Torseurs

Table des matières

Introduction

Plusieurs grandeurs physiques que nous étudions (vitesse des points d'un solide, quantité de mouvement, action mécanique, ...) ne peuvent pas être décrites précisément par le **seul outil vecteur**.

Il nous faut alors utiliser un outil plus perfectionné, le **torseur**.

Certaines grandeurs physiques ne peuvent cependant pas non plus être correctement décrites par un torseur, comme l'accélération des points d'un solide par exemple.

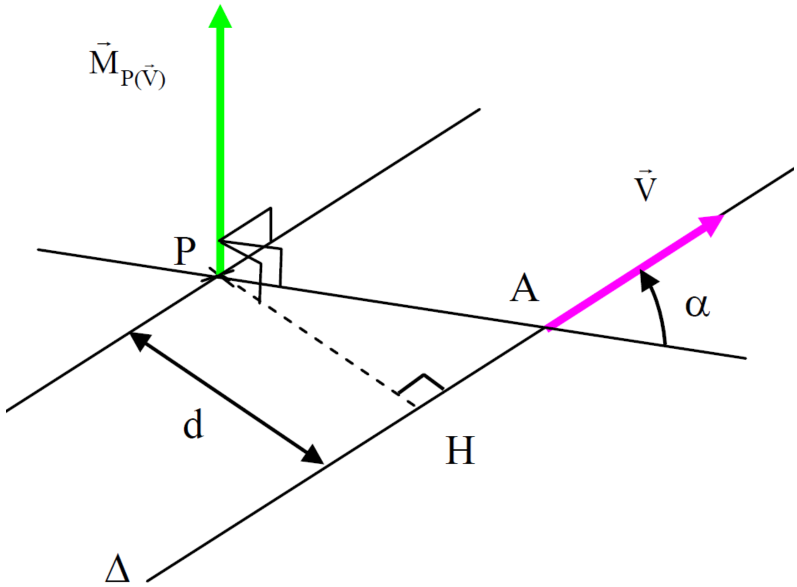
Remarques préliminaires

I

1. Moment d'un vecteur glissant

Définition

Le moment en P du vecteur glissant $(A, \vec{V})$ est le vecteur lié $\overrightarrow{\mathcal{M}_{P(\vec{V})}} = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{V}$



Remarque

Ce moment est **indépendant** du point A appartenant à la droite Δ.

En effet, si H est la projection orthogonale de P sur Δ, $\overrightarrow{\mathcal{M}_{P(\vec{V})}} = \left(\overrightarrow{PH} + \overrightarrow{HA}\right) \wedge \vec{V} = \overrightarrow{PH} \wedge \vec{V}$ car $\overrightarrow{HA}$ et $\vec{V}$ sont colinéaires.

$||\overrightarrow{\mathcal{M}_{P(\vec{V})}}|| = d \; . \; ||\vec{V}||$

2. Champs de vecteurs

Champ de vecteurs *Définition*

Si à tout point P de l'espace, on fait correspondre un vecteur lié d'origine P (notation $(\vec{U}_{(P)})$), on dit qu'on définit un **champ de vecteurs**.

Champ de vecteurs uniforme *Remarque*

Si les vecteurs d'un champ ont les mêmes direction, sens, norme en tout point P, alors le champ de vecteurs est dit **uniforme**.

Pression au fond d'un réservoir *Exemple*

Un modèle courant pour la pression exercée par un fluide sur une paroi plane au fond d'un réservoir est un champ de vecteurs uniforme. Quel que soit le point de contact considéré entre une particule fluide et la paroi solide, l'effet de la pression peut être modélisé par un vecteur, et ce vecteur aura même direction, même sens et même norme partout.

Champ de vecteurs équiprojectif *Remarque*

Si les vecteurs du champ $(\vec{U}_{(P)})$ respectent la propriété d'**équiprojectivité** : $\overrightarrow{AB}.\vec{U}_{(A)} = \overrightarrow{AB}.\vec{U}_{(B)}$, alors le champ de vecteurs est dit **équiprojectif**.

