Nom : ___________________________________ Groupe : ____

SUJET 1

ANALYSE COMBINATOIRE

EXAMEN FORMATIF

1. Le créateur du nouveau réseau social PILEOUFACEBOOK.COM s'interroge sur le modèle de mot de passe qu'il devrait imposer aux utilisateurs afin de maximiser leur sécurité. Aidez-le en classant les cinq suggestions suivantes de **(1)**, la plus sécuritaire, à **(5)**, la moins sécuritaire. Tous les mots de passe comportent 8 caractères choisis parmi les chiffres de 0 à 9 et/ou les lettres de A à Z (majuscules sans accents).

Caractéristiques	***Vos calculs…***	**Niveau de sécurité**
7 lettres suivies d'un chiffre	$26^7 \times 10 \approx 8{,}03 \times 10^{10}$	2
3 chiffres suivis de 5 lettres	$10^3 \times 26^5 \approx 1{,}19 \times 10^{10}$	4
4 lettres et 4 chiffres, en alternance	$26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10$ $+$ $10 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 26 \times 10 \times 26$ $26^4 \times 10^4 \times 2 \approx 9{,}14 \times 10^9$	5
7 lettres différentes et 1 chiffre, dans n'importe quel ordre	$A_7^{26} \times A_1^{10} \times 8 = 1{,}34 \times 10^{14}$	1
8 lettres différentes	$A_8^{26} \approx 6{,}3 \times 10^{10}$	3

le chiffre peut aller à 8 endroits différents

Question bonus : Est-ce qu'un mot de passe de 8 caractères comprenant au moins un chiffre et au moins une lettre serait plus sécuritaire ou moins sécuritaire que toutes les propositions précédentes? Pourquoi?

2. Calculez la probabilité qu'un numéro de téléphone à 7 chiffres comporte **au moins un chiffre** qui apparaît **au moins deux fois**.

(On sait aussi qu'un numéro de téléphone ne peut pas débuter par 0 ou 1.)

1- Nb # tél. avec 7 chiffres différents

$8 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 483\,840$

4 7 5

2- Nb # tél au total

$8 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 > 8\,000\,000$

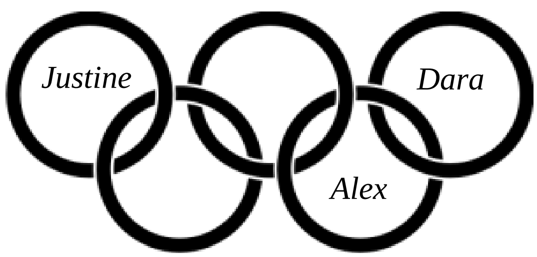
3- Nb # tél avec répétitions

$8\,000\,000 - 483\,840 = 7\,516\,160$

4- Probabilité

$\frac{7\,516\,160}{8\,000\,000} \approx 93{,}95\%$

3. Josiane travaille pour un journal sportif pendant les Jeux olympiques d'hiver. Elle doit écrire un article sur les trois médaillés d'or à l'épreuve de ski acrobatique. Elle veut créer un montage à partir des photos des athlètes. Le rédacteur en chef lui suggère de disposer les trois photos à l'intérieur des cinq anneaux olympiques :



Combien y a-t-il de dispositions différentes pour les trois photos?

$A_3^5 = 60$ dispositions

Conrad enseigne les probabilités à un groupe de 27 élèves. Le local où les cours se donnent comporte 36 pupitres. Combien de « plans de classe » différents Conrad pourrait-il créer?

$A_{27}^{36} \approx 1{,}03 \times 10^{36}$ plans de classe

4. Combien d'équipes de curling non mixtes peut-on faire à partir de six hommes et sept femmes si une équipe de curling comporte 4 joueurs?

5.

