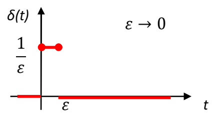
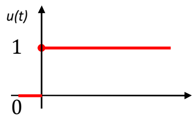
FICHE - Asservissement

1 Consignes unitaires

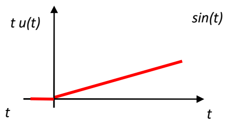
L'impulsion



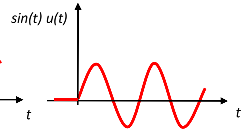
L'échelon



La rampe



La sinusoïde



2 Transformée de Laplace

Fonction	Impulsion unitaire	Échelon unitaire	Rampe unitaire	Fonction causale	Retard	Dérivée	Dérivée avec CI nulles
$e(t)$	$\delta(t)$	$u(t)$	$t\,u(t)$	$f(t)$	$f(t-T)$	$\dot{f}(t)$	$\dot{f}(t)$
$E(p)$	1	$\frac{1}{p}$	$\frac{1}{p^2}$	$F(p)$	$e^{-Tp}F(p)$	$pF(p)-f(0)$	$pF(p)$

Si le système est stable

Théorème de la valeur finale :

$$f_\infty = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{p\to 0^+} pF(p)$$

Théorème de la valeur initiale :

$$f(0) = \lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{p\to+\infty} pF(p)$$

Exemple : Erreur statique d'un système de classe 0 soumis à un échelon.

Le système est stable, on applique le théorème de la valeur finale :

$$s_\infty = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0^+} pS(p) = \lim_{p\to 0^+} pH_{FTBF}(p)E(p) = \lim_{p\to 0^+} p\frac{K_{FTBF}}{p^0}\frac{1+\ \dots +\ \dots\ p^m}{1+\ \dots +\ \dots\ p^n}\frac{E_0}{p} = K_{FTBF}E_0$$

$$e_{r\infty} = \lim_{t\to+\infty} e_r(t) = \lim_{t\to+\infty}\big(e(t)-s(t)\big) = \lim_{p\to 0^+} p\big(E(p)-S(p)\big) = \lim_{p\to 0^+} p\big(E(p)-H(p)E(p)\big)$$

$$= \lim_{p\to 0^+} p\big(1-H(p)\big)E(p) = \lim_{p\to 0^+} p\left(1-\frac{K_{FTBF}}{p^0}\frac{1+\dots+\dots p^m}{1+\dots+\dots p^n}\right)\frac{E_0}{p} = (1-K_{FTBF})E_0$$

$$e_{r\infty\%} = \left|\frac{(1-K_{FTBF})E_0}{E_0}\right| = |1-K_{FTBF}|$$

Exemple : Valeur initiale et pente initiale.

$$s(0) = \lim_{t\to 0^+} s(t) = \lim_{p\to+\infty} pS(p) = \cdots$$
$$\dot{s}(0) = \lim_{t\to 0^+} \dot{s}(t) = \lim_{p\to+\infty} p^2S(p) = \cdots$$

3 Fonction de transfert

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} \qquad S(p) = H(p)E(p)$$

Une fonction de transfert sous **forme canonique** est de la forme :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{p^\alpha}\frac{1+\ \dots\ p+\ \dots\ +\ \dots\ p^m}{1+\ \dots\ p+\ \dots\ +\ \dots\ p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique
α : classe ≥ 0
n : ordre

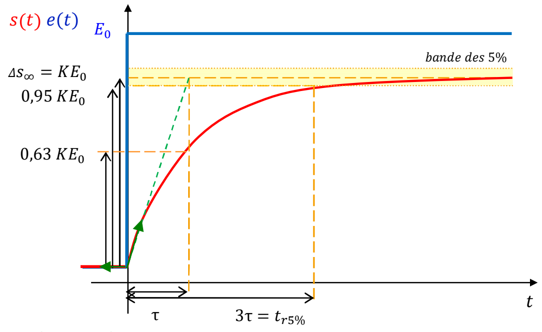
Méthode pour mettre une fonction de transfert sous **forme canonique** :

1) la fraction doit être un **quotient de polynômes** ;
2) on **factorise** par le **terme d'ordre le plus faible** du numérateur et du dénominateur.

