

# Cálculo de un tren de laminado

Análisis Numérico para ingeniería.

Grupo 11

Integrantes:

- Paez, Laurencio
- Petrara, Claudio

Fecha de entrega: 28/6/2022

<b>1 Introducción</b>	<b>2</b>
1.1 Breve introducción al formado de metales.	2
1.2 Laminado plano y su análisis	3
<b>2 Modelo físico-matemático</b>	<b>4</b>
2.1 Variables mecánicas	4
2.2 Materiales	7
<b>3 Método</b>	<b>11</b>
3.1 Método de diferencias finitas	11
3.2 Discretización de la ecuación de calor	11
3.2.1 Discretización y modelo de la fuente de calor $G_k$	12
3.2.2 Método seleccionado: Fuente interna ficticia.	13
3.3 Implementación en el código	14
<b>4 Preprocesamiento</b>	<b>21</b>
4.1 Geometría	21
4.2 Malla	22
<b>5 Procesamiento</b>	<b>24</b>
5.1 Condiciones de borde	24
<b>6 Post procesamiento</b>	<b>25</b>
6.1 Acero 1010	25
6.2 Acero 4140	28
6.3 Acero 1045	31
6.4 Observaciones	34
6.5 Microestructura deseada	37
6.6 Tren de laminación	37
<b>7 Errores</b>	<b>38</b>
7.1 Error de formulación del Modelo Matemático.	38
7.2 Error inherente al algoritmo. (Error sistemático)	38
7.3 Error de representación numérica.	38
7.4 Error en las operaciones. (Error de propagación)	38
<b>8 Discusión y Conclusiones</b>	<b>39</b>
<b>9 Bibliografía</b>	<b>40</b>

# 1 Introducción

*El objetivo de este trabajo es el dimensionamiento de un tren de laminado para obtener una chapa de acero de una calidad determinada.*

## 1.1 Breve introducción al formado de metales.

El formado de metales incluye varios procesos de manufactura en los cuales se usa la deformación plástica para cambiar la forma de las piezas metálicas. Dentro de los procesos del formado se pueden clasificar en 1) procesos de deformación volumétrica y 2) procesos de trabajo de láminas metálicas.

Dentro de los procesos de deformación volumétrica se encuentran:

- Procesos de rolado
- Procesos de forjado
- Procesos de extrusión
- Estirado de alambre y barra

Donde los procesos de deformación volumétrica se caracterizan por deformaciones significativas y grandes cambios de forma. El término volumétrico describe a las piezas de trabajo que tienen esta baja relación de área-volumen. La forma del trabajo inicial para estos procesos incluye tochos cilíndricos y barras rectangulares.

*Procesos de rolado:* Es un proceso de deformación por compresión en el cual el espesor de una plancha o placa se reduce por medio de dos herramientas cilíndricas opuestas llamadas rodillos. Los rodillos giran para estirar y realizar el trabajo dentro de la abertura entre ellos y comprimirla.

Temperatura en el formado de metales

- El trabajo en frío, también conocido como formado en frío, es el formado de metal que se realiza a temperatura ambiente o ligeramente arriba.
- Temperatura en caliente por debajo de la temperatura de recristalización. Debido a que las propiedades de deformación plástica se mejoran normalmente con el aumento de la temperatura en la pieza de trabajo, las operaciones de formado se realizan a aproximadamente  $0,3T_f$ , donde  $T_f$  es el punto de fusión del metal particular.

- Trabajo en caliente. Implica la deformación a temperaturas por encima de la temperatura de recrystalización. En la práctica, el trabajo se lleva a cabo usualmente a temperaturas entre  $0,5 T_f$  y  $0,75 T_f$ .

## 1.2 Laminado plano y su análisis

El laminado es un proceso de deformación en el cual el espesor del material de trabajo se reduce mediante fuerzas de compresión ejercidas por dos rodillos opuestos.

Los metales laminados en caliente están generalmente libres de esfuerzos residuales y sus propiedades son isotrópicas. Las desventajas del laminado en caliente son que el producto no puede mantenerse dentro de tolerancias adecuadas, y la superficie presenta una capa de óxido característica.



*Imagen 1.1: Reducción de espesor y isotropía de los granos en el metal tras proceso de laminación en caliente.*

## 2 Modelo físico-matemático

Sin perder de vista el objetivo del trabajo, que es el previo conocimiento de la microestructura de una lámina de acero tras ser procesada, se hará uso de la ecuación de calor en su forma diferencial con generación de calor.

La microestructura de un acero es resultado de los cambios de temperatura, en función del tiempo, que sufre con dependencia de su composición química.

De esta manera, se estudia el comportamiento del calor mediante la ecuación de calor en su forma diferencial.

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = 0$$

*Ecuación de calor dada en forma diferencial en 3 (tres) dimensiones.*

Sin embargo, la solidificación de un metal es un proceso exotérmico, por lo que hay que agregarle un término faltante a la ecuación previa.

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} - \nabla \cdot (k \nabla T) = Q$$

*Forma más general de la ecuación de calor. Siendo Q una fuente de calor.*

### 2.1 Variables mecánicas

Esfuerzo real experimentado por el trabajo de laminado: se basa en el espesor del material antes y después del laminado.

$$\epsilon = \ln\left(\frac{t_0}{t_f}\right)$$

*Siendo 't<sub>0</sub>' el espesor inicial y 't<sub>f</sub>' el espesor final.*

Esfuerzo de fluencia promedio.

$$\overline{Y}_f = \frac{K \cdot \epsilon^n}{1+n}$$

*Siendo 'K' el coeficiente de resistencia y 'n' el exponente de endurecimiento por deformación.*

Draft y Límite máximo de draft. Draft es la reducción de espesor causada por los rodillos.

$$d = t_0 - t_f$$

$$d_{max} = \mu^2 \cdot R$$

*Siendo ' $\mu$ ' el coeficiente de fricción y ' $R$ ' el radio del rodillo.*

La fuerza del rodillo ' $F$ ' requerida para mantener la separación entre los dos rodillos se puede aproximar con base en el esfuerzo de fluencia promedio que experimenta el material de trabajo en la brecha de los rodillos.

$$F = Y_f \cdot w \cdot L$$

*Siendo ' $w$ ' el ancho del material de trabajo que se está laminando y ' $L$ ' la longitud de contacto entre el rodillo y el trabajo.*

Aproximación de la longitud de contacto  $L = \sqrt{R \cdot (t_0 - t_f)}$

Momento de torsión en laminado se puede estimar suponiendo que la fuerza ejercida por los rodillos se centra en el trabajo, conforme pasa por ellos y actúa con un brazo de palanca de la mitad de la longitud de contacto ' $L$ '.

$$T = 0,5 \cdot F \cdot L$$

Potencia requerida para mover cada rodillo será:

$$P = 2\pi \cdot N \cdot F \cdot L$$

*Siendo ' $N$ ' la velocidad rotacional del rodillo.*

Velocidad volumétrica del flujo antes y después debe ser la misma, por lo tanto:

$$t_0 \cdot w_0 \cdot v_0 = t_f \cdot w_f \cdot v_f$$

*Donde ' $w_0$ ' y ' $w_f$ ' son los anchos de trabajo antes y después, ' $t_0$ ' y ' $t_f$ ' son los espesores antes y después y ' $v_0$ ' y ' $v_f$ ' son las velocidades de entrada y de salida.*

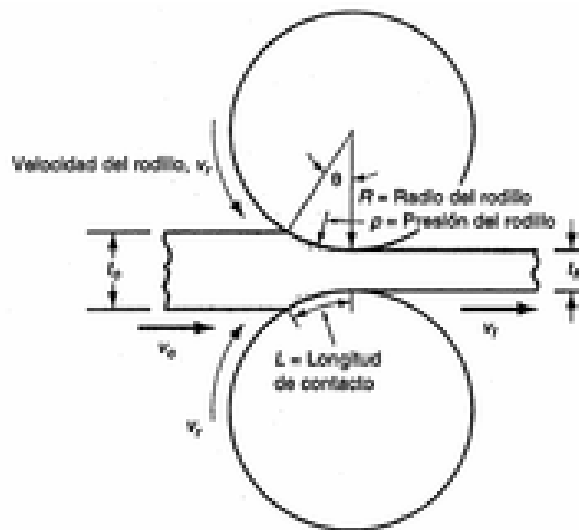


Imagen 2.1: Ilustración de laminado con sus variables.

Cuando se realiza el proceso de laminación en un tren laminado se busca reducir el espesor de una lámina plana, para ello se “apretará” el material entre dos rodillos de un radio. De esta manera el espesor se reduce en una cantidad conocida como DRAFT.

$$d = (t_0 - t_f) \quad (1)$$

La pieza sufrirá una deformación en el ancho de la misma, pero esto se despreciará en este informe, solo se trabajará con el espesor y su longitud. Al reducir su espesor el cuerpo está sometido a esfuerzos, estos están dados en función de los espesores en ambos instantes.

$$e = \ln\left(\frac{t_0}{t_f}\right) \quad (2)$$

Para reducir el espesor en la cantidad necesaria (la requerida) es necesario que se aplique una fuerza vertical sobre cada rodillo, con el fin de mantener esa separación. Una aproximación de esa fuerza en función del esfuerzo de fluencia promedio, la velocidad angular y la longitud de contacto.

$$F = \bar{Y} \cdot w \cdot L \quad (3)$$

El término de longitud de contacto está determinado como:

$$L = \sqrt{R \cdot (t_0 - t_f)} \quad (4)$$

El momento de torsión se puede calcular como la fuerza que actúa en un brazo de palanca de la mitad de longitud de contacto.

$$T = 0.5 \cdot F \cdot L \quad (5)$$

La potencia requerida para mover cada rodillo es el producto del momento de torsión y la velocidad angular, está dada como:

$$P = 2 \cdot \pi \cdot w \cdot F \cdot L \quad (6)$$

Con el fin de poder estimar el valor del radio en los rodillos del tren de laminado se procederá a realizar las siguientes sustituciones, para ello se sustituye (3) y (4) en la relación (6)

$$P = 2 \cdot \pi \cdot w \cdot (\bar{Y} \cdot (ancho) \cdot \sqrt{R \cdot (t_0 - t_f)}) \cdot (\sqrt{R \cdot (t_0 - t_f)})$$

$$P = 2 \cdot \pi \cdot w \cdot ancho \cdot \bar{Y} \cdot R \cdot (t_0 - t_f) \quad (7)$$

De la ecuación (7) se despejará el radio del rodillo:

$$R = \frac{P}{(2 \cdot \pi \cdot w \cdot ancho \cdot \bar{Y} \cdot (t_0 - t_f))}$$

El término fluencia promedio se estima de la siguiente manera:

$$\bar{Y} = \frac{k \cdot e^n}{1+n}$$

El término 'k' se conoce como coeficiente de resistencia y dependerá del material a utilizar, para los materiales que están siendo utilizados en este trabajo práctico están dados como:

- Acero 4140 — k=700 n/mm<sup>2</sup>
- Acero 1010 — k=500 n/mm<sup>2</sup>
- Acero 1045 — k= 850 n/mm<sup>2</sup>

El término 'n' se conoce como exponente de endurecimiento por deformación, y también depende del material a utilizar. Es un número adimensional.

- Acero 4140 — n=0.15
- Acero 1010 — n= 0.25
- Acero 1045 — n=0.20

## 2.2 Materiales

El acero es una aleación del hierro (Fe) con otros elementos no-metálicos, como el Carbono (C), Silicio (Si), Fósforo (P), azufre (S) entre otros elementos. Los distintos tipos de acero son:



1. Acero al carbono:

El carbono presente en la aleación de hierro puede estar en una proporción que abarca desde 0.02% hasta 2%

I) Aceros de bajo carbono ( $\%C < 0.22$ )

II) Aceros de medio carbono ( $0.22 < \%C < 0.55$ )

III) Aceros de alto carbono ( $2 > \%C > 0.55$ )

2. Aceros aleados

Se hace referencia a los aceros aleados cuando aparte de contener carbono tienen distintos tipos de elementos químicos en diferentes proporciones que irán desde 1% hasta el 50%. Algunos de estos agregados pueden ser, por ejemplo, Níquel, Manganeso, Cromo, Vanadio, Molibdeno, entre otros.

I) Aceros de baja aleación (elementos aleantes  $< 5\%$ )

II) Aceros de alta aleación (elementos aleantes  $> 5\%$ )

En este informe se utilizó para la aproximación mediante un programa de cálculo numérico, los siguientes tipos de acero:

1. Acero 1010: como su nombre lo indica es un acero al carbono de baja concentración que está constituido por el 0.10% de carbono. y no contiene ningún tipo de elemento aleante. Este tipo de acero se utiliza para aplicaciones que no requieren una exposición a grandes esfuerzos.