Nb équipes femmes :

$C_4^7 = 35$

Nb équipes hommes :

$C_4^6 = 15$

$C_4^7 + C_4^6 = 50$

Nb total : $35 + 15 = 50$

Combien d'équipes mixtes de 2 femmes et 2 hommes peut-on créer?

$C_2^7 \times C_2^6 = 525$ équipes

Effectuez les calculs demandés et simplifiez votre réponse.

a) $\frac{A^{100}_{97}}{97!} = \frac{100\times99\times98\times\cancel{97}\times\ldots\cancel{4}}{\cancel{97}\times96\times95\times\ldots\times\underbrace{3\times2\times1}} = \frac{100\times99\times98}{3\times2\times1} = 161\,700$

b) $\frac{(x+3)!}{(x+1)!} = \frac{(x+3)(x+2)\cancel{(x+1)(x)(x-1)\ldots}}{\cancel{(x+1)(x)(x-1)\ldots}} = (x+3)(x+2)$

c) $C^{100}_{10}\times\frac{75!}{77!} = C^{100}_{10}\times\frac{1}{77\times76} = 2\,958\,015\,970$

$6\times5! = 6!$

d) $\frac{(9!)!}{A^{9}_{9}\times362879!} = \frac{362880!}{362880\times362879!} = \frac{362880!}{362880!} = 1$

6. Sandrine pige deux cartes, au hasard, tirées d'un jeu ordinaire de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'elle obtienne…

a) une carte rouge et une carte noire?

1 rouge + 1 noire $C^{26}_{1}\times C^{26}_{1} = 676$

2 cartes $C^{52}_{2} = 1326$

$P(R \text{ et } N) = \frac{676}{1326} = \frac{26}{51}$

b) deux as?

$\frac{C^{4}_{2}}{C^{52}_{2}} = \frac{6}{1326} = \frac{1}{221}$

$\frac{4}{52}\times\frac{3}{51} = \frac{1}{221}$

c) deux cartes de pique?

$\frac{C^{13}_{2}}{C^{52}_{2}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$

$\frac{13}{52}\times\frac{12}{51} = \frac{1}{17}$

d) une paire (deux cartes de même valeur)?

13 valeurs différentes

$\frac{C^{4}_{2}\times13}{C^{52}_{2}} = \frac{1}{17}$

$\frac{52}{52}\times\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$

7.

Les élèves d'une école secondaire se plaignent que la séquence de notes musicales entre chaque cours, plus communément appelée la « cloche », est ennuyante et répétitive. Le directeur passe à l'action! La séquence de 8 notes sera maintenant générée aléatoirement. Le système permet de produire six notes distinctes : do, mi fa, sol#, la et si. Quelle est la probabilité que la prochaine séquence de notes produite soit la même qu'avant?

Nb cloches possibles : $6^8 = 1\,679\,616$

$P(\hat{m} \text{ cloche 2 fois de suite}) = \dfrac{1}{1\,679\,616}$

8. Béatrice possède un cadenas à numéros tel qu'illustré ci-contre.

60

a) Sachant qu'un même numéro peut être utilisé plus d'une fois, combien de combinaisons à trois numéros ce type de cadenas permet-il?

$60^3 = 216\,000$

b) Béatrice a malheureusement oublié sa combinaison! Elle se souvient que :

- un des trois numéros est 33,
- les deux autres numéros sont pairs et supérieurs à 9,
- les trois numéros sont différents.

Combien y a-t-il de combinaisons qui respectent ces trois critères?

$\boxed{33}$ 25 opt. · 24 opt.

_ $\boxed{33}$ _

_ _ $\boxed{33}$

$3 \times 25 \times 24 = 1800$ combinaisons de cadenas (arrangements mathématique)


IL N'Y A QU'UN PASSÉ
ET IL N'EXISTE QU'UN SEUL PRÉSENT
PAR CONTRE, IL Y A
UNE MULTITUDE DE FUTURS
MAIS SEUL
L'UN D'EUX SE RÉALISE