Intégration numérique

- Principes généraux
- Méthodes de Newton-Côtes
- Méthodes par arcs
- Méthode de Romberg
- Intégrales multiples

Principes généraux

On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \text{avec} \quad b > a$$

On fixe $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ un support de $n + 1$ points distincts de l'intervalle $[a , b]$ et on cherche à approcher l'intégrale par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$$

où les a_k sont des coefficients indépendants de $f(x)$.

Principes généraux

On souhaite déterminer une valeur approchée de l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \text{avec} \quad b > a$$

On fixe $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ un support de $n+1$ points distincts de l'intervalle $[a\,,\,b]$ et on cherche à approcher l'intégrale par :

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$$

où les a_k sont des coefficients indépendants de $f(x)$.

On interpole alors $f(x)$ par un polynôme sur $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ et :

$$f(x) \approx P_n(x) = [U_0(x), \cdots, U_n(x)][L][F]$$

soit $I_n = \int_a^b P_n(x)\,dx = \left[\int_a^b U_0(x)dx, \cdots, \int_a^b U_n(x)dx\right][L][F] = \sum_{k=0}^{n} a_k f(x_k)$

Méthodes de Newton-Côtes

Pour ces méthodes, la fonction à intégrer sera approchée par un polynôme d'interpolation de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x) f_k \qquad \textbf{avec} \qquad \begin{cases} f_k = f(x_k) \\ l_k(x) = \dfrac{\prod_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod_{i \neq k} (x_k - x_i)} \end{cases}$$

Méthodes de Newton-Côtes

Pour ces méthodes, la fonction à intégrer sera approchée par un polynôme d'interpolation de Lagrange

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} l_k(x)\, f_k \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} f_k = f(x_k) \\ l_k(x) = \dfrac{\prod\limits_{i \neq k} (x - x_i)}{\prod\limits_{i \neq k} (x_k - x_i)} \end{cases}$$

et l'intégrale sera approchée par $I_n = \int_a^b P_n(x)\, dx = \sum_{k=0}^{n} \left(\int_a^b l_k(x)\, dx \right) f_k$

soit $I_n = \sum_{k=0}^{n} a_k f_k$ avec $a_k = \int_a^b l_k(x)\, dx$

Méthodes de Newton-Côtes

Nous savons que l'erreur d'interpolation est du type :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n} |x_i - x|}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi \in [a, b]$$

d'où l'erreur d'intégration : $|I - I_n| = \left| \int_a^b \frac{\prod_{i=0}^{n} |x_i - x|}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\, dx \right|$

Méthodes de Newton-Côtes

Nous savons que l'erreur d'interpolation est du type :

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^{n} |x_i - x|}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \quad \text{avec} \quad \xi \in [a, b]$$

d'où l'erreur d'intégration : $\quad |I - I_n| = \left| \int_a^b \frac{\prod_{i=0}^{n} |x_i - x|}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\, dx \right|$

Pour simplifier le problème, nous supposerons que les points du support $\{x_0, x_1 \cdots, x_n\}$ sont régulièrement espacés

$$x_i = a + ih \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{h} \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

et en posant $\quad b_k = \frac{1}{b-a} a_k$ l'intégrale devient $\quad I_n = (b-a) \sum_{k=0}^{n} b_k f_k$

Méthodes de Newton-Côtes

- Calcul des b_k

$$b_k = \frac{1}{b-a}\int_a^b l_k(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{\prod_{i\neq k}^{n}(x-x_i)}{\prod_{i\neq k}^{n}(x_k-x_i)}\,dx$$

on pose alors $\quad y = \dfrac{x-a}{h} \quad \Leftrightarrow \quad x = a + yh$

et sachant que $\quad x_i = a + ih \quad$ et $\quad h = \dfrac{b-a}{n}$

$$b_k = \frac{1}{b-a}\int_0^n \frac{\prod_{i\neq k}^{n} h(y-i)}{\prod_{i\neq k}^{n} h(k-i)}\,h\,dy = \frac{h}{(b-a)\prod_{i\neq k}^{n}(k-i)}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n}(y-i)\,dy$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n}(y-i)\,dy \quad \text{avec} \quad b_k = b_{n-k}$$