Para este tipo de acero se considera la siguientes propiedades físicas y químicas a utilizar:

- Calor específico ( $C_e$ ) = 0.448 J/(gK)
  - Conductividad térmica ( $K$ ) = 0.0519 W/(mmK)
  - Densidad( $\rho$ ) = 7.8g/(cm<sup>3</sup>)
  - Punto crítico superior( $a_{c3}$ )=782°
2. Acero 1045: Es un acero al carbono con una concentración del 45% al 50% , es por ello que se considera un acero de medio carbono. Este tipo de acero proporciona un nivel medio de resistencia mecánica

Para este tipo de acero se considera las siguientes propiedades físicas y químicas a utilizar:

- Calor específico (Ce) = 0.46 J/(gK)
- Conductividad térmica (K)= 0.052 W/(mmK)
- Densidad(p) = 7.85 g/(mm<sup>3</sup>)
- Punto crítico superior(ac3)=787°C

3. Acero 4140 (aleado) Cromo - Molibdeno: Es un acero aleado con una baja concentración compuesto por cromo, molibdeno y manganeso. Este tipo de acero presenta una gran resistencia a la fatiga y a la abrasión.

Para este tipo de acero se considera las siguientes propiedades físicas y químicas a utilizar:

- Calor específico (Ce) = 0.473 J/(gK)
- Conductividad térmica (K)= 0.0427 W/(mmK)
- Densidad(p) = 7.87 g/(mm<sup>3</sup>)
- Punto crítico superior(ac3)=793°C

```
write(*,*)'Podra seleccionar entre los siguientes tipos de ACERO'
write(*,*)'Opcion Numero 1 para'
write(*,*)'Opcion Numero 2 para  Acero-1010'
write(*,*)'Opcion Numero 3 para  Acero-4140'
write(*,*)'Opcion Numero 4 para  Acero-1045'
read(*,*)opcion

select case(opcion)

case(1)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Bloque de datos del material !! ACERO 1010
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
p=7800 !densidad
ce=468 !calor especifico
k= 57.9 !conductividad termica
Tm= 782 ! VERIFICAR
cof_resistencia=500 ! en n/mm2
exp_endurecimiento=0.25

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
```

```

case (2)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Bloque de datos del material !! ACERO 4140
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
p=7810 !densidad
ce=561 !calor especifico
k= 33.1 !conductividad termica
Tm= 793
cof_resistencia=700 ! en n/mm2
exp_endurecimiento=0.15

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

case (3)
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!! Bloque de datos del material !! ACERO 1045
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
p=7850 !densidad
ce=460 !calor especifico
k= 52.0 !conductividad termica
Tm= 787
cof_resistencia=850 ! en n/mm2
exp_endurecimiento=0.20
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
end select
endsubroutine

```

*Implementación de los materiales en el código*

## 3 Método

### 3.1 Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas permite discretizar ecuaciones diferenciales y permitir un tratamiento más simple del problema diferencial parcial, el principio del método comprende la definición de las derivadas parciales de la función  $f(x)$ .

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F(x+\Delta x, y) - F(x, y)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \approx \frac{F(x+\Delta x, y) - 2F(x, y) + F(x-\Delta x, y)}{\Delta x^2}$$

### 3.2 Discretización de la ecuación de calor

La ecuación a discretizar es la siguiente:

$$k \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + g_k = p \cdot c \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Siendo  $T=T(x, y, t)$ , 'c' la capacidad calórica específica, 'p' la densidad de masa del material y 'k' la conductividad térmica.

Por simetría del problema se considera la tercera derivada espacial igual a cero.

#### Primera aproximación al problema. Método explícito.

Primero procedemos a discretizar las derivadas segundas espaciales como diferencias centradas de segundo orden.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T(x+\Delta x, y, t) - 2T(x, y, t) + T(x-\Delta x, y, t)}{\Delta x^2} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \approx \frac{T(x, y+\Delta y, t) - 2T(x, y, t) + T(x, y-\Delta y, t)}{\Delta y^2} \quad (3)$$

Hacemos lo análogo con la derivada temporal expresado como la diferencia ascendente de primer orden.

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T(x,y,t+\Delta t) - T(x,y,t)}{\Delta t} \quad (4)$$

### 3.2.1 Discretización y modelo de la fuente de calor Gk

Según el trabajo de nombre '*SOLUCIÓN NUMÉRICA DEL PROBLEMA DE TRANSMISIÓN DE CALOR CON CAMBIO DE FASE*' de autores: Luis A. Crivelli y Sergio R. Idelsohn, del laboratorio de Mecánica del INTEC del año 1985 se describen dos enfoques numéricos.

Los métodos de dominio fijo y los métodos que persiguen la posición de la interfase.

Métodos que persiguen a la interfase

- Diferencias finitas en malla fija
- Diferencias finitas en malla variable
- Elementos finitos móviles
- Elementos de contorno

Métodos de dominio fijo

- Capacidad calorífica equivalente
- Formulación entálpica
- Fuente interna ficticia
- Índice de congelamiento
- Integración discontinua

Hipótesis de los métodos con el fin de reducir la complejidad de la formulación sin quitar validez de la solución:

- La densidad de ambas fases es constante a través de la interfase.
- Cualquier efecto de convección en la fase líquida se tiene en cuenta aumentando el coeficiente de conductividad correspondiente.

	Ventajas	Desventajas
Métodos que persiguen la interfase	En cada paso de tiempo se obtiene explícitamente la posición de la interfase. Al ser algoritmos orientados a un tipo particular de problema, generalmente	Necesitan una solución de arranque. No pueden tratar zonas pastosas. No pueden tratar casos de

	resultan más eficientes que los métodos de dominio fijo.	generación de la interfase, aparición y/o desaparición de la nueva fase. La interfase debe ser una función regular.
Métodos de dominio fijo	Pueden tener en cuenta múltiples interfases, incluso aparición y desaparición de una fase en el seno de otra. Buenos para enfrentar un problema por primera vez.	Necesitan de un gran número de iteraciones para converger, lo que puede tornarlos altamente ineficiente.

### 3.2.2 Método seleccionado: Fuente interna ficticia.

Consiste en reemplazar el efecto del calor latente por una fuente interna ficticia ubicada en aquellos elementos que cambian de fase. Esta fuente interna tiene una duración dada por la cantidad de calor necesaria para fundir el elemento de volumen asociado a cada nodo del elemento.

De esta manera podemos definir  $G_k$  como:

$$g_k = c \frac{T_m - T_n}{\Delta t} V \quad (5)$$

Si aproximamos  $V$  (volumen) como  $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$  y  $\Delta z = 1$ , entonces  $V = \Delta x \Delta y [m^3]$

Si ahora reemplazamos la ecuación (1) por las aproximaciones realizadas en (3),(4) y (5) nos queda:

$$k \left( \frac{T(x,y+\Delta y,t) - 2T(x,y,t) + T(x,y-\Delta y,t)}{\Delta y^2} + \frac{T(x+\Delta x,y,t) - 2T(x,y,t) + T(x-\Delta x,y,t)}{\Delta x^2} \right) + c \frac{T_m - T_n}{\Delta t} \Delta x \Delta y = pc \left( \frac{T(x,y,t+\Delta t) - T(x,y,t)}{\Delta t} \right)$$

Haciendo las simplificaciones correspondientes

$$\frac{k\Delta t}{pc\Delta y^2} (T(x,y+\Delta y,t) - 2T(x,y,t) + T(x,y-\Delta y,t)) + \frac{k\Delta t}{pc\Delta x^2} (T(x+\Delta x,y,t) - 2T(x,y,t) + T(x-\Delta x,y,t)) + \frac{\Delta x \Delta y T_m}{p} + (1 - c\Delta x \Delta y) T(x,y,t) = T(x,y,t + \Delta t)$$

Si no hay generación de calor producto de la reacción exotérmica quedaría:

$$\frac{k\Delta t}{pc\Delta y^2} (T(x,y+\Delta y,t) - 2T(x,y,t) + T(x,y-\Delta y,t)) + \frac{k\Delta t}{pc\Delta x^2} (T(x+\Delta x,y,t) - 2T(x,y,t) + T(x-\Delta x,y,t)) + T(x,y,t) = T(x,y,t + \Delta t)$$

Si llamamos  $r1$  a  $\frac{k\Delta t}{pc\Delta y^2}$  y  $r2$  a  $\frac{k\Delta t}{pc\Delta x^2}$

$$r1(T(x,y+\Delta y,t) - 2T(x,y,t) + T(x,y-\Delta y,t)) + r2(T(x+\Delta x,y,t) - 2T(x,y,t) + T(x-\Delta x,y,t)) + \frac{\Delta x \Delta y T_m}{p} + (1 - c\Delta x \Delta y) T(x,y,t) = T(x,y,t + \Delta t)$$

Análogamente

$$r1(T(x, y + \Delta y, t) - 2T(x, y, t) + T(x, y - \Delta y, t)) + r2(T(x + \Delta x, y, t) - 2T(x, y, t) + T(x - \Delta x, y, t)) + T(x, y, t) = T(x, y, t + \Delta t)$$

Si imponemos la condición de convergencia de las ecuaciones parabólicas donde  $r = \frac{1}{4}$  ( $\Delta x$  y  $\Delta y$  quedarán a definirse según las condiciones de cada material). Podemos simplificar aún más la expresión obtenida, llegando finalmente a la ecuación utilizada en el código.

Para nodos sin generación de calor:

$$r(T(x, y + \Delta y, t) + T(x, y - \Delta y, t) + T(x + \Delta x, y, t) + T(x - \Delta x, y, t)) + (1 - 4r)T(x, y, t) = T(x, y, t + \Delta t)$$

Para nodos con generación de calor:

$$r(T(x, y + \Delta y, t) + T(x, y - \Delta y, t) + T(x + \Delta x, y, t) + T(x - \Delta x, y, t)) + \frac{\Delta x \Delta y T_m}{p} + (1 - c \Delta x \Delta y)T(x, y, t) = T(x, y, t + \Delta t)$$

### 3.3 Implementación en el código

```
do iter=0, 50
  Do j=1, m-1
    Do i=1, n-1
      IF (l/=0) then
        IF ((UE(i,j,l-1)>Tm) .AND. (UE(i,j,l)<=Tm) .AND. (UV(i,j)/=1)) then
          UE(i,j,l)=r*(U(i+1,j,l)-2*U(i,j,l)+U(i-1,j,l))+r*(U(i,j+1,l)-2*U(i,j,l)+U(i,j-1,l))+pruebal+(1-c*h*deltay)*U(i,j,l)
          UV(i,j)=1
          print*, 'calor generado ',pruebal, 'nodo: ',i, ' ',j
        else
          UE(i,j,l)=r*(U(i+1,j,l)+U(i-1,j,l)+U(i,j+1,l)+U(i,j-1,l))+(1-4*r)*U(i,j,l)
        endif
      else
        UE(i,j,l)=r*(U(i+1,j,l)+U(i-1,j,l)+U(i,j+1,l)+U(i,j-1,l))+(1-4*r)*U(i,j,l)
      endif
      WRITE(1,'(3I2)') i,j,l !Escribe la secuencia de analisis
    enddo
  enddo
```

El método de resolución para cada tiempo 'l' será un método indirecto. El primer método elegido por simplicidad de implementación será el Método de Jacobi.

La cantidad de iteraciones para la convergencia están definidas arbitrariamente como 50 iteraciones. Este valor podría hacerse variar según los resultados obtenidos.

Dentro del método iterativo se implementó una estructura de control la cual evalúa si un determinado nodo se enfrió lo suficiente como para liberar su calor latente. Esta estructura tiene 3 condiciones que deben ser satisfechas para acceder a la ecuación de calor con generación de calor. Las condiciones son:

1. La temperatura del nodo( $i,j$ ) en un tiempo ' $l$ ' debe ser superior a la temperatura " $T_m$ "
2. La temperatura del nodo( $i,j$ ) en un tiempo ' $l+1$ ' debe ser menor a la temperatura " $T_m$ "
3. El nodo( $i,j$ ) no liberó el calor latente con anterioridad

Para comprobar la tercera condición se creó una matriz de verificación (UV) de iguales dimensiones que la matriz U que tendrá todos sus nodos con el valor 0 (cero) y una vez que ese nodo haya liberado su calor latente, se sobre-escribirá ese nodo con el valor 1.

De esta manera, si ese nodo es distinto de 1 (uno) se accederá a la ecuación con liberación de calor, y si no, se considerará la liberación de calor igual a 0 (cero).

### Problemas encontrados en esta primera implementación

- Se encontró que para subenfriamientos con disminución de la temperatura de los bordes abruptamente, la temperatura no se desplazaba lo suficientemente rápido.
- No se programó el cálculo del error para cada iteración del método de Jacobi.
- La temperatura de los nodos interiores no disminuye lo suficientemente rápido, sin importar el tipo de aleación que se esté usando y las condiciones de contorno.
- El paso de  $h$  y  $\Delta t$  está restringido.

