole possède un seul axe de symétrie (qui est aussi son axe focal).

$\boxed{6.5.2}$ Équation de la parabole centrée à l'origine

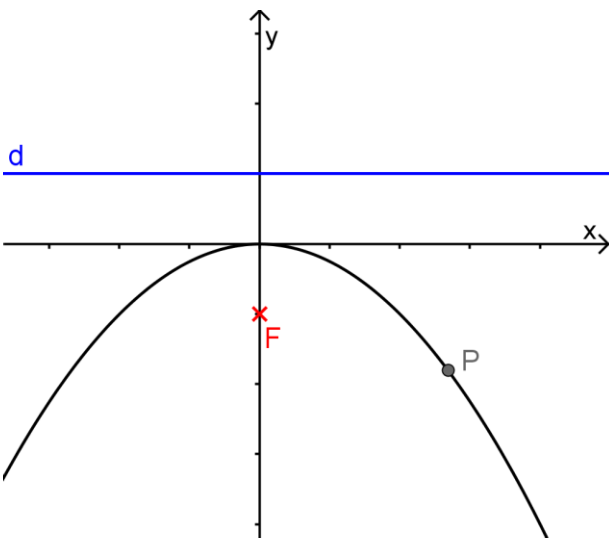
On considère toutes les paraboles dont le sommet est à l'origine et dont l'axe de symétrie est horizontal ou vertical. On obtient **quatre** cas selon que la parabole est ouverte vers le haut, vers le bas, vers la droite ou vers la gauche :



<u>Cas #1 : Parabole ouverte vers le haut</u>

Selon la définition de la parabole, on a :

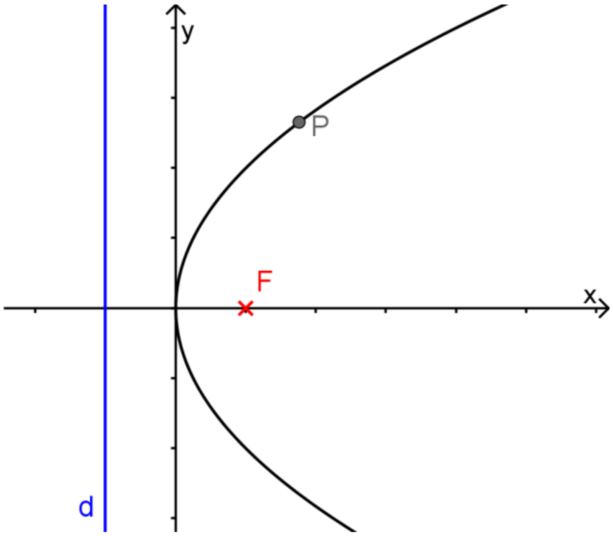
Son équation canonique est donc



<u>Cas #2 : Parabole ouverte vers le bas</u>

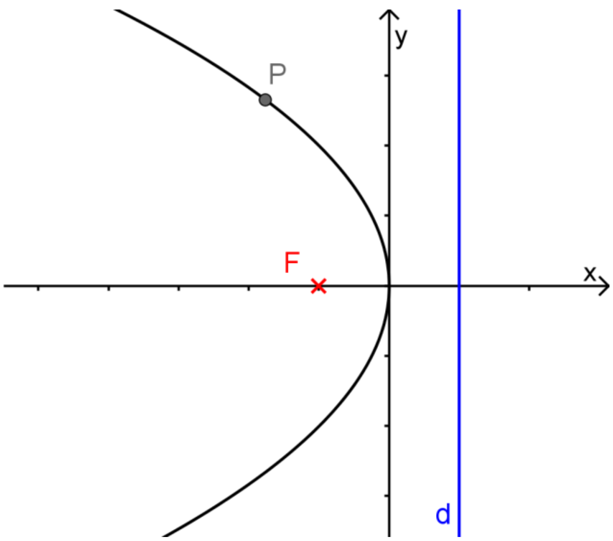
Son équation canonique est donc

Le paramètre c représente la <u>distance</u> focale de la parabole (d'où $c > 0$).



Cas #3 : Parabole ouverte vers la droite

Son équation canonique est donc



Cas #4 : Parabole ouverte vers la gauche

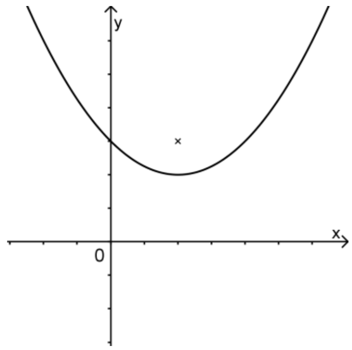
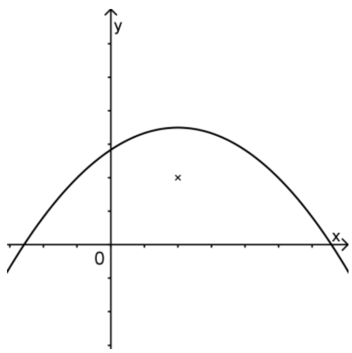
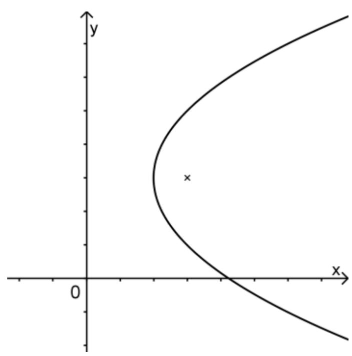
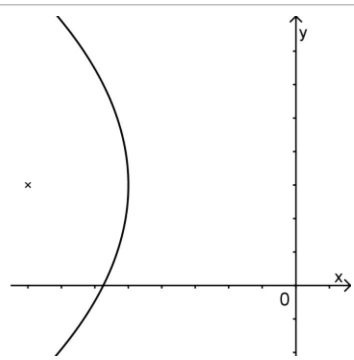
Son équation canonique est donc

$\boxed{6.5.3}$ Équation de la parabole translatée

Les équations canoniques de la parabole translatée sont données par :

$$(x-h)^2 = 4c(y-k) \qquad (y-k)^2 = 4c(x-h)$$
$$(x-h)^2 = -4c(y-k) \qquad (y-k)^2 = -4c(x-h)$$

où (h, k) sont les coordonnées du sommet de la parabole.

Graphique	Équation canonique	Description
	$(x-h)^2 = 4c(y-k)$	Sommet S : Foyer F : Axe de symétrie : Directrice d :
	$(x-h)^2 = -4c(y-k)$	Sommet S : Foyer F : Axe de symétrie : Directrice d :
	$(y-k)^2 = 4c(x-h)$	Sommet S : Foyer F : Axe de symétrie : Directrice d :
	$(y-k)^2 = -4c(x-h)$	Sommet S : Foyer F : Axe de symétrie : Directrice d :

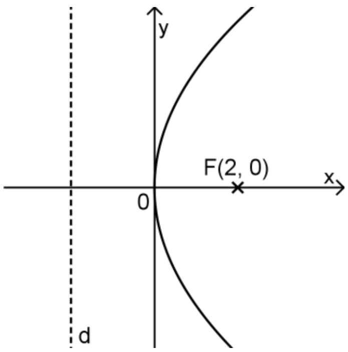
On obtient la forme générale de l’équation de la parabole en développant son équation canonique, ce qui donne :

$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0$ où __________ (axe vertical)

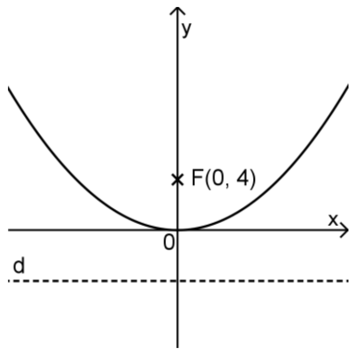
$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ où __________ (axe horizontal)

<u>Exercice 1</u> : Quelle est l'équation de chacune des paraboles suivantes ?

