COMPLEMENT DE COURS

Décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle

Ce complément de cours présente quelques techniques de calcul de la décomposition en éléments simples de fractions rationnelles rencontrées dans l'étude des SLCI. L'objectif de la décomposition est de transformer une fraction rationnelle en une somme de fractions rationnelles simples dont on pourra facilement déterminer la transformée de Laplace inverse.

On se limitera volontairement aux fractions rationnelles $\frac{N(p)}{D(p)}$ telles que :

- $\deg N(p) < \deg D(p)$
- $D(p) = \prod_i (p - p_i)$ avec
  - soit p_i réels
  - soit un ou plusieurs p_i complexes. On considère alors le ou les complexes conjugués $\overline{p_i}$.

    On a alors $(p - p_i)(p - \overline{p_i}) = p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2$ avec $p_i = \alpha + i\beta$.

    $D(p)$ est alors un produit de polynômes réels de deg ≤ 2.

Etude des cas typiques

Etape 1 : forme de la décomposition

- Cas n°1 : D(p) n'a que des racines simples réelles :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{\prod_i (p - p_i)} = \sum_i \frac{A_i}{p - p_i}$$

Ex 1 : $S(p) = \dfrac{2p+1}{(p+4)(p+1)}$

- Cas n°2 : D(p) n'a que des racines réelles dont **une** multiple :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)^n \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{B_j}{(p - p_k)^j}$$

Ex 2 : $S(p) = \dfrac{3p^2 + 2p + 1}{(p+2)^3 (p+3)}$

- Cas n°3 : D(p) a une racine complexe :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \frac{N(p)}{(p - p_k)(p - \overline{p_k}) \prod_{i \neq k} (p - p_i)} = \sum_{i \neq k} \frac{A_i}{p - p_i} + \frac{Bp + C}{p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2}$$

Ex 3 : $\dfrac{1}{(p^2 + 2p + 5)(p+1)}$

Etape 2 : détermination de coefficients

- Par identification : on recompose la fraction rationnelle à partir de la forme décomposée puis on identifie avec la fraction d'origine.
- Par calcul de limite (quand cela est possible) : $A_i = \lim_{p \to p_i} \frac{N(p)}{D(p)} (p - p_i)$
- Par utilisation de valeurs particulières : 0,1, –1 …

CORRECTION

Exemple 1 :

$$S(p)=\frac{2p+1}{(p+4)(p+1)}=\frac{A}{p+4}+\frac{B}{p+1}$$

$$A=\lim_{p\to-4}(p+4).S(p)=\frac{7}{3} \qquad \text{et} \qquad B=\lim_{p\to-1}(p+1).S(p)=-\frac{1}{3}$$

$$S(p)=\frac{7/3}{p+4}+\frac{-1/3}{p+1}$$

Exemple 2 :

$$S(p)=\frac{3p^2+2p+1}{(p+2)^3(p+3)}=\frac{A}{(p+2)^3}+\frac{B}{(p+2)^2}+\frac{C}{p+2}+\frac{D}{p+3}$$

$$A=\lim_{p\to-2}(p+2)^3.S(p)=9 \qquad \text{et} \qquad D=\lim_{p\to-3}(p+3).S(p)=-22$$

$$\lim_{p\to\infty}p.S(p)=0=C+D \Rightarrow C=22$$

$$p=0:\frac{1}{24}=\frac{9}{8}+\frac{B}{4}+\frac{22}{2}-\frac{22}{3} \Leftrightarrow B=-19$$

$$S(p)=\frac{9}{(p+2)^3}+\frac{-19}{(p+2)^2}+\frac{22}{p+2}+\frac{-22}{p+3}$$

Exemple 3 :

$$S(p)=\frac{1}{(p^2+2p+5)(p+1)}=\frac{A.p+B}{p^2+2p+5}+\frac{C}{p+1}$$

$$C=\lim_{p\to-1}(p+1).S(p)=\frac{1}{4} \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to\infty}p.S(p)=0=A+C \Rightarrow A=\frac{-1}{4}$$

$$p=0:\frac{1}{5}=\frac{B}{5}+\frac{1}{4} \Leftrightarrow B=-\frac{1}{4}$$

$$S(p)=-\frac{1/4.p+1/4}{p^2+2p+5}+\frac{1/4}{p+1}$$