On appelle **pôles,** les **racines du dénominateur** de la fonction de transfert.
On appelle **zéros,** les **racines du numérateur** de la fonction de transfert.

4 Réponse

Ordre 1 – réponse à un échelon

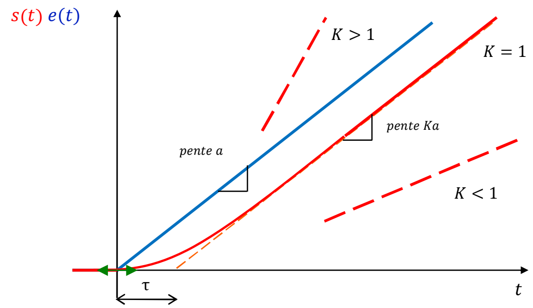


$$s(t) = \Delta s(t) + s_0 = KE_0\left(1-e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}\right)u(t) + s_0$$

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\tau p}}$$

Paramètres caractéristiques :
K : gain statique ($unité = \frac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée}$)
τ : constante de temps (>0, en secondes)

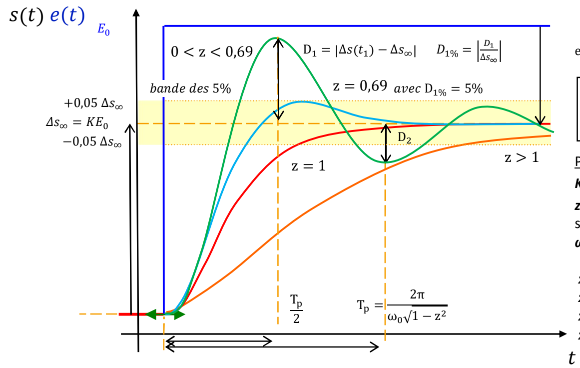
Ordre 1 – réponse à une rampe



$$s(t) = Ka\left(t-\tau+\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$$

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

Ordre 2 – réponse à un échelon



Si l'entrée et la sortie sont de mêmes natures

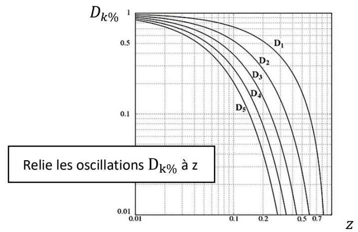
$$e_{r\infty} = E_0 - \Delta s_\infty \qquad e_{r\%\infty} = \left|\frac{e_{r\infty}}{E_0}\right|$$

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{1+\frac{2z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0{}^2}p^2}} \overset{\text{si } z\geq 1}{=} \frac{K}{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

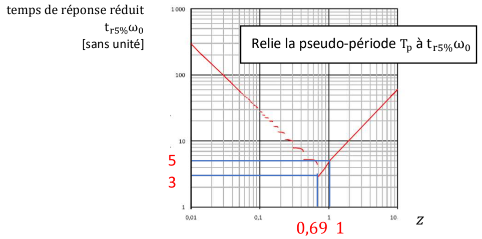
Paramètres caractéristiques :
***K* : gain statique** ($unité = \frac{unité\ de\ la\ sortie}{unité\ de\ l'entrée}$)
***z* : facteur d'amortissement** (noté parfois *m* ou ξ, > 0, sans unité)
***ω₀* : pulsation propre** non amortie (>0, en rad/s)

$z > 1$: régime apériodique
$z = 1$: régime critique
$z < 1$: régime pseudo-périodique
$z = 0$: régime harmonique

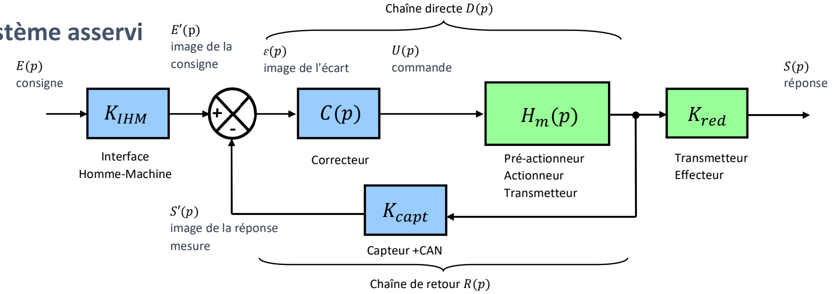
Abaques des dépassements relatifs



Abaque du temps de réponse réduit



5 Système asservi



Une **grandeur de sortie** d'une activité d'un système **est asservie** si :
- il y a une **boucle de retour** avec un **capteur** ;
- un **correcteur** améliore les performances ;

Un système asservi est nécessairement bouclé, mais la **réciproque n'est pas vraie**.