Méthodes de Newton-Côtes

formule du trapèze

$n = 1$ dans $$b_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n} (y-i)\,dy$$

donne $$b_0 = b_1 = -1\int_0^1 (y-1)\,dy = \frac{1}{2}$$

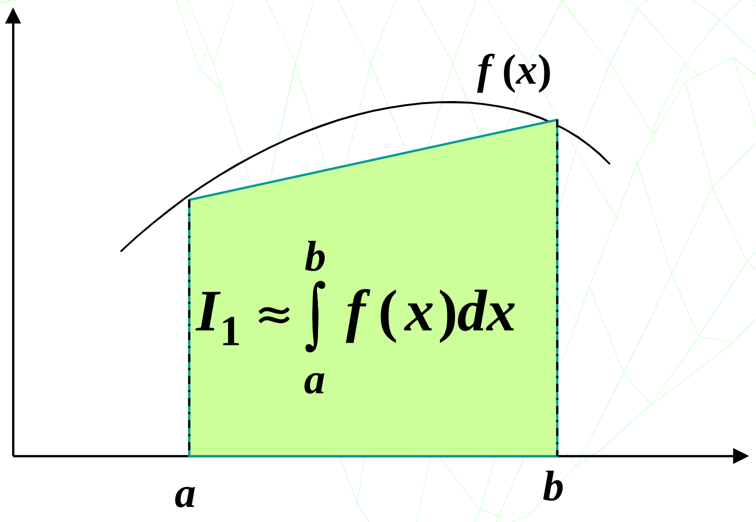
d'où $$I_1 = (b-a)\sum_{k=0}^{1} b_k\, f_k = (b-a)\left[\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)\right]$$

Méthodes de Newton-Côtes
formule du trapèze

$n = 1$ dans $$b_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n} (y-i)\,dy$$

donne $$b_0 = b_1 = -1\int_0^1 (y-1)\,dy = \frac{1}{2}$$

d'où $$I_1 = (b-a)\sum_{k=0}^{1} b_k f_k = (b-a)\left[\frac{1}{2}f(a) + \frac{1}{2}f(b)\right]$$



l'erreur d'intégration sera alors

$$|I - I_1| = \int_a^b \frac{(x-a)(x-b)}{2} f''(\xi)\,dx$$

$$|I - I_1| \leq \frac{h^3}{12} \max_{a\leq x\leq b} |f''(x)|$$

Méthodes de Newton-Côtes
formule de Simpson

$n = 2$ dans $$b_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n} (y-i)\,dy$$

donne $$b_0 = b_2 = \frac{(-1)^2}{2\;2!}\int_0^2 (y-1)(y-2)\,dy = \frac{1}{6}$$

et $$b_1 = \frac{(-1)^1}{2}\int_0^2 y\,(y-2)\,dy = \frac{4}{6}$$

d'où $$I_2 = (b-a)\sum_{k=0}^{2} b_k\, f_k = (b-a)\left[\frac{1}{6}\,f(a) + \frac{4}{6}\,f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{4}{6}\,f(b)\right]$$

Méthodes de Newton-Côtes

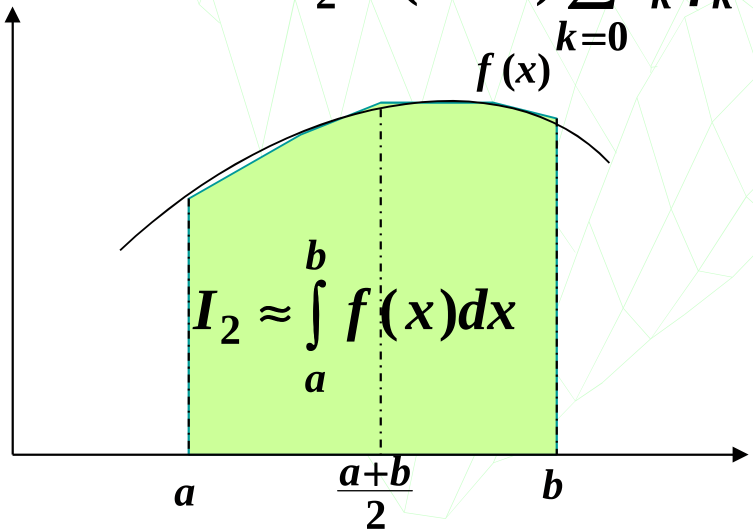
formule de Simpson

$n = 2$ dans $$b_k = \frac{(-1)^{n-k}}{n\,k!\,(n-k)!}\int_0^n \prod_{i\neq k}^{n} (y-i)\,dy$$

