FICHE - Cinématique

1 Modèle cinématique

La **cinématique** est l'étude des mouvements, indépendamment de leurs causes.

domaine	grandeurs physiques
géométrie	[longueur] et [angle]
cinématique	[longueur], [angle] et [temps]
dynamique	[longueur], [angle], [temps] et [masse]

La **course** est la distance parcourue entre les deux positions extrêmes.

La **cylindrée** est le volume de fluide refoulé par tour de l'arbre moteur.

Le **mouvement 1/0** est le déplacement relatif d'un solide 1 par rapport à un solide de référence 0.

Vecteur rotation

Au mouvement 1/0, on associe un **vecteur rotation** $\vec{\Omega}_{1/0}$ dont :
- la **direction** est la direction de l'axe de rotation ;
- la **norme** en $[rad/s]$ est l'intensité de la vitesse rotation relative ;
- le **signe** est le sens du mouvement de rotation relatif.

MTUV (ou MRUV) : Mouvement de translation (ou de rotation) uniformément-varié

	$0 \leq t \leq t_1$:	$t_1 \leq t \leq t_2$	$t_2 \leq t \leq t_3$
$a_{1/0}(t)$	$\frac{V_{max}}{t_1}$	0	$-\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}$
$v_{1/0}(t)$	$\frac{V_{max}}{t_1} t$	V_{max}	$-\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}(t - t_2) + V_{max}$
$x_{1/0}(t)$	$\frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_1} t^2$	$V_{max}(t - t_1) + x_{m/0}(t_1)$	$-\frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}(t - t_2)^2 + V_{max}(t - t_2) + x_{m/0}(t_2)$

avec $x_{1/0}(t_1) = \frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_1} {t_1}^2 = \frac{1}{2} V_{max} t_1$ et $x_{1/0}(t_2) = V_{max}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} V_{max} t_1$

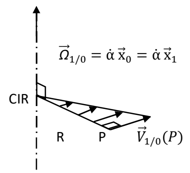
Remarques : Il y a plusieurs écritures possibles.

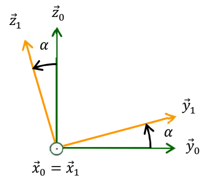
Par exemple $x_{1/0}(t) = -\frac{1}{2}\frac{V_{max}}{t_3 - t_2}(t - t_3)^2 + x_{1/0}(t_3)$, avec $x_{1/0}(t_3) = V_{max}\left(\frac{t_1}{2} + t_2 - t_1 + \frac{t_3 - t_2}{2}\right)$

Mouvement de rotation

Dans un mouvement de rotation :
- Les vitesses des points de l'axe sont nulles.
- Les vitesses sont perpendiculaires au rayon et à l'axe.
- La norme de la vitesse est proportionnelle à la distance à l'axe de rotation et à la vitesse angulaire du mouvement.

$\boxed{\|\vec{V}_{1/0}(P)\| = R\dot{\alpha} = R\omega}$





$\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$

Une seule droite reste invariante.

$\vec{y}_1 = \cos\alpha\, \vec{y}_0 + \sin\alpha\, \vec{z}_0$	$\vec{y}_0 = \cos\alpha\, \vec{y}_1 - \sin\alpha\, \vec{z}_1$
$\vec{z}_1 = -\sin\alpha\, \vec{y}_0 + \cos\alpha\, \vec{z}_0$	$\vec{z}_0 = \sin\alpha\, \vec{y}_1 + \cos\alpha\, \vec{z}_1$

Exemple : produit scalaire et vectoriel

$\vec{y}_0 . \vec{y}_1 = \cos\alpha$ $\quad$ $\vec{y}_0 . \vec{z}_1 = -\sin\alpha$ $\quad$ $\vec{y}_0 \wedge \vec{y}_1 = \sin\alpha\, \vec{x}_1$ $\quad$ $\vec{y}_0 \wedge \vec{z}_1 = \cos\alpha\, \vec{x}_1$

Mouvement de translation

Pour un mouvement de translation :
- le vecteur rotation est nul $\vec{\Omega}_{1/0} = \vec{0}$;
- les bases sont identiques $B_0 = B_1$;
- l'axe du torseur est à l'infini (en 2D, le CIR est à l'infini) ;
- le champ des vecteurs vitesse est uniforme et colinéaire à la direction du mouvement avec $\vec{V}_{1/0}(P) = \dot{\lambda}\vec{x}_0$

Graphe des liaisons

Dans une **chaîne ouverte**, les paramètres sont **indépendants**. Chaque liaison est motrice.
Dans une **chaîne fermée**, les paramètres sont **dépendants**. Une seule liaison est motrice.
Une chaîne complexe est une combinaison de chaînes ouvertes et de chaines fermées.

