Mouvement des solides

Table des matières

Mouvement d'un point dans l'espace

I

1. Vecteur position

Soit P un point mobile par rapport au repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

$P(t)$ est la position du point P dans le repère R à la date t.

Définition

Le **vecteur position** du point P dans le repère R, est le vecteur $\overrightarrow{OP(t)}$, le point O étant l'**origine** du repère R (ou tout autre point **fixe** dans R).

Remarque

Comme son nom l'indique, ce simple vecteur permet de connaître à tout instant la position exacte d'un point, dans l'espace ou dans le plan.

Concrètement dans une étude analytique, les coordonnées du vecteur position (qu'elles soient cartésiennes, cylindriques ou sphériques) nous donneront les renseignements nécessaires.

La norme du vecteur position correspond évidemment à une longueur, et s'exprime en **mètres**.

2. Trajectoire

Définition

La trajectoire T du point P dans le repère R est l'ensemble des points $P(t)$ obtenu lorsque t varie.

Remarque

Cette trajectoire est donc une **forme géométrique**, et peut présenter un aspect particulier (arc de cercle, segment de droite, spirale, cycloïde, épicycloïde, etc..)

Attention

Suivant le repère R choisi, un même point pourra avoir des trajectoires différentes.

3. Vitesse d'un point par rapport à un repère

Définition

Le **vecteur vitesse** du point P par rapport au repère R, à la date t, est la **dérivée du vecteur position** :

- par rapport à t,
- dans R.

$$\overrightarrow{V(P/R)} = \left[\frac{d}{dt}\,\overrightarrow{OP(t)}\right]_R$$

Remarque

Le vecteur vitesse d'un point est, à tout instant, **tangent** à sa trajectoire.

Sa norme s'exprime en **mètres par seconde**.

Attention

Cette définition n'est **valable que si O est fixe dans R**.

Dans cette notation, **le point P n'appartient à aucun solide en particulier**.

Pour l'étude du **mouvement des solides**, il sera nécessaire d'ajouter une information, et de vérifier si cette définition peut s'appliquer.

4. Vecteur accélération d'un point par rapport à un repère

Définition

Le **vecteur accélération** du point P par rapport au repère R, à la date t, est la **dérivée du vecteur vitesse**:

- par rapport à t,
- dans R.

$$\overrightarrow{\Gamma(P/R)} = \left[\frac{d}{dt}\ \overrightarrow{V(P/R)}\right]_R$$

Remarque

Le vecteur accélération du point P par rapport au repère R, à la date t, est donc la dérivée seconde du vecteur position par rapport à t, dans R :

$$\overrightarrow{\Gamma(P/R)} = \left[\frac{d^2}{dt^2}\ \overrightarrow{OP(t)}\right]_R$$

Sa norme s'exprime en **mètres par seconde au carré**.

Dans la littérature en sciences industrielles, vous pourrez également trouver le vecteur accélération désigné par $\overrightarrow{a(P/R)}$.

Attention

Cette définition n'est **valable que si O est fixe dans R**.

Dans cette notation, **le point P n'appartient à aucun solide en particulier**.

Pour l'étude du **mouvement des solides**, il sera nécessaire d'ajouter une information, et de vérifier si cette définition peut s'appliquer.

Dérivée d'un vecteur par rapport à un repère R

II

1. Cas particulier (rare)

Attention

La méthode présentée ci-après n'est rapide que si les coordonnées du vecteur dans la base du repère sont connues !

Soit le repère $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, et $\vec{U}$ le vecteur de coordonnées $\left|\begin{array}{l} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{array}\right._R$ ou $\vec{U}(t) = a(t)\ \vec{x} + b(t)\ \vec{y} + c(t)\ \vec{z}$

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_R = \frac{da}{dt}\ \vec{x} + \frac{db}{dt}\ \vec{y} + \frac{dc}{dt}\ \vec{z} = \dot{a}\ \vec{x} + \dot{b}\ \vec{y} + \dot{c}\ \vec{z}$$

Ainsi, dans le cas rare où le vecteur est exprimé dans la base du repère de dérivation, il suffit de dériver les coordonnées par rapport au temps.

