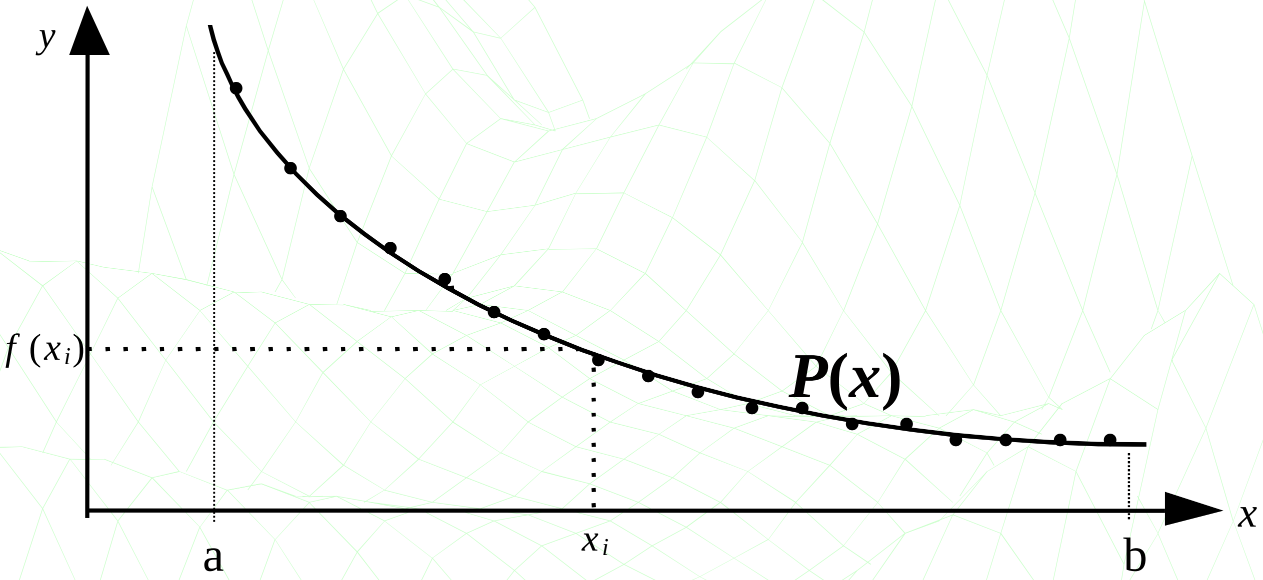
Interpolation

- Généralités
- Interpolation polynômiale
- Interpolation de Lagrange
- Interpolation de Newton
- Interpolation de Tchébycheff
- Spline cubique

Généralités



- Objectifs : obtenir un polynôme ***P*(*x*)** simple passant exactement par des points dont les abscisses ***xi*** sont nommés "**support d'interpolation**" :
  - soit d'une expression peu maniable,
  - soit d'une série de point

Interpolation polynômiale

La méthode générale consiste à développer le polynôme recherché dans la base $\{U_0(x), U_1(x), U_2(x), \cdots, U_n(x)\}$ telle que

$$P_n(x) = a_0 U_0(x) + a_1 U_1(x) + a_2 U_2(x) + \cdots + a_n U_n(x)$$

passe strictement par les points $\{x_i,\ f(x_i)\}$

- Important :

  Le choix de la base est un élément crucial et va déterminer les diverses méthodes selon :

  - la croissance (lente ou rapide) ,
  - le comportement (asymptote…),
  - la périodicité éventuelle

Interpolation polynômiale
Méthode

Le polynôme $P_n(x) = a_0 U_0(x) + a_1 U_1(x) + \cdots + a_n U_n(x)$

doit vérifier les conditions $\begin{cases} P_n(x_0) = f(x_0) \\ P_n(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ P_n(x_n) = f(x_n) \end{cases}$ qui s'écrivent :

$$\begin{cases} a_0 U_0(x_0) + a_1 U_1(x_0) + \cdots + a_n U_n(x_0) = f(x_0) \\ a_0 U_0(x_1) + a_1 U_1(x_1) + \cdots + a_n U_n(x_1) = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 U_0(x_n) + a_1 U_1(x_n) + \cdots + a_n U_n(x_n) = f(x_n) \end{cases}$$

système de la forme $VA = F$ *avec :*

Interpolation polynômiale
Méthode

$$V = \begin{bmatrix} U_0(x_0) & U_1(x_0) & \cdots & U_n(x_0) \\ U_0(x_1) & U_1(x_1) & \cdots & U_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_0(x_n) & U_1(x_n) & \cdots & U_n(x_n) \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