Vecteurs vitesses des points d'un solide en mouvement ***Exemple***

Parmi plusieurs autres grandeurs physiques, les vitesses des points d'un solide indéformable en mouvement peuvent être modélisées par un champ de vecteurs équiprojectif.

Définition II

Torseur *Définition*

Le **torseur** est un **outil mathématique** permettant de représenter de manière concise un **champ de vecteurs équiprojectif**.

Point d'observation

Le champ de vecteurs a une "apparence" différente suivant le point à partir duquel on l'observe. Le torseur a donc une expression différente **suivant le point où il est exprimé**.

Somme (ou "Résultante") *Définition*

La **somme** d'un torseur est le **vecteur libre** égal à la **somme des vecteurs libres** du champ de vecteurs.

$$\overrightarrow{S} = \overrightarrow{R} = \sum \overrightarrow{U_{(P)}}$$

Moment *Définition*

Le **moment**, par exemple **en O**, du torseur est le **vecteur lié d'origine O**, **somme des moments en O** des différents vecteurs glissants.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{U_{(A_i)}}$$

Syntaxe

$\overrightarrow{S}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$ sont appelés les **éléments de réduction du torseur au point O**.

Torseur au point O *Définition*

Le torseur en O s'écrit comme suit :

$$\{\mathcal{T}\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S}\, ou\, \overrightarrow{R} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} \end{array} \right\}_O$$

Coordonnées d'un torseur dans une base b *Fondamental*

En exprimant la résultante et le moment dans une base commune b, on peut écrire le torseur comme suit :

$$\{\mathcal{T}\}_O = {}_O\left\{ \begin{array}{cc} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{array} \right\}_b \quad ou \quad \{\mathcal{V}\}_O = {}_O\left\{ \begin{array}{cc} \omega_1 & V_1 \\ \omega_2 & V_2 \\ \omega_3 & V_3 \end{array} \right\}_b$$

où la **colonne** de :

- **gauche** correspond aux coordonnées de la **somme** (résultante)
- **droite** correspond aux coordonnées du **moment**

Changement de point d'un torseur III

Nous serons fréquemment amenés à vouloir exprimer un torseur en **différents points** ; cela reviendra à "observer" depuis différents "points de vue" **le même torseur**, c'est-à-dire le même champ de vecteurs équiprojectif. Comme la résultante est un vecteur libre et le moment un vecteur lié, **seul le moment change** d'expression **suivant le point considéré**.

Relation de Varignon *Définition*

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$$

Remarque

On cite souvent à l'oral (**mais pas aux concours !**) la relation de "BABAR"

Ainsi,

$$\{\mathcal{T}\}_O = \left\{ \begin{array}{r} \overrightarrow{S} = \sum \overrightarrow{U_{(P)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OA_i} \wedge \overrightarrow{V} \end{array} \right\}_O$$

devient

$$\{\mathcal{T}\}_E = \left\{ \begin{array}{r} \overrightarrow{S} = \sum \overrightarrow{U_{(P)}} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_E} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{EA_i} \wedge \overrightarrow{V} \end{array} \right\}_E$$

Champ de moments

Pour un torseur donné, puisqu'à tout point P correspond un moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$, qui est un vecteur lié, le champ constitué par les vecteurs $\overrightarrow{\mathcal{M}_P}$ est un **champ de moments**.

Une propriété d'un champ de moments est qu'il est **équiprojectif**. La réciproque est vraie : **tout champ de vecteurs équiprojectif est un champ de moments** (théorème de Delassus).