2 Vecteurs position, vitesse et accélération

$\boxed{\vec{V}_{1/0}(P) = \frac{d[\vec{OP}]_0}{dt}}$ en $[m/s]$

Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire $T_{1/0}(P)$.

$\boxed{\vec{A}_{1/0}(P) = \frac{d[\vec{V}_{1/0}(P)]_0}{dt}}$ en $[m/s^2]$

Laisser le résultat dans des bases différentes, **ne pas projeter**.

Vérifier que le résultat est bien **homogène**.

Vérifier sur le schéma cinématique la **norme** ($V = R\omega$ ou $V = \dot{\lambda}$), la **direction** et le **sens**.

Relation de dérivation vectoriel

Formule de Bour : $\frac{d[\vec{AB}]_0}{dt} = \underbrace{\frac{d[\vec{AB}]_1}{dt}}_{\text{accroissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{AB}}_{\text{rotation}}$

La dérivée d'un vecteur **de norme constante** (par exemple un vecteur **unitaire**) est le vecteur se trouvant à +90° multiplié par la valeur scalaire de la vitesse de rotation :

$\boxed{\frac{d[\vec{x}_i]_j}{dt} = \vec{\Omega}_{i/j} \wedge \vec{x}_i}$

Rotation élémentaire

$$\frac{d\,[\vec{AB}]_0}{dt} = \frac{d\,[R\vec{x}_1]_0}{dt} = \frac{d\,[R\vec{x}_1]_1}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge R\vec{x}_1 = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge R\vec{x}_1$$

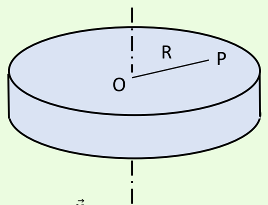
Cas général

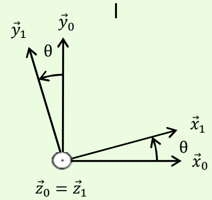
$$\frac{d\,[\vec{AB}]_0}{dt} = \frac{d\,[\lambda\vec{x}_1]_0}{dt} = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \lambda\frac{d\,[\vec{x}_1]_0}{dt} = \dot{\lambda}\vec{x}_1 + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \lambda\vec{x}_1$$

Translation élémentaire

$$\frac{d\,[\vec{AB}]_0}{dt} = \frac{d\,[\lambda\vec{x}_1]_0}{dt} = \frac{d\,[\lambda\vec{x}_1]_1}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \lambda\vec{x}_1 = \dot{\lambda}\vec{x}_1$$

Exemple : rotation autour d'un axe fixe





$\vec{OP} = R\vec{x}_1$

Méthode 1 : Dérivation vectorielle $\vec{V}_{1/0}(P) = \frac{d[\vec{OP}]_0}{dt}$

$= \frac{d[R\vec{x}_1]_0}{dt} = \frac{d[R\vec{x}_1]_1}{dt} + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge R\vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge R\vec{x}_1 = R\dot{\theta}\vec{y}_1$

Méthode 2 : Composition des mouvements

Relation de Varignon pour les rotations, dérivation vectorielle pour les translations

$\vec{V}_{1/0}(P) = \vec{V}_{1/0}(O) + \vec{PO} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} = -R\vec{x}_1 \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = R\dot{\theta}\vec{y}_1$

$\vec{A}_{1/0}(P) = \frac{d[\vec{V}_{1/0}(P)]_0}{dt} = \frac{d[R\dot{\theta}\vec{y}_1]_0}{dt} = R\ddot{\theta}\vec{y}_1 + R\dot{\theta}\frac{d[\vec{y}_1]_0}{dt}$

$\frac{d[\vec{y}_1]_0}{dt} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge \vec{x}_1 = \dot{\theta}\vec{y}_1$

On souligne ce qui varie.

On calcule la dérivée séparément.