### Segunda aproximación del problema

Para una segunda aproximación, se decidió implementar una expresión condicional adicional que ayudará a identificar el error en cada paso y que cada iteración temporal pudiera alcanzar la tolerancia esperada. De esta manera quedó:

```

Do l=0, t-1
    Do j=0,m !Cada vez que arranca una iteracion temporal rescribe los
valores de los bordes
        U(0,j,l)= Bordes(deltat,l) !Borde superior
        U(n,j,l)= U(0,j,l) !Borde inferior
    enddo
    Do i=0,n
        U(i,0,l)=890
        U(i,m,l)=Bordes(deltat,l)
    enddo
    UE=U
    DO WHILE ((error>=tol) .AND. (iter<=max_iter))
        print*, iter, error
        Do i=1, n-1

```



```

        Do j=1, m-1
            IF (l/=0) then
                IF ((UE(i,j,l-1)>Tm) .AND. (UE(i,j,l)<=Tm) .AND.
(UV(i,j)/=1)) then
                    UE(i,j,l)=r(U(i+1,j,l)-4*U(i,j,l)+U(i-1,j,l)+U(i,j+1,l)+U(i,j-1,l))+(1-
c*h*deltay)*U(i,j,l))+h*deltay*tm/p
                    UV(i,j)=1
                else
                    UE(i,j,l)=r(U(i+1,j,l)+U(i-1,j,l)+U(i,j+1,l)+U(i,j-1,l))+(1-4*r)*U(i,j,
l)
                endif
            else
                UE(i,j,l)=r(U(i+1,j,l)+U(i-1,j,l)+U(i,j+1,l)+U(i,j-1,l))+(1-4*r)*U(i,j,
l)
            endif
        enddo
    enddo
    error=MAXVAL(ABS(U-UE))
    U=UE
    iter=iter+1
ENDDO
iter=0
error=tol
do j=1,m-1
    do i=1,n-1
        U(i,j,l+1)=UE(i,j,l)
    enddo
enddo
ENDDO

```

### Problemas encontrados:

- El error con cada iteración temporal aumentaba en  $+1 \times \text{tolerancia}$ . Con una tolerancia de 0.001 para la séptima iteración temporal necesitaba más de 500 repeticiones del ciclo para disminuir el error en una malla de 50.000 nodos. Incrementándose con cada iteración temporal este número. De esta manera se encontró altamente ineficiente para mallas grandes y dada la geometría del problema se decidió optar un método iterativo más eficiente.

### Tercera aproximación del problema

Se implementa el método de Gauss-Seidel con sobre-relación.

Se separan r1 y r2 para tener la opción de optar por diferentes pasos, dada la geometría irregular del problema.

```
w=4/(2+SQRT(4-(cos(Pi/m)+cos(Pi/n))*2))
  Do l=0, t-1
    do j=0,m !Cada vez que arranca una iteracion temporal rescribe
los valores de los bordes
      U(0,j,l)= Bordes(deltat,l) !Borde superior
      U(n,j,l)= U(0,j,l) !Borde inferior
    enddo
    do i=0,n
      U(i,0,l)=890
      U(i,m,l)=Bordes(deltat,l)
    enddo
    UE=U
    DO WHILE ((error>=tol) .AND. (iter<=max_iter))
    print*, iter, error
      Do i=1, n-1
        Do j=1, m-1
          IF (l/=0) then
            IF ((UE(i,j,l-1)>Tm) .AND. (UE(i,j,l)<=Tm) .AND.
(UV(i,j)/=1)) then
truncated=w*(-c*h*deltay*UE(i,j,l))+h*deltay*tm/p+UE(i,j,l)
UE(i,j,l)=w*(r1*(UE(i+1,j,l)-2*UE(i,j,l)+UE(i-1,j,l))+r2*(UE(i,j+1,l)+U
E(i,j-1,l)-2*UE(i,j,l)))+truncated
          UV(i,j)=1
        else
UE(i,j,l)=w*(r1*(UE(i+1,j,l)-2*UE(i,j,l)+UE(i-1,j,l))+r2*(UE(i,j+1,l)+U
E(i,j-1,l)-2*UE(i,j,l)))+UE(i,j,l)
        endif
      else
UE(i,j,l)=w*(r1*(UE(i+1,j,l)-2*UE(i,j,l)+UE(i-1,j,l))+r2*(UE(i,j+1,l)+U
E(i,j-1,l)-2*UE(i,j,l)))+UE(i,j,l)
        endif
      endif
    enddo
  enddo
```

```

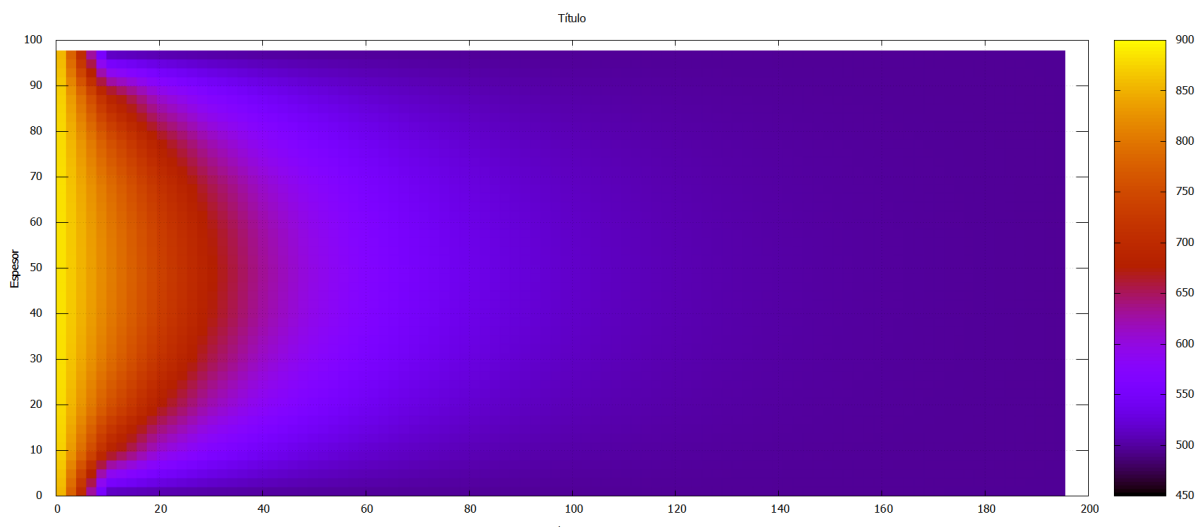
        enddo
    enddo
    error=MAXVAL (ABS (U-UE) )
    U=UE
    iter=iter+1
ENDDO
iter=0
error=tol
do j=1,m-1
    do i=1,n-1
        U(i,j,l+1)=UE(i,j,l)
    enddo
ENDDO
ENDDO

```

Se soluciono:

- Se pudieron encontrar resultados más acordes a lo esperado en la realidad, los nodos centrales bajan su temperatura con mayor velocidad.
- El error disminuye mucho más rápido. Por lo tanto, converge con mayor velocidad en menor cantidad de iteraciones.

Ejemplo de calculo: espesor 100 mm y 200 mm de largo, lado izquierdo “saliendo” de los rodillos de laminado a 890 grados. Inicialmente toda la placa se encontraba a esta temperatura. La simulación se realizó para una placa enfriada en aceite, (condiciones de borde superior, inferior y lateral derecho con extracción de calor a ritmo de 5 grados por segundo). Este cálculo es para tiempo = 80 segundos.



Problemas encontrados:

- Se encontró que las mallas necesarias para que el método converja son muy gruesas. Si bien los resultados están mas próximos a la realidad, una malla gruesa se contradice con las condiciones necesarias del método seleccionado para la simulación de la generación de calor.

Comparativa entre los métodos por: “Modelización de la ecuación de calor con diferencias finitas”, autor: Tomás Izquierdo Garcia-Faria, trabajo final de grado de la Facultad de Matemáticas e Informática de la Universidad de Barcelona, junio de 2017.

La función que se ha fijado en este caso será  $u(x, y, z, t) = \cos(x + y + z + t)$  y se ha deducido  $\Delta u = -2n \cdot \cos(x + y + z + t)$ ,  $u_t = -\sin(x + y + z + t)$  y  $g(x, y, z, t) = 2n \cdot \cos(x + y + z + t) - \sin(x + y + z + t)$ . Conociendo la solución real  $u^*$  para cada punto, y la aproximación calculada  $u$ , se toma como error la máxima diferencia de los puntos del dominio para cada tiempo  $t$  (cada vez que se ejecuta el método).

		nº iteraciones	tiempo de ejecución	Error máximo
Jacobi	Implícito	5903	451s	$1.676 \times 10^{-4}$
	Crank-Nicolson	3331	198s	$1.030 \times 10^{-6}$
Gauss-Seidel	Implícito	3070	171s	$1.676 \times 10^{-4}$
	Crank-Nicolson	1733	99s	$1.029 \times 10^{-6}$
SOR	Implícito	233	26s	$1.676 \times 10^{-4}$
	Crank-Nicolson	201	23s	$1.029 \times 10^{-6}$
Gradiente Conjugado	Implícito	183	6s	$1.676 \times 10^{-4}$
	Crank-Nicolson	139	4s	$1.028 \times 10^{-6}$

Según demuestra el autor, para una aproximación de una función en dos dimensiones la convergencia del método SOR es mucho más veloz que Jacobi para una misma cota de error.

		nº iteraciones	tiempo de ejecución	Error máximo
Jacobi	Implícito	8126	650m	$6.977 \times 10^{-5}$
	Crank-Nicolson	4740	400m	$6.317 \times 10^{-7}$
Gauss-Seidel	Implícito	4227	380m	$6.977 \times 10^{-5}$
	Crank-Nicolson	2465	200m	$6.392 \times 10^{-7}$
SOR	Implícito	312	93m	$6.977 \times 10^{-5}$
	Crank-Nicolson	292	66m	$6.311 \times 10^{-7}$
Gradiente Conjugado	Implícito	254	33m	$2.139 \times 10^{-4}$
	Crank-Nicolson	186	26m	$8.69 \times 10^{-7}$

3 dimensiones

Queda demostrado por el autor de esta tesis, que existe un método aún más eficiente que el método SOR para la resolución del problema de calor. Sin embargo, no será utilizado dado que no está dentro del alcance de la materia.

## 4 Preprocesamiento

La modelación computacional consta de algunos subcapítulos que se deben desarrollar completamente, estos son: generación de geometría, proceso de mallado, ingreso de condiciones, soluciones y resultados. Las primeras dos etapas se desarrollan en lo que se denomina preprocesamiento.

### 4.1 Geometría

La manufactura del acero posee una geometría que puede dividirse en dos grandes grupos:

1. Productos planos: son materiales planos que pueden aproximarse como una chapa, ya que ancho de la misma es mucho mayor al espesor pero menor a su longitud
2. Rieles y perfiles.

En el presente informe se modelará una chapa bidimensional que circuló por un tren de laminado. Para ello se seleccionaron un par de ejes coordenados, uno en dirección longitudinal y el otro colocado en la dirección del espesor de la plancha, se dejó de lado el ancho de la chapa.

El largo comercial de una lámina de acero puede variar. Se tomará como un estándar 1 a 2 metros de largo. Mientras que el espesor de las láminas puede variar entre 0.003 metros a 0.075 metros las más gruesas.



*Imagen 4.1: Lámina de acero en caliente*

## ■ Chapas Finas Calibre B.W.G.

Espesor Nº	Equi- valencia en m/m.	Peso por pie cuadrado	Peso por metro cuadrado	Peso de una Chapa	
				1 x 2 metros	1,22 x 2,44 metros
10	3,40	2,544	27,360	54,720	81,408
11	3,05	2,278	24,502	49,004	72,896
12	2,76	2,069	22,256	44,512	66,208
13	2,41	1,803	19,397	38,794	57,696
14	2,10	1,575	16,947	33,894	50,400
15	1,83	1,366	14,701	29,402	43,712
16	1,65	1,234	13,272	26,544	39,488
17	1,47	1,101	11,843	23,686	35,232
18	1,24	0,930	10,005	20,010	29,760
19	1,07	0,797	8,575	17,150	25,504
20	0,89	0,664	7,146	14,292	21,248
21	0,81	0,607	6,534	13,068	19,424
22	0,71	0,531	5,717	11,434	16,992
23	0,63	0,474	5,104	10,208	15,168
24	0,56	0,417	4,492	8,984	13,344
25	0,51	0,379	4,084	8,168	12,128
26	0,46	0,341	3,675	7,350	10,912
28	0,36	0,265	2,859	5,718	8,480
30	0,30	0,227	2,450	4,900	7,264



## ■ Chapas Gruesas

Espesor		Peso
En m/m.	En Pulgadas	Kg./m²
3,2	1/8	24,963
4,8	3/16	37,366
6,4	1/4	49,848
7,9	5/16	62,329
9,5	3/8	74,810
11,1	7/16	87,214
12,7	1/2	99,701
14,3	9/16	112,182
15,9	5/8	124,664
17,5	11/16	137,067
19,1	3/4	149,542
20,6	13/16	162,024
22,2	7/8	174,505
23,8	15/16	186,909
25,4	1	199,390
31,7	1 1/4	249,238
38,1	1 1/2	299,085
44,4	1 3/4	348,933
50,8	2	398,780
63,5	2 1/2	498,200
76,3	3	598,200



Info<sup>1</sup>

## 4.2 Malla

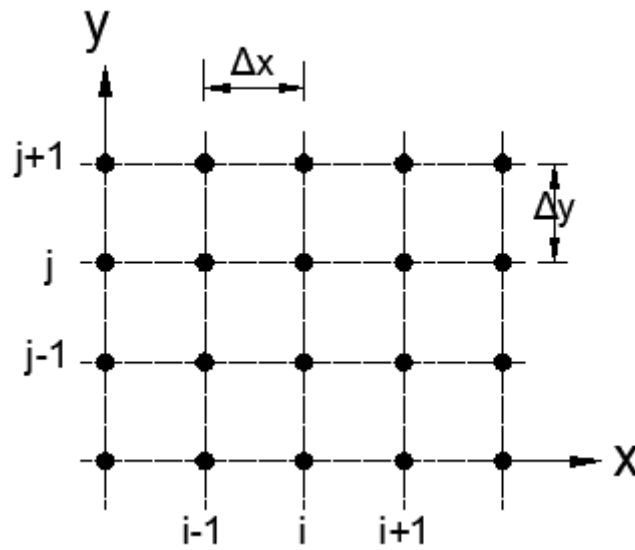
La malla es una representación numérica de la subdivisión del área del modelo a estudiar, y es en cada punto o vértice de este mallado donde se realizará la resolución de ecuaciones diferenciales estudiadas, es por esto por lo que entre más subdivisiones tenga la geometría, los cálculos serán más prolongados, pero a su vez más exacto en el cálculo final.

