

Outils pour l'analyse harmonique d'un système asservi



Table des matières

Introduction	3
I - Principe de l'analyse harmonique (ou fréquentielle)	4
II - Représentation graphique de la fonction de transfert	6
1. Principe du diagramme de Bode	6
2. Echelle logarithmique	7
3. Particularités	8
4. Technique générale de tracé	9
III - Complément : Black et Nyquist	11
1. Diagramme de Black (Black - Nichols)	11
2. Diagramme de Nyquist	12
IV - Complément sur la réponse harmonique d'un système	13
1. Etude	13
2. Décomposition en éléments simples.....	13
3. Restriction au régime permanent	14
4. Obtention du complexe A et de son conjugué.....	14
5. Ecriture complexe de la fonction de transfert	14

Introduction



L'étude fréquentielle est essentielle en électronique car elle permet de définir la bande passante, la fréquence de coupure, etc.

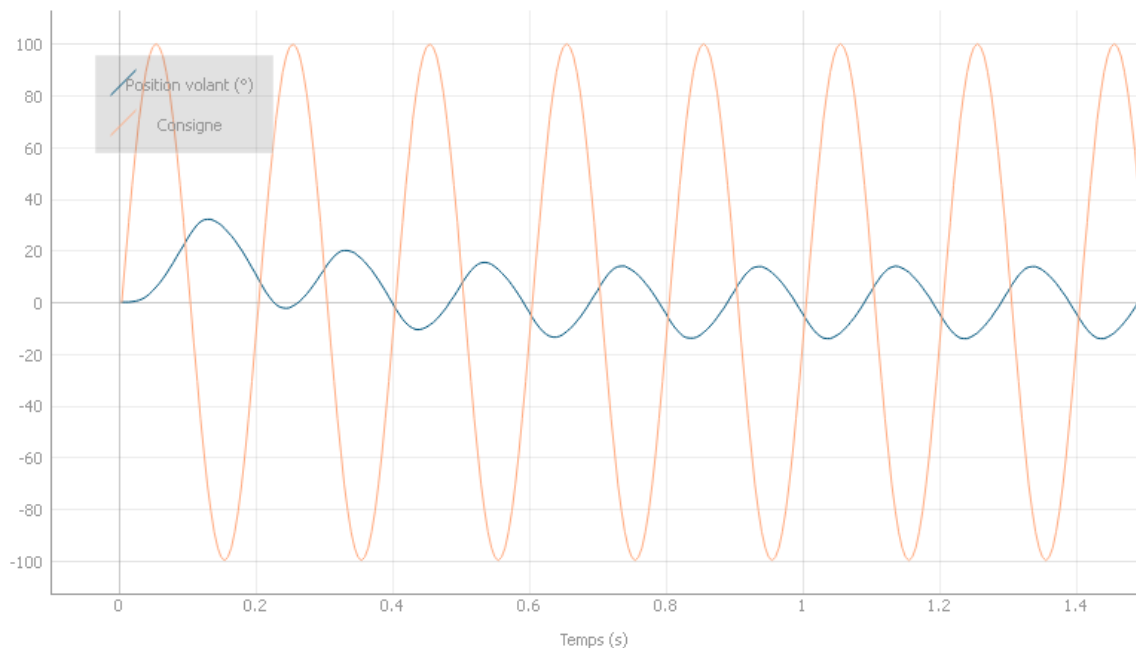
Les systèmes que nous étudions sont constitués de processus mécaniques dont les fréquences de coupure sont faibles (ce qui limite l'intérêt de l'analyse fréquentielle détaillée). Mais l'analyse fréquentielle est très intéressante pour l'étude du problème de la **stabilité** des systèmes asservis et pour l'**identification fréquentielle** des systèmes.

Principe de l'analyse harmonique (ou fréquentielle)



Définitions

Un système soumis à une entrée sinusoïdale va fournir une sortie elle-même sinusoïdale (après disparition du régime transitoire).