2. Cas général (fréquent)

Dans le cas **très fréquent** où les coordonnées du vecteur à dériver ne sont pas connues dans la base du repère de dérivation, **il ne faut surtout pas projeter le vecteur** pour pouvoir le dériver ensuite, mais **utiliser la formule de Bour**.

Dérivation vectorielle (formule de Bour) *Définition*

$$\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_R = \left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_1} + \overrightarrow{\Omega(R_1/R)} \wedge \vec{U}$$

Attention

La plupart du temps, on s'arrangera pour "chercher" le repère R_1 dans lequel $\left[\frac{d\vec{U}}{dt}\right]_{R_1}$ est nul : cela permettra de déterminer un produit vectoriel à la place d'une dérivée vectorielle.

Jacques Edmond Emile Bour *Complément*

Edmond Bour (1832 - 1866)

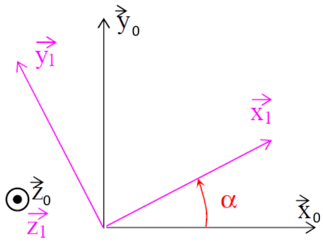
Il entre à Polytechnique dans la promotion 1850, sort major (en 1852, sur 88 élèves), et choisit le corps des mines. Mathématicien et mécanicien, il soutient deux thèses : l'une sur le problème des trois corps, l'autre sur la théorie des perturbations. Envoyé professer l'exploitation des mines et la mécanique à Saint-Étienne, il publie en 1856 un travail sur les "mouvements relatifs". Répétiteur de géométrie descriptive à Polytechnique (1859), il enseigne ensuite la mécanique aux Mines, la cinématique à l'École polytechnique (1861-1865). Il obtient le grand prix de sciences mathématiques de l'Académie des sciences (1861). Il publie un ouvrage sur la cinématique (1865). Il est aussi l'auteur de "La statique et le travail des forces dans les machines à l'état de mouvement uniforme (1868), et de " La dynamique et l'hydraulique" (1874) .

Mouvement d'un solide dans l'espace III

1. Vecteur vitesse de rotation

Définition

Soit deux bases $b_0(\vec{x_0}, \vec{y_0}, \vec{z_0})$ et $b_1(\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{z_1})$, où b_1 est déduite de b_0 par rotation d'un angle α autour de $\vec{z_{0,1}}$.



Changement de base

On appelle **vecteur (vitesse de) rotation** de 1 par rapport à 0 le vecteur suivant :

$$\overrightarrow{\Omega(1/0)} = \dot{\alpha}\ \overrightarrow{z_{0,1}}$$

2. Notion d'appartenance d'un point à un solide

Dès que l'on étudie le mouvement des solides (autrement dit des pièces d'un mécanisme, donc la plupart du temps), il faut savoir si les points dont on exprime la vitesse ou l'accélération font partie d'un solide ou d'un autre, ou d'aucun en particulier !

Notation

On va donc ajouter l'information d'appartenance du point avec le symbole $\in$:

- $\overrightarrow{V(P \in 1/0)}$ est le vecteur vitesse du point P appartenant au solide 1, par rapport au repère (ou solide) 0 (à la date t)
- $\overrightarrow{\Gamma(P \in 1/0)}$ est le vecteur accélération du point P appartenant au solide 1, par rapport au repère (ou solide) 0 (à la date t)

Appartenance naturelle ou supposée *Fondamental*

Soit un point M appartenant naturellement à un solide 2.

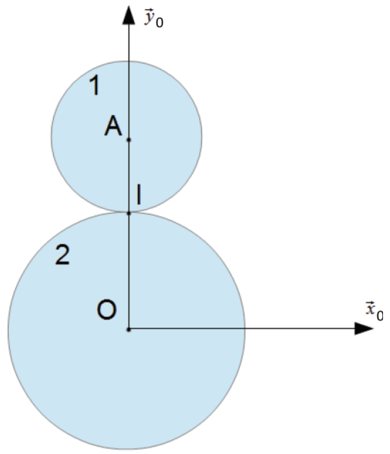
On peut très bien être amené à exprimer la vitesse ou l'accélération de ce point M, en le **supposant** appartenant (**à l'instant t !**) à un autre solide, par exemple 1.