Si V est inversible, on pose $L = V^{-1}$ et $A = LF$

d'où $$P_n(x) = U\ A = \begin{bmatrix} U_0(x) & U_1(x) & \cdots & U_n(x) \end{bmatrix} [L] \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} U & \textbf{ne dépend que la base} \\ F & \textbf{ne dépend que des points d'interpolation} \\ L & \textbf{dépend de la base et des points d'interpolation mais pas de } f(x) \end{cases}$$

Le problème pratique de l'interpolation consiste à déterminer L *et à estimer l'erreur d'interpolation.*

Interpolation de Lagrange

La base choisie est la suite des monômes : $U_i(x) = x^i$

D'où la matrice $V = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}$

Cette matrice dite de Van der Monde, est très mal conditionnée. Une inversion numérique conduirait à des erreurs importantes d'arrondi.

nota : $\det V = \prod_{i \neq j}^{n} (x_i - x_j)$

Interpolation de Lagrange

Pour éviter cet écueil on utilise les polynômes de Lagrange $l_k(x)$

relatifs aux points du support $\{x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n\}$:

$$l_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

et soit : $P(x) = l_0(x) f_0 + l_1(x) f_1 + l_2(x) f_2 + \cdots + l_n(x) f_n$

soit : les coefficients de chaque polynôme de Lagrange constituent un des vecteurs colonne de la matrice L recherchée.

Cette méthode reste sensible aux erreurs de troncature. Elle ne sera pas utilisée pour des degrés supérieurs à 20.

Interpolation de Lagrange
Exemple d'application

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange des points suivants

i	0	1	2	3
xi	0	1	2	3
yi	0	1	1	2

$$l_0(x) = \prod_{i=1}^{3} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1 \times -2 \times -3}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)$$

Interpolation de Lagrange
Exemple d'application

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange des points suivants

i	0	1	2	3
xi	0	1	2	3
yi	0	1	1	2

$$l_0(x) = \prod_{i=1}^{3} \frac{x - x_i}{x_0 - x_i} = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1 \times -2 \times -3}$$

$$= -\frac{1}{6}\left(x^3 - 6x^2 + 11x - 6\right)$$

$$l_1(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^{3} \frac{x - x_i}{x_1 - x_i} = \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} = \frac{1}{2}\left(x^3 - 5x^2 + 6x\right)$$

Interpolation de Lagrange

Exemple d'application

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange des points suivants

i	0	1	2	3
xi	0	1	2	3
yi	0	1	1	2

$$l_0(x)=\prod_{i=1}^{3}\frac{x-x_i}{x_0-x_i}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1\times-2\times-3}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)$$

$$l_1(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 1}}^{3}\frac{x-x_i}{x_1-x_i}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{1}{2}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

$$l_2(x)=\prod_{\substack{i=0\\ i\neq 2}}^{3}\frac{x-x_i}{x_2-x_i}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=-\frac{1}{2}\left(x^3-4x^2+3x\right)$$

Interpolation de Lagrange
Exemple d'application

Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange des points suivants

i	0	1	2	3
xi	0	1	2	3
yi	0	1	1	2

$$l_0(x)=\prod_{i=1}^{3}\frac{x-x_i}{x_0-x_i}=\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-1\times-2\times-3}$$

$$=-\frac{1}{6}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)$$

$$l_1(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq1}}^{3}\frac{x-x_i}{x_1-x_i}=\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}=\frac{1}{2}\left(x^3-5x^2+6x\right)$$

$$l_2(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq2}}^{3}\frac{x-x_i}{x_2-x_i}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}=-\frac{1}{2}\left(x^3-4x^2+3x\right)$$

$$l_3(x)=\prod_{\substack{i=0\\i\neq3}}^{3}\frac{x-x_i}{x_3-x_i}=\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}=\frac{1}{6}\left(x^3-3x^2+2x\right)$$

Interpolation de Lagrange
Exemple d'application

D'où la matrice

$$L = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -11 & 18 & -9 & 2 \\ 6 & -15 & 12 & -3 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