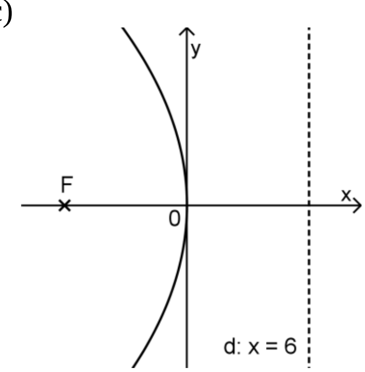
a)



b)



c)



<u>Exercice 2</u> : Quelles sont les caractéristiques des paraboles dont les équations sont données ?

	Équation de l'axe de symétrie	Coordonnées du foyer	Équation de la directrice
a) $y^2 = -16x$			
b) $x^2 = 8y$			
c) $y^2 = 2x$			
d) $x^2 = -2{,}4y$			

<u>Exercice 3</u> : Déterminer l'équation des paraboles centrées à l'origine suivantes.

a) Les coordonnées du foyer sont (-2, 0).

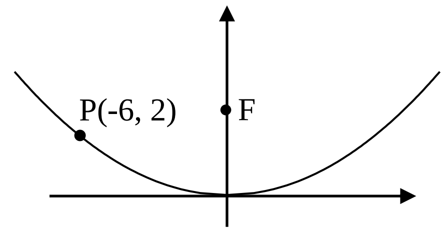
b) L'équation de la directrice est $x = 5$.

c) L'axe de symétrie et la directrice se croisent au point (0, 3).

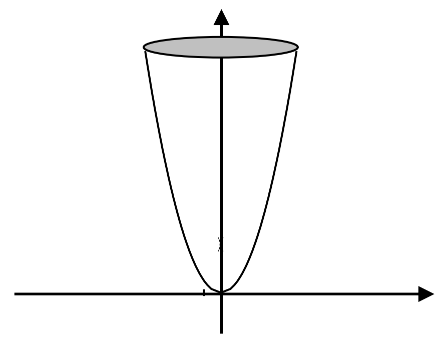
d) L'axe de symétrie est $x = 0$ et la directrice passe par le point (3, 4).

e) La parabole passe par le point R(4, 5) et possède un axe focal à $y = 0$.

<u>Exercice 4</u> : Déterminer les coordonnées du foyer de cette parabole qui passe par le point P(-6, 2) et dont le sommet est à l'origine.



<u>Exercice 5</u> : La partie supérieure de cette coupe dessinée dans le plan cartésien a la forme d'une parabole dont l'équation est $x^2 = \frac{4}{3}y$ (l'unité étant le centimètre). La profondeur de la coupe est égale à 36 fois la distance entre le foyer et le sommet de la parabole. Quelle est la largeur de la coupe ?



<u>Exercice 6</u> : Soit la parabole d'équation $(x + 1)^2 = -8(y - 2)$

a) Déterminer sa concavité.

b) Que vaut la distance focale?

c) Quelles sont les coordonnées du foyer et du sommet?

d) Quelles sont les équations de la directrice et de l'axe de la parabole?

e) Est-ce que le point M $\left(5, \frac{-5}{2}\right)$ appartient à la parabole? Pourquoi?

Exercice 7 : Quelle est l'équation de la parabole sachant qu'elle est concave vers la gauche, a son sommet en (3, 1) et une distance focale de 4 unités?

Exercice 8 : Quelle est l'équation de la parabole sachant que son foyer est au point (4, 13) et l'équation de la directrice est y = -3?

Exercice 9 : Quelle est la plus courte distance entre C (comète) et E (étoile située au foyer) sachant que C suit la trajectoire décrite par le lieu suivant : $y^2 - 8y - 48x + 400 = 0$?

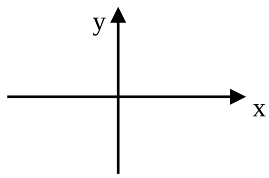
Exercice 10 : Quelles sont les caractéristiques des paraboles associées aux fonctions suivantes ?

	Coordonnées du sommet	Coordonnées du foyer	Équation de la directrice
a) $f(x) = x^2$	________	________	________
b) $g(x) = -2(x-1)^2 + 5$	________	________	________
c) $h(x) = 3x^2 + 6x - 9$	________	________	________

6.5.4 Régions associées

Pour tout point P situé à l'INTÉRIEUR d'une parabole, la distance d'un point au foyer est INFÉRIEURE à la distance entre ce point et la directrice, de sorte que les inéquations

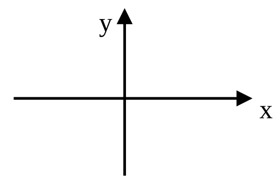
$$\begin{cases} x^2 < 4cy \\ x^2 < -4cy \\ y^2 < 4cx \\ y^2 < -4cx \end{cases}$$



représentent toutes la région intérieure d'une parabole, soit $d(PF) < d(Pd)$.

Pour tout point P situé à l'EXTÉRIEUR d'une parabole, la distance d'un point au foyer est SUPÉRIEURE à la distance entre ce point et la directrice, de sorte que les inéquations

$$\begin{cases} x^2 > 4cy \\ x^2 > -4cy \\ y^2 > 4cx \\ y^2 > -4cx \end{cases}$$



représentent toutes la région extérieure d'une parabole, soit $d(PF) > d(Pd)$.

En d'autres mots, la région de la parabole comprenant le foyer est appelée INTÉRIEUR et la région comprenant la directrice est appelée EXTÉRIEUR.

Il est toujours possible de déterminer la région associée à une inéquation en utilisant le « *test du foyer* » : si les coordonnées du foyer de la parabole satisfont l'inéquation alors la région du plan incluant le foyer est solution de l'inéquation ; sinon, il s'agit de la région excluant le foyer.

Exemple : Soit la conique d'équation $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 62 = 0$ et son centre $C(x, y)$. Dans quelle région de la parabole d'équation $x^2 = -4y$ se situe le point C?

Méli-mélo de coniques!

1. Compléter le tableau suivant.

	Équation sous forme canonique	Équation sous forme générale
a)	$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$	
b)		$25x^2-y^2+100=0$
c)		$2x^2+3y^2-30=0$
d)	$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{50}=1$	

2. Trouver l'équation de l'hyperbole sachant que ses foyers coïncident avec des sommets de l'ellipse et ses sommets avec les foyers de l'ellipse. L'ellipse est définie par l'équation :

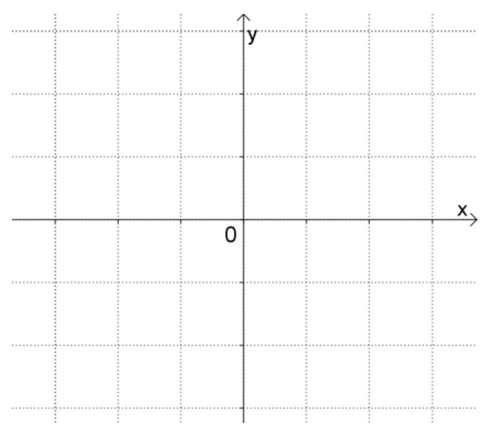
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

3. Trouver l'équation de l'ellipse dont deux sommets coïncident avec les foyers de l'hyperbole et ses foyers avec les sommets de l'hyperbole. Voici l'équation de l'hyperbole :

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$$

*4. Représenter graphiquement le système d'équations suivant et en déterminer les solutions.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x^2 = y + 1 \end{cases}$$



5. Dire si chacune des équations suivantes représente un cercle ou une parabole.
S'il s'agit d'un cercle, donner la position de son centre et la mesure de son rayon.
Si c'est une parabole, en donner l'équation de la directrice.
Finalement, écrire l'inéquation associée à chaque lieu de manière à ce que le point (-1 , 3) en soit solution.

a) $x^2 + 2x + \frac{1}{2}y + 3 = 0$ b) $4y^2 = x$ c) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 12y = 10$

d) $4y^2 - 1 = -4x^2$ e) $y = -2(x+1)^2 - 3$ f) $y^2 + 3x - 4y + \frac{11}{2} = 0$

6. Soit la fonction quadratique $f(x) = -\frac{1}{8}(x+5)^2 - 7$.

a) Déterminer l'équation du cercle ayant son centre au foyer de cette parabole et tangent à sa directrice.

b) Déterminer le système d'inéquations (parabole et cercle) tel que P(-5 , -6) soit solution de ce système.