Ces vecteurs vitesse ou accélération seront notés également $\overrightarrow{V(M \in 1/0)}$ ou $\overrightarrow{\Gamma(M \in 1/0)}$.

La notation ne permettra donc pas de savoir si le point considéré appartient **naturellement ou non** au solide indiqué.

Deux roues lisses en contact *Exemple*

Soient deux roues lisses 1 et 2, en contact au point I, tournant l'une contre l'autre (sans glissement) respectivement selon les axes fixes de rotation $(A, \vec{z}_0)$ et $(O, \vec{z}_0)$. Le repère de référence $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au bâti 0.



Plusieurs vitesses du point I peuvent être considérées :

- celle du point I appartenant à la roue 1, par rapport au repère 0 : $\overrightarrow{V(I \in 1/0)}$
- celle du point I appartenant à la roue 2, par rapport au repère 0 : $\overrightarrow{V(I \in 2/0)}$
- celle du point I n'appartenant à aucun solide, par rapport au repère 0 : $\overrightarrow{V(I/0)}$

La troisième vitesse, $\overrightarrow{V(I/0)}$ (sans appartenance particulière spécifiée, donc concernant le point de contact situé géométriquement sur la figure) est par définition la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OI}$.

On se rend compte rapidement que cette vitesse est ici **nulle**, alors que $\overrightarrow{V(I \in 1/0)}$ et que $\overrightarrow{V(I \in 2/0)}$ ne le sont pas !

Dériver un vecteur position pour obtenir la vitesse d'un point *Fondamental*

Dressons un bilan à propos de la vitesse d'un point obtenue par dérivation d'un vecteur position.

La formule suivante n'est valable qu'à deux conditions :

1. le point A est fixe dans le repère 1
2. le point B est fixe dans le repère 2

$$\overrightarrow{V(B \in 2/1)} = \left[\frac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt}\right]_1$$

Si l'une de ces deux conditions n'est pas valable, il faut utiliser la composition des vitesses ou la relation de Varignon pour déterminer la vitesse recherchée.

3. Champ des vecteurs vitesse

3.1. Torseur cinématique

Soient deux points A et B d'un solide 1 en mouvement par rapport à un repère (ou solide) 0. On cherche à obtenir **la relation qui existe entre les vitesses de ces deux points**.

Démonstration

Par application de la relation de changement de base de dérivation au vecteur $\overrightarrow{AB}$ (formule de Bour), entre le repère lié au solide 0 et le repère lié au solide 1 :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Or, $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_1 = \vec{0}$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ étant constant dans 1,

et : $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OB}\right]_0 - \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{OA}\right]_0 = \overrightarrow{V(B \in 1/0)} - \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$.

Définition

La relation entre les vecteurs vitesse des points A et B d'un solide 1 s'écrit :

$$\overrightarrow{V(B \in 1/0)} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega(1/0)}$$

Torseur cinématique (ou torseur des vitesses) *Fondamental*

Les vecteurs vitesse des deux points A et B du solide 1 **vérifient la relation de changement de point du moment d'un torseur**.

Par conséquent, on peut représenter par exemple au point A le mouvement du solide 1 par rapport au repère (ou solide) 0, grâce au torseur suivant, appelé **torseur cinématique** (ou torseur distributeur des vitesses) :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ \overrightarrow{V(A \in 1/0)} \end{array} \right\}$$

3.2. Mouvements particuliers

a) Mouvement de translation

Définition

Le torseur cinématique d'un solide en **translation** est un torseur couple :

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \vec{0} \\ \overrightarrow{V(A \in 1/0)} \end{array} \right\}$$

(avec $\overrightarrow{V(A \in 1/0)} \neq \vec{0}$).

Le moment d'un torseur couple étant le même en tout point, les **vecteurs vitesse** de tous les points du solide en translation sont **identiques**.