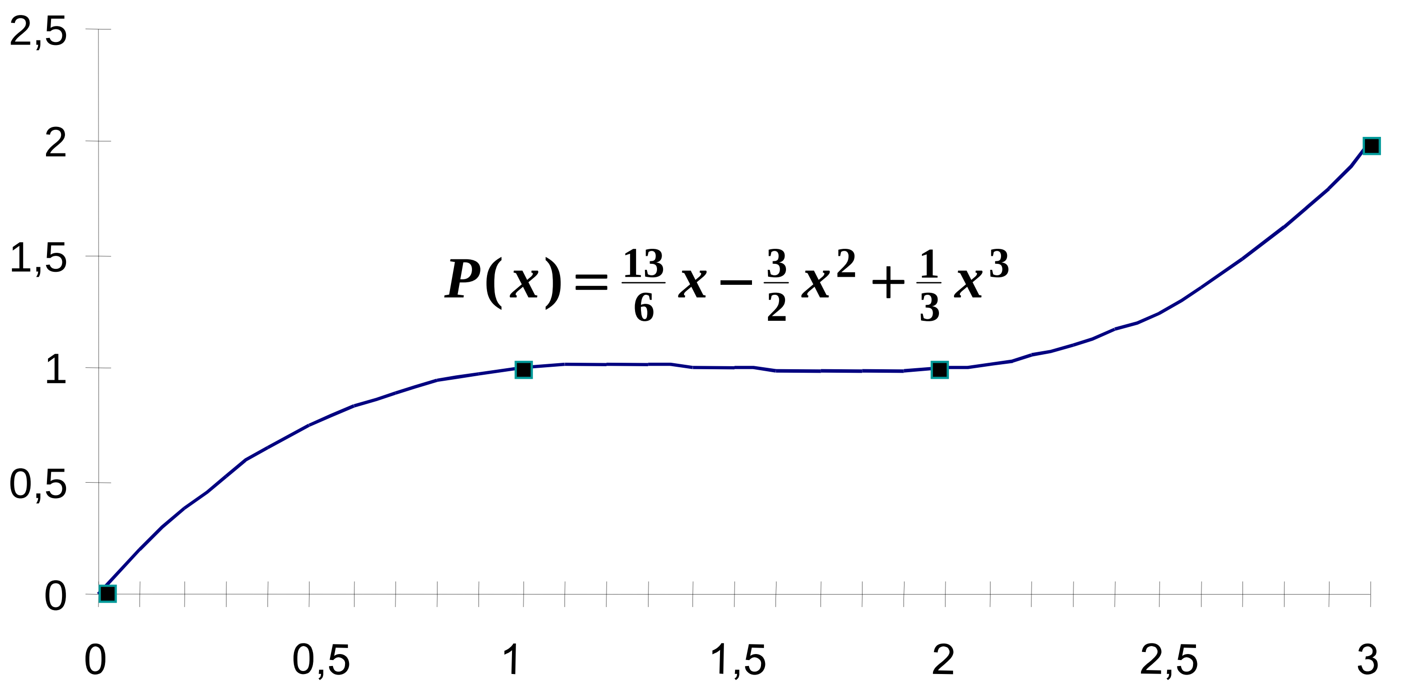
i	0	1	2	3
xi	0	1	2	3
yi	0	1	1	2

et $$P(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}[L]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 \\ 13 \\ -9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P(x) = \frac{1}{6}\left(13x - 9x^2 + 2x^3\right) = \tfrac{13}{6}x - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3$$