On parle de système **suiveur** ou de poursuite lorsque l'entrée varie.
On parle de système **régulé** lorsque l'entrée est constante.

On veut que si $E(p) = S(p)$ alors $\varepsilon(p) = 0$. On a alors un retour unitaire.

$$\varepsilon(p) = K_{IHM}\, E(p) - \frac{K_{capt}}{K_{red}}\, S(p) \;\Rightarrow\; \boxed{K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}}$$

$$FTBF = \frac{S}{E} = \frac{D}{1+DR}$$
$$FTBO = \frac{S'}{\varepsilon} = \frac{S'}{E} = DR$$

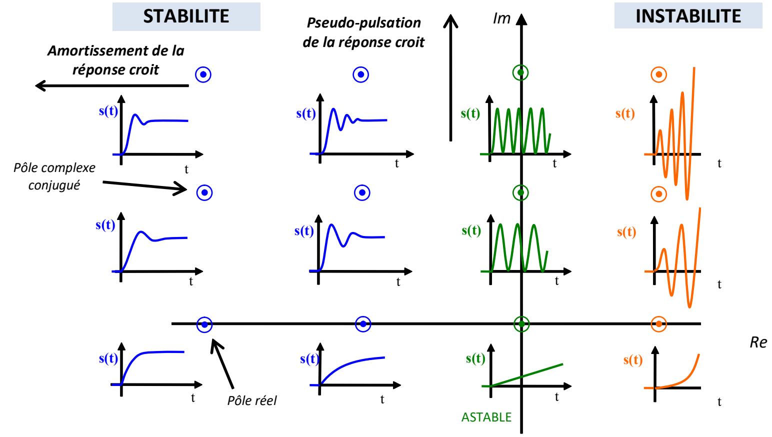
Le saturateur est un bloc non linéaire.
Pour identifier le bloc moteur, on fait saturer le saturateur.
Pour identifier un bloc constant, on affiche $s = f(e)$.

La FTBO doit donc être éloigné du point critique -1. $(-180°, 0dB)$

6 Performances des systèmes et des systèmes asservis

Stabilité des systèmes

Un système est stable si, pour une entrée en échelon, la grandeur de sortie converge vers une valeur finale constante (entrée bornée – sortie bornée **EB-SB**).

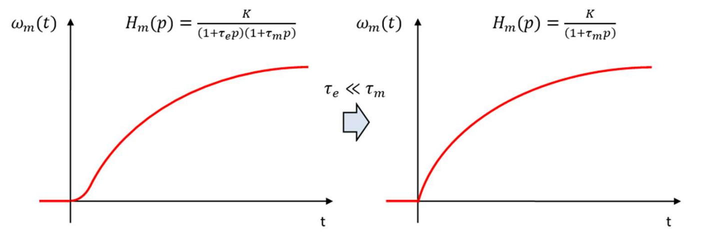


Un système est **stable** au sens EBSB **si** les **pôles** de sa fonction de transfert sont à **partie réelle strictement négative**.

Les **pôles réels ne génèrent pas d'oscillation** alors que les **pôles complexes conjugués font apparaître des oscillations**.

On appelle **pôle dominant** le pôle qui a une contribution significative par rapport aux autres sur la réponse.

Exemple : MCC



Modèle fin (ordre élevé) — Modèle approché (ordre faible)

Régler les marges

On appelle **marge de phase** d'un système asservi la distance entre le point critique et le point de sa FTBO pour lequel le gain vaut 0 dB.