donne $$b_0 = b_2 = \frac{(-1)^2}{2\;2!}\int_0^2 (y-1)(y-2)\,dy = \frac{1}{6}$$

et $$b_1 = \frac{(-1)^1}{2}\int_0^2 y\,(y-2)\,dy = \frac{4}{6}$$

d'où $$I_2 = (b-a)\sum_{k=0}^{2} b_k\, f_k = (b-a)\left[\frac{1}{6}\,f(a) + \frac{4}{6}\,f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + \frac{4}{6}\,f(b)\right]$$



l'erreur d'intégration sera alors

$$\left|I - I_2\right| = \frac{h^5}{90}\,f^{(4)}\left(\tfrac{a+b}{2}\right)$$

Méthodes de Newton-Côtes
généralisation des formules

$$I_n = (b-a)\sum_{k=0}^{n} b_k\, f(a+kh) \quad \text{avec} \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Formules	n	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
Trapèze	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
Simpson	2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
	3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
Villarceau	4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
	5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
Hardy	6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

- **Les erreurs** — **si n pair** — **erreur de l'ordre de** h^{n+3}

  si n impair — **erreur de l'ordre de** h^{n+2}

Méthodes de Newton-Côtes
Exemple

Calcul de $I = \int_0^1 \sin x \, dx$ par les méthodes de Newton-Côtes

calcul à la main : $I = \left[-\cos x\right]_0^1 = 0{,}4596976$

Formule du trapèze : $I = (b-a)\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 1\right) = 1 \times \left(0 + \frac{0{,}8415}{2}\right) = 0{,}4207$

majorant en h^3 avec $h = 1$ $\Rightarrow$ majorant = 1 et erreur = 0,04

Méthodes de Newton-Côtes
Exemple

Calcul de $I = \int_0^1 \sin x \, dx$ par les méthodes de Newton-Côtes

calcul à la main : $I = [-\cos x]_0^1 = 0{,}4596976$

Formule du trapèze : $I = (b-a)\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 1\right) = 1 \times \left(0 + \frac{0{,}8415}{2}\right) = 0{,}4207$

majorant en h^3 avec $h = 1$ $\Rightarrow$ majorant = 1 et erreur = 0,04

Formule de Simpson : $I = (b-a)\left(\frac{1}{6}\sin 0 + \frac{4}{6}\sin 0{,}5 + \frac{1}{6}\sin 1\right) = 0{,}4598$

majorant en h^5 avec $h = 0{,}5$ $\Rightarrow$ majorant = 0,03 et erreur = 0,0001

Méthodes de Newton-Côtes
Exemple

Calcul de $I = \int_0^1 \sin x \, dx$ par les méthodes de Newton-Côtes

calcul à la main : $I = [-\cos x]_0^1 = 0{,}4596976$

Formule du trapèze : $I = (b-a)\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 1\right) = 1 \times \left(0 + \frac{0{,}8415}{2}\right) = 0{,}4207$

majorant en h^3 avec $h = 1$ $\Rightarrow$ majorant = 1 et erreur = 0,04

Formule de Simpson : $I = (b-a)\left(\frac{1}{6}\sin 0 + \frac{4}{6}\sin 0{,}5 + \frac{1}{6}\sin 1\right) = 0{,}4598$

majorant en h^5 avec $h = 0{,}5$ $\Rightarrow$ majorant = 0,03 et erreur = 0,0001

Formule à l'ordre 3 : $I = (b-a)\left(\frac{1}{8}\sin 0 + \frac{3}{8}\sin 0{,}33 + \frac{3}{8}\sin 0{,}66 + \frac{1}{8}\sin 1\right) = 0{,}4597$

majorant en h^5 avec $h = 1/3$ $\Rightarrow$ majorant = 0,004 et erreur = 0,00005

Méthodes par arc

Les méthodes précédentes de Newton-Côtes s'utilisent le plus souvent sur des arcs successifs

L'idée est de diviser l'intervalle **[*a* , *b*]** en ***q*** sous intervalles et d'appliquer sur chacun ces méthodes

On pose $h = \frac{b-a}{q}$ **et** $x_k = a + kh$ **avec** $0 \leq k \leq q$

Méthodes par arc

Les méthodes précédentes de Newton-Côtes s'utilisent le plus souvent sur des arcs successifs