Position angulaire du volant à retour de force

Réponse harmonique (ou fréquentielle)



Définition

La **réponse harmonique** (ou fréquentielle) d'un système est sa réponse **en régime permanent**, lorsqu'il est soumis à une entrée sinusoïdale dont on fait varier la pulsation.

Le signal d'entrée s'écrit $e(t) = e_0 \sin(\omega t)$ et celui de la sortie $s(t) = s_0 \sin(\omega t + \varphi)$, avec :

- e_0 et s_0 : amplitudes respectives de l'entrée et de la sortie.
- ω : pulsation (commune à l'entrée et à la sortie) en rad/s.
- φ : déphasage (de la sortie par rapport à l'entrée), en rad.

Gain et phase



Remarque

Pour connaître précisément la réponse relative à l'entrée (elle-même connue), il suffit d'avoir :

- le rapport des amplitudes $\frac{s_0}{e_0}$, ou **gain** du système
- le déphasage φ , ou **phase**

Fréquence et période

Que ce soit pour l'entrée ou la sortie :

- la fréquence sera égale à f , telle que $\omega = 2 \pi f$
- la période sera égale à T , telle que $T = \frac{2 \pi}{\omega}$

Utilisation de la fonction de transfert du système

L'équation différentielle décrivant le système n'est pas facile à utiliser ; on se sert à nouveau en SII de la fonction de transfert $H(p)$. On remplace la variable symbolique p par $j\omega$ dans l'expression de la fonction de transfert.

On peut établir alors un lien entre le gain ou la phase, et le nombre complexe qu'est devenue $H(j\omega)$.

- le gain $\frac{s_0}{e_0} = |H(j\omega)|$, c'est-à-dire le **module** de la fonction de transfert
- la phase $\varphi = \arg(H(j\omega))$, c'est-à-dire l'**argument** de la fonction de transfert

Propriétés du module et de l'argument d'un complexe

Si $H(j\omega) = A + j B$, alors :

1. $|H(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2}$
2. $\arg(H(j\omega)) = \arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ si $A > 0$
3. $\arg(H(j\omega)) = \left(\arctan\left(\frac{B}{A}\right) + \pi\right)$ si $A < 0$

Représentation graphique de la fonction de transfert



Pour un système soumis à une entrée sinusoïdale, on peut tracer la représentation graphique de sa fonction de transfert $H(p)$ pour $p = j\omega$, c'est-à-dire : $H(j\omega)$. Cela permet :

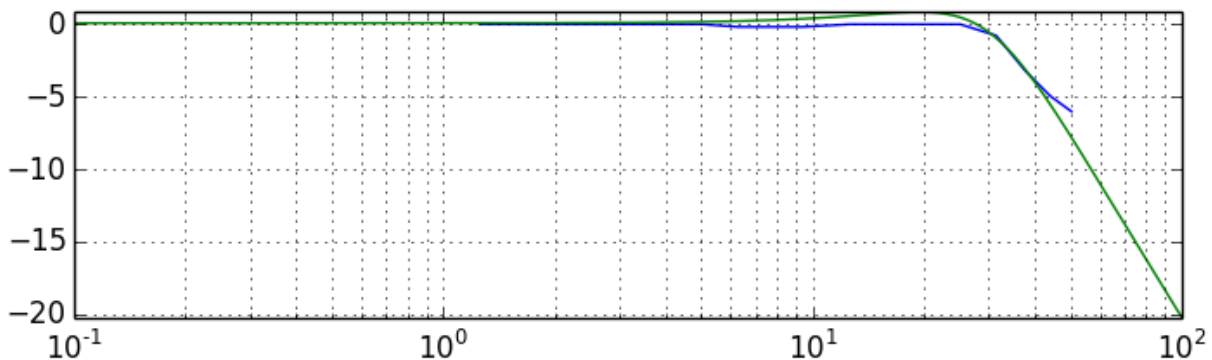
- de déduire les propriétés et les performances du système étudié,
- dans certains cas, "d'identifier" le système, c'est-à-dire évaluer la forme et les paramètres de sa fonction de transfert.