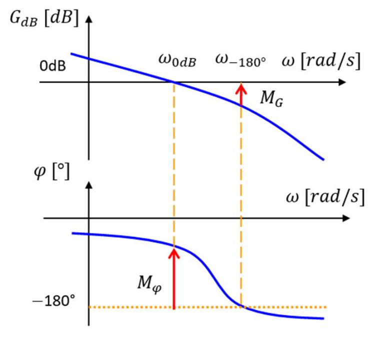
$$\boxed{M_\varphi = \varphi(\omega_{0dB}) + 180° = \arg\left(H_{FTBO}(j\omega_{0d})\right) + 180°}$$

avec ω_{0d} tel que $G_{dB}(\omega_{0dB}) = 20\log|H_{FTBO}(j\omega_{0dB})| = 0\ dB$

On appelle **marge de gain** d'un système asservi la distance entre le point de sa FTBO pour lequel la phase vaut $-180°$ et le point critique.

$$\boxed{M_G = -G_{dB}(\omega_{-180°}) = -20\log|H_{FTBO}(j\omega_{-180°})|}$$

avec $\omega_{-180°}$ tel que $\varphi(\omega_{-180°}) = \arg\left(H_{FTBO}(j\omega_{-180°})\right) = -180°$



On doit obligatoirement avoir $\omega_{-180°} > \omega_{0dB}$ sinon M_G n'est pas définie.
La marge de phase doit donc être déterminé en première.

Les systèmes du 1er ou du 2nd ordre sont donc **toujours stable**, avec : $M_\varphi \geq 0°$ et $M_G = +\infty$

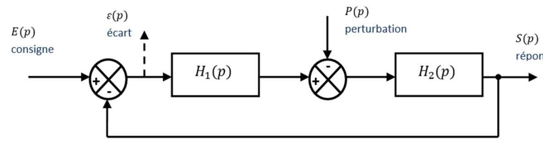
Par exemple, le CdCF stipule : $M_\varphi \geq 45°$ $\quad M_G \geq 10\ dB$

Rapidité des systèmes

Le temps de réponse à 5% est la **durée** mise par la grandeur de **sortie** pour rentrer dans la bande des 5% et ne **plus en sortir**. $[s_\infty - 0{,}05\ \Delta s_\infty\ , s_\infty + 0{,}05\ \Delta s_\infty]$

Précision des systèmes asservis

Avec $K_{IHM} = \frac{K_{capt}}{K_{red}}$, on peut se ramener à un retour unitaire dans $H_{FTBF}(p)$. On considère un **système asservi perturbé**.



En utilisant le **théorème de superposition**, on obtient :

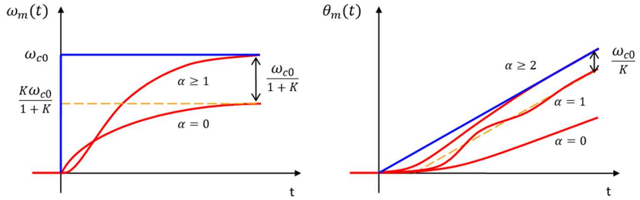
$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_1(p)H_2(p)}E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)}P(p)$$
$$= \frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p) + \frac{H_2(p)}{1 + FTBO(p)}P(p)$$

Erreur statique d'un système non perturbé

$$e_{r\infty} = \varepsilon_\infty = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0^+} p\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0^+} p\frac{1}{1 + FTBO(p)}E(p)$$
$$= \lim_{p\to 0^+} p\frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha}\frac{1 + b_1 p + \dots + b_m p^m}{1 + a_1 p + \dots + a_{n-\alpha} p^{n-\alpha}}}E(p)$$
$$= \lim_{p\to 0^+} p\frac{1}{1 + \frac{K_{FTBO}}{p^\alpha}}E(p)$$

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha = 0$	$\alpha = 1$	$\alpha = 2$
Impulsion	$E(p) = 1$	0	0	0
Echelon	$E(p) = \frac{E_0}{p}$	$\frac{E_0}{1 + K_{FTBO}}$	0	0
Rampe	$E(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞	$\frac{V_0}{K_{FTBO}}$	0
Parabole	$E(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞	∞	$\frac{a_0}{K_{FTBO}}$

Pour un système de FTBO de classe α et de gain statique K_{FTBO}



Erreur statique due à la perturbation

$$e_{r\infty} = \varepsilon_\infty = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0^+} p\varepsilon(p)$$

$$= \lim_{p\to 0^+} p \frac{H_2(p)}{1 + H_1(p)H_2(p)} P(p)$$

$$= \lim_{p\to 0^+} p \frac{\frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{1+\ldots}{1+\ldots}}{1 + \frac{K_1}{p^{\alpha_1}} \frac{1+\ldots}{1+\ldots} \frac{K_2}{p^{\alpha_2}} \frac{1+\ldots}{1+\ldots}} P(p)$$