L'idée est de diviser l'intervalle **[*a* , *b*]** en ***q*** sous intervalles et d'appliquer sur chacun ces méthodes

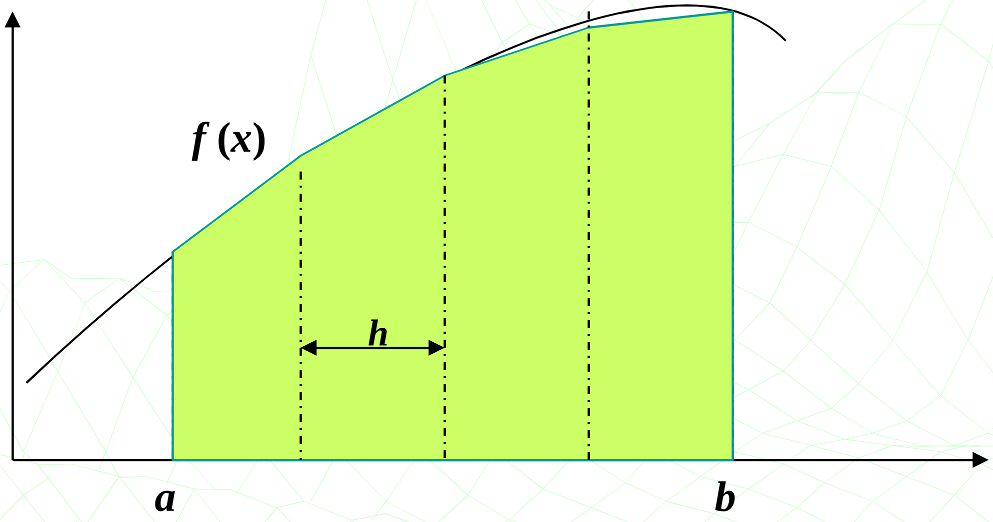
On pose $\quad h = \dfrac{b-a}{q} \quad$ **et** $\quad x_k = a + kh \quad$ **avec** $\quad 0 \le k \le q$

- **Pour la méthode des Trapèzes** : $\quad I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{q-1} \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} f(x)\,dx$

est approchée par $\quad I_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{q-1} h\left(\tfrac{1}{2} f(a+kh) + \tfrac{1}{2} f(a+(k+1)\,h)\right)$

soit $\quad I_1 = h\left(\tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{2} f(b) + \displaystyle\sum_{k=1}^{q-1} f(a+kh)\right)$

Méthodes par arc



Trapèzes par arc

$$I_1 = \int_a^b f(x)dx \approx h\left(\tfrac{1}{2} f(a) + \tfrac{1}{2} f(b) + f(a+h) + f(a+2h) + f(a+3h)\right)$$

L'erreur totale d'intégration sera égale à q fois l'erreur commise sur 1 sous intervalle soit : $\left|I - I_1\right| \leq q \dfrac{h^3}{12} \max_{a \leq x \leq b} \left| f''(x) \right|$

donc l'erreur est de l'ordre de h^2.

Méthodes par arc

- **Pour la méthode de Simpson** on choisit nécessairement q pair, et on applique la méthode sur chaque double sous intervalle $\lfloor x_{2k}, x_{2(k+1)} \rfloor$

et $$I = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\frac{q}{2}-1} \int_{a+2kh}^{a+2(k+1)h} f(x)\,dx$$ est approché par

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\frac{q}{2}-1} 2h\left(\tfrac{1}{6} f(a+2kh) + \tfrac{4}{6} f(a+(2k+1)h) + \tfrac{1}{6} f(a+2(k+1)\,h)\right)$$

soit $$I_2 = \frac{h}{3}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{\frac{q}{2}-1} f(a+2kh) + 4\sum_{k=0}^{\frac{q}{2}-1} f(a+(2k+1)h) \right)$$

on montre ici que l'erreur est de l'ordre de h^4.