*7. Soit l'ellipse d'équation $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{169} = 1$.

Déterminer l'équation de l'hyperbole dont les sommets coïncident avec les foyers de l'ellipse et dont les équations des asymptotes sont $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

8. Soit les points A(0 , -8) et B(0 , 8). Un point P se déplace de manière à ce que d(PA) + d(PB) = 20. Une hyperbole d'axe focal horizontal est tangente au lieu du point P et possède des asymptotes d'équations : $y = \pm\frac{1}{3}x$.

   a) Déterminer les ordonnées possibles du point R $\left(3\sqrt{5}\ ,\ y\right)$ de cette hyperbole.

   b) Déterminer l'inéquation (forme canonique) associée à la région extérieure de l'hyperbole.

9. Associer chacune des équations suivantes au type de lieu correspondant.

a)	$x^2 - 4(x-y) = 0$	•	• Droite
b)	$x^2 + 2y^2 - 6x - 4y = 0$	•	• Cercle
c)	$2x + 2y = 2$	•	• Ellipse
d)	$5x^2 + 1 = 5y^2$	•	• Hyperbole
e)	$3x^2 - 1 = -3y^2$	•	• Parabole

*10. Associer chacune des équations suivantes au type de lieu correspondant.

a)	$x^2 + 2y^2 - 2x - 2y = 0$	•	• Point
b)	$x + 2y + 2 = 0$	•	• Droite
c)	$x^2 - y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$	•	• Cercle
d)	$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$	•	• Ellipse
e)	$x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$	•	• Hyperbole
f)	$x^2 - 2x - 2y - 2 = 0$	•	• Parabole

CORRIGÉS DES EXERCICES « MISE AU POINT »

Mise au point #1 – *Corrigé*

1. a) droite oblique b) droite parallèle à l'axe des x c) droite parallèle à l'axe des y
2. $y = \frac{-3x}{4} + \frac{1}{4}$ ou $3x + 4y - 1 = 0$
3. $y = \frac{-7x}{3} + \frac{2}{3}$ ou $7x + 3y - 2 = 0$
4. (5, 0) ; (-5, 0) ; (0, 5) ; (0, -5) ; $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$ (autres réponses possibles)

Mise au point #2 – *Corrigé*

1. C(0, 0) et $r = 7$ unités
2. a) Oui, car $5^2 + 12^2 = 13^2$ b) Non, car $(-7)^2 + 11^2 \neq 13^2$ c) Oui, car $0^2 + (-13)^2 = 13^2$
3. a) $A = 81 - \frac{81\pi}{4}$ u² $\approx 17{,}38$ u² b) $x^2 + y^2 = \frac{81}{4}$

Mise au point #3 – *Corrigé*

1. a) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$ b) $x^2 + y^2 + 8x - 4y - 5 = 0$ c) $x^2 + y^2 - 2\sqrt{2}x + 2y - 6 = 0$
2. a) $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ b) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 56$ c) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 9$
   d) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 16$ e) $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 8$
3. a) Oui, car A = C centre (-1, 3) et r = $\sqrt{5}$ b) Non, car A ≠ C
   c) Oui, car A = C centre (0, 2) et r = $2\sqrt{2}$ d) Oui, car A = C centre (3, 0) et r = $\sqrt{5}$
   e) Non, car B ≠ 0 f) Non, car A ≠ C

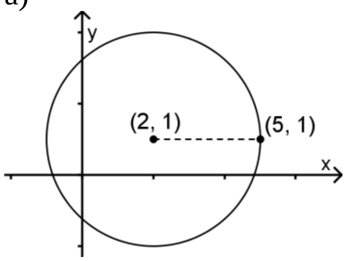
Mise au point #4 – *Corrigé*

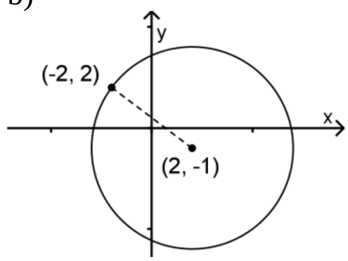
1. $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 49$
2. $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$
3. $y = 6$ (autres réponses possibles)
4. $(x + 5)^2 + (y - 8)^2 = 25$
5. a) $(x - 6)^2 + (y - 1)^2 = 73$
   b) $(x + 2)^2 + y^2 = 20$
6. a) C(3, 1) ; r = 3 u
   b) C(4, -2) ; r = 4 u
   c) C(-3, 1) ; r = $2\sqrt{2}$ u
7. $(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = 64$
8. $y = \frac{-1}{2}x$
9. (0, 5) et $\left(\frac{40}{17}, \frac{-75}{17}\right)$
10. (0, -3) et $\left(\frac{50}{29}, \frac{-67}{29}\right)$

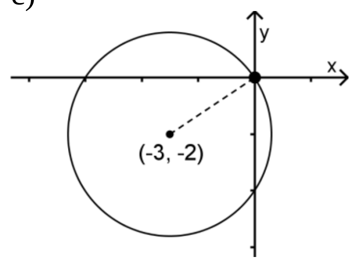
Coniques – *Exercices supplémentaires*

Le cercle (corrigé à la page 74)

1. Trouver l'équation des cercles suivants.

a) 

b) 

c) 

2. Connaissant les coordonnées du centre (C) et du point du cercle (P), déterminer l'équation de ce cercle, d'abord sous forme canonique, puis sous la forme générale.

a) C(-2, 5) et P(4, 2) b) C(1, -3) et P(-1, -5) c) C(0, -8) et P(6, 0)

3. Déterminer les coordonnées du centre et la mesure du rayon du cercle d'équation :

a) $(x - 6)^2 + (y + 2)^2 = 49$ b) $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 12$ c) $x^2 + y^2 = 20$

d) $(x + 1)^2 + (y + 3)^2 = 35$ e) $(x - 4)^2 + y^2 = 64$ f) $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 75$

4. Soit le cercle d'équation $(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Trouver les coordonnées des points situés aux extrémités du diamètre parallèle à l'axe des abscisses.

5. Trouver l'équation du cercle dont les extrémités de l'un des diamètres sont les points de coordonnées :

   a) (-2, 7) et (10, -9)
   b) (-3, 6) et (1, 0)

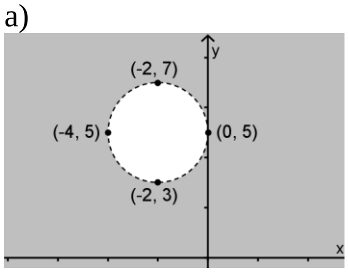
6. Soit le cercle d'équation $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Donner les coordonnées des points de rencontre de ce cercle avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

*7. Un cercle de centre (5, 8) est tangent à la droite d'équation $x + 3y - 9 = 0$. Trouver l'équation de ce cercle.