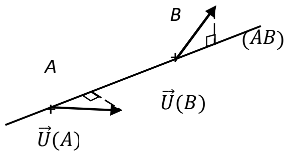
$\vec{A}_{1/0}(P) = -R\dot{\theta}^2\vec{x}_1 + R\ddot{\theta}\vec{y}_1$

Torseur cinématique

On dit qu'un champ est **équiprojectif** si

$$\forall A \in \mathscr{E}, \forall B \in \mathscr{E}, \quad \vec{U}(A).\overrightarrow{AB} = \vec{U}(B).\overrightarrow{AB}$$

Les 2 vecteurs $\vec{U}(A)$ et $\vec{U}(B)$ ont la même projection sur la droite (AB).



Un torseur est un champ de vecteur équiprojectif.

On appelle **torseur cinématique** $\vec{V}_{1/0}$ le champ des vecteurs vitesse défini pour le mouvement 1/0 de solides indéformables.

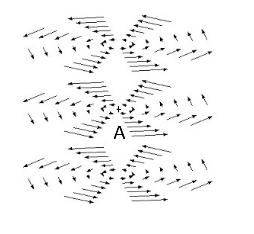
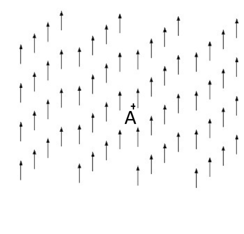
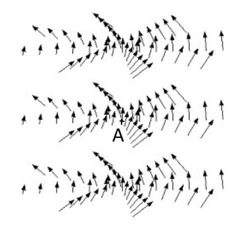
$$\boxed{\begin{aligned}\vec{V}_{1/0} : \quad & \mathscr{E} \rightarrow E \\ & B \mapsto \vec{V}_{1/0}(B)\end{aligned}} = \vec{V}_{1/0}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{1/0} \qquad \text{Relation de Varignon}$$

Les **éléments de réduction** du torseur sont :

$$\boxed{\vec{V}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{1/0}(A) \end{Bmatrix}} = {}_A\begin{Bmatrix} \omega_{x,1/0}\vec{x} + \omega_{y,1/0}\vec{y} + \omega_{z,1/0}\vec{z} \\ v_{x,A,1/0}\vec{x} + v_{y,A,1/0}\vec{y} + v_{z,A,1/0}\vec{z} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{pmatrix} \omega_{x,1/0} & v_{x,A,1/0} \\ \omega_{y,1/0} & v_{y,A,1/0} \\ \omega_{z,1/0} & v_{z,A,1/0} \end{pmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

$\vec{\Omega}_{1/0}$ est la **résultante cinématique**, appelé vecteur rotation, en [rad/s]. Elle est **invariante**.

$\vec{V}_{1/0}(A)$ est le **moment cinématique**, appelé vecteur vitesse de A en [m/s].

Torseur glisseur	Torseur couple	Torseur quelconque
$\vec{V}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} 1\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$	$\vec{V}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ 1\,\vec{z} \end{Bmatrix}$	$\vec{V}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} 1\,\vec{z} \\ 1\,\vec{z} \end{Bmatrix}$
		

Axe central

Pour un torseur à résultante non nulle, l'**axe centrale** est une droite de même direction que la résultante. Sur cette droite, le moment est minimal, il est appelé **moment central**.

Torseurs particuliers

Le **torseur couple** : exemple une liaison glissière $\vec{V}_{1/0} = {}_{\forall P}\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \dot{\lambda}\,\vec{x} \end{Bmatrix}$

Le **torseur glisseur** : exemple une liaison pivot $\vec{V}_{1/0} = {}_A\begin{Bmatrix} \dot{\alpha}\,\vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

3 Composition des mouvements

On appelle **composition des mouvements** la composition des applications affines suivantes : $i/k = i/j + j/k$

$$\vec{V}_{n/0} = \vec{V}_{n/n-1} + \ldots + \vec{V}_{1/0} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{n/0} \\ \vec{V}_{n/0}(A) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{n/n-1} \\ \vec{V}_{n/n-1}(A) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{1/0} \\ \vec{V}_{1/0}(A) \end{Bmatrix}$$

Conséquence : $\vec{V}_{i/j}(P) = -\vec{V}_{j/i}(P)$

Pour écrire la somme des torseurs au même point, on utilise la relation de Varignon.

4 Contacts et liaisons

Une liaison est un **modèle de comportement cinématique**.

Elle est indépendante de toute réalisation matérielle.

On appelle **degré de liberté**, **ddl**, un des mouvements indépendants autorisés par une liaison.