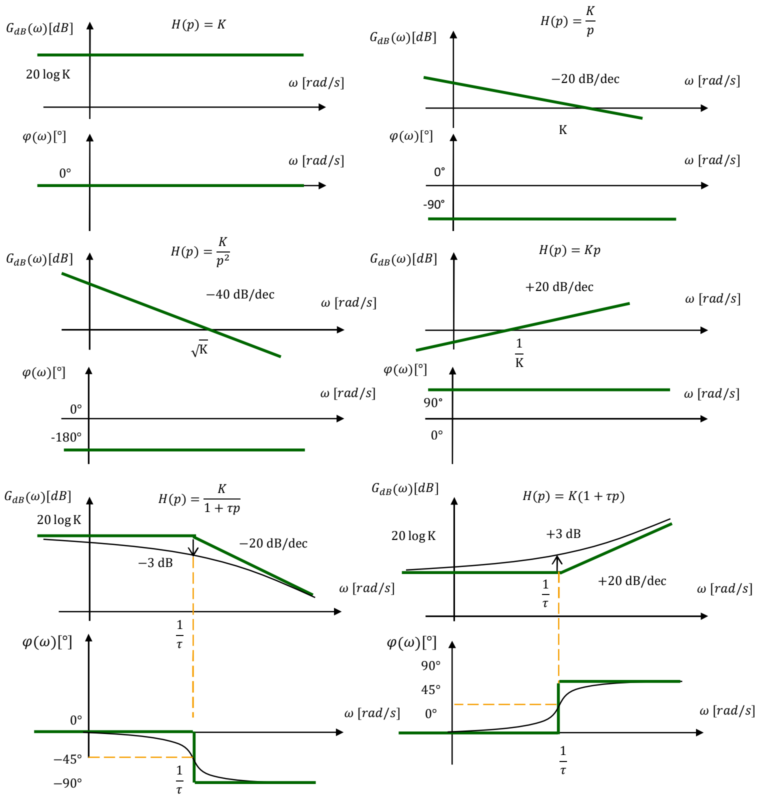
$$= \lim_{p\to 0^+} \frac{p^{1+\alpha_1} K_2}{p^{\alpha_1+\alpha_2} + K_1 K_2} P(p)$$

Erreur statique $e_{r\infty}$		$\alpha_1 = 0$		$\alpha_1 = 1$	$\alpha_2 = 2$
Impulsion	$P(p) = 1$	0		0	0
Echelon	$P(p) = \frac{E_0}{p}$	$\alpha_2 = 0$ $\frac{E_0}{1+K_1K_2}$	$\alpha_2 \geq 1$ $\frac{E_0}{K_1}$	0	0
Rampe	$P(p) = \frac{V_0}{p^2}$	∞		$\frac{V_0}{K_1}$	0
Parabole	$P(p) = \frac{a_0}{p^3}$	∞		∞	$\frac{a_0}{K_1}$
Pour un système de FTBO de classe $\alpha_1 + \alpha_2$ et α_1 la classe de la fonction de transfert avant la perturbation					

1 intégrateur en **amont de la perturbation** élimine l'influence d'une perturbation en **échelon**.

7 Analyse fréquentielle

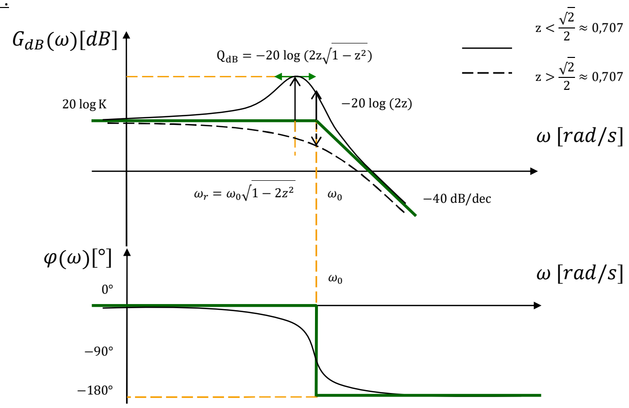
$$G_{dB}(\omega) = 20\ log\ G(\omega) = 20\log|H(j\omega)| \qquad \text{et} \qquad \varphi(\omega) = arg(H(j\omega))$$