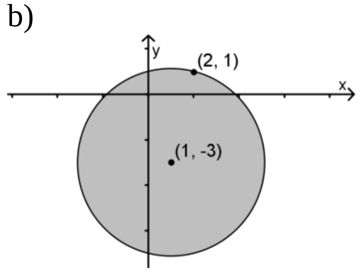
8. Une droite d'équation $x - y - 3 = 0$ rencontre (en deux points) le cercle d'équation $(x - 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Trouver les coordonnées de ces points.

9. Déterminer l'inéquation associée à chacune des régions représentées en gris.

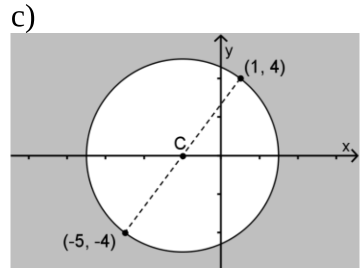
a)



b)



c)



10. Soit le cercle d'équation $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$. Donner la position de chacun des points donnés : sur le cercle, à l'intérieur ou à l'extérieur.

a) (4, -4) b) (1, 1) c) (6, -2)

d) (3, -2) e) (3, -5) f) (5, 1)

11. Un segment de 6 unités de longueur a une extrémité située à l'origine du plan cartésien. Ce segment tourne autour du point (0, 0). Trouver la relation qui décrit la région balayée par ce segment.

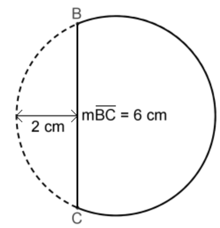
12. Un parc sera aménagé dans un nouveau quartier d'une ville. La plupart des personnes qui fréquenteront ce parc habitent dans un rayon de 4 km. Trouver la relation qui représente cette région sachant que le parc se situe au point (7, -5) de la carte de cette municipalité.

13. L'ensemble des points situés à une distance de 8 unités et plus du point de coordonnées (-5, 0) du plan cartésien vérifient tous la même inéquation. Quelle est-elle?

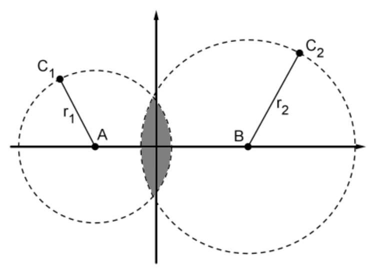
*14. Voici un énoncé géométrique : « Trois points non alignés déterminent un et un seul cercle. » Un cercle passe par les points A(-1, 1), B(7, 1) et C(9, -1) du plan cartésien. Déterminer l'équation de ce cercle.

15. Un viaduc a la forme d'un demi-cercle. À 2 m du bord, la hauteur est de 6 m. Quelle est la hauteur (maximale) de ce viaduc?

16. Dans une usine, un machiniste doit fabriquer des pièces ayant la forme illustrée. À partir d'un disque, il doit enlever une section (BC) de 6 cm de longueur et de 2 cm d'épaisseur. Quel est le rayon de ce cercle?



17. Une lentille convergente est illustrée par deux surfaces sphériques. Le dessin ci-contre représente une vue en coupe de cette lentille. Le rayon de courbure de la face droite de la lentille est r_1 et celui de la face gauche est r_2. L'épaisseur maximale de la lentille est de 1 unité. L'équation du cercle C_1 est $(x + 2)^2 + y^2 = 6{,}25$. La distance entre les centres des deux cercles est de 5 unités. Trouver l'équation du cercle C_2.

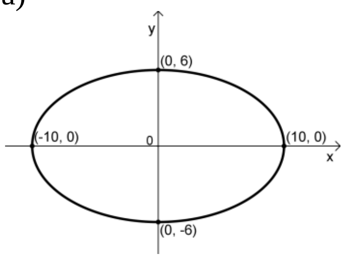


18. Dans le premier quadrant du plan cartésien, l'extérieur d'un cercle est représenté. Le cercle, dont le rayon mesure 10 unités, est situé à une distance de 5 unités de l'axe des abscisses et de 8 unités de l'axe des ordonnées. Trouver le système d'inéquations associé à cette région.

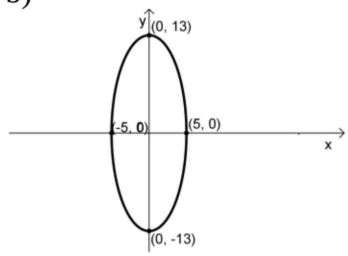
L'ellipse (corrigé à la page 74)

1. Pour chacune de ces ellipses, déterminer :
   1) la mesure du grand axe;
   2) la mesure du petit axe;
   3) les coordonnées des foyers.

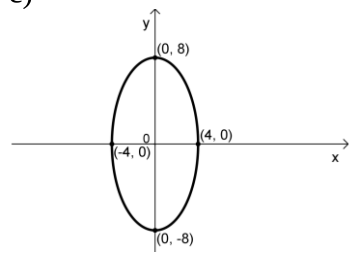
a)



b)



c)



2. Les coordonnées de deux sommets et des foyers d'une ellipse centrée à l'origine étant connues, trouver les coordonnées des deux autres sommets.

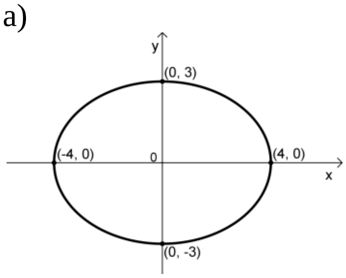
   a) Sommets : (0, 8) et (0, -8)
      Foyers : (0, 4) et (0, -4)

   b) Sommets : (-12, 0) et (12, 0)
      Foyers : (-8, 0) et (8, 0)

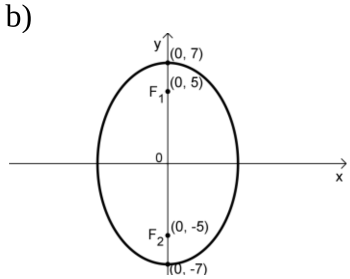
3. Les coordonnées des foyers d'une ellipse sont (-5, 0) et (5, 0), et la mesure du grand axe est de 14 unités. Déterminer les coordonnées du centre de cette ellipse et la mesure de son petit axe.

4. Trouver l'équation des ellipses suivantes.

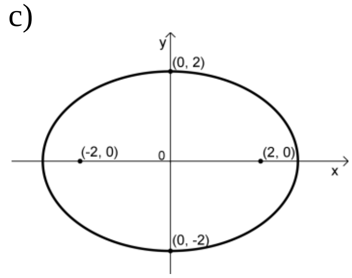
a)



b)



c)



5. Le grand axe d'une ellipse centrée à l'origine mesure 6 unités, et la distance entre les foyers est de 2 unités. Sachant que le grand axe est situé sur l'axe des ordonnées, trouver l'équation de cette ellipse.

6. Trouver les coordonnées des foyers des ellipses dont l'équation est :

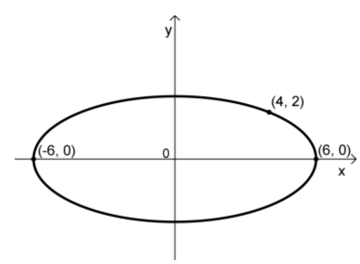
   a) $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$ b) $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{40} = 1$ c) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

7. Soit l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$. Déterminer :

   a) les coordonnées des sommets ;

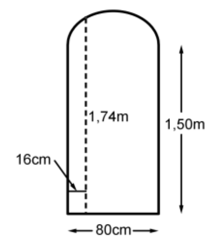
   b) les valeurs manquantes des points de l'ellipse suivants : (⌂ ; 3) et (-2,4 ; ⌂).