Interpolation de Lagrange
Exemple d'application

i	0	1	2	3
xi	0	1	2	3
yi	0	1	1	2



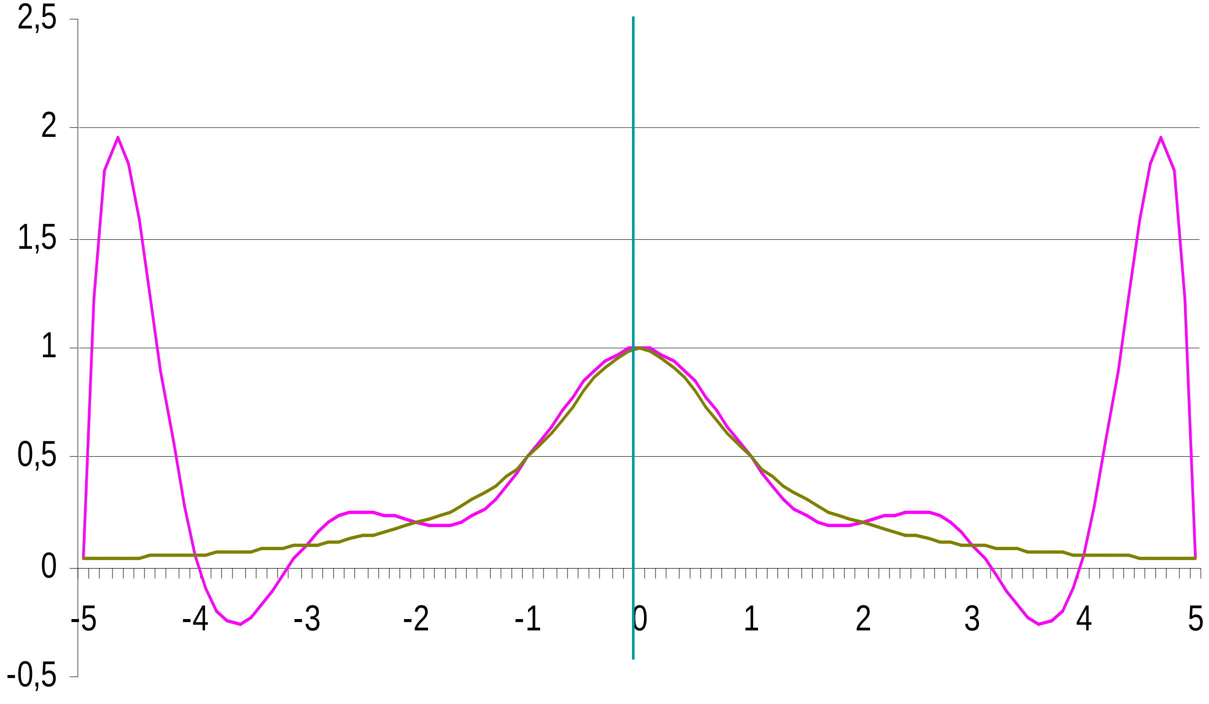
$$P(x) = \frac{13}{6}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

Interpolation de Lagrange

Autre exemple montrant les effets de bord

Interpoler $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ par un polynôme de Lagrange calculé sur 11 points équirépartis sur [-5 , 5]. $x_i = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$P(x) = -\frac{1}{44200}x^{10} + \frac{7}{5525}x^8 - \frac{83}{3400}x^6 + \frac{2181}{11050}x^4 - \frac{149}{221}x^2 + 1$$



Interpolation de Newton

Dans la méthode de Lagrange, l'ajout d'un point au support d'interpolation, oblige à recalculer la matrice $\boldsymbol{L}$. La méthode de Newton élimine cet inconvénient.

Introduisons la notion de différence divisée δ

$$\delta(x_0) = f(x_0) = f_0$$

$$\delta(x_0, x_1) = \frac{\delta(x_1) - \delta(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$\delta(x_0, x_1, x_2) = \frac{\delta(x_1, x_2) - \delta(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}$$

$$\delta(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k) = \frac{\delta(x_1, \cdots, x_k) - \delta(x_0, \cdots, x_{k-1})}{x_k - x_0}$$

On montre que $\delta(x_0, x_1, \cdots, x_{k-1}, x_k)$ est le coefficient de $\boldsymbol{x^k}$ dans le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Interpolation de Newton

Supposons $\boldsymbol{P_k}$, le polynôme d'interpolation de Lagrange sur $\{x_0, \cdots, x_k\}$
et $\boldsymbol{P_{k-1}}$, le polynôme d'interpolation de Lagrange sur $\{x_0, \cdots, x_{k-1}\}$

alors $P_k(x) - P_{k-1}(x)$ s'annule sur $\{x_0, \cdots, x_{k-1}\}$

d'où $P_k(x) - P_{k-1}(x) = \lambda (x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})$

mais $\lambda = \delta(x_0, \cdots, x_k)$

donc
$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \delta(x_0, \cdots, x_k)(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{k-1})$$
$$P_k(x) = P_{k-1}(x) + \delta(x_0, \cdots, x_k) \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i)$$

et puisque $P_0(x) = \delta(x_0) = f_0$

$$P_k(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\delta(x_0, \cdots, x_k) \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right]$$