La **pulsation de cassure** ω_c correspond à la pulsation du **point d'intersection des asymptotes.**

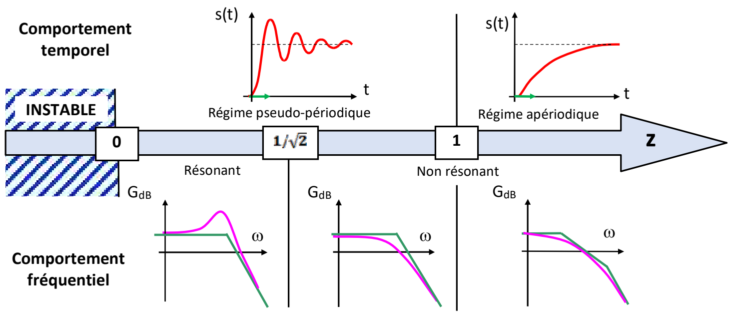
$$\omega_{c-3dB} = \omega_{cassure} = \frac{1}{\tau}$$

si $z < 1$:



si $z \geq 1$: produit de 2 ordre 1, on somme les diagrammes de Bodes.

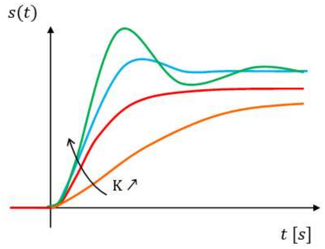
Bilan du comportements temporel et fréquentiel d'un modèle du 2ème ordre

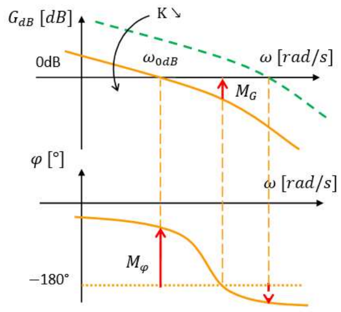


8 Correcteurs

Correcteur proportionnel P

Si on **augmente** le **correcteur proportionnel** $C(p) = K$:
- on **améliore la précision**, mais on **dégrade la stabilité** ;
- la phase du diagramme de Bode reste inchangée.





Réglage du correcteur

- Valeurs max de K : pour une marge de phase mini ou une marge de gain mini.
- Valeur min de K : pour un temps de réponse à 5% max ou une erreur statique max.

Correcteur intégral I

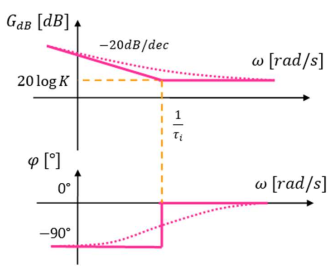
Ce correcteur augmente la classe de la FTBO.

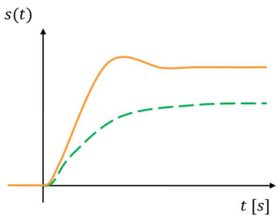
> Le correcteur **intégral** $C(p) = \frac{1}{\tau_i p}$:
> - **annule l'écart statique d'une entrée en échelon** ;
> - **annule l'effet** en régime permanent **d'une perturbation** en échelon si placé en amont de la perturbation ;
> - diminue la phase de 90° et donc rend souvent le système instable.

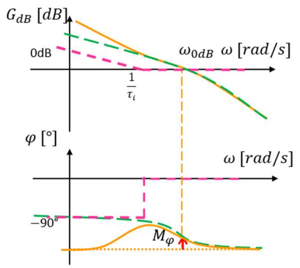
Correcteur proportionnel intégral PI

Il peut parfois être utilisé pour compenser un pôle dominant.

> Le correcteur **proportionnel intégral** $C(p) = K + \frac{1}{T_i p} = \frac{1+KT_i p}{T_i p} = \frac{K(1+\tau_i p)}{\tau_i p}$:
> - **améliore la précision mais dégrade la stabilité ;**
> - **augmente le gain aux basses fréquences ;**
> - **annule l'écart statique d'une entrée en échelon ;**
> - **annule l'effet** en régime permanent **d'une perturbation** en échelon si placé en amont de la perturbation.