Remarque

Cela est vrai à l'instant **t** considéré. Dans le cas général, entre deux instants **t** et **t'**, les vecteurs vitesse changent.

i) Translation rectiligne

La **trajectoire** des points du solide en translation rectiligne est une **droite**.

ii) Translation circulaire

La **trajectoire** des points du solide en translation circulaire est un **cercle**.

Un exemple classique est celui des nacelles d'une grande roue de fête foraine.

b) Mouvement de rotation (instantanée)

Définition

Le torseur cinématique d'un solide en **rotation** est un torseur glisseur:

$$\{\mathcal{V}(1/0)\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{\Omega(1/0)} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

(avec $\overrightarrow{\Omega(1/0)} \neq \vec{0}$).

Le point A est situé sur l'axe central du torseur, de même direction que le vecteur $\overrightarrow{\Omega(1/0)}$.

Tous les points situés sur l'axe central du torseur, donc l'**axe de rotation**, ont une vitesse nulle.

Remarque

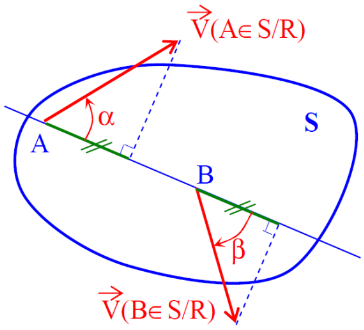
Dans le cas général, entre deux instants **t** et **t'**, la direction de l'axe de rotation change.

3.3. Équiprojectivité du champ des vecteurs vitesse

Définition

Quels que soient les points **A** et **B** d'un solide **S** :

$\overrightarrow{V(B \in S/R)} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{V(A \in S/R)} \cdot \overrightarrow{AB}$



Equiprojectivité

Cela signifie que les mesures algébriques des projections orthogonales, sur un axe de direction AB, des vecteurs vitesse des points A et B d'un solide S sont égales.

Remarque

Connaissant :

- la vitesse du point A d'un solide
- la direction de la vitesse du point B de ce même solide,

on peut déterminer **graphiquement** la norme de la vitesse du point B.

La relation d'équiprojectivité n'est pas utile en cinématique analytique.

4. Champs des vecteurs accélération

Soient deux points A et B d'un solide 1 en mouvement par rapport à un repère (ou solide) 0.

En dérivant par rapport au temps, dans le repère 0, les deux membres de la relation de changement de point des vecteurs vitesse, on peut écrire :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(B \in 1/0)}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(A \in 1/0)}\right]_0 + \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{AB}\right)\right]_0$$

soit $\overrightarrow{\Gamma(B \in 1/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_0$

En appliquant la formule de Bour sur $\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{AB}\right]_0$, on obtient la relation ci-après.

Définition

La relation entre les vecteurs accélération des points A et B d'un solide 1 s'écrit :

$$\overrightarrow{\Gamma(B \in 1/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{AB}\right)$$

Attention

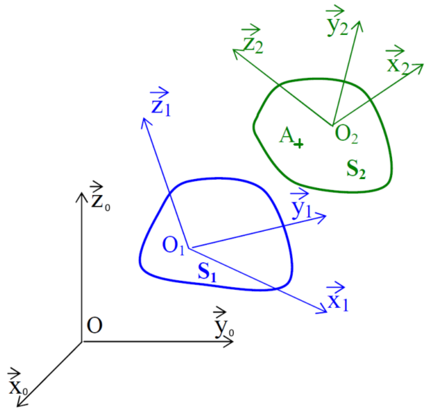
Les vecteurs accélération des deux points A et B du solide 1 **ne vérifient pas la relation de changement de point du moment d'un torseur** (à cause du troisième terme de droite).

Il est donc impossible de représenter grâce à un torseur le champ des vecteurs accélération d'un solide.

Mouvements relatifs entre solides IV

1. Composition des vecteurs vitesse

Soient deux solides S_1 (repère R_1) et S_2 (repère R_2) en mouvement l'un par rapport à l'autre et en mouvement par rapport au repère R_0.