Interpolation de Newton

Organisation des calculs

- Construction des différences divisées

  dans un tableau triangulaire ***A***

	0	1	2	…	j -1	j
0	$\delta(x_0) = f_0$					
1	$\delta(x_1) = f_1$	$\delta(x_0, x_1)$				
2	$\delta(x_2) = f_2$	$\delta(x_1, x_2)$	$\delta(x_0, x_1, x_2)$			
⋮	⋮	⋮		…		
i -1	$\delta(x_{i-1}) = f_{i-1}$	$\delta(x_{i-2}, x_{i-1})$		…	$\delta(x_0, \ldots, x_{i-1})$	
i	$\delta(x_i) = f_i$	$\delta(x_{i-1}, x_i)$	$\delta(x_{i-2}, x_{i-1}, x_i)$	…	$\delta(x_1, \ldots, x_i)$	$\delta(x_0, \ldots, x_i)$

avec $$a_{ij} = \frac{a_{i,j-1} - a_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$$

cette construction s'automatise aisément

Interpolation de Newton

Organisation des calculs

- Calcul de $P_n(\alpha)$

  pour une valeur a de la variable, la valeur du polynômz se calcule facilement par :

$$P_n(\alpha) = f_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\delta(x_0, \cdots, x_k) \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - x_i) \right]$$

d'où la procédure

$$\begin{array}{l} P_n = f(x_0) \\ T = \alpha - x_0 \\ \textbf{pour } i \textbf{ variant de } 1 \textbf{ à } n \\ \quad \left| \begin{array}{l} P_n = P_n + a(i,i) \times T \\ T = T \times (\alpha - x_i) \end{array} \right. \end{array}$$

Interpolation de Tchébycheff

Pour les méthodes d'interpolation vu précédemment, on montre que l'erreur de méthode est majorée par

$$e_n(x) = \left| f(x) - P_n(x) \right| \le \frac{\prod_{i=0}^{n} \left| x_i - x \right|}{(n+1)!} \max_{x \in [a,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|$$

pour minimiser cette expression, on ne peut agir que sur $\prod_{i=0}^{n} \left| x_i - x \right|$

Les polynômes de Tchébycheff $T_n(x)$ peuvent nous y aider.

Ils sont tels que $T_{n+1}(x) = 2x\,T_n(x) - T_{n-1}(x) \quad \text{avec} \quad x \in [-1, 1]$

et en posant $x = \cos\theta$ avec $0 \le \theta \le \pi$ il vient :

$$T_n(x) = \cos(n\theta)$$

Interpolation de Tchébycheff

En posant $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$, la suite devient

$$T_0(x) = 1 \qquad T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$
$$T_1(x) = x \qquad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$
$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad \vdots$$

Les racines de $T_n(x)$ vérifient $\cos(n\theta) = 0$

soit $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \qquad 0 \le k \le n-1$

On montre que si les x_k, support d'interpolation sont racines de $T_n(x)$ alors $\prod_{k=0}^{n-1}|x_k - x|$ est minimal et l'erreur d'interpolation devient :

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!\, 2^{2n+1}} \max_{x\in[a,b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

Interpolation de Tchébycheff

Méthode

La méthode de Tchébycheff consiste à faire une interpolation sur un support de Tchébycheff en utilisant la base des polynômes de Tchébycheff

La base de polynômes de Tchébycheff étant définie sur [-1 , 1], et $f(x)$ sur [a , b], il est nécessaire de faire un changement de variable :

$$a \le y \le b \quad \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 1$$

soit

$$x = \frac{2}{b-a} y - \frac{b+a}{b-a} \quad \text{ou} \quad y = \frac{b-a}{2} x + \frac{b+a}{2}$$

Dans ce cas le polynôme d'interpolation de Tchébycheff sera :

$$P_n(y) = a_0 T_0(x) + a_1 T_1(x) + a_2 T_2(x) + \cdots + a_n T_n(x) \approx f(y)$$

soit avec les conventions posées :

$$P_n(y) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & \cdots & T_n(x) \end{bmatrix} [L] \begin{bmatrix} f(y_0) \\ f(y_1) \\ \vdots \\ f(y_n) \end{bmatrix}$$