8. Trouver l'équation de l'ellipse suivante.

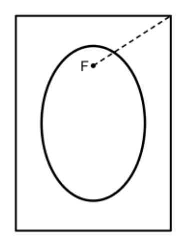


9. Maria prépare une affiche. Elle a dessiné une ellipse dont les axes mesurent respectivement 40cm et 24cm. Elle <u>inscrit</u>, dans cette ellipse, un rectangle dont deux côtés passent par les foyers. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

10. Chez Olivier, l'ouverture entre la salle à manger et le salon est surmontée d'une demi-ellipse. La largeur de l'ouverture est de 80cm. À 16cm du bord, la hauteur de l'ouverture est de 1,74m. Quelle est la hauteur de cette ouverture en son centre ?



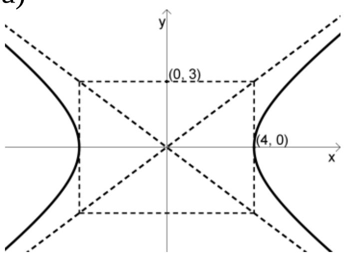
11. Pour encadrer sa photo de sortante, Patricia a choisi un modèle comme celui qui est illustré sur la figure ci-contre. Une ellipse de 12cm de large et de 18cm de haut a été découpée dans le rectangle. La distance entre le rectangle et l'ellipse est de 3cm sur les côtés, et de 3,5cm au-dessus et en dessous. À quelle distance du sommet du rectangle se situe un des foyers de l'ellipse ?



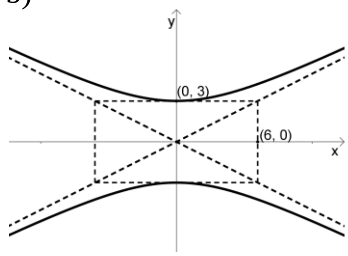
L'hyperbole (corrigé à la page 75)

1. Pour chaque hyperbole, centrée à l'origine, représentée :
    1) déterminer les coordonnées des foyers;
    2) trouver l'équation des asymptotes.

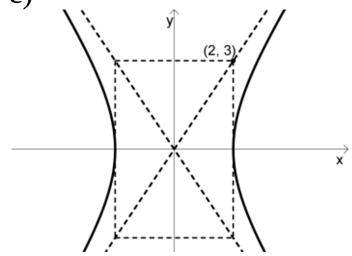
a)



b)



c)



2. Les coordonnées des sommets et des foyers d'une hyperbole étant données, trouver l'équation des asymptotes.

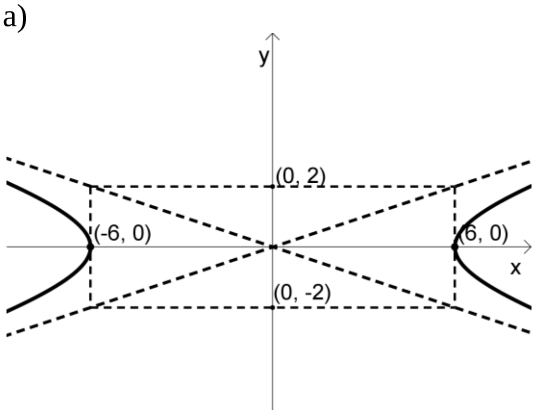
a) S : (0, 5) et (0, -5)
F : (0, 13) et (0, -13)

b) S : (5, 0) et (-5, 0)
F : (7, 0) et (-7, 0)

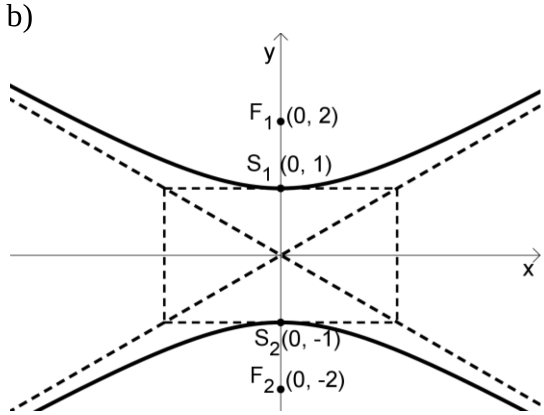
c) S : (0, 3) et (0, -3)
F : (0, 6) et (0, -6)

3. Trouver l'équation des hyperboles suivantes.

a)



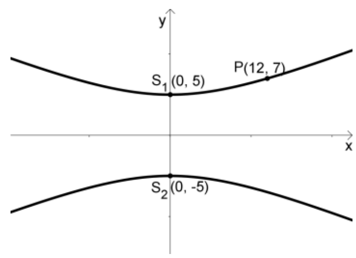
b)



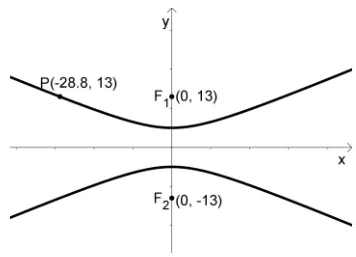
4. L'équation d'une hyperbole étant donnée, déterminer :
   1) les coordonnées des sommets;
   2) les coordonnées des foyers;
   3) l'équation des asymptotes.

a) $\frac{y^2}{12} - \frac{x^2}{16} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ c) $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{9} = -1$

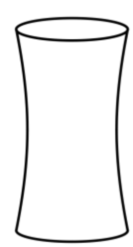
5. Trouver l'équation de l'hyperbole suivante.



6. Les foyers d'une hyperbole sont situés aux points (0, 13) et (0, -13). Un point P de l'hyperbole a pour coordonnées (-28,8 ; 13). Quelle est l'équation de cette hyperbole?



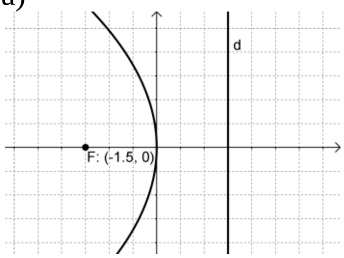
7. Un vase à fleurs a la forme illustrée ci-contre. La courbure des côtés correspond à une hyperbole. Le diamètre du vase, à la base, est de 20cm et au centre, 16cm. La hauteur de ce vase est de 36cm. Quel est son diamètre à une hauteur de 10cm?