Deux solides en mouvement par rapport à une référence

1.1. Composition des vecteurs vitesse instantanée

Comme :

- A est un point qui appartient naturellement au solide 2
- O est un point fixe dans 0

on peut écrire $\overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OA}}{dt}\right]_0 = \left[\dfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_0 + \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_0$

Or :

- $\left[\dfrac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right]_0 = \overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)}$ car O_1 est un point fixe pour le solide 1
- $\left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_0 = \left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}$

Enfin :

$\left[\dfrac{d\overrightarrow{O_1A}}{dt}\right]_1 = \overrightarrow{V(A \in 2/1)}$ car O_1 est un point fixe pour le solide 1

$\overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A} = \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$ (formule de changement de point)

Définition

$$\overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$$

Remarque

Dans le mouvement du point A appartenant (naturellement) au solide 2 par rapport au repère 0, on parle souvent de :

- vitesse **absolue** $\overrightarrow{V(A \in 2/0)}$
- vitesse **relative** $\overrightarrow{V(A \in 2/1)}$
- vitesse **d'entraînement** $\overrightarrow{V(A \in 1/0)}$ (car c'est la vitesse du point A comme s'il était entraîné par 1 dans son mouvement par rapport à 0)

1.2. Composition des vecteurs rotation

En appliquant la formule de Bour à un vecteur $\vec{U}$ quelconque, avec trois repères différents $0, 1$ et 2 :

- $\left[\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right]_2 = \left[\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega(1/2)} \wedge \vec{U}$
- $\left[\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right]_1 = \left[\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right]_0 + \overrightarrow{\Omega(0/1)} \wedge \vec{U}$
- $\left[\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right]_0 = \left[\dfrac{d\vec{U}}{dt}\right]_2 + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{U}$

et en additionnant les trois équations obtenues, on obtient quel que soit $\vec{U}$:

$$\overrightarrow{\Omega(1/2)} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega(0/1)} \wedge \vec{U} + \overrightarrow{\Omega(2/0)} \wedge \vec{U} = \vec{0}$$

Définition

$$\overrightarrow{\Omega(2/0)} = \overrightarrow{\Omega(2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)}$$

1.3. Composition des torseurs cinématiques

On peut déduire des points précédents la relation de composition des vecteurs cinématiques (**exprimés** bien entendu au préalable **au même point**) :

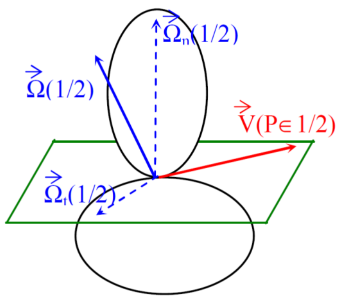
$$\{\mathcal{V}_{(2/0)}\}_A = \{\mathcal{V}_{(2/1)}\}_A + \{\mathcal{V}_{(1/0)}\}_A$$

2. Mouvement relatif de deux solides en contact ponctuel

Soient deux solides 1 et 2 en contact ponctuel en un point P, et (π) le plan tangent commun en P aux deux solides.

Le torseur cinématique du mouvement du solide 1 par rapport au solide 2 s'écrit au point P :

$$\{\mathcal{V}(1/2)\} = {}_P\left\{\begin{array}{c}\overrightarrow{\Omega(1/2)} \\ \overrightarrow{V(P \in 1/2)}\end{array}\right\}$$



Contact ponctuel entre les solides 1 et 2

Vecteur vitesse de glissement *Définition*

$\overrightarrow{V(P \in 1/2)}$ est appelé **vecteur vitesse de glissement** au point P du solide 1 par rapport au solide 2.

Il est situé dans le plan tangent commun (π) en P à 1 et 2.