Interpolation de Tchébycheff

Méthode

Grâce aux propriétés des polynômes de Tchébycheff, la matrice L, inverse de $\boldsymbol{V}$ prend une forme simple :

$$L = \frac{2}{n+1}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1(x_0) & T_1(x_1) & & T_1(x_n) \\ \vdots & & \ddots & \\ T_n(x_0) & T_n(x_1) & \cdots & T_n(x_n) \end{bmatrix}$$

avec

$$T_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x, \text{ etc...}$$

d'où la procédure

$$P_n(y) = \sum_{p=0}^{n} a_p T_p(x) \qquad \text{avec} \qquad a_p = \frac{2}{n+1}\sum_{i=0}^{n} T_p(x_i)\, f_i$$

Interpolation de Tchébycheff

Exemple

Interpoler $\sin y$ sur $y \in [0\,,3]$ par un polynôme d'interpolation de Tchébycheff calculé sur 4 points

Nous avons $n = 3$ **et** $y = \dfrac{b-a}{2}x + \dfrac{b-a}{2} = \dfrac{3}{2}(x+1)$

Interpolation de Tchébycheff

Exemple

Interpoler $\sin y$ sur $y \in [0\,,3]$ par un polynôme d'interpolation de Tchébycheff calculé sur 4 points

Nous avons $n = 3$ et $y = \frac{b-a}{2}x + \frac{b-a}{2} = \frac{3}{2}(x+1)$

Les points du support sont donnés par $x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n+2}\pi\right) = \cos\frac{2k+1}{8}\pi$

soit

$$x_0 = \cos\frac{\pi}{8} = 0{,}924 \qquad y_0 = 2{,}89$$

$$x_1 = \cos\frac{3\pi}{8} = 0{,}383 \qquad y_1 = 2{,}07$$

$$x_2 = \cos\frac{5\pi}{8} = -0{,}383 \qquad y_2 = 0{,}926$$

$$x_3 = \cos\frac{7\pi}{8} = -0{,}924 \qquad y_3 = 0{,}114$$

Interpolation de Tchébycheff

Exemple

Calcul de la matrice d'interpolation :

$$L = \frac{2}{n+1}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0{,}924 & 0{,}383 & -0{,}383 & -0{,}924 \\ 0{,}707 & -0{,}707 & -0{,}707 & 0{,}707 \\ 0{,}383 & -0{,}924 & 0{,}924 & -0{,}383 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \begin{cases} T_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ T_1 = x \\ T_2 = 2x^2 - 1 \\ T_3 = 4x^3 - 3x \end{cases}$$

et

$$F = \begin{bmatrix} \sin y_0 = 0{,}253 \\ \sin y_1 = 0{,}876 \\ \sin y_2 = 0{,}799 \\ \sin y_3 = 0{,}114 \end{bmatrix}$$

Interpolation de Tchébycheff
Exemple

Et $$\sin y \approx P_3(y) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & T_2(x) & T_3(x) \end{bmatrix} [L][F]$$

$$P_3(y) = \begin{bmatrix} T_0(x) & T_1(x) & T_2(x) & T_3(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}722 \\ 0{,}0789 \\ -0{,}462 \\ -0{,}00888 \end{bmatrix}$$