Será necesario definir la cantidad de intervalos en los cuales se dividió, mediante la discretización, el dominio continuo. Los valores de los pasos en los ejes queda definido por la siguiente relación.

$$h = \Delta x = \sqrt{\frac{k \cdot \Delta t}{c.p.r}}$$

$$k = \Delta y = \sqrt{\frac{k \cdot \Delta t}{c.p.r}}$$

<sup>1</sup> <https://peticari.com.ar/index.html>



*Imagen 4.2.1: Subdivisiones del área de modelado*

En nuestro modelo, la lámina de geometría rectangular estará subdividida en celdas de tamaño  $\Delta x$  y  $\Delta y$  que podrán ser iguales o no en tamaño. A su vez, la cantidad de celdas horizontales y verticales no será la misma en cada caso.



## 5 Procesamiento

### 5.1 Condiciones de borde

Las condiciones de borde describirán las temperaturas de los nodos tanto laterales como horizontales a lo largo del tiempo. Las condiciones serán del tipo '*Condición de Dirichlet*' a partir del cual se conocen los valores de las temperaturas para cada nodo, y en este caso, para cada tiempo.

Estas funciones de temperatura serán una aproximación según el medio de enfriamiento al cual se somete la chapa.

Podrá ser:

- Aire. Con 0,5 grados centígrados por segundo de extracción de calor.
- Agua. Con 5 grados centígrados por segundo de extracción de calor.
- Aceite. Con 50 grados centígrados por segundo de extracción de calor.

```
function Bordes(deltat,l)
    real(8) Bordes,B
    integer deltat,l
    B=890-0.5*deltat*l !AIRE
    ! B=890-5*deltat*l !ACEITE
    ! B=890-50*deltat*l !AGUA
    Bordes=B
end function
```

Se deberá seleccionar manualmente la función de extracción de calor y especificar la temperatura inicial en caso de no ser 890 grados centígrados. Se utiliza una función lineal de extracción de calor, sin embargo, esto presenta un error. Dado que la extracción de calor se maximiza a mayores diferencias de temperatura y decrece con menor diferencia de temperatura (entre el medio de enfriamiento y la chapa).

## 6 Post procesamiento

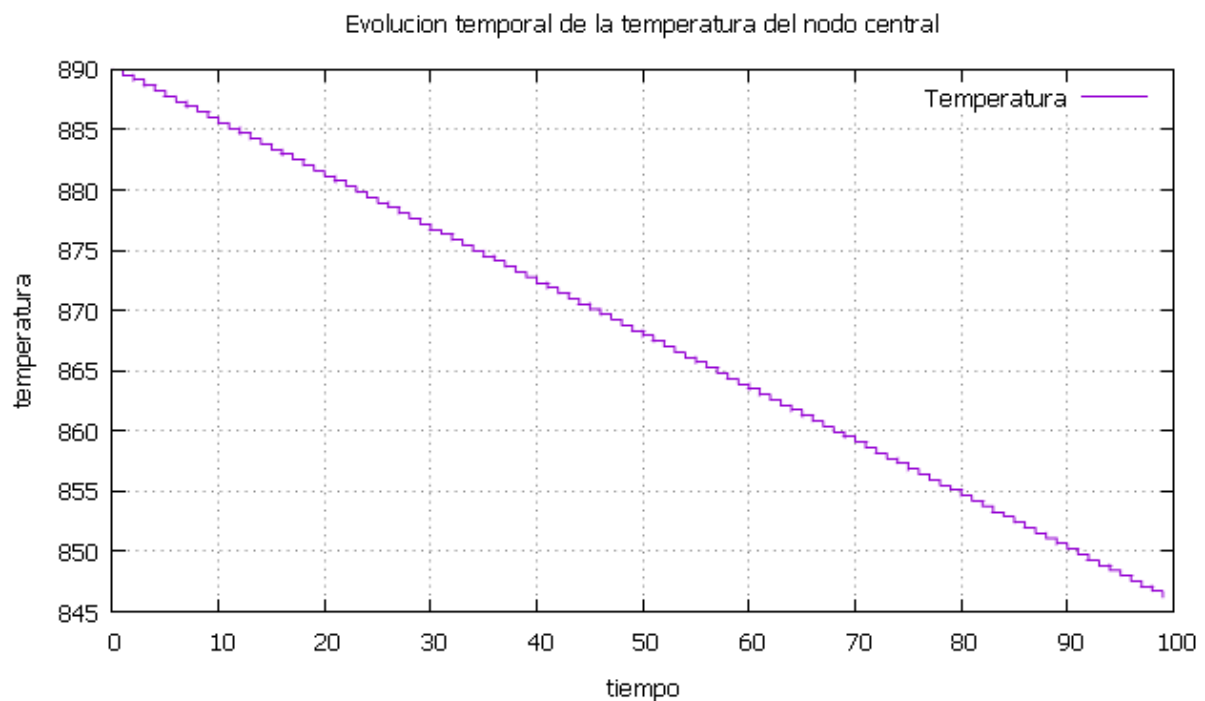
Se analizará la variación de temperatura a lo largo del tiempo de un nodo central variando el tipo de material y el medio de enfriamiento. Se considerará que el largo es mucho mayor que el espesor, por lo cual se considerará para la ejecución del programa un largo menor al propuesto anteriormente.

Condiciones de malla	Tiempo máximo	deltat	Temperatura inicial	Tiempos a graficar
Espesor: 100 mm Largo: 500 mm Cantidad de celdas horizontales:52 Cantidad de celdas verticales: 11 Cantidad de nodos: 572	100 segundos	1 segundo	890°C	0 - 100

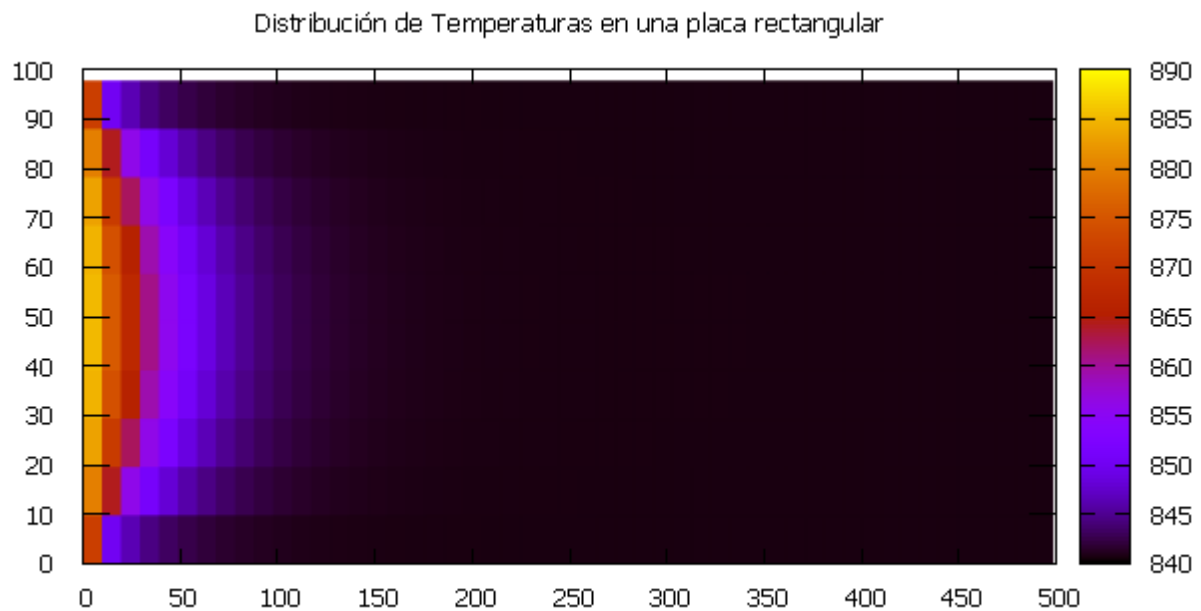
### 6.1 Acero 1010

#### **CASO 1: Medio de enfriamiento aire**

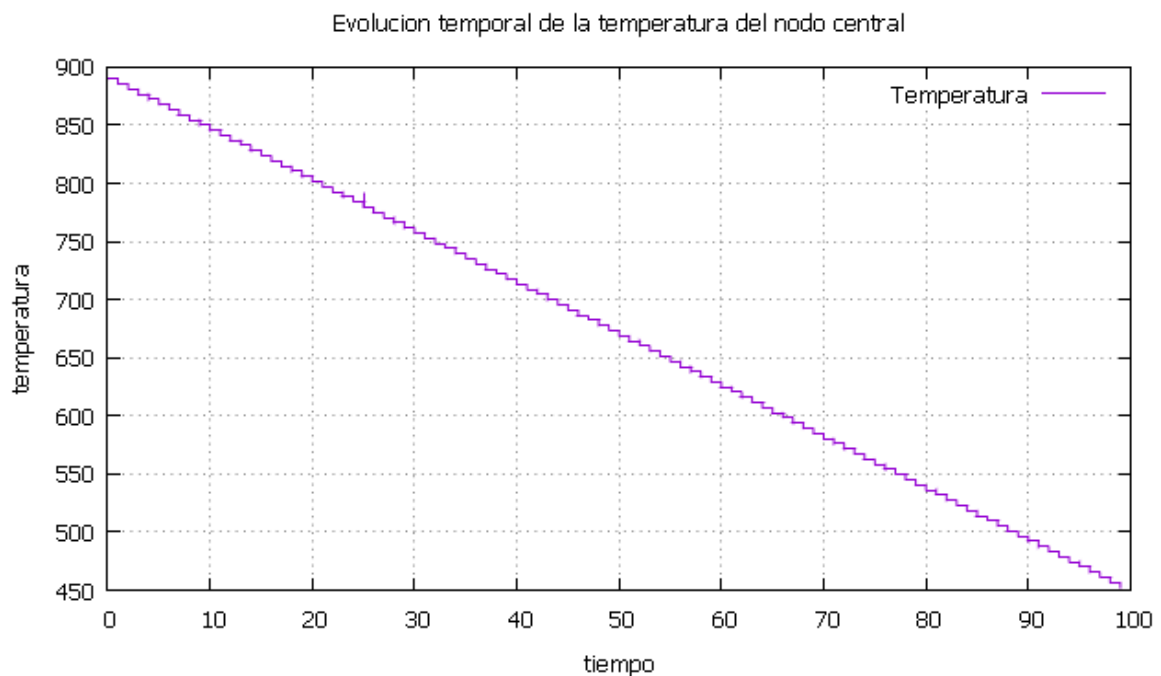
Gráfico de la temperatura del nodo central en función del tiempo



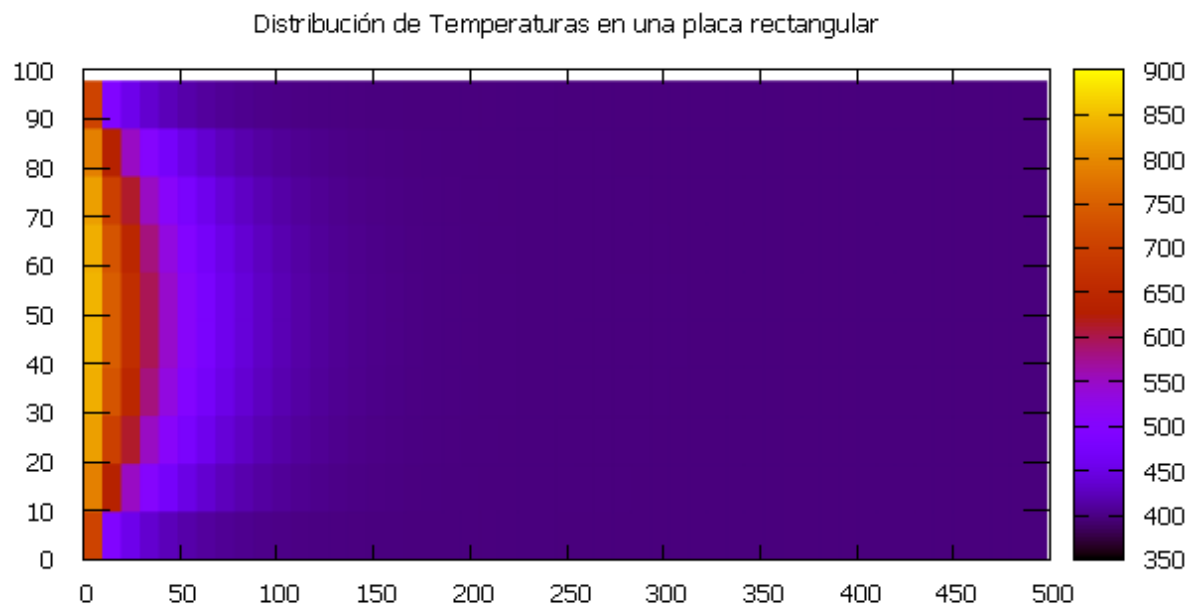
### Grafico de la distribución de temperatura para una placa rectangular