Méthodes par arc
Généralisation

Les méthodes par arc se généralisent sur la base de la généralisation des méthodes de Newton-Côtes.

si n pair — l'erreur de l'ordre de h^{n+2}

si n impair — l'erreur de l'ordre de h^{n+1}

Méthodes par arc
Généralisation

Les méthodes par arc se généralisent sur la base de la généralisation des méthodes de Newton-Côtes.

si n pair l'erreur de l'ordre de h^{n+2}

si n impair l'erreur de l'ordre de h^{n+1}

- **Exemple**

Déterminer le nombre q de sous intervalles nécessaires pour calculer par la méthode de Simpson par arc à 10^{-12} près l'intégrale suivante : $I = \int_0^4 e^x dx$

$n = 2$, donc pair et l'erreur sera de l'ordre de h^4.

il faudra : $h^4 \leq 10^{-12}$ avec $h = \frac{b-a}{q} = \frac{4}{q}$

donc $q \geq 4\,10^3$

Méthode de Romberg
Principe

posons
$$\begin{cases} I = \int_a^b f(x)\,dx = T(h) + C_2 h^2 + C_4 h^4 + C_6 h^6 + \cdots \\ T(h) = h\left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) \right) \end{cases}$$

peut-on évaluer I de manière plus précise ?

écrivons
$$\begin{cases} T(h) = I - C_2 h^2 - C_4 h^4 - \cdots \\ T\left(\frac{h}{2}\right) = I - C_2 \frac{h^2}{4} - C_4 \frac{h^4}{16} - \cdots \end{cases}$$

par substitution :
$$I = \frac{1}{3}\left[4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) \right] - \frac{1}{4} C_4 h^4 \cdots$$

soit
$$T' = \frac{1}{3}\left[4T\left(\frac{h}{2}\right) - T(h) \right]$$

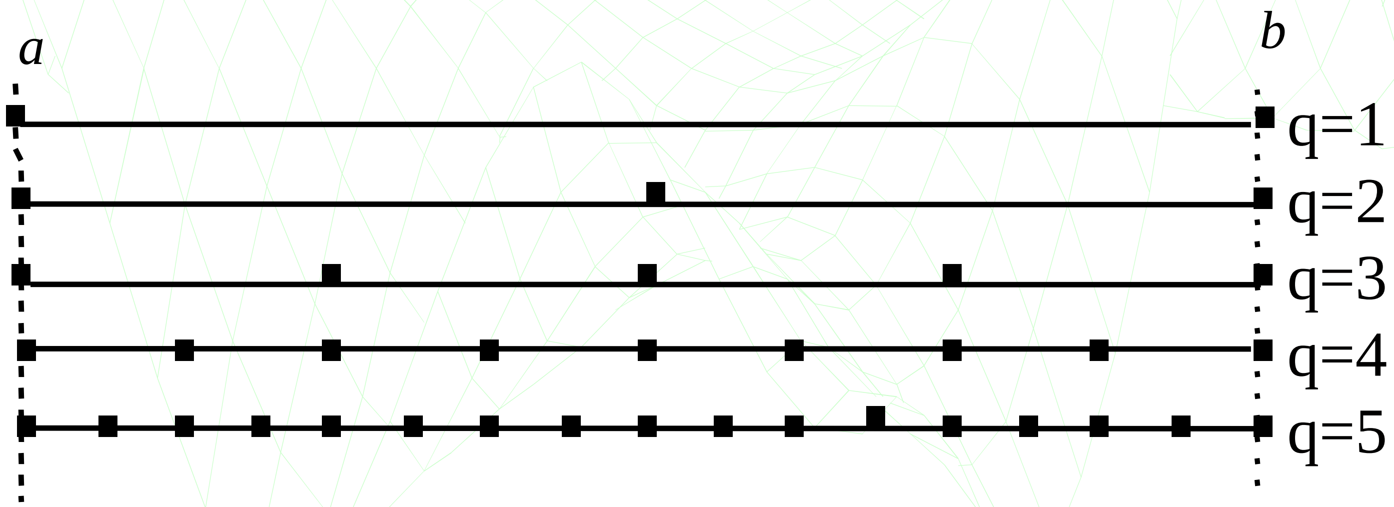
on extrapole le calcul de I en améliorant sa précision

Méthode de Romberg
Principe

on peut généraliser cette extrapolation :

$$T_{p,q} = \frac{1}{4^{p-1}-1}\left(4^{p-1}T_{p-1,q} - T_{p-1,q-1}\right)$$

avec
$$\begin{cases} p = \text{indice d'extrapolation} \\ q \ \text{ tel que } \ 2^{q-1} = \text{nombre d'intervalles} \end{cases}$$



Méthode de Romberg
Méthode

La méthode est basée sur le calcul d'intégrale par la méthode des trapèzes par arc pour des valeurs croissantes de nombre d'intervalles.