1. Principe du diagramme de Bode

La fonction de transfert $H(j\omega)$ est représentée en **deux courbes**, alignées en fonction de la pulsation ω .

Courbe de gain

- **pulsation** : axe des abscisses gradué en $\log \omega$
- **gain G** : axe des ordonnées gradué en **décibels** : $G = 20 \log |H(j\omega)|$

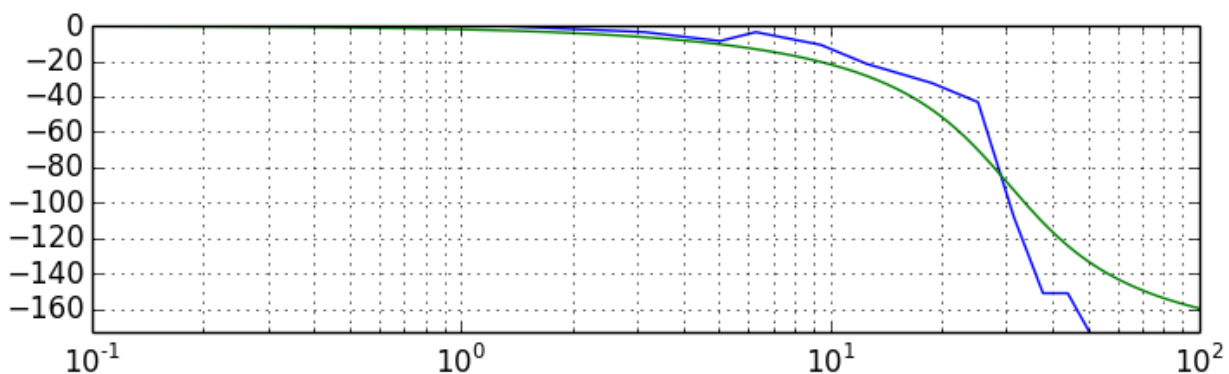


Courbe de gain du volant à retour de force

Courbe de phase

pulsation : axe des abscisses gradué en $\log \omega$

phase : axe des ordonnées gradué en **degrés ou en radians**

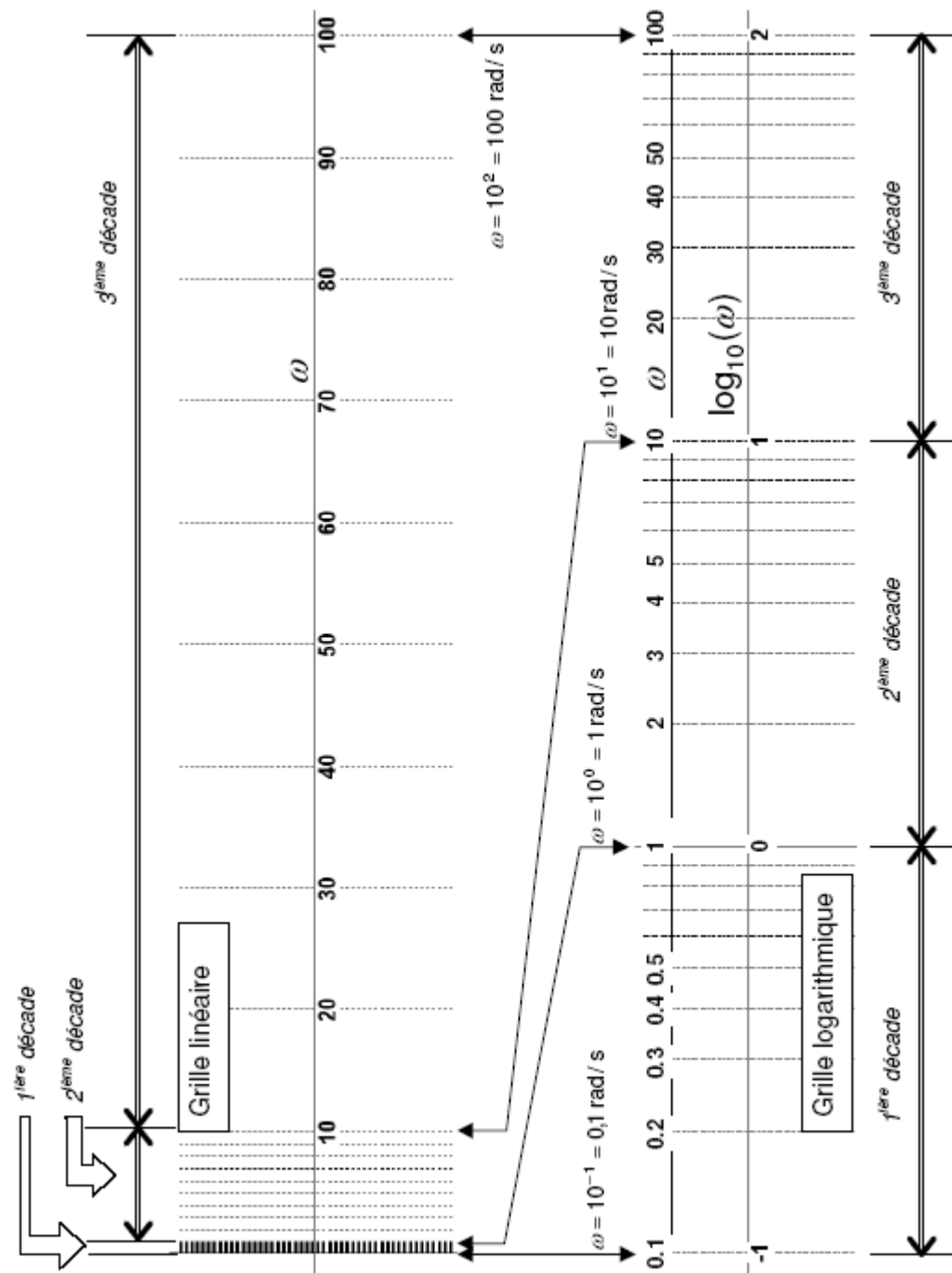


Courbe de phase du volant à retour de force

2. Echelle logarithmique



Le diagramme de Bode utilise **en abscisse une échelle logarithmique** pour les pulsations. Ceci permet de faire apparaître un comportement du système pour des plages de pulsations (ou fréquences) distinctes : de 1 à 10 rad/s, puis de 10 à 100 rad/s, puis de 100 à 1000 rad/s, etc..



Comparaison entre échelle linéaire et échelle logarithmique

Il n'y a pas d'origine des abscisses sur cette échelle logarithmique : le diagramme de Bode sera tracé sur une bande de pulsation qu'il faudra choisir judicieusement.

Décade et octave

- Une **décade** correspond à la **multiplication** (ou division) par **10** de la pulsation ω , soit une addition (ou une soustraction) de 1 pour $\log \omega$.
- Une **octave** correspond à la **multiplication** (ou division) par **2** (comme en musique !) de la pulsation ω , soit une addition (ou une soustraction) de $\log 2 \simeq 0.3$ pour $\log \omega$.

3. Particularités

Sur la plupart des mécanismes :

- la réponse est en retard par rapport à l'entrée, donc la phase est négative : ($\varphi < 0$)
- l'amplitude de sortie tend vers 0 aux hautes fréquences ($\lim_{\omega \rightarrow \infty} G = 0$), donc le gain en décibels tend vers $-\infty$.

Modification du gain statique de la fonction de transfert

La modification du gain statique K de la fonction de transfert provoque une translation verticale de la courbe de gain, et n'a aucune influence sur la courbe de phase.