### Caso 2: Medio de enfriamiento aceite

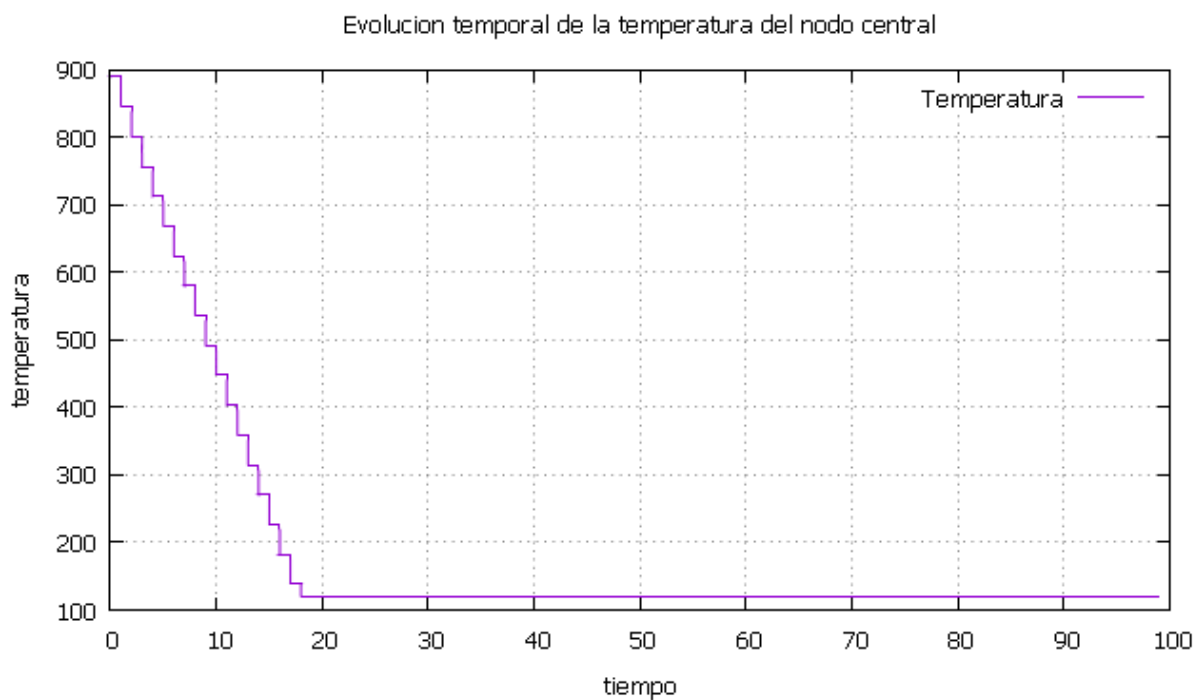


Puede observarse aproximadamente a los 25 segundos de simulación, como el nodo evaluado eleva su temperatura. Esto es así, dada la generación de calor por calor latente.

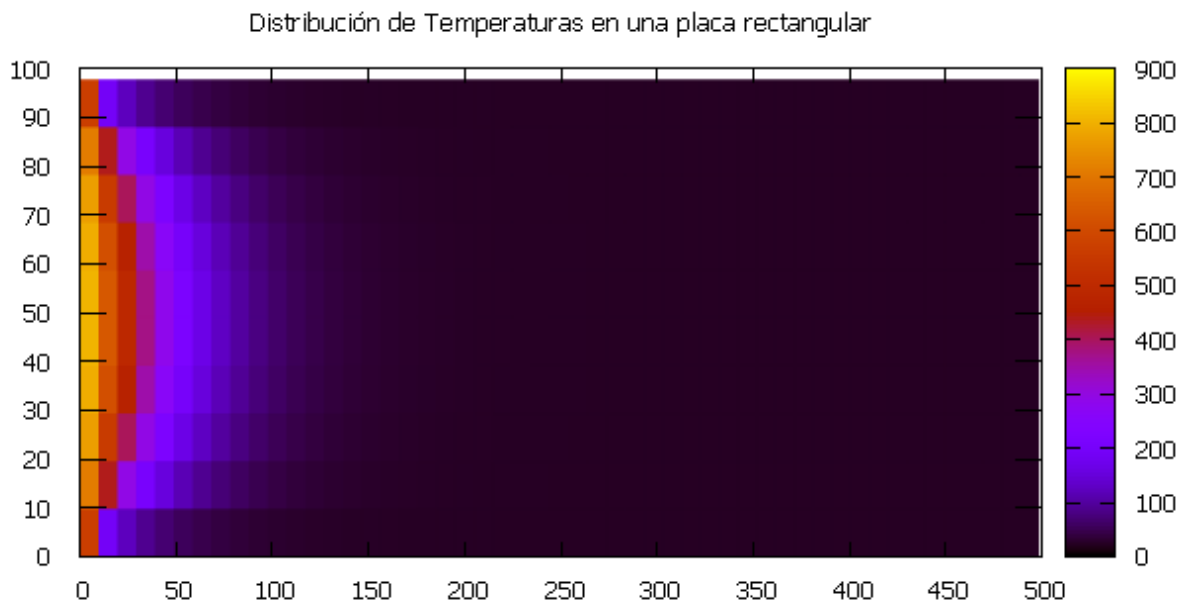


Mediante el gráfico de distribución de temperaturas en la placa podemos determinar la temperatura aproximada de cada punto en la placa para un tiempo dado. Pudiendo solicitar al programa para cualquier tiempo.

### Caso 3: medio de enfriamiento agua

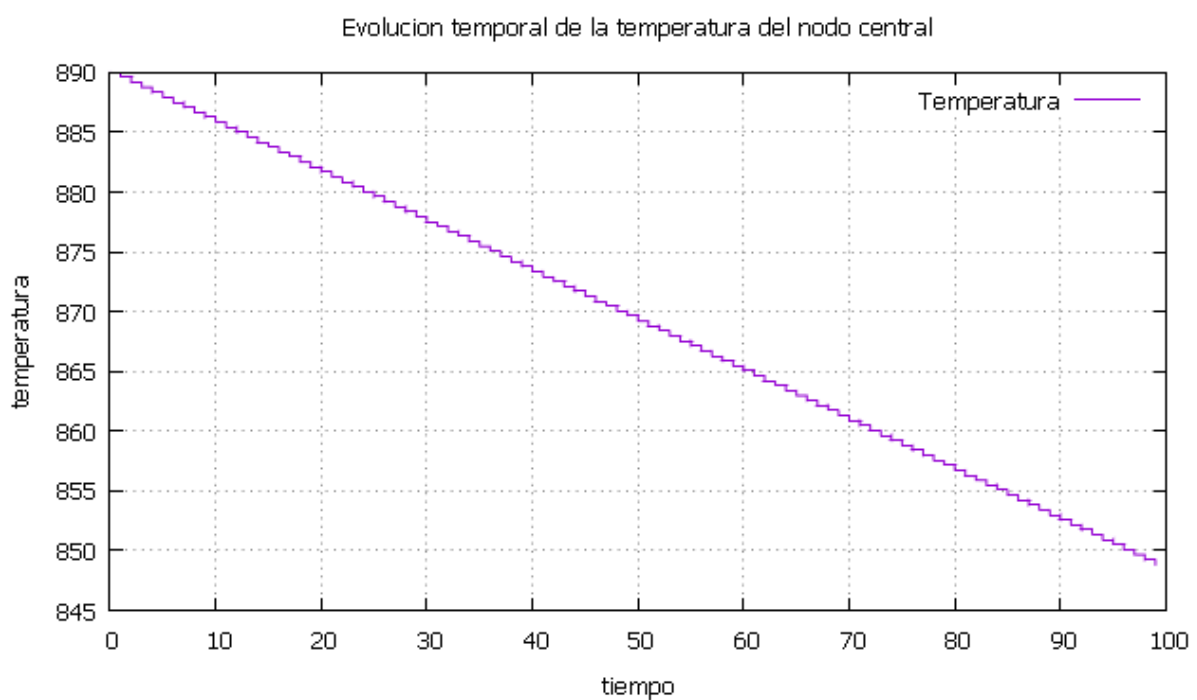


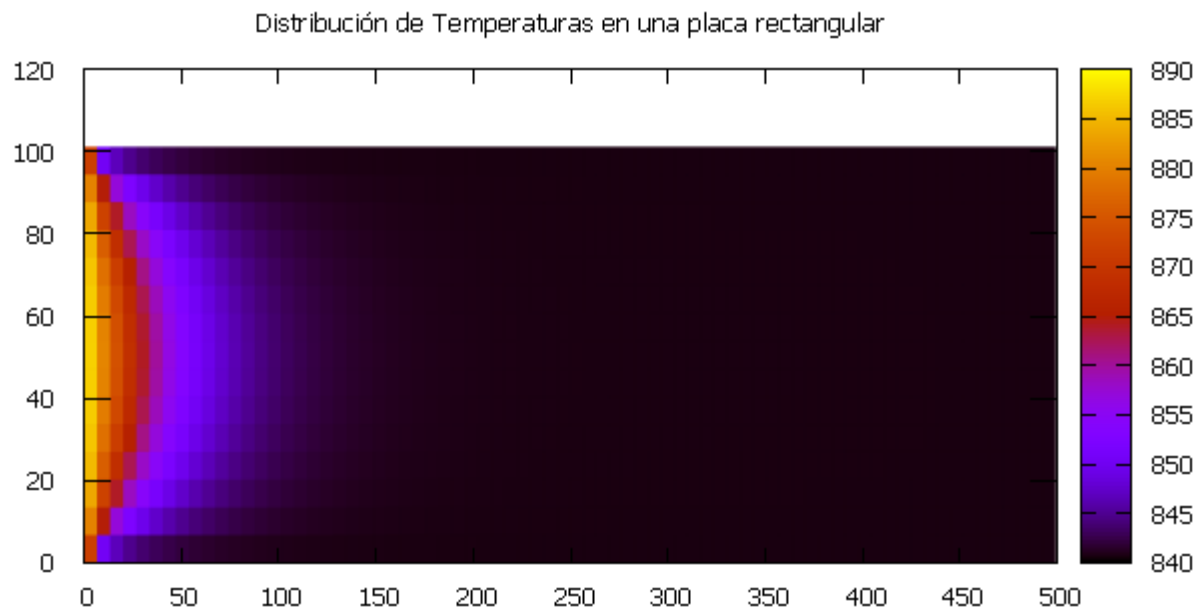
Con un medio de enfriamiento como es el agua, el calor liberado por el nodo analizado se vuelve insignificante en la escala graficada.