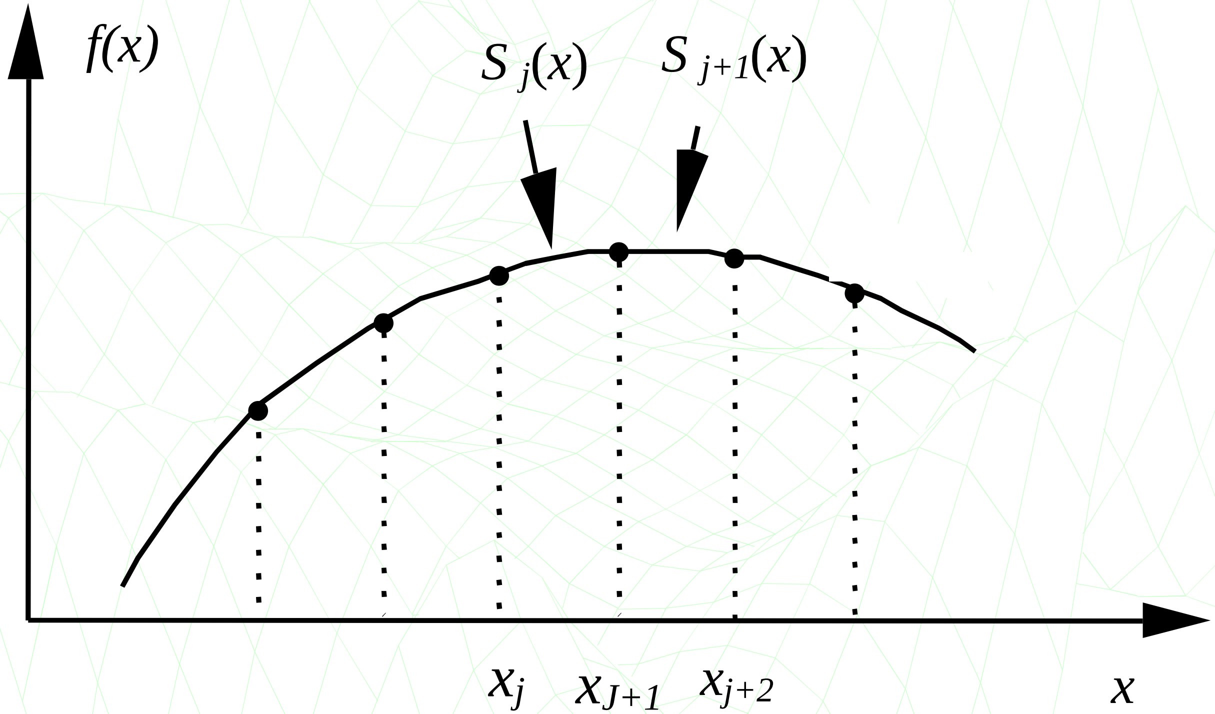
$$P_3(y) = 0{,}722\,\frac{1}{\sqrt{2}} + 0{,}0789x - 0{,}462(2x^2 - 1) - 0{,}00888(4x^3 - 3x)$$

soit $$P_3(y) = 0{,}972 + 0{,}105x - 0{,}924x^2 - 0{,}0355x^3$$

Précision : pour $y = 0$: $x = -1$ $\sin y = 0$ et $P_3(0) = -0{,}021$

pour $y = \pi/2$: $x = 0{,}0472$ $\sin y = 1$ et $P_3(\pi) = 0{,}975$

Spline cubique



$$S_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x + a_{j2}x^2 + a_{j3}x^3$$

Spline cubique

$$S_j(x) = a_{j0} + a_{j1}x + a_{j2}x^2 + a_{j3}x^3$$

Pour déterminer les 4 coefficients, on pose :

$$S_j(x_j) = f(x_j)$$
$$S_j(x_{j+1}) = f(x_{j+1})$$
$$S'_j(x_{j+1}) = S'_{j+1}(x_{j+1})$$
$$S''_j(x_{j+1}) = S''_{j+1}(x_{j+1})$$

L'objet de la méthode est donc de déterminer les équations successives des cubiques à partir de ces 4 conditions.

Spline cubique

Tous calculs effectués nous aurons :

$$S_j(x) = \frac{S''_j}{6}\left[\frac{(x_{j+1}-x)^3}{h_j} + h_j(x - x_{j+1})\right] + \frac{S''_{j+1}}{6}\left[\frac{(x-x_j)^3}{h_j} - h_j(x - x_j)\right]$$
$$-\frac{f_j}{h_j}(x - x_{j+1}) + \frac{f_{j+1}}{h_j}(x - x_j)$$

qui dépend :

- de l'intervalle h_j,
- des dérivées secondes à droite et à gauche de l'intervalle,
- des coordonnées des points à droite et à gauche de l'intervalle,
- des ordonnées des points à droite et à gauche de l'intervalle.

Spline cubique

Les dérivées secondes sont solutions du système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2(h_0+h_1) & h_1 & 0 & \cdots & 0 \\ h_1 & 2(h_1+h_2) & h_2 & \cdots & 0 \\ 0 & h_2 & 2(h_2+h_3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2(h_{n-2}+h_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S''_1 \\ S''_2 \\ S''_3 \\ \vdots \\ S''_{n-1} \end{bmatrix} = 6 \begin{bmatrix} \frac{f_2-f_1}{h_1} - \frac{f_1-f_0}{h_0} \\ \frac{f_3-f_2}{h_2} - \frac{f_2-f_1}{h_1} \\ \vdots \\ \frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}} - \frac{f_{n-1}-f_{n-2}}{h_{n-2}} \end{bmatrix}$$

on pose généralement $S''_0 = S''_n = 0$

- Procédure :
  - calcul des S''_j par résolution du système précédent,
  - calcul de l'équation de chaque cubique.