Les dix liaisons usuelles

Liaisons à direction	Liaisons à axe	Liaisons à centre
Glissière Plane	Pivot Pivot glissant Hélicoïdale Cylindre-plan	Sphérique Sphérique à doigt Sphère-plan Sphère-cylindre

La liaison complète n'admet aucun degré de liberté.
La liaison libre admet 6 degrés de liberté.

Liaison équivalente

La liaison équivalente entre des liaisons en **série** est la somme des torseurs cinématique.

$$\vec{V}_{2/0\,eq} = \vec{V}_{2/1} + \vec{V}_{1/0}$$

On peut aussi égaler les torseurs des actions mécaniques.

$$\vec{M}_{2\rightarrow 0\,eq} = \vec{M}_{2\rightarrow 1} = \vec{M}_{1\rightarrow 0}$$

La liaison équivalente entre des liaisons en **parallèles** est la somme des torseurs des actions mécaniques.

$$\vec{M}_{2\rightarrow 0\,eq} = \vec{M}_{2\rightarrow 1} + \vec{M}_{1\rightarrow 0}$$

On peut aussi égaler les torseurs cinématiques.

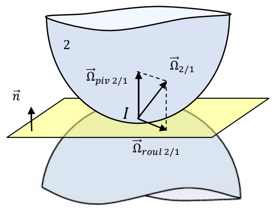
$$\vec{V}_{2/0\,eq} = \vec{V}_{2/1} = \vec{V}_{1/0}$$

Les contacts

Deux surfaces réelles qui se touchent sont dites en **contact**.
Un contact peut parfois être **modélisé** par une liaison.

La liaison glissière modélise un contact cylindrique non de révolution.
La liaison plane modélise un contact plan.
La liaison pivot modélise un contact de révolution.
La liaison pivot glissant modélise un contact cylindrique de révolution.
La liaison hélicoïdale modélise un contact d'hélice.
La liaison cylindre-plan modélise un contact linéaire rectiligne.
La liaison sphérique modélise un contact sphère.
La liaison sphérique à doigt modélise un contact sphère et ponctuel.
La liaison sphère plan modélise un contact ponctuel.
La liaison sphère-cylindre modélise un contact linéaire annulaire.

Vecteur de roulement, pivotement, vitesse de glissement



$\vec{\Omega}_{piv\,2/1}$ est le **vecteur de pivotement**. C'est la composante de $\vec{\Omega}_{2/1}$ selon $\vec{n}$.
$\vec{\Omega}_{roul\,2/1}$ est le **vecteur de roulement**. C'est la composante de $\vec{\Omega}_{2/1}$ dans le plan.

Pour déterminer le **vecteur vitesse de glissement**, on utilise une composition des mouvements dans la chaîne fermée du mécanisme :

$$\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{V}_{2/0}(I) - \vec{V}_{1/0}(I)$$

Le **torseur cinématique** de **2/1** au **point** I peut si besoin s'écrire :

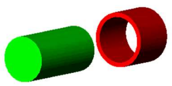
$$\vec{V}_{2/1} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{2/1} \\ \vec{V}_{2/1}(I) \end{Bmatrix} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{piv\ 2/1} + \vec{\Omega}_{roul\ 2/1} \\ \vec{V}_{2/1}(I) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

On déterminer ces composantes par des projections.

En cas de roulement sans glissement (rsg) : $\vec{V}_{2/1}(I) = \vec{0}$ et $\vec{V}_{2/1} = {}_I\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{roul\ 2/1} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$

Guidages

Les **guidages** sont les **réalisations concrètes** des liaisons.

Glissement		Roulement
Contact direct	**Coussinet**	
		
Avantage : Fabrication simple Inconvénient : Frottement important, grippage	Avantage : Charge élevée, silencieux, montage simple, pas de grippage Inconvénient : Frottements importants	Avantage : Bon rendement Inconvénient : Encombrement, montage

Méthodologie pour tracer un schéma cinématique

La démarche pour élaborer un schéma cinématique est la suivante :

- identifier les différentes **CEC** ;
- identifier la nature des **contacts** entre les CEC ;
- identifier les **degrés de liberté** entre les CEC ;
- choisir des **liaisons** usuelles **modélisant les contacts** ;
- identifier les **caractéristiques géométriques** des liaisons (centres, axes, vecteurs);
- les tracer avec leurs **positions relatives** (parallélisme, perpendicularité, coïncidence…) ;
- tracer les **liaisons** en couleur.
- relier les liaisons par des **traits** en couleur.