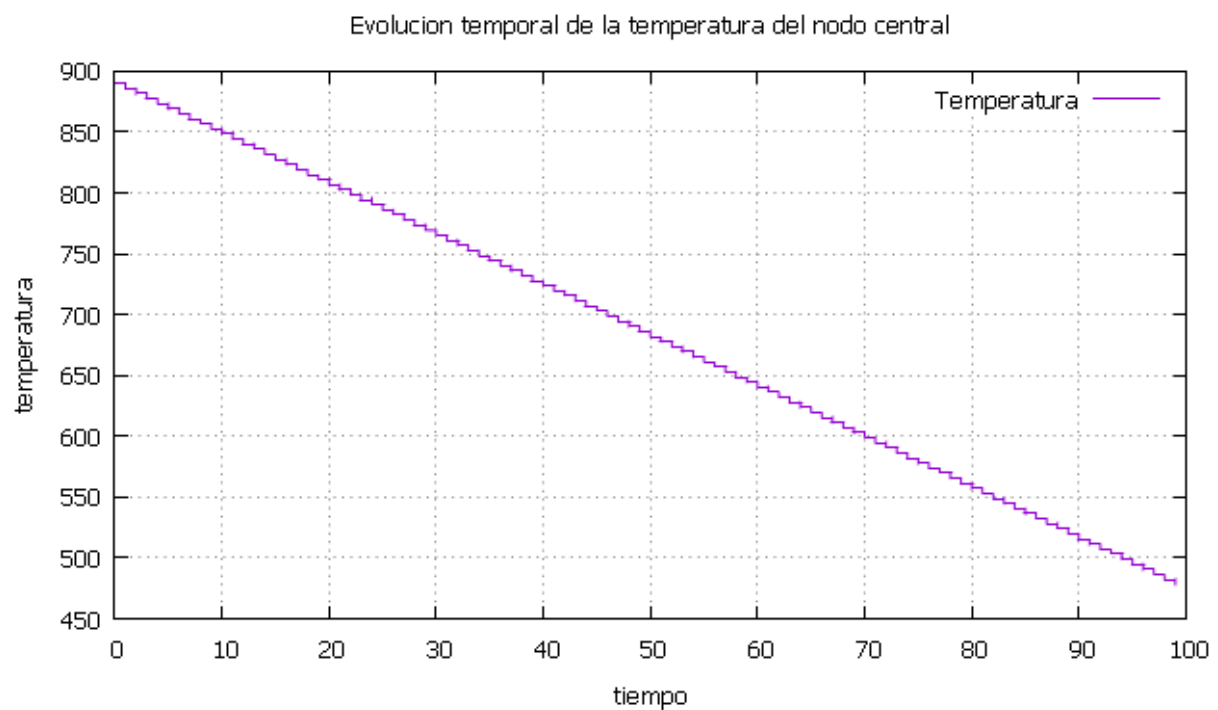
## 6.2 Acero 4140

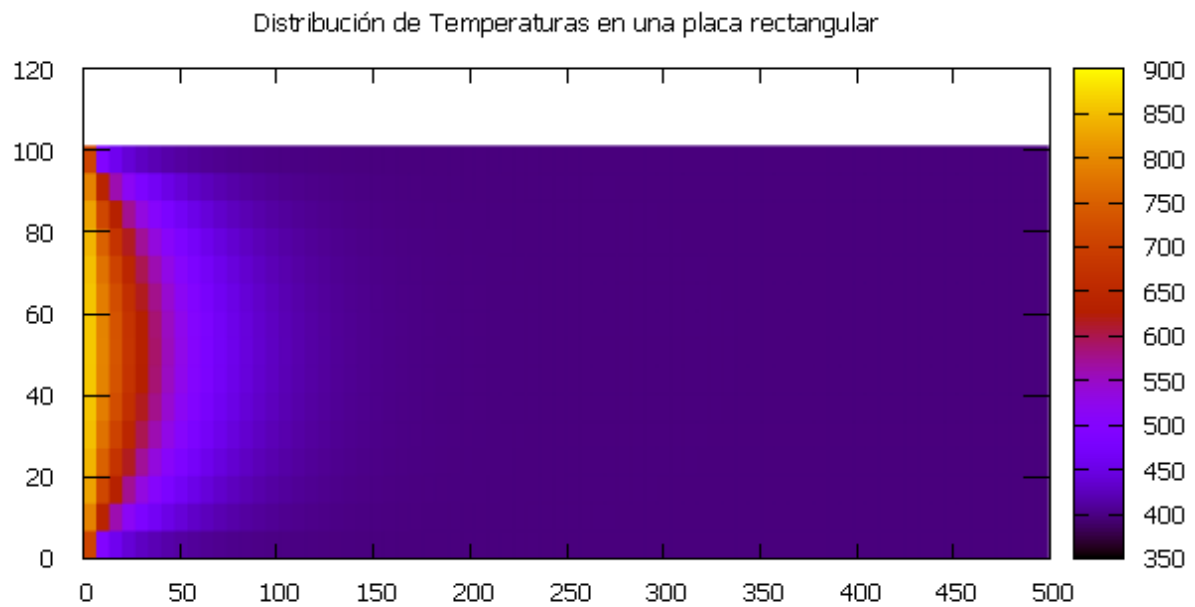
### CASO 4: Medio de enfriamiento aire



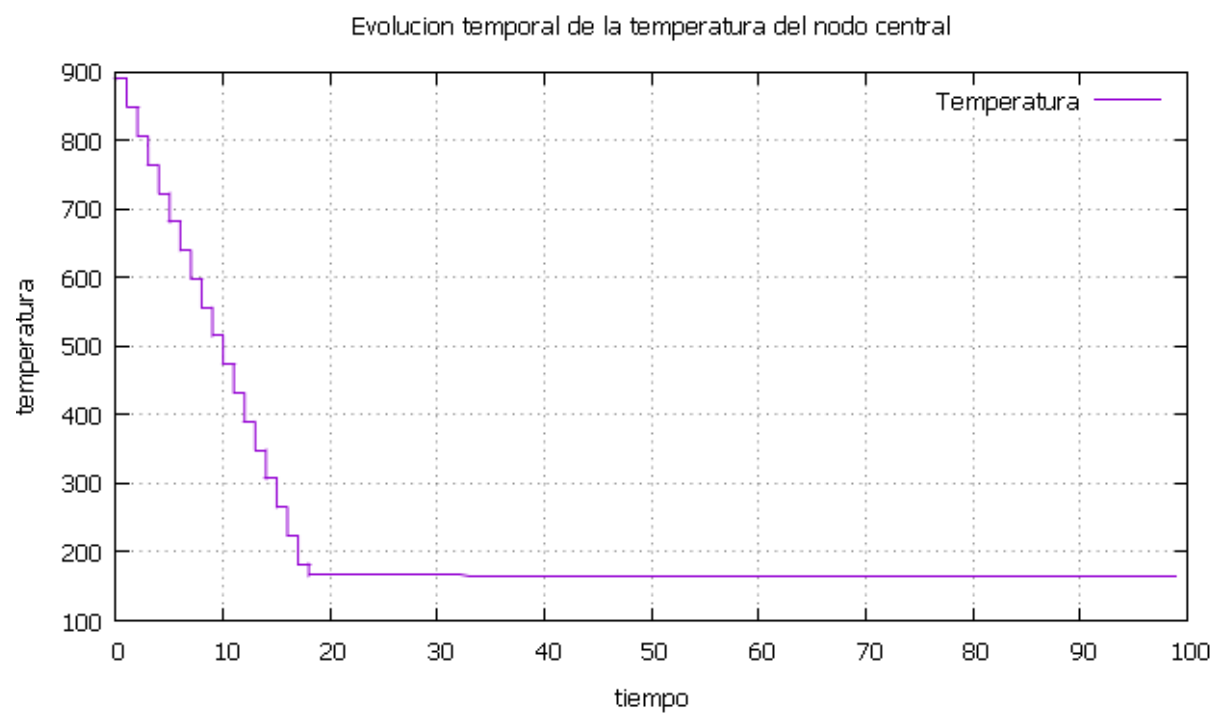


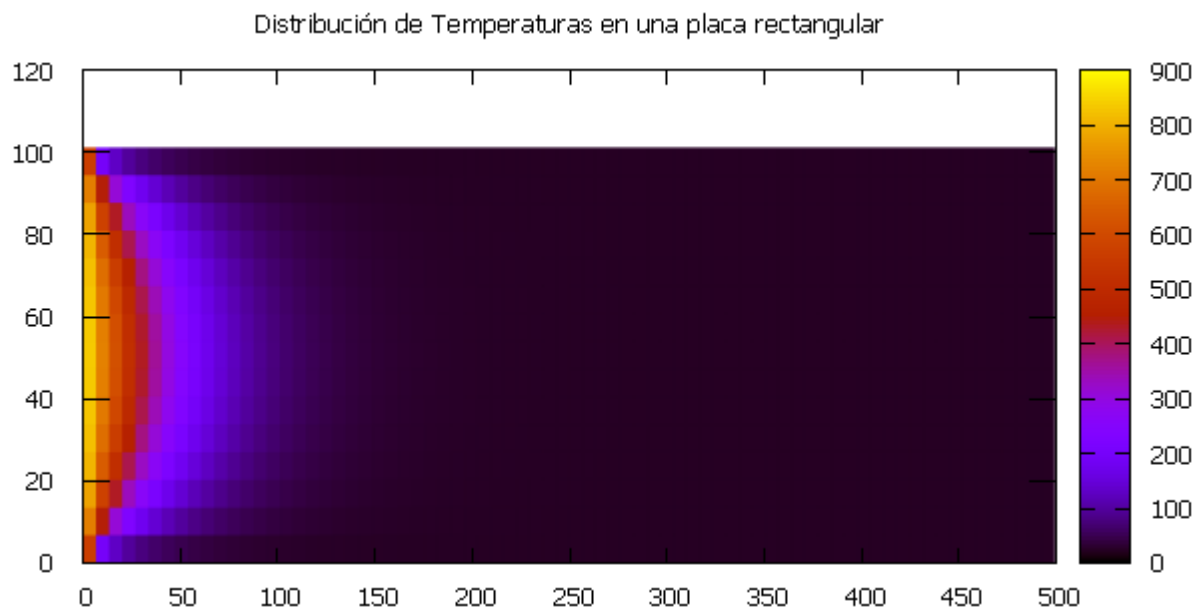
### CASO 5: Medio de enfriamiento aceite





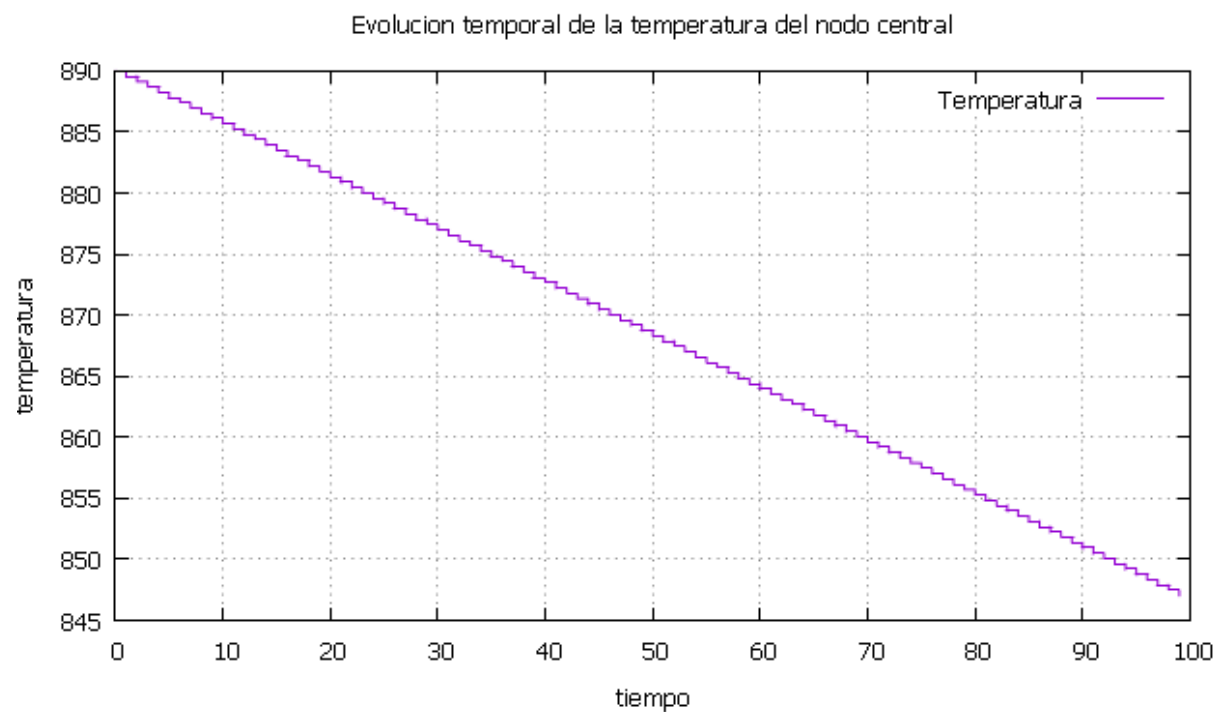
### **Caso 6: Medio de enfriamiento agua**



