

VILNIAUS UNIVERSITETAS  
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Bakalauro darbas

**Skirstinių uodegos indekso vaidmuo valiutų  
grąžų analizėje**

**The Role of Tail Index in Analysis of Currency Returns**

Laura Blėdaitė, Rita Butkuvienė, Ieva Grublytė, Ramunė Jonauskaitė

**VILNIUS 2011**

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS  
MATEMATINĖS ANALIZĖS KATEDRA**

Darbo vadovas Prof. Habil. Dr. Vygantas Paulauskas \_\_\_\_\_

Darbo recenzentas \_\_\_\_\_

Darbas apgintas \_\_\_\_\_

Darbas įvertintas \_\_\_\_\_

Registravimo NR. \_\_\_\_\_

Irašoma atidavimo į katedrą data \_\_\_\_\_

## Turinys

Santrauka .....	2
Summary / Abstract .....	3
Ivadas .....	4
1. Teorija .....	7
1.1. Testas indekso pasikeitimui rasti .....	7
1.2. Testo modifikacija .....	9
1.3. Sąlygų tikrinimas .....	13
2. Modeliavimas .....	16
2.1. Testo galia.....	18
2.2. Indekso pasikeitimo radimo vieta.....	20
2.3. Intervalo mažinimas .....	21
3. Realūs duomenys .....	22
3.1. Indeksai.....	22
3.1.1. DJIA (angl. Dow Jones Industrial Average) indeksas.....	23
3.1.2. NASDAQ (angl. National Association of Securities Dealers Automated Quotations) Composite indeksas .....	29
3.1.3. Standard & Poor's 500 (S&P500) indeksas .....	32
3.1.4. FTSE 100 (angl. Financial Times Stock Exchange 100) indeksas .....	37
3.1.5. Intervalo mažinimas .....	41
3.2. Azijos duomenys .....	45
3.2.1. Malaizijos duomenys .....	45
3.2.2. Filipinų duomenys .....	48
3.2.3. Indonezijos duomenys .....	50
3.2.4. Tailando duomenys .....	52
4. Išvados .....	56
Priedas Nr. 1 .....	58
Priedas Nr. 2 .....	59
Priedas Nr. 3 .....	60
Priedas Nr. 4 .....	64
Priedas Nr. 5 .....	65
Priedas Nr. 6 .....	77

## Santrauka

Finansinių gražų elgesio supratimas yra labai svarbus norint valdyti riziką. Dabar jau sutinkama, jog vienas iš svarbiausių finansinių gražų požymiu yra *sunkios skirstinių uodegos*. Skirstiniams su sunkiomis uodegomis tikimybė, jog įvyks dideli nuokrypiai nuo vidurkio yra daug didesnė nei normaliajam skirstiniui. Skirstinio *uodegos indeksas* yra dydis, kuris nusako uodegos sunkumą ir kartu nurodo, kurios eilės momentai yra baigtiniai šiam skirstiniui. Per pastaruosius dešimtmečius nemažai rašyta apie uodegos indekso nustatymo problemą. Mažesnis demesys buvo skirtas sunkesnei problemai - uodegos indekso pasikeitimo nustaty-mui ir pasikeitimo momento įvertinimui. Šiame darbe nagrinejami du V. Paulausko ir M. Vaičiulio straipsniai [8] ir [9], kuriuose pateikti naujausi uodegos indekso vertinimo metodai ir jų panaudojimas uodegos indekso pasikeitimo nustatymui, naudojant K. Gadeikio ir V. Paulausko [3] straipsnyje pasiūlyta testą. Imant atitinkamus finansinių duomenų santykius, gaunami atsitiktiniai dydžiai, kurių vidurkis susijęs su skirstinio uodegos indekso dydžiu bei priklauso nuo parametru  $r$ . Taigi indekso pasikeitimo nustatymo problema suvedama į vidurkio pasikeitimo nustatymo uždavinį, o pastarajam spręsti naudojama statistika:

$$u_j^{(n)} = \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right)^{1-\varsigma} \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \kappa_{ni,r} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n \kappa_{ni,r} \right),$$

kur

$$\kappa_{ni,r} = \kappa_{ni}^r = \begin{cases} \left( \frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}} \right)^r & , r > -\alpha, r \neq 0 \\ -\ln \left( \frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}} \right) & , r = 0 \end{cases}$$

Pirmoje darbo dalyje aptariami teoriniai rezultatai. Antrojoje dalyje empiriškai tikrinamos pasiūlyto testo savybės. Galiausiai trečiojoje dalyje testas taikomas realiemis finansiniams duomenims: Azijos šalių valiutų grąžoms bei akcijų indeksams (DJIA, NASDAQ, S&P 500 ir FTSE 100).