Fondamental

Un champ de moments vérifiera donc toujours les propriétés suivantes :

- équiprojectivité : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\mathcal{M}_{(A)}} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\mathcal{M}_{(B)}}$
- relation de Varignon : $\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{R}$

Somme IV

Soient deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ exprimés en O :

$$\{\mathcal{T}_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(0)} \end{array} \right\}_O \text{ et } \{\mathcal{T}_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(0)} \end{array} \right\}_O .$$

Somme de deux torseurs *Définition*

$$\{\mathcal{T}\}_O = \{\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{S}_1 + \overrightarrow{S}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(0)} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2(0)} \end{array} \right\}_O$$

Remarque

La somme de deux (ou plus) torseurs nous permettra d'additionner des vitesses, des actions mécaniques, etc..

Même point d'expression *Attention*

L'addition (ou la soustraction) de plusieurs torseurs n'a de sens que si tous sont exprimés **au même point**.

Invariants

V

1. Invariants d'un torseur

Somme

La somme de vecteurs libres est elle-même un vecteur libre ; la somme (ou résultante) d'un torseur est donc un vecteur **indépendant** du point où il est calculé. C'est un **invariant**.

Automoment *Définition*

Le produit **scalaire** de la résultante avec le moment d'un torseur (quel que soit son point de calcul), est également indépendant du point : c'est un autre **invariant**, appelé **automoment**.

En effet : $\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}$, donc $\vec{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_B} = \vec{R}.\overrightarrow{\mathcal{M}_A} + \vec{R}.\left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}\right)$ avec $\vec{R}.\left(\overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}\right)$ nécessairement nul.

2. Comoment de deux torseurs

Soient deux torseurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ exprimés en O :

$$\{\mathcal{T}_1\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_1 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_1(0)} \end{array} \right\}_O$$

et

$$\{\mathcal{T}_2\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{S}_2 \\ \overrightarrow{\mathcal{M}_2(0)} \end{array} \right\}_O.$$

Comoment de deux torseurs *Définition*

Le comoment des deux torseurs est le **scalaire** $C_{12} = \vec{S}_1.\overrightarrow{\mathcal{M}_2(O)} + \vec{S}_2.\overrightarrow{\mathcal{M}_1(O)}$

Invariance du comoment *Attention*

Le comoment est un **invariant** : il est le même quel que soit le point considéré.

Il faut bien entendu que les deux torseurs soient néanmoins exprimés **au même point** !

Remarque

Le comoment nous permettra de calculer une **puissance** mécanique.

Torseurs spéciaux

VI

Définition

Un torseur est dit **spécial** si son **automoment est nul**.

1. Torseur nul

Définition

Un torseur est **nul** si ses deux éléments de réduction (résultante et moment) sont nuls en un point quelconque.

Il est noté $\{0\}$.

Remarque

Si un torseur est nul en un point alors il est nul en tout point (cf. Varignon).

2. (Torseur) glisseur

Définition

Un torseur est appelé **glisseur** s'il existe un point où son moment est nul.

Remarque

Pour tous les points appartenant à la droite parallèle à la résultante, passant par ce point où le moment est nul, le moment reste nul.

Ce torseur peut donc être exprimé en n'importe quel point sur cette droite (il peut "**glisser**" sur cette droite) et garder sa forme de glisseur.

3. (Torseur) couple

Un torseur est appelé **(torseur) couple** si sa résultante est nulle, et si son moment ne l'est pas.

Remarque

Un torseur couple est **indépendant du point** où il est exprimé (cf. Varignon).

Axe central d'un torseur

VII

Définition

On appelle **axe central** d'un torseur l'ensemble des points P tels que le moment $\overrightarrow{\mathcal{M}(P)}$ est colinéaire à la résultante $\overrightarrow{R}$.

Axe central unique

Remarque

Cet axe central existe et est **unique pour tout torseur**, sauf pour :

- le torseur nul
- le torseur couple

Le moment est minimum pour tout point de l'axe central.

Axe central d'un glisseur

Remarque

Un glisseur a son moment nul pour tout point de l'axe central.