Bande passante

La **bande passante** d'un système peut se définir comme sa faculté à transmettre **sans atténuation notable** les signaux sinusoïdaux qui le traversent.

La **bande passante à -3 dB** est définie comme la plage de pulsations allant de 0 rad/s, à celle où le gain perd 3 dB par rapport à sa valeur initiale.

(cela correspond à une atténuation de la sortie de 30% environ : $10^{\frac{-3}{20}} = 0.708$).

Hendrik Wade Bode

Bode (1905 - 1982)

Ingénieur, chercheur et inventeur américain d'origine néerlandaise.

Il débute sa carrière chez les laboratoires Bell, et travaille sur les réseaux de télécommunications. A la fin des années 1930, il développe les diagrammes portant son nom afin de faciliter l'étude de la stabilité des systèmes à rétroaction. Pendant et après la seconde guerre mondiale, Bode oriente ses recherches dans le domaine militaire, notamment sur le suivi de cible aérienne à l'aide d'un radar.

4. Technique générale de tracé

Addition des gains et des phases

Soit $H = H_1 \cdot H_2$ (fonctions de transfert en série):

- $G = G_1 + G_2$, car $20 \log |H| = 20 \log |H_1| + 20 \log |H_2|$
- $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, car $\arg H = \arg H_1 + \arg H_2$



Fondamental

Ainsi, lorsque des fonctions de transfert sont en **série** (donc **multipliées** les unes avec les autres) :

- le **gain total** est égal à la **somme** de chaque gain (grâce aux propriétés du décibel)
- la **phase totale** est égale à la **somme** de chaque phase (grâce aux propriétés de l'argument d'un complexe)



Conseil

On peut donc tracer le diagramme de Bode de n'importe quel système, en connaissant celui de toutes les fonctions de transfert élémentaires suivantes :

- le gain pur K
- l'intégrateur $\frac{K}{p}$ (et parfois son inverse, le dérivateur Kp)
- le premier ordre $\frac{1}{1 + \tau p}$ et son inverse
- le second ordre $\frac{1}{1 + \frac{2m}{\omega_0} p + \frac{1}{\omega_0^2} p^2}$ et son inverse

Construction d'un diagramme de Bode pour les systèmes d'ordre quelconque



Méthode

Première étape : écrire la fonction de transfert globale comme le **produit** de fonctions fondamentales.

$$H(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^\alpha} \cdot \frac{\prod_m (1 + \tau_m \cdot j\omega)}{\prod_n (1 + \tau_n \cdot j\omega)} \cdot \frac{\prod_k \left(1 + \frac{2m_k}{\omega_{0k}} j\omega + \frac{1}{\omega_{0k}^2} (j\omega)^2 \right)}{\prod_r \left(1 + \frac{2m_r}{\omega_{0r}} j\omega + \frac{1}{\omega_{0r}^2} (j\omega)^2 \right)}$$

avec les :

- α intégrateurs
- m inverses de premier ordre
- n premier ordres
- k inverses de second ordre
- r second ordres

Deuxième étape : classer les pulsations de cassures ($\frac{1}{\tau}$ pour un premier ordre, ω_0 pour un second ordre) dans un ordre croissant. Les "cassures" du tracé asymptotique correspondront à ces pulsations.

Troisième étape :

1. tracer le diagramme de $\frac{K}{(j\omega)^\alpha}$
2. en avançant vers les pulsations croissantes, faire intervenir les autres systèmes fondamentaux selon l'ordre précédent.

Quatrième étape éventuelle : affiner le tracé asymptotique en combinant les courbes réelles.

Complément : Black et Nyquist



1. Diagramme de Black (Black - Nichols)

Le diagramme de Black est en pratique l' "assemblage" des deux courbes du diagramme de Bode en une seule :

- le **gain** (en décibels) est représenté sur l'axe des ordonnées,
- la **phase** (en degrés) est représenté sur l'axe des abscisses.