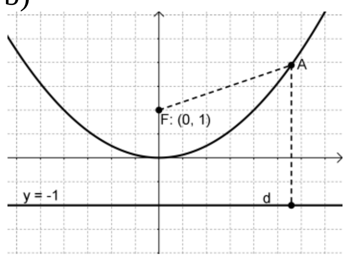
La parabole (corrigé aux pages 75-76)

1. Pour chaque situation donnée, trouver :
   1) l'équation de la parabole;
   2) l'équation de l'axe de symétrie.

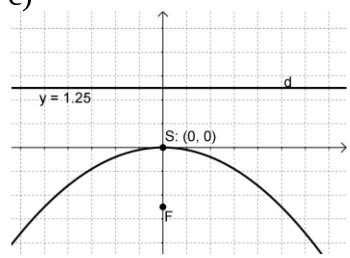
a)



b)



c)



2. Trouver l'équation de la parabole ayant son sommet au point (0, 0) et dont le foyer F ou la directrice d correspond à :

a) $d : x = \dfrac{-1}{2}$ b) F $\left(0, \dfrac{3}{8}\right)$ c) $d : y = \dfrac{7}{4}$

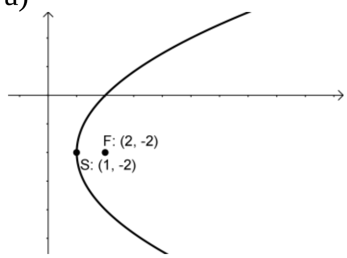
3. L'équation d'une parabole ayant son sommet à l'origine étant donnée, déterminer :
   1) l'équation de son axe de symétrie;
   2) les coordonnées du foyer;
   3) l'équation de la directrice.

a) $y^2 = -8x$ b) $x^2 = 3y$ c) $x^2 = y$

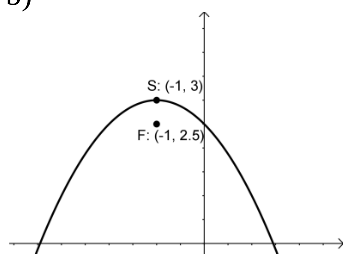
d) $y^2 = \dfrac{5x}{2}$ e) $2x^2 = -y$

4. Pour chaque parabole tracée, trouver :
   1) la distance focale « c »;
   2) l'équation de cette parabole.

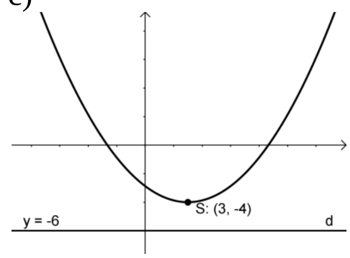
a)



b)



c)



5. Trouver l'équation de la parabole dont :
   a) le sommet est au point (-2, 5) et le foyer, au point $\left(\frac{-5}{2}, 5\right)$.

   b) le sommet est au point (4, -6) et la directrice a pour équation $y = \frac{-15}{2}$.

   c) le foyer est au point (2, 1) et la directrice a pour équation $y = 5$.

   d) le foyer est au point (-4, 3) et la directrice a pour équation $x = -6$.

   e) le foyer est au point (0, 0) et la directrice a pour équation $x = 3$.

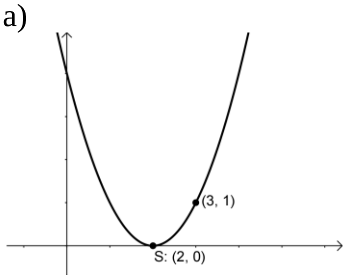
6. L'équation de la parabole étant donnée, trouver :
    1) les coordonnées du sommet;
    2) l'équation de l'axe de symétrie;
    3) les coordonnées du foyer;
    4) l'équation de la directrice.

    a) $(y-1)^2 = 4(x-2)$ b) $(x+5)^2 = -8(y-2)$ c) $(x-2)^2 = -6(y-4)$

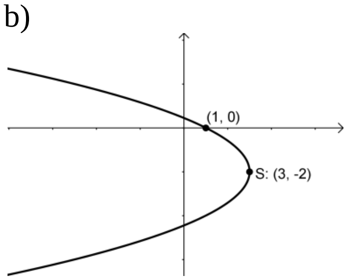
    d) $(y+3)^2 = -3x$ e) $(x-2)^2 = 3(y+4)$ f) $(y+2)^2 = -6(x-3)$

7. Quelle est l'équation de chacune des paraboles suivantes?

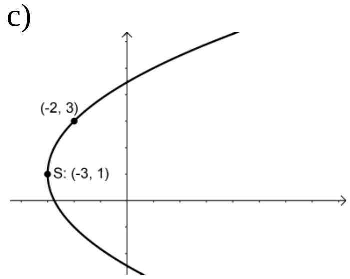
    a)



    b)



    c)

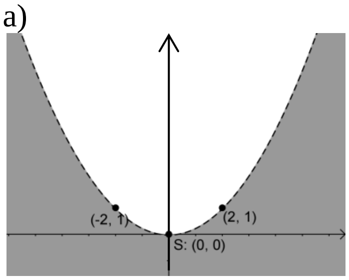


8. Soit la parabole d'équation $(y-2)^2 = -3(x-3)$. Déterminer les coordonnées des points de rencontre de cette parabole avec l'axe des abscisses et celui des ordonnées, dans le plan cartésien.

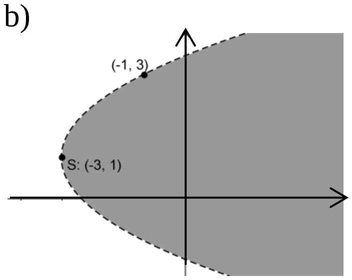
9. Une parabole a son sommet situé au point (3, 1) du plan cartésien et son foyer, au point (3, 2). Les points (0, y) et (x, 5) appartiennent à cette parabole. Déterminer les valeurs de x et y.

10. Quelle relation décrit la région représentée?

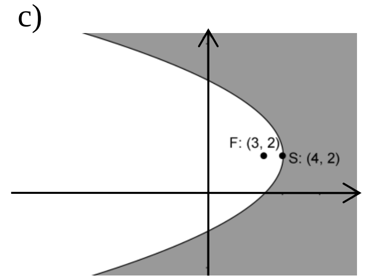
a)



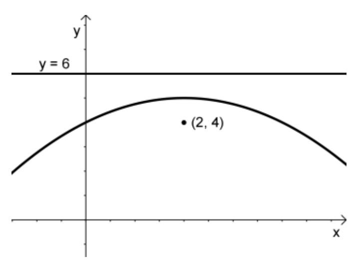
b)



c)



11. Tous les points de la courbe représentée ci-contre sont situés à égale distance du point (2, 4) et de la droite d'équation y = 6.

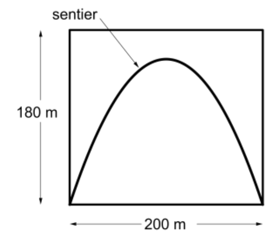


a) Quelle est l'équation de cette courbe?

b) Indiquer la position des points suivants : sur la parabole, à l'intérieur ou à l'extérieur.

(7, -1) (5, 2) (0, 4) (2, -3) (-4, -4) (-2, 2)

12. Dans la municipalité de Matémati, on a aménagé un espace vert sur le terrain de 200m sur 180m. Le technicien en aménagement représente ce terrain dans le plan cartésien en faisant correspondre son centre à l'origine. Un sentier, dont la trajectoire est parabolique, traverse le parc, et son équation est $x^2 = \frac{-200}{3}(y - 60)$.

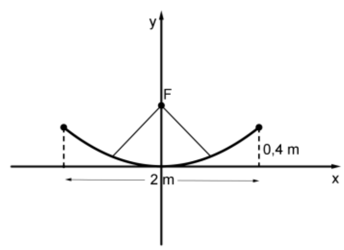


a) Une fontaine sera construite à l'emplacement du foyer. À quelle distance de l'origine sera-t-elle située?

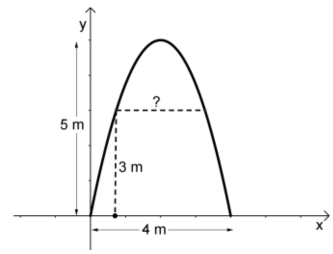
b) Quelle inéquation est associée à la région contenant le point (40, 40)?

13. Dans le plan cartésien, une région, contenant l'origine, est limitée par une parabole dont le foyer est situé au point (-1, 3). La directrice de cette parabole a comme équation $x = 3$. Déterminer l'inéquation associée à cette région.