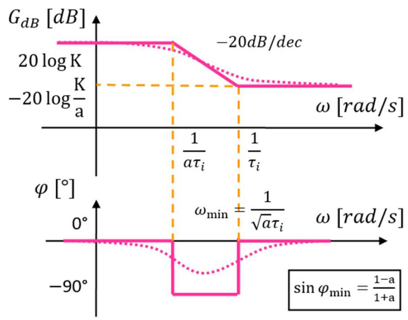


Correcteur à retard de phase (ou correcteur PI réel)

Ce correcteur augmente le gain de la FTBO aux basses fréquences et modifie la précision du système.

Le correcteur à retard de phase enlève de la phase.

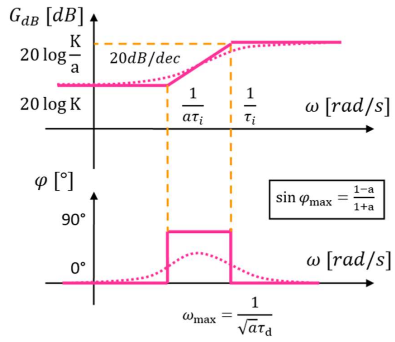
> Le correcteur **à retard de phase** $C(p) = K\frac{1+\tau_i p}{1+a\tau_i p}$, avec $a > 1$:
> - **améliore la précision mais dégrade la stabilité ;**
> - **augmente le gain aux basses fréquences.**



Correcteur à avance de phase (ou correcteur PD réel)

Il fait une action dérivée sur une plage de fréquence. Le correcteur à avance de phase ajoute de la phase.

> Le correcteur **à avance de phase** $C(p) = K\frac{1+\tau_d p}{1+a\tau_d p}$, avec $a < 1$:
> - **augmente la stabilité mais introduit des vibrations et du bruit ;**
> - **améliore la rapidité.**



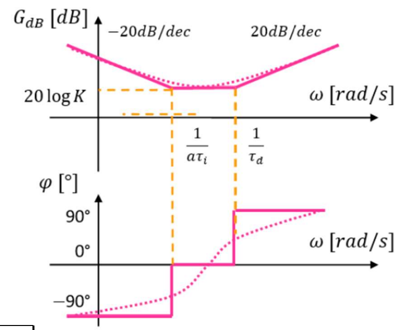
Réglage du correcteur

- On cherche la valeur a qui permet d'obtenir M_φ demandée avec $\sin\varphi_{max} = \frac{1-a}{1+a}$.
- On cherche τ_d avec $\omega_{max} = \omega_{0d}$ soit $\tau_d = \frac{1}{\sqrt{a}\omega_{0d}}$.
- On ajuste K pour que le gain du système corrigé soit bien de 0dB pour ω_{max}.

Correcteur proportionnel intégral dérivé PID

Il se comporte comme un correcteur intégral pour les basses fréquences et comme un correcteur proportionnel pour les fréquences intermédiaires et comme un correcteur dérivé pour les hautes fréquences. Bien réglé, il présente les avantages 3 correcteurs sans leurs inconvénients. Mais il est difficile à régler.

> Le correcteur **proportionnel intégral** $C(p) = K_p + \frac{K_i}{p} + K_d p$:
> - Comme le correcteur PI, il améliore la précision ;
> - Comme le correcteur PD, il améliore la rapidité.



Les correcteurs réels que l'on utilise sont de la forme :

$$C(p) = K\frac{1+\tau_i p}{\tau_i p}\frac{1+\tau_d p}{1+b\tau_d p}$$

ou $$C(p) = K\frac{1+\tau_i p}{1+a\tau_i p}\frac{1+\tau_d p}{1+b\tau_d p}$$ avec $a > 1$ et $b < 1$

Réglage du correcteur

- On commence par la rapidité et de précision avec le correcteur PI.
- Puis la stabilité avec l'avance de phase.

Bilan des performances des correcteurs

Performances	Stabilité	Rapidité	Précision
Correcteur P	↘	–	↗
Correcteur I	↘↘	↘	↗↗
Correcteur PI	↘	↘	↗↗
Correcteur à retard de phase	↘	↘	↗
Correcteur à avance de phase	↗	↗	↘
Correcteur PID	↗	↗	↗↗