5 Transmission de puissance

Transmetteur rotation/rotation

Rapport de transmission : $\boxed{r = \frac{\omega_s}{\omega_e} = \frac{N_s}{N_e}}$ avec ω en $[rad/s]$ et N en $[tr/min]$. On a $\boxed{\omega = \frac{2\pi}{60}N}$

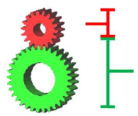
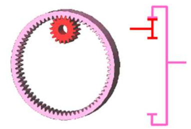
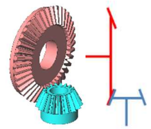
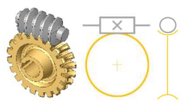
multiplicateur $r > 1$ ou **réducteur** $r < 1$

Roues de friction, pignons-chaîne et poulies-courroie

Roue de friction	Poulies-courroie	Pignons-chaîne	Engrenage

$r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{-D_1}{D_2}$	$r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{D_1}{D_2}$		$r = \frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$ $D_i = m_i\, Z_i$ avec $m = \frac{pas}{\pi}$
Avantages : montage facile, coût	Avantages : grand entraxe possible	Avantages : grand entraxe possible, rigidité, effort transmissible important	Avantages : pas de glissement
Inconvénients : glissement possible	Inconvénients : glissement possible si courroie plate, rendement moins bon si courroie crantée	Inconvénients : coût	Inconvénients : coût

On appelle **engrenage** l'entraînement de **deux** solides par des dentures.

	Engrenage cylindrique à contact extérieur	Engrenage cylindrique à contact intérieur	Engrenage conique	Engrenage conique
Forme				
Axes de rotation	Parallèles	Parallèles	Concourants	Orthogonaux non concourants
Rapport de transmission	$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = -\frac{D_1}{D_2} = -\frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}} = +\frac{D_1}{D_2} = +\frac{Z_1}{Z_2}$	$\left\lvert\frac{\omega_{2/0}}{\omega_{1/0}}\right\rvert = \frac{D_1}{D_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$	$\left\lvert\frac{\omega_{roue/0}}{\omega_{vis/0}}\right\rvert = \frac{Z_{vis}}{Z_{roue}}$
Entraxe	$a_{12} = \frac{D_1+D_2}{2} = m\frac{Z_1+Z_2}{2}$	$a_{12} = \frac{D_1-D_2}{2} = m\frac{Z_1-Z_2}{2}$		Avantages : rapport de réduction important (jusqu'à 150) et irréversibilité si nécessaire (la vis entraîne la roue mais la roue compte tenu de l'inclinaison de l'hélice, ne peut pas entraîner la vis), faible volume, changement de direction. Inconvénients : faible rendement, forte usure.

Train d'engrenages simple

Rapport de transmission d'un **train simple** d'engrenages avec des **axes parallèles** :

$$\boxed{r = \frac{\omega_{s/0}}{\omega_{e/0}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menées}}}$$

avec n le nombre de **contacts extérieurs**

Train épicycloïdal

Train épicycloïdal
Avantages : entrée et sortie coaxiales, bonne répartition des efforts donc bonne durée de vie, faible encombrement
Inconvénients : coût, hyperstatisme

Exemple : Déterminer le rapport de transmission $\frac{\omega_{4/0}}{\omega_{1/0}}$.

Il y a 1 entrée et 1 sortie. Satellite : 2 Porte-satellite : 3 Planétaire : 0 Planétaire : 1

On se place dans le repère du porte-satellite 4. Dans le repère 4 on peut écrire :

$$\frac{\omega_{0/3}}{\omega_{1/3}} = (-1)^n \frac{\prod Z_{menantes}}{\prod Z_{menés}} = (-1)^2 \frac{Z_1 Z_2}{Z_2 Z_0} = \frac{Z_1}{Z_0}$$

On se place dans le repère du bâti 0, on écrit une composition des mouvements :

$$\Rightarrow \frac{-\omega_{3/0}}{\omega_{1/0} - \omega_{3/0}} = \frac{Z_1}{Z_0} \Rightarrow -\omega_{3/0} = \frac{Z_1}{Z_0}(\omega_{1/0} - \omega_{3/0})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{Z_1}{Z_0} - 1\right)\omega_{3/0} = \frac{Z_1}{Z_0}\omega_{1/0} \Rightarrow r = \frac{\omega_{3/0}}{\omega_{1/0}} = \frac{\frac{Z_1}{Z_0}}{\frac{Z_1}{Z_0} - 1} = \frac{Z_1}{Z_1 - Z_0}$$