14. Une antenne parabolique a une largeur de 2m et une hauteur de 0,4m. On fait correspondre le sommet de l'antenne avec l'origine du plan cartésien, tel qu'il est illustré ci-contre. À quelle distance du sommet se situe le capteur (F) situé au foyer de la parabole?



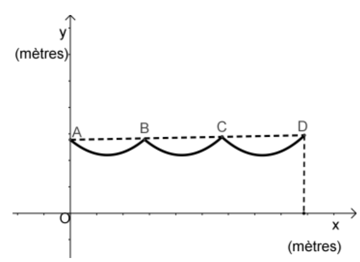
15. Le pied d'une arche de forme parabolique de 5m de hauteur se situe au point (0, 0) d'un système de coordonnées cartésiennes. La largeur, à la base, est de 4m.



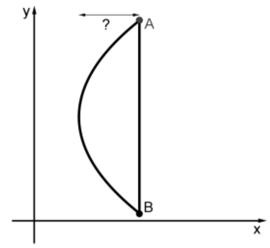
a) Quelle est l'équation de la parabole?

b) Quelle est la largeur, au centième près, de l'arche à une hauteur de 3m?

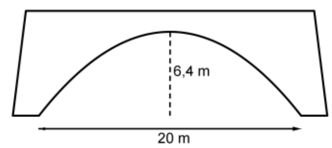
16. Une guirlande est accrochée au mur de la classe, et chacune des courbes s'apparente à une parabole. Stéphane affirme que la courbe AB a comme équation $(x - 1{,}4)^2 = 3{,}4(y - 2{,}2)$. $\overline{AD}$ représente la largeur de la classe et $\overline{OA}$, sa hauteur. Quelles sont les dimensions de ce mur sachant que la guirlande dessine trois courbes identiques?



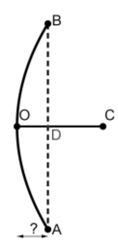
17. Une lentille de forme parabolique a son sommet au point (3, 7) du plan cartésien. La distance entre le sommet et le foyer est de 2,6cm. Sachant que la largeur $\overline{AB}$ est de 13cm, trouve l'épaisseur de cette lentille.



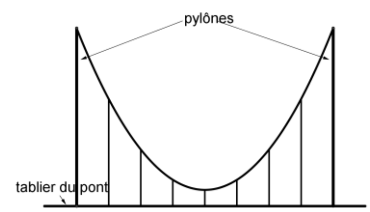
18. La structure d'un viaduc comprend une arche de forme parabolique. La largeur entre les piliers est de 20m. La hauteur libre, au centre, est de 6,4m. Quelle est la hauteur, au dixième près, à 4m du bord?



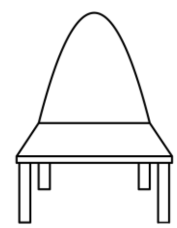
19. Le capteur (C) d'une antenne parabolique est situé à une distance de 25cm du sommet. L'antenne a une hauteur de 60cm (représentée par AB). Déterminer la largeur (OD) d'une telle antenne. (Note : le capteur est situé au foyer de la parabole.)



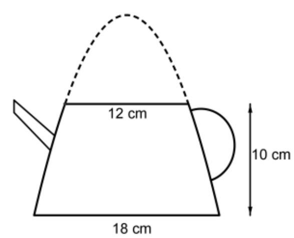
20. Un pont suspendu comprend un câble porteur dont la forme s'apparente à une parabole. Ce câble est fixé au pylône à 22m de hauteur. Le centre de ce câble est situé à une distance de 2m du tablier du pont. La distance entre les deux pylônes sur lesquels le câble porteur est fixé est de 160m. Quelle est la hauteur d'un câble situé à 20m du pylône?



21. Dans une usine de fabrication de meubles, un graphiste a dessiné un modèle de dossier de chaise de forme parabolique. La largeur du dossier, à la base, est de 40cm et sa hauteur, en son centre de 50cm. À l'emplacement du foyer, le graphiste suggère s'apposer une applique. À quelle distance de la base du dossier se situe le foyer?



22. La partie latérale d'une bouilloire épouse une section des branches d'une parabole. Sur la figure, on a représenté une vue en coupe de cet objet; en pointillé, le tracé de la parabole a été complété. Quelle est la distance entre la base de la bouilloire et le sommet de cette parabole?



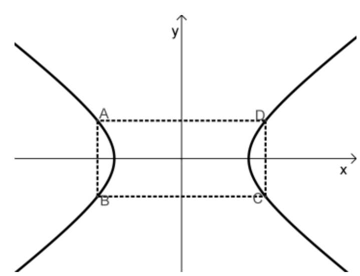
Les coniques (corrigé à la page 76)

1. Déterminer l'équation de la plus simple ellipse inscrite dans un rectangle de 28cm sur 22cm.

2. Déterminer l'inéquation correspondant à la région intérieure de l'hyperbole centrée à l'origine dont la distance entre les deux sommets situés sur l'axe des x est de 4m, si l'équation d'une des asymptotes est $y = 2x$.

3. Déterminer l'inéquation la plus simple pour décrire l'intérieur de la piscine de forme ellipsoïdale dont le petit axe mesure 6 unités et le grand axe, le triple de la mesure du petit axe.

4. Soit l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Les segments AB et CD passent respectivement par les foyers de l'hyperbole. Le rectangle ABCD est ainsi formé. Si on trace les diagonales de ce rectangle et qu'on les prolonge, on peut ainsi construire les asymptotes d'une autre hyperbole. Quelle est l'équation de cette hyperbole, sachant que les sommets de la deuxième hyperbole sont situés aux emplacements des foyers de la première hyperbole?



*5. Déterminer l'équation du lieu du point P dont la somme des distances aux points K(-11, 4) et L(7, 4) est égale à 30 unités.

*6. Déterminer l'équation du cercle tangent aux sommets de l'hyperbole dont l'équation est $9x^2 - 5y^2 + 36x + 30y - 54 = 0$.

*7. Soit l'ellipse d'équation $\frac{(x+3)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{169} = 1$. Déterminer l'équation de l'hyperbole dont les sommets passent par les foyers de cette ellipse et dont les équations des asymptotes sont $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$ et $y = \frac{-x}{2} + \frac{5}{2}$.

Le cercle – Corrigé

1. a) $(x-2)^2+(y-1)^2=9$ b) $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ c) $(x+3)^2+(y+2)^2=13$
2. a) $(x+2)^2+(y-5)^2=45$; $x^2+y^2+4x-10y-16=0$ b) $(x-1)^2+(y+3)^2=8$; $x^2+y^2-2x+6y+2=0$ c) $x^2+(y+8)^2=100$; $x^2+y^2+16y-36=0$
3. a) C(6, −2) ; r = 7 b) C(−5, 4) ; r = $2\sqrt{3}$ c) C(0, 0) ; r = $2\sqrt{5}$
   d) C(−1, −3) ; r = $\sqrt{35}$ e) C(4, 0) ; r = 8 f) C(2, 4) ; r = $5\sqrt{3}$
4. (1, -2) et (9, -2)
5. a) $(x-4)^2+(y+1)^2=100$ b) $(x+1)^2+(y-3)^2=13$
6. (4, 0) ; (0, 0) et (0, −2)
7. $(x-5)^2+(y-8)^2=40$
8. (2, −1) et (9, 6)
9. a) $(x+2)^2+(y-5)^2>4$ b) $(x-1)^2+(y+3)^2\leqslant 17$ c) $(x+2)^2+y^2\geqslant 25$
10. a) à l'intérieur b) à l'extérieur c) sur le cercle
    d) à l'intérieur e) sur le cercle f) à l'extérieur
11. $x^2+y^2\leqslant 36$
12. $(x-7)^2+(y+5)^2\leqslant 16$
13. $(x+5)^2+y^2\geqslant 64$
14. $(x-3)^2+(y+5)^2=52$
15. 10 m
16. 3,25 cm
17. $(x-3)^2+y^2=12{,}25$
18. $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$ et $(x-18)^2+(y-15)^2>100$