Le vecteur vitesse de rotation $\overrightarrow{\Omega(1/2)}$ peut être décomposé en :

- vecteur de **pivotement** $\overrightarrow{\Omega_n(1/2)}$
- vecteur de **roulement** $\overrightarrow{\Omega_t(1/2)}$:

$$\overrightarrow{\Omega(1/2)} = \overrightarrow{\Omega_n(1/2)} + \overrightarrow{\Omega_t(1/2)}$$

Fondamental

Si $\overrightarrow{V(P \in 1/2)} = \vec{0}$, on dit que **1 roule (et pivote) sans glisser sur 2**.

3. Composition des vecteurs accélération

Complément

On reprend les définitions vues pour la *composition des vecteurs vitesse* *(cf. p.11)*.

En partant de $\overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{V(A \in 1/0)}$, on peut écrire :

$$\overrightarrow{V(A \in 2/0)} = \overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}$$

En dérivant chacun des termes par rapport au temps, dans 0, on obtient :

$$\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(A \in 2/0)}\right]_0 = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(A \in 2/1)}\right]_0 + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(O_1 \in 1/0)}\right]_0 + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right]_0$$

Soit, en appliquant la formule de Bour pour les deux seuls termes ne pouvant pas être interprétés directement :

$$\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/0)} = \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{V(A \in 2/1)}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{\Gamma(O_1 \in 1/0)} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left(\left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{O_1A}\right]_1 + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right)$$

Ou encore :

$$\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A \in 2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{\Gamma(O_1 \in 1/0)} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left(\overrightarrow{V(A \in 2/1)} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right)$$

En regroupant les termes différemment :

$$\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A \in 2/1)} + \overrightarrow{\Gamma(O_1 \in 1/0)} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right) + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(A \in 2/1)}$$

L'expression $\overrightarrow{\Gamma(O_1 \in 1/0)} + \left[\frac{d}{dt}\overrightarrow{\Omega(1/0)}\right]_0 \wedge \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \left(\overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{O_1A}\right)$ correspond au vecteur $\overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)}$ (cf. champ des vecteurs accélération d'un solide).

Définition

On obtient alors la relation suivante traduisant la composition des vecteurs accélération :

$$\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/0)} = \overrightarrow{\Gamma(A \in 2/1)} + \overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)} + 2 \cdot \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(A \in 2/1)}$$

Remarque

Dans le mouvement du point A appartenant (naturellement) au solide 2 par rapport au repère 0, on parle alors :

- d'accélération **absolue** $\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/0)}$
- d'accélération **relative** $\overrightarrow{\Gamma(A \in 2/1)}$

- d'accélération **d'entraînement** $\overrightarrow{\Gamma(A \in 1/0)}$ (car c'est l'accélération du point A comme s'il était entraîné par 1 dans son mouvement par rapport à 0)
- d'accélération **de Coriolis** $2 \cdot \overrightarrow{\Omega(1/0)} \wedge \overrightarrow{V(A \in 2/1)}$

Gaspard Gustave Coriolis — ***Complément***

On le connaît surtout pour le théorème de mécanique qui porte son nom et pour la "force" de Coriolis qui correspond à une loi de la cinématique : « Tout objet en mouvement dans l'hémisphère nord et qui se rapproche de l'axe de rotation terrestre est dévié vers sa droite, vers sa gauche s'il s'en éloigne (les sens de déviation sont inverses dans l'hémisphère sud). »

Gaspard Gustave Coriolis (1792 - 1843)

Dans son livre *« Du calcul de l'effet des machines (1829) »* il nomme « travail » une quantité usuellement appelée à cette époque puissance mécanique, quantité d'action ou effet dynamique en précisant l'ambiguïté qu'apportent ces expressions. Avec lui et Jean-Victor Poncelet (1788-1867), le théorème de l'énergie cinétique prend sa forme quasi-définitive et l'enseignement de la mécanique est "dépoussiéré". La question des unités et de l'homogénéité des formules devient fondamentale.

L'accélération de Coriolis permet l'interprétation de beaucoup de phénomènes à la surface de la Terre : le mouvement des masses d'air et des cyclones, la déviation de la trajectoire des projectiles à grande portée, le changement du plan de mouvement d'un pendule tel que montré par Foucault dans son expérience de 1851 au Panthéon de Paris, ainsi que la légère déviation vers l'est lors de la chute libre.