Conditions géométriques de fonctionnement

$$D_3 = D_1 + 2D_2 \overset{\text{si } m_1 = m_2}{\Longrightarrow} Z_3 = Z_1 + 2Z_2$$

Transmetteur rotation/translation

Rapport de transmission système pignon-crémaillère : $V = R\,\omega$

Rapport de transmission système vis-écrou : $V = \frac{pas}{2\pi}\,\omega$

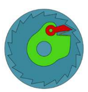
Accouplements mécaniques

Un **accouplement mécanique**, ou joint de transmission, appartient à la famille des transmetteurs. Il sert à relier deux arbres en **rotation** comportant éventuellement des **défauts d'alignement angulaires** ou **radiaux**.

Accouplements permanents

Joint de Cardan	Joint de Oldham	Joint élastique
		
hétérocinétique si seul homocinétique si double	homocinétique	homocinétique

Accouplements temporaires

Embrayage	Limiteur de couple	Frein à disque	Frein à tambour	Roue libre
				

6 Loi entrée-sortie géométrique et cinématique

Fermeture géométrique

Démarche pour déterminer cette loi entrée-sortie en position

1. **Écrire une relation de Chasles** entre les points caractéristiques des liaisons en parcourant la chaîne fermée : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \cdots + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
2. **Projeter l'équation de fermeture** dans une base choisie afin d'obtenir un système de 3 équations scalaires comportant les paramètres de mouvement d'entrée et de sortie.
3. **Éliminer les paramètres de mouvement** autres que ceux d'entrée et de sortie, en combinant les équations obtenues.

Exemple : Déterminer la loi E/S d'un système bielle manivelle.

On cherche $x = f(\alpha)$. Le problème est plan.

On écrit une fermeture géométrique :

$$\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = \vec{0} \Rightarrow e\vec{x}_1 + L\vec{x}_2 - x\vec{x}_0 = \vec{0}$$

On projette dans la base $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$:

$$\Rightarrow \begin{cases} e\vec{x}_1.\vec{x}_0 + L\vec{x}_2.\vec{x}_0 - x\vec{x}_0.\vec{x}_0 = 0 \\ e\vec{x}_1.\vec{y}_0 + L\vec{x}_2.\vec{y}_0 - x\vec{x}_0.\vec{y}_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e\cos\alpha + L\cos\beta - x = 0 \\ e\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + L\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e\cos\alpha + L\cos\beta - x = 0 \\ e\sin\alpha + L\sin\beta = 0 \end{cases}$$

On a 2 eq 3 inc et on veut 1 eq 2 inc.

$$\Rightarrow \begin{cases} L\cos\beta = -e\cos\alpha + x \\ L\sin\beta = -e\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow L^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) = (-e\cos\alpha + x)^2 + (-e\sin\alpha)^2$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha} + e\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \dot{x} = \frac{-e^2\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{L^2 - e^2\sin^2\alpha}} - e\dot{\alpha}\sin\alpha$$

Fermeture cinématique

Autre démarche pour déterminer une loi entrée-sortie en vitesse

1. Écrire la **composition des mouvements avec des torseurs cinématiques** en parcourant la chaîne fermée :

$$\vec{V}_{n/0} = \vec{V}_{n/n-1} + \cdots + \vec{V}_{1/0}$$

Cette **équation torsorielle** donne **2 équations vectorielles** soit **6 équations scalaires** en tout.

2. Déterminer, en fonction des paramètres de mouvement d'entrée et de sortie à faire apparaître, la ou les équations scalaires à écrire.

Annexe

$A \to f(A)$: champ scalaire	ex : champ de pressions	$A \to P(A)$
$A \to \vec{f}(A)$: champ vectoriel	ex : champ de vitesses	$A \to \vec{V}(A)$
$A \to \bar{\bar{f}}(A)$: champ tensoriel	ex : champ tensoriel	$A \to \bar{\bar{I}}(A)$
$\vec{u} \to f(\vec{u})$: opérateur scalaire = forme	ex : produit scalaire	
$\vec{u} \to \vec{f}(\vec{u})$: opérateur vectoriel	ex : produit vectoriel	