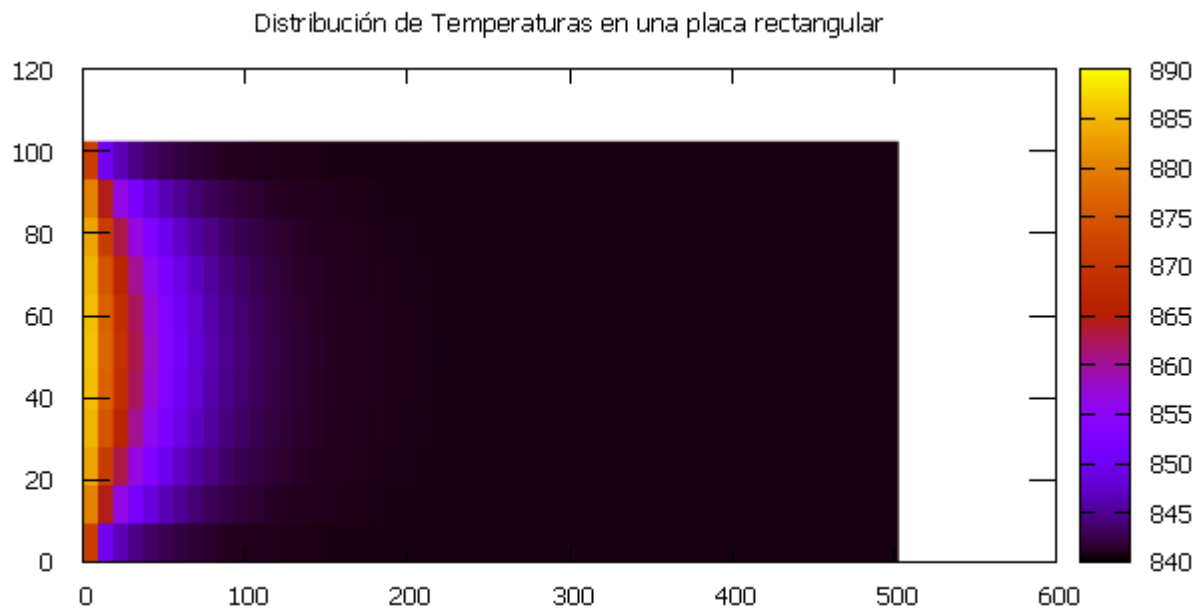


## 6.3 Acero 1045

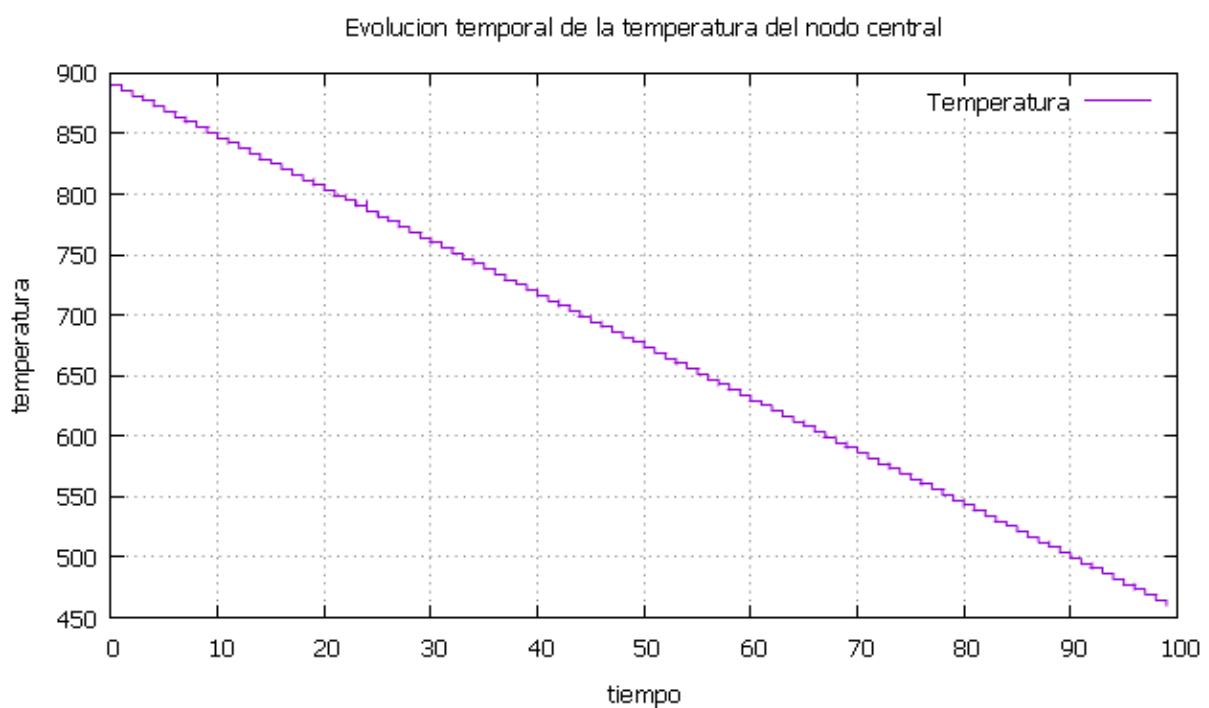
### Caso 7: Medio de enfriamiento aire

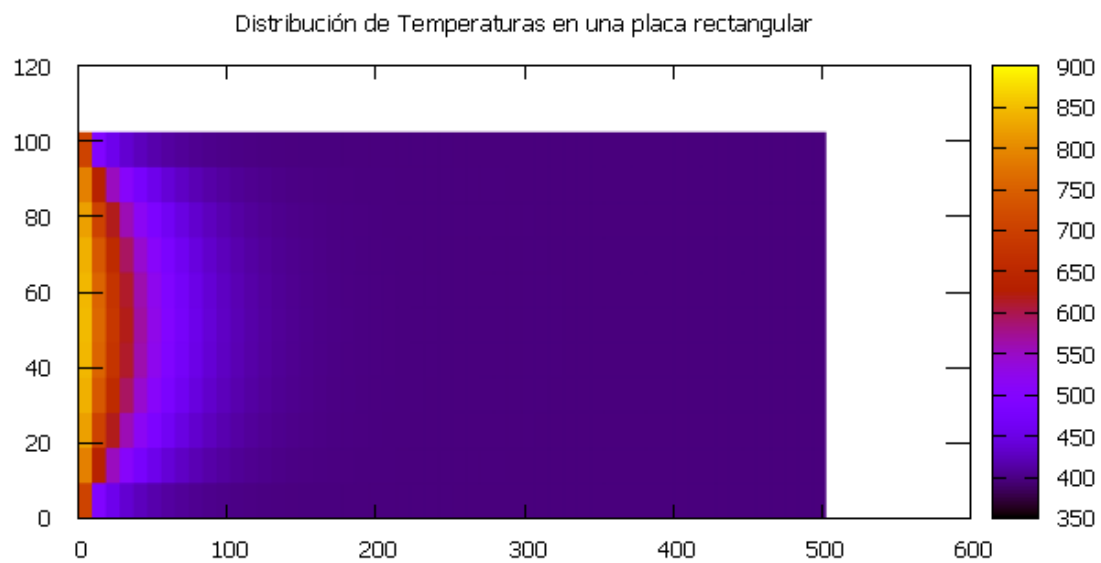




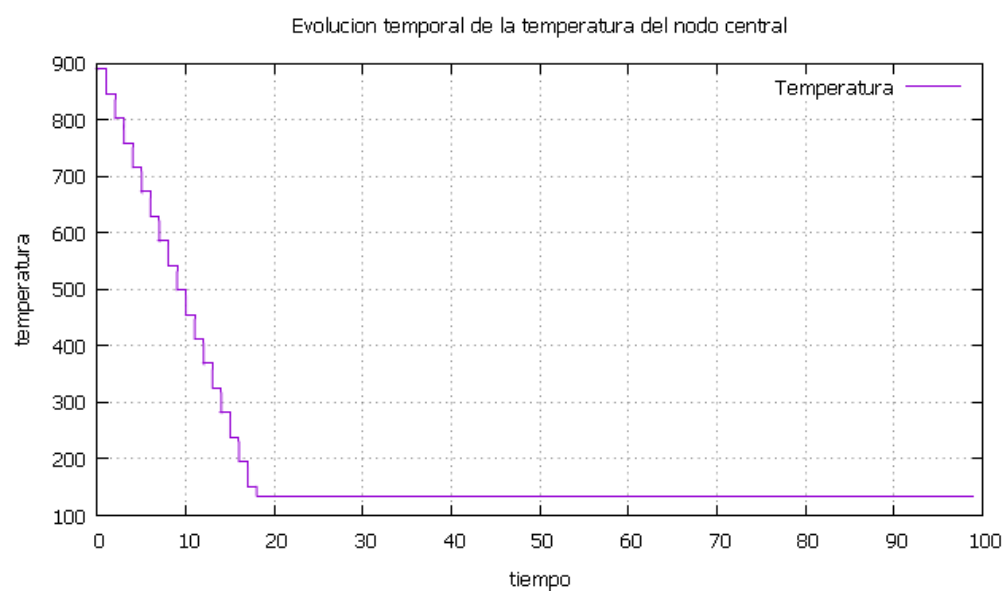


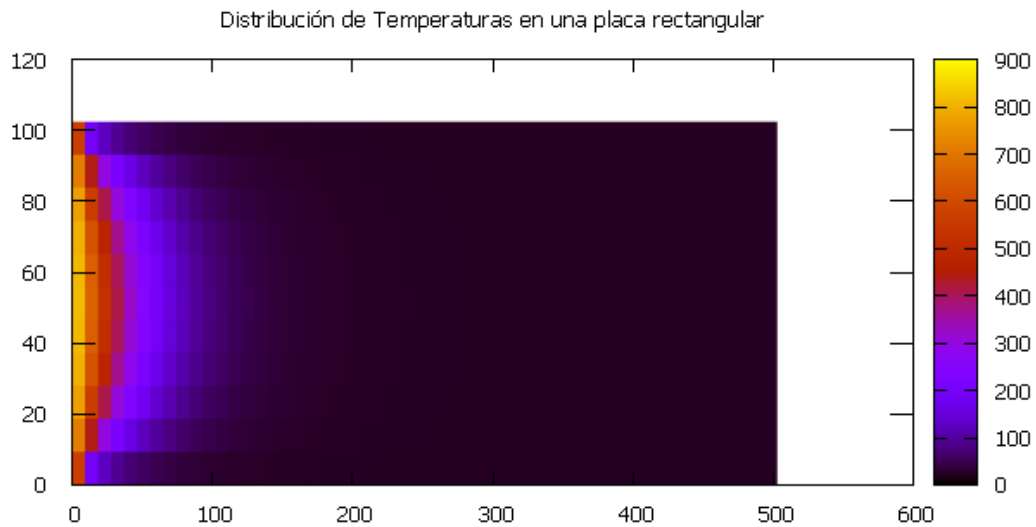
### **Caso 8: Medio de enfriamiento aceite**





### **Caso 9: Medio de enfriamiento agua**





## 6.4 Observaciones

De las imágenes en las cuales están graficados los diferentes valores de temperatura de los nodos centrales a medida que avanza el tiempo se puede notar que, en los enfriamientos que presentan una mayor tasa de extracción de calor (enfriamiento por agua), hay una gran pérdida de temperatura en un lapso de tiempo muy corto, a diferencia de los enfriamientos con menor tasa de extracción. En estos últimos, la pérdida de temperatura se realiza de una manera más uniforme durante el tiempo de análisis.

De las imágenes de distribución de temperatura a lo largo de la malla, se verifica el efecto anteriormente comentado para el resto de nodos.

Puede observarse como la variación de temperaturas para un mismo tiempo se elevará o no dependiendo del medio de enfriamiento elegido. En un enfriamiento por aire, la temperatura máxima observada estará ubicada sobre el lateral izquierdo a los 890°C y la temperatura mínima rondará los 845 °C. En cambio, en un enfriamiento por aceite la temperatura máxima, nuevamente, se encontrará en el lateral izquierdo a 890°C y la temperatura mínima rondará los 450°C.

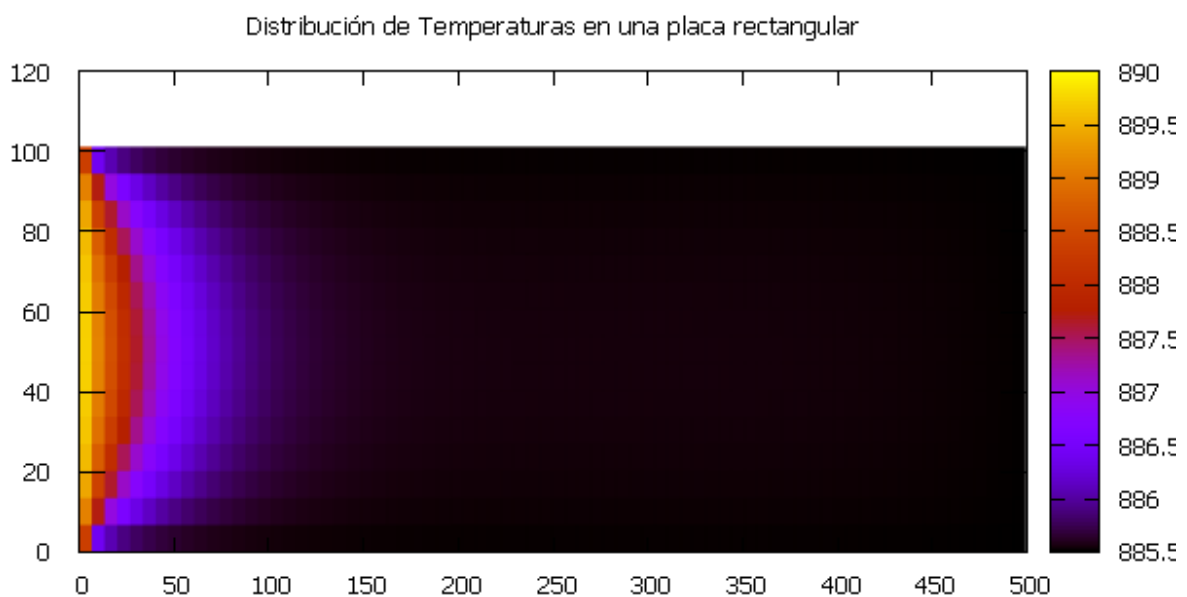
Temperaturas mínimas y tiempo según material:

	Acero 1010	Acero 1045	Acero 4140
Aire	<b>847 °C</b> (100 seg)	<b>847 °C</b> (100 seg)	<b>849 °C</b> (100 seg)
Aceite	<b>450 °C</b> (100 seg)	<b>460 °C</b> (100 seg)	<b>475 °C</b> (100 seg)
Agua	<b>120 °C</b> (18 seg)	<b>120 °C</b> (18 seg)	<b>180 °C</b> (18 seg)

Se comprobó que la temperatura no varía significativamente con el material considerado.