4. Mouvement plan sur plan

Ce cas particulier du mouvement relatif entre solides est utilisé en **cinématique graphique**.

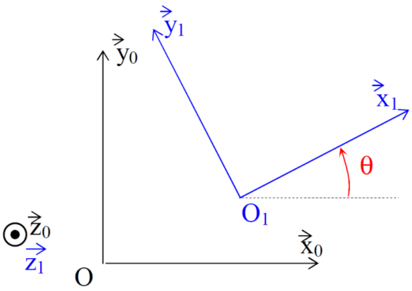
4.1. Définition

Soient deux repères $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ liés à deux solides S_0 et S_1.

Définition

Si, au cours du mouvement de S_0/S_1, un plan P lié à S_0 reste constamment confondu avec un plan P_1 lié à S_1, le mouvement de S_0 par rapport à S_1 est dit **plan** (ou plan sur plan).

L'orientation de R_1 par rapport à R_0 est définie par un seul angle, par exemple θ.



Mouvement plan

4.2. Centre instantané de rotation, base et roulante

C.I.R. — ***Définition***

Il existe **toujours** un point I, appelé **centre instantané de rotation**, tel que $\overrightarrow{V(I \in S_1/S_0)} = \vec{0}$.

Quel que soit le point M appartenant à S_1:

$$\overrightarrow{V(M \in S_1/S_0)} = \overrightarrow{V(I \in S_1/S_0)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_0)} \wedge \overrightarrow{IM}$$

soit $\overrightarrow{V(M \in S_1/S_0)} = \vec{0} + \dot{\theta}\vec{z} \wedge \overrightarrow{IM}$.

Ainsi, I **se trouve sur la perpendiculaire au vecteur vitesse** de n'importe quel point de S_1.

Base *Définition*

La base est la trajectoire du CIR dans le plan fixe P.

Roulante *Définition*

La roulante est la trajectoire du CIR dans le plan mobile P_1.

Remarque

La base et la roulante sont deux courbes qui roulent sans glisser l'une contre l'autre.

4.3. Théorème des trois plans glissants

Considérons trois solides S_1, S_2 et S_3 en mouvement plan les uns par rapport aux autres.

Soient $\overrightarrow{\Omega(S_i/S_j)} = \omega_{ij}\vec{z}$ et $I_{ij} = CIR$ du mouvement de S_i/S_j.

Par définition du CIR, $\overrightarrow{V(I_{12} \in S_1/S_2)} = \vec{0}$.

Or : $\overrightarrow{V(I_{12} \in S_1/S_2)} = \overrightarrow{V(I_{12} \in S_1/S_3)} + \overrightarrow{V(I_{12} \in S_3/S_2)}$ (composition des mouvements)

et $\overrightarrow{V(I_{12} \in S_1/S_3)} = \overrightarrow{V(I_{13} \in S_1/S_3)} + \overrightarrow{\Omega(S_1/S_3)} \wedge \overrightarrow{I_{13}I_{12}} = \omega_{13}\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{13}I_{12}}$ car I_{13} est le CIR du mouvement de S_1/S_3.

De même : $\overrightarrow{V(I_{12} \in S_3/S_2)} = \omega_{32}\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{12}}$

d'où $\omega_{13}\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{13}I_{12}} + \omega_{32}\vec{z} \wedge \overrightarrow{I_{32}I_{12}} = \vec{0} = \vec{z} \wedge \left(\omega_{13}\overrightarrow{I_{13}I_{12}} + \omega_{32}\overrightarrow{I_{32}I_{12}}\right)$

Or, $\omega_{13}\overrightarrow{I_{13}I_{12}} + \omega_{32}\overrightarrow{I_{32}I_{12}}$ appartient au plan perpendiculaire à $\vec{z}$: il est donc ici nul.

Cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{I_{13}I_{12}}$ et $\overrightarrow{I_{32}I_{12}}$ sont colinéaires.

Définition

Les trois CIR I_{12}, I_{13} et I_{23} sont **alignés**.