La courbe est alors paramétrée, graduée suivant la pulsation ω . On indique généralement le sens des pulsations croissantes par une flèche.

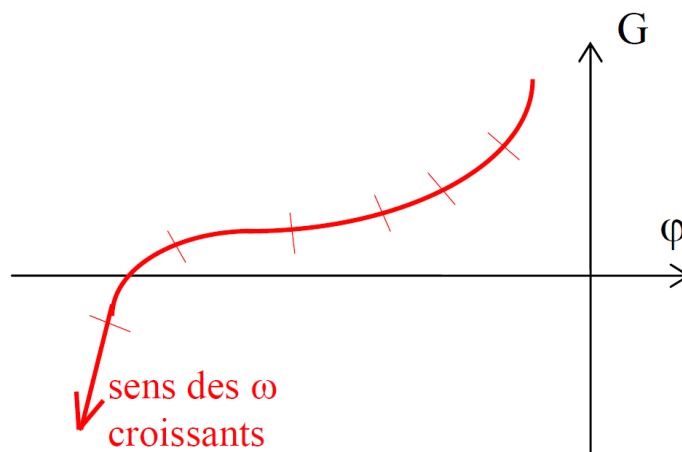
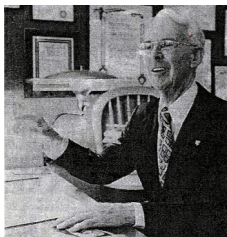


Diagramme de Black

Harold Stephen Black (1898 -1983) et Nathaniel B. Nichols (1914–1997)

 **Complément**



Black en 1977

Ingénieurs américains ayant fortement contribué au domaine du contrôle des systèmes (Black a inventé l'amplificateur à contre-réaction en 1927)

2. Diagramme de Nyquist

La partie réelle (axe des abscisses) et la partie imaginaire (axe des ordonnées) de la fonction de transfert ont une certaine valeur pour une pulsation donnée ω .

L'évolution de ces deux coordonnées suivant la pulsation donne la courbe du diagramme de Nyquist.

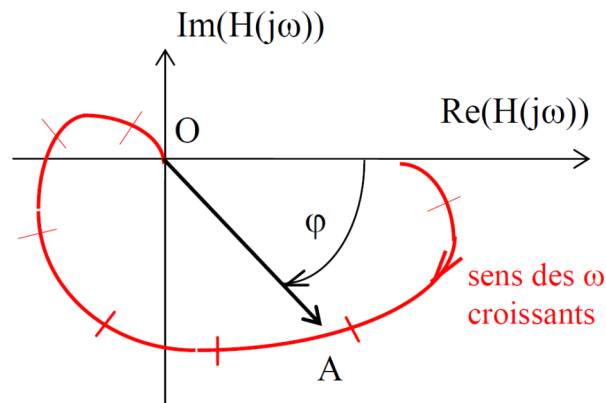


Diagramme de Nyquist

La courbe est ici aussi paramétrée, graduée suivant la pulsation ω . On indique généralement le sens des pulsations croissantes par une flèche.

Le gain (**pas en décibels mais directement $|H(j\omega)|$** !, soit la distance **OA** sur la courbe) ainsi que la phase φ peuvent être lus directement sur le diagramme, pour chaque valeur de ω .



Harry Nyquist
(1889 - 1976)

Ingénieur américain d'origine suédoise ; il travailla au sein des laboratoires Bell notamment sur le bruit thermique et la stabilité des amplificateurs bouclés. Son nom apparaît également dans la théorie de l'information et le théorème de Nyquist - Shannon portant sur l'échantillonnage numérique d'un signal analogique.

Complément sur la réponse harmonique d'un système



L'objectif est de prouver que :

- la réponse (en régime permanent) d'un système soumis à une entrée sinusoïdale est elle-même une sortie sinusoïdale
- la fonction de transfert peut être utilisée en remplaçant la variable symbolique p par $j\omega$.