L'ellipse – Corrigé

1. a) 1) 20 unités 2) 12 unités 3) (8, 0) et (−8, 0)
   b) 1) 26 unités 2) 10 unités 3) (0, 12) et (0, −12)
   c) 1) 16 unités 2) 8 unités 3) $(0, 4\sqrt{3})$ et $(0, -4\sqrt{3})$
2. a) $(4\sqrt{3}, 0)$ et $(-4\sqrt{3}, 0)$ b) $(0, 4\sqrt{5})$ et $(0, -4\sqrt{5})$
3. Centre : (0, 0) ; Petit axe : $4\sqrt{6}$ u
4. a) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ b) $\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{49}=1$ c) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$
5. $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{9}=1$
6. a) (0, 5) et (0, −5) b) $(2\sqrt{6}, 0)$ et $(-2\sqrt{6}, 0)$ c) $(2\sqrt{5}, 0)$ et $(-2\sqrt{5}, 0)$
7. a) (±4, 0) et (0, ±5) b) (± 3,2 ; 3) et (-2,4 ; ±4)
8. $\frac{x^2}{36}+\frac{5y^2}{36}=1$
9. 32 cm sur 14,4 cm
10. 1,8 m
11. ≈ 10,7 cm

L'hyperbole – Corrigé

1. a) 1) (5, 0) ; (–5, 0)
   2) $y = \frac{3}{4}x$ et $y = \frac{-3}{4}x$

   b) 1) $(0, 3\sqrt{5})$; $(0, -3\sqrt{5})$
   2) $y = \frac{x}{2}$ et $y = \frac{-x}{2}$

   c) 1) $(\sqrt{13}, 0)$; $(-\sqrt{13}, 0)$
   2) $y = \frac{3}{2}x$ et $y = \frac{-3}{2}x$

2. a) $y = \frac{5}{12}x$ et $y = \frac{-5}{12}x$
   b) $y = \frac{2\sqrt{6}}{5}x$ et $y = \frac{-2\sqrt{6}}{5}x$
   c) $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ et $y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x$

3. a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$
   b) $y^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

4. a) 1) $(0, 2\sqrt{3})$ et $(0, -2\sqrt{3})$
   2) $(0, 2\sqrt{7})$ et $(0, -2\sqrt{7})$
   3) $y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ et $y = \frac{-\sqrt{3}}{2}x$

   b) 1) (3, 0) ; (–3, 0)
   2) (5, 0) ; (–5, 0)
   3) $y = \frac{4}{3}x$ et $y = \frac{-4}{3}x$

   c) 1) (0, 3) ; (0, –3)
   2) $(0, \sqrt{41})$; $(0, -\sqrt{41})$
   3) $y = \frac{3\sqrt{2}}{8}x$ et $y = \frac{-3\sqrt{2}}{8}x$

5. $\frac{x^2}{150} - \frac{y^2}{25} = -1$
6. $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$
7. ≈ 16,87 cm

La parabole – Corrigé

1. a) 1) $y^2 = -6x$
   2) $y = 0$

   b) 1) $x^2 = 4y$
   2) $x = 0$

   c) 1) $x^2 = -5y$
   2) $x = 0$

2. a) $y^2 = 2x$
   b) $x^2 = \frac{3}{2}y$
   c) $x^2 = -7y$

3. a) 1) $y = 0$
   2) (–2, 0)
   3) $x = 2$

   b) 1) $x = 0$
   2) $\left(0, \frac{3}{4}\right)$
   3) $y = \frac{-3}{4}$

   c) 1) $x = 0$
   2) $\left(0, \frac{1}{4}\right)$
   3) $y = \frac{-1}{4}$

   d) 1) $y = 0$
   2) $\left(\frac{5}{8}, 0\right)$
   3) $x = \frac{-5}{8}$

   e) 1) $x = 0$
   2) $\left(0, \frac{-1}{8}\right)$
   3) $y = \frac{1}{8}$

4. a) 1) $c = 1$
   2) $(y + 2)^2 = 4(x - 1)$

   b) 1) $c = \frac{1}{2}$
   2) $(x + 1)^2 = -2(y - 3)$

   c) 1) $c = 2$
   2) $(x - 3)^2 = 8(y + 4)$

5. a) $(y - 5)^2 = -2(x + 2)$
   b) $(x - 4)^2 = 6(y + 6)$
   c) $(x - 2)^2 = -8(y - 3)$
   d) $(y - 3)^2 = 4(x + 5)$
   e) $y^2 = -6\left(x - \frac{3}{2}\right)$

6. a) 1) (2, 1)
   2) $y = 1$
   3) (3, 1)
   4) $x = 1$

   b) 1) (–5, 2)
   2) $x = -5$
   3) (–5, 0)
   4) $y = 4$

   c) 1) (2, 4)
   2) $x = 2$
   3) $\left(2, \frac{5}{2}\right)$
   4) $y = \frac{11}{2}$

d) 1) $(0, -3)$
2) $y = -3$
3) $\left(\frac{-3}{4}, -3\right)$
4) $x = \frac{3}{4}$

e) 1) $(2, -4)$
2) $x = 2$
3) $\left(2, \frac{-13}{4}\right)$
4) $y = \frac{-19}{4}$

f) 1) $(3, -2)$
2) $y = -2$
3) $\left(\frac{3}{2}, -2\right)$
4) $x = \frac{9}{2}$

7. a) $(x-2)^2 = y$ b) $(y+2)^2 = -2(x-3)$ c) $(y-1)^2 = 4(x+3)$
8. $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$; $(0, -1)$ et $(0, 5)$
9. $\left(0, \frac{13}{4}\right)$; $(-1, 5)$ et $(7, 5)$
10. a) $x^2 > 4y$ b) $(y-1)^2 < 2(x+3)$ c) $(y-2)^2 \geqslant -4(x-4)$
11. a) $(x-2)^2 = -4(y-5)$ b) $(7, -1)$ à l'extérieur ; $(0, 4)$ sur la parabole ; $(-4, -4)$ sur la parabole ; $(5, 2)$ à l'intérieur ; $(2, -3)$ à l'intérieur ; $(-2, 2)$ à l'extérieur.
12. a) $\frac{130}{3}$ m ≈ 43,33 m b) $x^2 > \frac{-200}{3}(y-60)$
13. $(y-3)^2 \geq -8(x-1)$
14. 0,625 m = 62,5 cm
15. a) $(x-2)^2 = \frac{-4}{5}(y-5)$ b) 2,53 m
16. Hauteur : ≈ 2,78 m Largeur : 8,4 m
17. ≈ 4,06 cm
18. 4,1 m
19. 9 cm
20. 13,25 m
21. 48 cm
22. 18 cm

Les coniques – Corrigé

1. $\frac{x^2}{121} + \frac{y^2}{196} = 1$ ou $\frac{x^2}{196} + \frac{y^2}{121} = 1$
2. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} < 1$
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{81} < 1$ ou $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} < 1$
4. $\frac{x^2}{25} - \frac{16y^2}{81} = 1$
5. $\frac{(x+2)^2}{225} + \frac{(y-4)^2}{144} = 1$
6. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5$
7. $\frac{(x+3)^2}{576} - \frac{(y-4)^2}{144} = -1$