Nous noterons $T_{1,q}$ ces intégrales avec 2^{q-1} le nombre d'intervalles

par exemple : $q=1 \qquad T_{1,1} = \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right)$

$$q=2 \qquad T_{1,2} = \frac{b-a}{4}\left(f(a)+f(b)+2f\left(a+\tfrac{b-a}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}T_{1,1} + \frac{b-a}{2}\, f\left(a+\tfrac{b-a}{2}\right)$$

qui se généralise : $T_{1,q} = \frac{1}{2}T_{1,q-1} + \frac{b-a}{2^{q-1}} \sum_{j=0}^{2^{q-2}-1} f\left(a+(2j+1)\frac{b-a}{2^{q-1}}\right)$

Méthode de Romberg
Procédure

En pratique, les $T_{p,q}$ seront disposés dans un tableau triangulaire :

$$T_{p,q} = \frac{1}{4^{p-1}-1}\left(4^{p-1}T_{p-1,q} - T_{p-1,q-1}\right)$$

Estimations extrapolées →

Estimations trapézoïdales ↓

q \ p	1	2	3	....	n
1	$T_{1,1}$				
2	$T_{1,2}$	$T_{2,2}$			
3	$T_{1,3}$	$T_{2,3}$	$T_{3,3}$		
	....				
n	$T_{1,n}$				$T_{n,n}$

$$T_{1,q} = \frac{1}{2}T_{1,q-1} + \frac{b-a}{2^{q-1}}\sum_{j=0}^{2^{q-2}-1} f\left(a+(2j+1)\frac{b-a}{2^{q-1}}\right)$$

Méthode de Romberg
Exemple

Calcul par la méthode de Romberg de $I = \int_0^1 \sin x \, dx = 0{,}4596976$

q = 1 $T_{1,1} = (b-a)\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 1\right) = 0{,}42073$

Méthode de Romberg
Exemple

Calcul par la méthode de Romberg de $I = \int_0^1 \sin x \, dx = 0,4596976$

q = 1 $\quad T_{1,1} = (b-a)\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 1\right) = 0,42073$

---

q = 2 $\quad T_{1,2} = \frac{1}{2}T_{1,1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{0} f\left((2j+1)\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}T_{1,1} + \frac{1}{2}\sin 0,5 = 0,45008$

$$T_{2,2} = \frac{1}{3}\left(4T_{1,2} - T_{1,1}\right) = 0,459864$$

$$\left|T_{2,2} - T_{1,1}\right| \approx 0,04$$

Méthode de Romberg
Exemple

Calcul par la méthode de Romberg de $I = \int_0^1 \sin x \, dx = 0{,}4596976$

q = 1 $\quad T_{1,1} = (b-a)\left(\frac{1}{2}\sin 0 + \frac{1}{2}\sin 1\right) = 0{,}42073$

---

q = 2 $\quad T_{1,2} = \frac{1}{2}T_{1,1} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{0} f\left((2j+1)\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}T_{1,1} + \frac{1}{2}\sin 0{,}5 = 0{,}45008$

$$T_{2,2} = \frac{1}{3}\left(4T_{1,2} - T_{1,1}\right) = 0{,}459864$$

erreur $\left|T_{2,2} - T_{1,1}\right| \approx 0{,}04$

---

q = 3 $\quad T_{1,3} = \frac{1}{2}T_{1,2} + \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{1} f\left((2j+1)\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}T_{1,2} + \frac{1}{4}\left(\sin 0{,}25 + \sin 0{,}75\right) = 0{,}4573$

$$T_{2,3} = \frac{1}{3}\left(4T_{1,3} - T_{1,2}\right) = 0{,}459707$$

$$T_{3,3} = \frac{1}{15}\left(16T_{2,3} - T_{2,2}\right) = 0{,}4596969$$

erreur $\left|T_{3,3} - T_{2,2}\right| \approx 0{,}00017$ etc...