1. Etude

Soit un système modélisé par sa fonction de transfert $H(p)$, avec $E(p)$ et $S(p)$ respectivement les transformées de Laplace de l'entrée $e(t)$ et de la sortie $s(t)$.

En mettant en évidence les pôles de la fonction de transfert pour une décomposition en éléments simples, on peut écrire $H(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}$.



On considère dans cette démonstration que tous ces pôles sont réels (et négatifs).

L'entrée étant sinusoïdale, $e(t) = e_0 \sin \omega t$, on a $E(p) = e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

Ainsi $S(p) = H(p).E(p) = H(p).e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$.

2. Décomposition en éléments simples

Comme tous les pôles de la fonction de transfert sont considérés réels, l'expression de $S(p)$ a pour racines :

- des réels (négatifs) p_1, p_2, \dots, p_n
- un complexe $j\omega$ et son conjugué $-j\omega$.

On peut alors écrire $S(p) = \frac{A}{p - j\omega} + \frac{\bar{A}}{p + j\omega} + \frac{B_1}{p - p_1} + \frac{B_2}{p - p_2} + \dots + \frac{B_n}{p - p_n}$ où :

- A et un complexe et \bar{A} son conjugué
- les B_i sont des constantes réelles

Transformée de Laplace inverse

Dans le domaine temporel, cela donne $s(t) = Ae^{j\omega t} + \bar{A}e^{-j\omega t} + B_1e^{p_1 t} + B_2e^{p_2 t} + \dots + B_ne^{p_n t}$

3. Restriction au régime permanent

Puisque l'on veut observer le régime permanent uniquement de la réponse, on suppose que le régime transitoire disparaît. Cela correspond à la disparition des termes $B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} + \dots + B_n e^{p_n t}$, qui tendent vers 0 lorsque t tend vers ∞ (les pôles p_i sont négatifs).

En régime permanent la réponse peut donc s'écrire $s(t) = A e^{j\omega t} + \bar{A} e^{-j\omega t}$

4. Obtention du complexe A et de son conjugué

$$\lim_{p \rightarrow j\omega} (p - j\omega) S(p) = \lim_{p \rightarrow j\omega} (p - j\omega) H(p) e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \lim_{p \rightarrow j\omega} \frac{e_0 H(p) \omega}{p + j\omega} = \frac{e_0 H(j\omega)}{2j} = A$$

$$\lim_{p \rightarrow -j\omega} (p + j\omega) S(p) = \lim_{p \rightarrow -j\omega} (p + j\omega) H(p) e_0 \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} = \lim_{p \rightarrow -j\omega} \frac{e_0 H(p) \omega}{p - j\omega} = \frac{e_0 H(-j\omega)}{-2j} = \bar{A}$$

5. Ecriture complexe de la fonction de transfert

Puisque $H(j\omega)$ est un nombre complexe, on peut écrire $H(j\omega) = |H(j\omega)| e^{j\varphi}$ et $H(-j\omega) = |H(j\omega)| e^{-j\varphi}$

La sortie du système peut donc être écrite de la manière suivante :

$$s(t) = \frac{e_0 |H(j\omega)| e^{j\varphi}}{2j} e^{j\omega t} - \frac{e_0 |H(j\omega)| e^{-j\varphi}}{2j} e^{-j\omega t}$$

$$s(t) = e_0 |H(j\omega)| \left(\frac{e^{j(\omega t + \varphi)} - e^{-j(\omega t + \varphi)}}{2j} \right)$$

Formules d'Euler

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$



Fondamental

$$s(t) = e_0 |H(j\omega)| \sin(\omega t + \varphi)$$

La sortie est donc bien une sinusoïde :

- de pulsation ω égale à celle de l'entrée
- d'amplitude $s_0 = e_0 \cdot |H(j\omega)|$
- déphasée de φ , argument de $H(j\omega)$