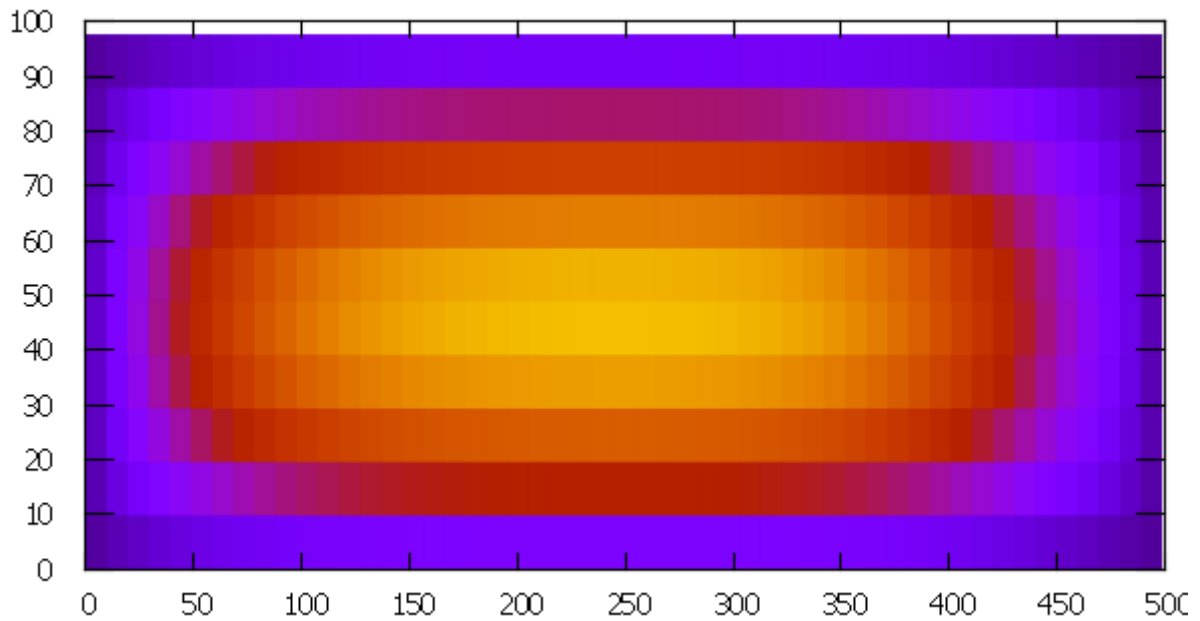
“Borde Caliente”:

Esta distribución de temperaturas en forma de “parábola” o “cono” en el borde izquierdo se debe al contacto con el tren de laminación y tomará su temperatura. A medida que se avanza hacia la derecha la temperatura cae abruptamente, y esto se debe que para el tiempo analizado la temperatura en esos nodos no es alcanzada por la temperatura del tren de laminación. Esto último se hace más evidente si analizamos un tiempo menor, en el siguiente gráfico se podrá observar.



Si cambiáramos las condiciones de borde para el lateral izquierdo se eliminaría este patrón y se comenzaría a visualizar una especie de “elipse” de temperaturas. Esto es así dado que todos los laterales se están enfriando con la misma tasa de extracción de temperatura. Puede verse como el centro de la placa es el punto que más tiempo tarda en perder la temperatura inicial.

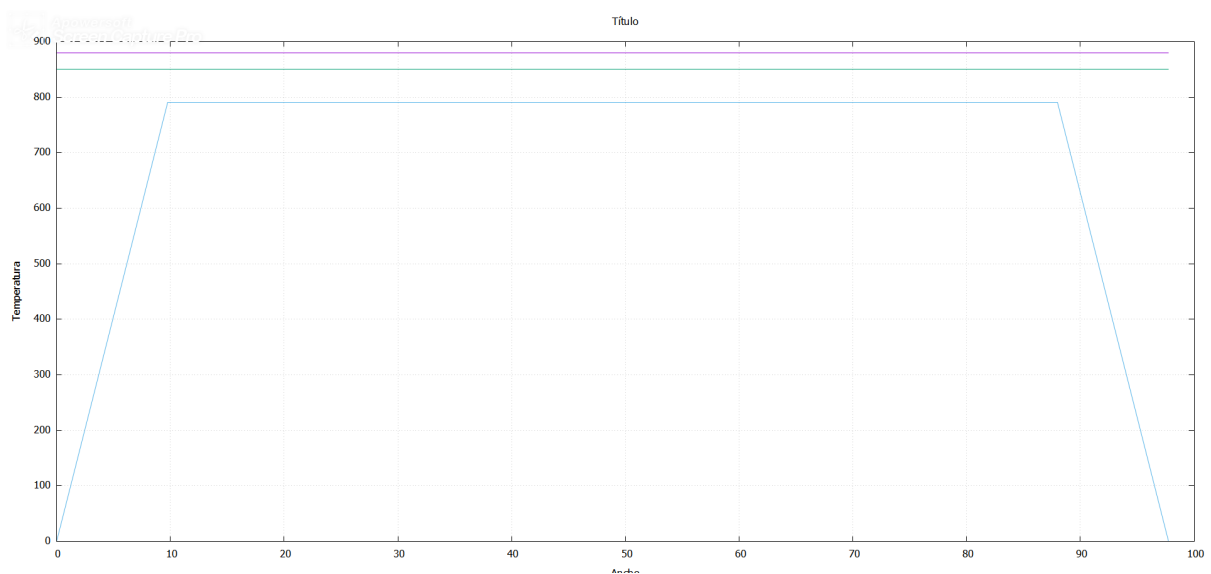
Distribución de Temperaturas en una placa rectangular



Es interesante como los puntos situados en las esquinas se enfrían más rápidamente que los nodos laterales centrales.

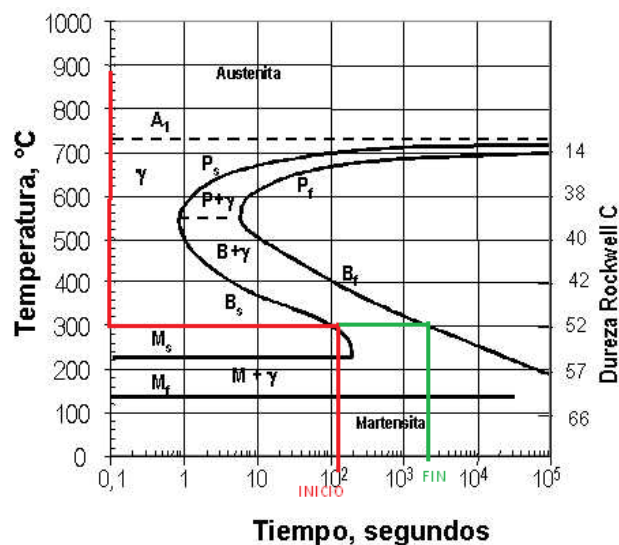
Otra herramienta que nos da el programa es la de conocer la distribución de temperaturas para una columna y tres tiempos a elección.

Podemos observar la falencia del método empleado en esta gráfica, dada las mallas pequeñas utilizadas.



## 6.5 Microestructura deseada

El estudio de la microestructura se realizará mediante el seguimiento de las gráficas TTT<sup>2</sup>. En el ejemplo mostrado a continuación se busca una estructura Bainítica para un acero 4140. Se necesitará un enfriamiento tal que la lámina pase de 890 °C a 300 grados centígrados en aproximadamente 1 segundo. Sabiendo esta necesidad, podremos programar las distintas condiciones de borde (enfriamiento) para lograr esta tasa de extracción de calor en el mayor espesor posible de la lámina. Luego, la transformación requiere de un tiempo expresado por el intervalo verde. Mientras transcurre la transformación será necesario de un horno que mantendrá la temperatura anteriormente indicada.



## 6.6 Tren de laminación

Se resolverá este apartado a través del código propuesto, para ello se tomará un acero en particular, el 1010. Se tomará además un motor con una potencia de 100 hp y una velocidad rotacional de 0.3 rad/s. Si tenemos en cuenta que originalmente la placa tenía unas dimensiones de 2000 mm de largo por 75 mm de ancho, se obtuvo el siguiente resultado:

```
*****
***DIMENSIONES EL TREN LAMINADO***
Velocidad angular en rad/s
0.30000001192092896
Radio de los rodillos en milimetro
23.796880523122720
Velocidad de avance en mm/s
7.1390644406177381
Longitud chapa
2000.0000000000000
Espesor chapa
75.000000000000000
*****
```

<sup>2</sup> Un diagrama TTT (temperatura, tiempo, transformación de austenita) o curva S resume las posibles transformaciones de la austenita para cada acero.

## 7 Errores

### 7.1 Error de formulación del Modelo Matemático.

Errores en las condiciones de frontera: Los valores laterales de nuestra malla fueron aproximados mediante una función lineal, esto en la realidad no es así. Existen múltiples fenómenos físicos que modifican y alteran la función de extracción de temperatura. Por ejemplo, es sabido de la necesidad de usar piletas con agitación de agua para favorecer el intercambio de calor en la pieza y evitar el fenómeno donde se crea una capa de vapor con menor coeficiente de conducción térmica.

Error de la geometría evaluada: se discretiza una lámina con contornos perfectos, en la realidad, una placa de acero tendrá múltiples irregularidades que aumentan la superficie de contacto con el medio, cambiando los tiempos de enfriamiento.

### 7.2 Error inherente al algoritmo. (Error sistemático)

El método de discretización explícito es un método inestable, los resultados que se obtienen para los primeros pasos de tiempo son aproximaciones muy buenas, pero a medida que el tiempo pasa error va creciendo tendiendo a infinito.

La restricción sobre el tamaño de paso dada por los requisitos de estabilidad hace que el algoritmo explícito se vuelva ineficiente.

### 7.3 Error de representación numérica.

Se establecieron simplificaciones físicas.

- La densidad de ambas fases es constante a través de la interfase
- Las propiedades físicas del acero son representadas como isotérmicas.

### 7.4 Error en las operaciones. (Error de propagación)

El método de resolución numérica empleado es el método de SOR, un método iterativo. Los métodos iterativos aproximan la solución para cada iteración temporal con una cota de error que ingresamos por consola. Esta aproximación es resultado del refinamiento iterativo, consiste en efectuar las iteraciones en el sistema cuyo lado derecho es el vector residual de las aproximaciones sucesivas hasta conseguir resultados con una exactitud satisfactoria. El empleo de SOR en vez de Jacobi sucede por la gran diferencia en cantidad de iteraciones entre un método y otro para alcanzar el error máximo.

## 8 Discusión y Conclusiones

La solución numérica de los problemas de cambio de fase no es un problema resuelto, sino que por el contrario es un campo de investigación. En el método de dominio fijo empleado es necesario efectuar un análisis más detallado de los métodos iterativos empleados, tanto en lo referente a los aspectos de convergencia como en la eficiencia del esquema computacional.

Queda demostrado que la metodología usada logra una buena primera aproximación a un problema real y complejo. Sin embargo, la solución ofrecida puede mejorarse aún más utilizando una discretización implícita, así como la disminución del tiempo de cálculo, mediante mejores métodos como el Método del gradiente conjugado.

El cálculo que se realizó en este trabajo, se realizó con mallas relativamente chicas, quedando la falencia evidenciada en las gráficas de temperatura para una columna en particular. Sin embargo, la interpolación ofrecida por las gráficas de distribución de temperatura, ofrecen información importante y de aplicación para la determinación aproximada del cambio microestructural de una lámina de acero en particular.

Consideramos que la metalurgia basada en gráficas TTT y CCT también ofrecen resultados aproximados, y que la microestructura real de un acero dado un tratamiento térmico no está 100% garantizada mediante su estudio teórico, siendo necesarios los ensayos correspondientes. Es por esto, que si bien el programa podría mejorarse, ofrece resultados útiles.

No obstante, podrían ser necesarias mallas con cientos de miles o millones de elementos, es en estas mallas donde el tiempo se vuelve un recurso importante y es donde nosotros proponemos la paralelización del método de diferencias finitas.

Este método consiste en la introducción de métodos de descomposición del dominio (método de Schwarz, DDM, DVS, etc), que dividen el dominio en subdominios más chicos, donde es más sencillo alcanzar la convergencia de cada uno de los subdominios, haciendo más eficientes los métodos iterativos.



## 9 Bibliografía

- Modelización de la ecuación de calor con diferencias finitas , Facultad de Matemáticas e Informática Universitat de Barcelona, Autor: Tomás Izquierdo Garcíaia-Faria, Barcelona, 29 de junio de 2017
  - Fundamentos de manufactura moderna, tercera edición, Mikell P. Groover.
  - Solución numérica del problema de transmisión de calor con cambio de fase, Luis A. Crivelli y Sergio R. Idelsohn. Laboratorio de mecánica del INTEC, Santa Fe, Argentina.
  - Introducción a los Métodos Numéricos. Walter Mora F.
  - Análisis numérico, séptima edición, Richard L. Burden y J. Douglas Faires.
  - Apuntes de cátedra Análisis numérico para ingeniería.
  - Apuntes de cátedra Metalurgia Aplicada y Materiales.
  - Introducción al método de diferencias finitas y su implementación computacional. Antonio Carrillo Ledesma, Facultad de Ciencias, UNAM
-