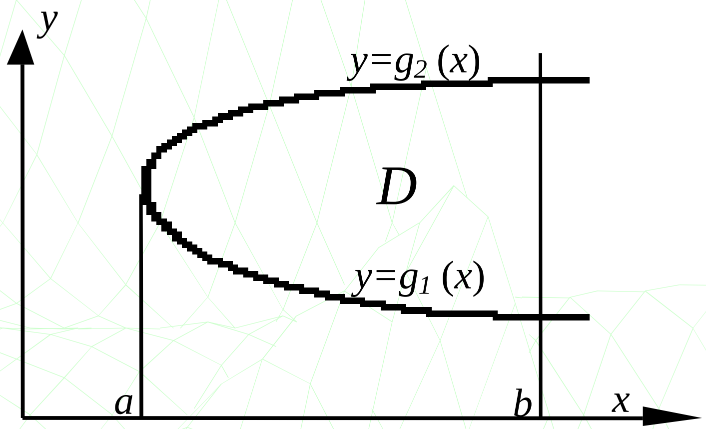
Intégrales multiples
Principe

Soit à intégrer $I = \int_D f(x,y)\,dx\,dy$

on peut poser :

$$I = \int_a^b S(x)\,dx$$

avec $S(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy$



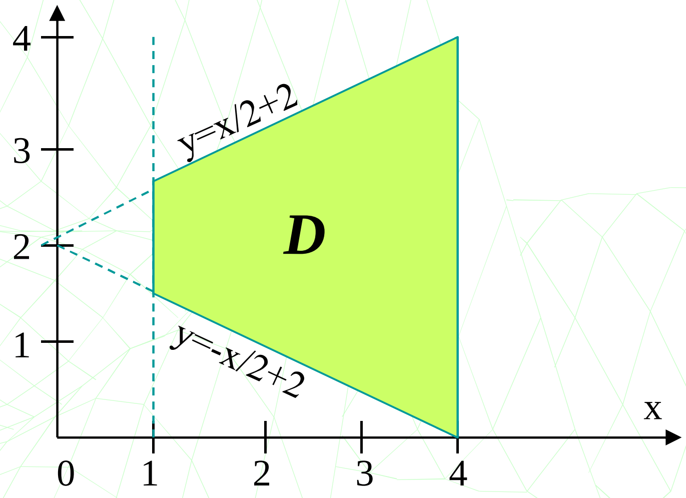
L'intégration numérique se fait alors en 2 étapes

- sur un support $\{x_0, \cdots x_n\} \in [a,b]$ on intègre sur y les $n+1$ valeurs de $S(x_i) = \int_{g_1(x_i)}^{g_2(x_i)} f(x_i,y)\,dy$
- on intègre enfin les $S(x_i)$ sur x.

Intégrales multiples
Exemple

Calcul numérique de l'intégrale suivante

$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$

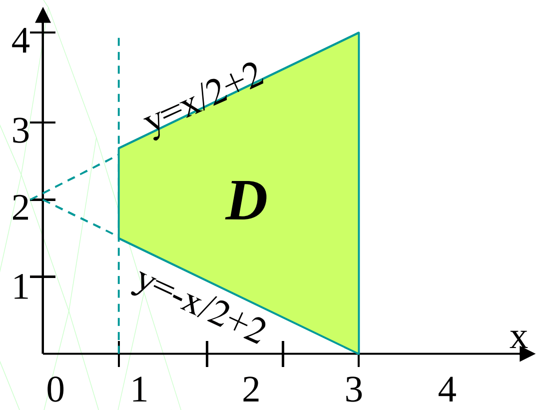


par la méthode des trapèzes

(on prendra 4 points comme support)

on peut écrire $$I = \iint_D xy \, dx \, dy = \int_1^4 S(x) \, dx \quad \text{avec} \quad S(x) = x \int_{-\frac{x}{2}+2}^{\frac{x}{2}+2} y \, dy$$

Intégrales multiples
Exemple



$$I = \iint_D xy \, dx \, dy$$

sur 4 points $S(1) = \int_{1,5}^{2,5} y \, dy = \frac{2,5-1,5}{2}(1,5+2,5) = 2$

$$S(2) = 2\int_{1}^{3} y \, dy = 2\frac{3-1}{2}(1+3) = 8$$

$$S(3) = 3\int_{0,5}^{3,5} y \, dy = 3\frac{3,5-0,5}{2}(0,5+3,5) = 18$$

$$S(4) = 4\int_{0}^{4} y \, dy = 4\frac{4}{2}(4) = 32$$

d'où : $I = \int_1^4 S(x) \, dx = h\left(\frac{S(1)}{2} + \frac{S(4)}{2} + S(2) + S(3)\right) = 43$