膝の曲げ角度と足の慣性モーメントの関係について

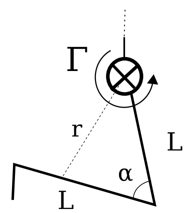
Laurent Fabre

2018/6/7

膝の曲がり具合によって(角度α)足全体の慣性モーメントがどう変化するかを調べる.
足の付け根を軸にしたときの足の慣性モーメントは次のように定義される:

$$\Gamma = \iiint_V r^2 dm \tag{1}$$

足を単位長さあたりの重量 ρ の線状のものにモデル化する. 足の付け根から膝までの長さを L とした上で、膝から足首までの長さもそれと同一視し $= L$ とする. 足首より下の部分の重さを無視する.



慣性モーメントは次の形になる:

$$\begin{aligned}
\Gamma &\simeq \underbrace{\rho \int_0^L l^2 dl}_{\text{太股}} + \underbrace{\rho \int_0^L (L - l\cos\alpha)^2 + (l\sin\alpha)^2 dl}_{\text{脛}} \\
&= \rho \left[l^3/3\right]_0^L + \rho \int_0^L (L^2 + l^2\cos^2\alpha - 2Ll\cos\alpha + l^2\sin^2\alpha) dl \\
&= \rho L^3/3 + \int_0^L (L^2 + l^2 - 2Ll\cos\alpha) dl \\
&= \rho L^3/3 + \rho \left(L^2 \left[l\right]_0^L + \left[l^3/3\right]_0^L - 2L\cos\alpha \left[l^2/2\right]_0^L\right) \\
&= \underbrace{\rho L^3/3}_{\text{太股}} + \underbrace{\rho L^3 \left(4/3 - \cos\alpha\right)}_{\text{脛}}
\end{aligned} \tag{2}$$

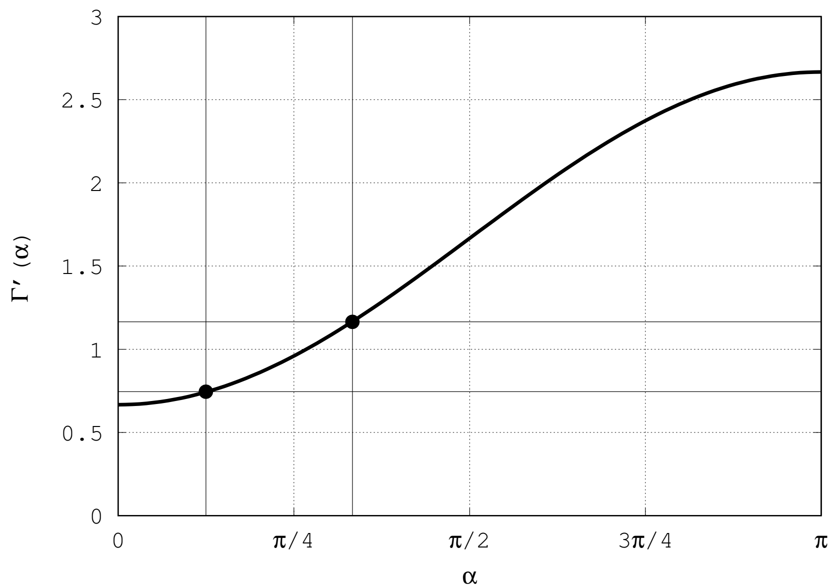
慣性モーメントが低ければ低いほど足を前の方へ回すのに必要な力(トルクτ)が少ない.
足を角度$\Delta\theta$回すのに必要なパワーは $W = \int_{\Delta\theta} \tau d\theta$ であるから、慣性モーメントが低ければ低いほど少ないパワーで足を回すことができる. 一定の歩幅(より正確には「一定の太股の振り幅」)で一定のスピードで走るときの消費エネルギーがその分減ることになる.

その他考察:

- 慣性モーメントは重さに直接比例する: $\Gamma \propto \alpha$
- 慣性モーメントは足の長さの3乗(!)に比例する: $\Gamma \propto L^3$

以下は$\Gamma' = \Gamma/\rho L^3$の正規化された慣性モーメントのグラフと、トップレベル選手のフォームのときの値とホビーランナーのフォームのときを値を示し比較する.
トップアスリートのフォームはホビーランナーのフォームに比べて約50%(以上)効率が良い結果になっている.

※注意 あくまで膝の曲げ角と消費エネルギーの関係についての結果のみになっている. 全体的な効率の比較をするのに数多くのパラメータを考慮に入れる必要がある.



以上