## Summary / Abstract

The understanding how the financial assets work is of a great importance for everybody in charge of managing risks. It is now commonly assumed that one of the most important properties of the financial assets is the *heavy tails* of the distribution. In a heavy-tailed distribution the likelihood that one encounters significant deviations from the mean is much greater than in the case of the normal distribution. The *tail index* of a distribution is an indicator that reflects the fatness of a tail of a distribution determining the existence of the moments of some order. During the last decades there were many papers dealing with the tail index estimation problem. Less attention was paid to the harder problem - determination of the change of tail index and estimation of the moment of change. In our paper we analyse two articles by Paulauskas V. and Vaičiulis M. [8] and [9], that introduce the latest methods of the tail index determination using the test provided in the article by Gadeikis K. and Paulauskas V. [3]. Taking certain relations of the financial data, we get the random variables which have an average related to the distribution tail index and is dependent on the parameter  $r$ . Therefore the index change determination problem is reduced to the average change determination problem and the latter is being solved using the statistic:

$$u_j^{(n)} = \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right)^{1-\varsigma} \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \kappa_{ni,r} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n \kappa_{ni,r} \right),$$

where

$$\kappa_{ni,r} = \kappa_{ni}^r = \left( \frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}} \right)^r, r > -\alpha.$$

In the first part of the paper theoretical advantages of such a modification are explained. The second part deals with the generated data and checks the power of the test with the different values of the parameters. Finally, in the third part the test is applied to the real financial data such as the Asian currency returns and the stock market indices (DJIA, NASDAQ, S&P 500 and FTSE 100).

# Ivadas

Finansinių duomenų savybių analizei paprastai naudojama grąža, kuri apibrėžiama kaip santykinis vertės pokytis (paprastoji grąža) arba verčių logaritmų skirtumas (logaritminė grąža). Grąža yra patogus rodiklis, nes nepriklauso nuo matavimo vienetų, be to, pasižymi geresnėmis statistinėmis savybėmis nei pačios finansinių duomenų vertės, kurios dažnai turi didėjantį trendą. Skiriamos žemo, aukšto ir ultra aukšto dažnio grąžos. Viena svarbiausių logaritminių grąžų skirstinio savybių — sunkios uodegos, t.y., kai dideli kainų pokyčiai pasirodo žymiai dažniau nei tuo atveju, kai skirstinys yra normalusis. Sakome, kad a.d.  $X$  skirstinys turi sunkią uodegą, jeigu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp(\lambda x) P(X > x) \rightarrow \infty, \forall \lambda > 0$ . Vienas pirmųjų sunkių uodegų efektą finansiniuose duomenyse pastebėjo Mandelbrot (1963). Tolimesni tyrimai parodė, kad finansinių duomenų logaritminės grąžas geriausiai aproksimuojama tie skirstiniai, turintys sunkias uodegas, kurių indeksas  $\alpha \in (2; 4)$ . Dažniausiai logaritminės grąžos skaičiuojamos kasdieniams duomenims.

Tokie įvykiai kaip 1997-1998 m. Azijos finansų krizė bei dar aktualesnė 2008-2009 metų pasaulio ekonomikos krizė, kurios padariniai jaučiami dar ir šiandien, verčia intensyviau nagrinėti finansinius duomenis — t.y. analizuoti skirstinių, turinčių sunkias uodegas, savybes bei įvertinant pasikeitimų prognozuoti tolimesnį rinkų elgesį. Vienas iš svarbių aspektų yra skirstinio uodegos indekso kitimas laike. Todėl šiame darbe nagrinėsime uodegos indekso pasikeitimo vertinimo problemą. Pirmiausia apibrėšime, kas tai yra skirstinio uodegos indeksas, kokie yra dažniausiai naudojami jo vertinimo metodai. Toliau bus detaliau aprašomas vienas iš testų indekso pasikeitimo radimui, aptarta jo modifikacija bei patikrintos testo savybės empiriskai modeliuojant duomenis su pasirinktais skirstiniais. Galiausiai tirsime, ar galima aiškinti uodegos indekso pasikeitimu 2008-2009 metų krizę (testas taikomas Dow Jones, NASDAQ (angl. National Association of Securities Dealers Automated Quotations), Standard & Poor's 500, FTSE (angl. Financial Times Stock Exchange 100) indeksams) bei 1997-1998 m. Azijos krizę (testas taikomas Azijos šalių valiutų kursų duomenims). Šiame darbe pagrindinė literatūra, kuria remsimės, yra šie straipsniai: Gadeikis K., Paulauskas V.: On the Estimation of a Changepoint in a Tail Index [3] ir Paulauskas V., Vaičiulis M.: Several Modifications of DPR Estimator of the Tail Index [8] ir [9].

## Skirstinio uodegos indeksas

Tarkime turime  $N$  dydžio imtį  $X_1, \dots, X_N$ , paimtą iš duomenų, turinčių pasiskirstymo funkciją (p.f.)  $F$  su sunkiomis uodegomis, tokią, kad  $F(0) = 0$ , t.y. laikome, kad  $X_1, \dots, X_N$  yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę (n.v.p.) teigiami atsitiktiniai dydžiai (a.d.) su p.f.

$F$ , tenkinančia šį sąryšį dideliems  $x$ :

$$1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x).$$

Parametras  $\alpha > 0$  vadinamas uodegos indeksu,  $L(x) > 0$  visiems  $x > 0$  ir  $L$  yra lėtai kintanti begalybėje funkcija:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{L(tx)}{L(x)} = 1.$$

$\alpha$  nusako uodegos tikimybės gesimą, jei  $x$  yra išskirtis. Kitaip tariant, kuo maženis  $\alpha$ , tuo lečiau gėsta tikimybė ir skirstinio uodegos svoris yra didesnis. Didelių nuokrypių savybė (sunki uodega) reiškia, kad visi momentai, aukštesni nei  $\alpha$  ( $EX^r, r > \alpha$ ) neegzistuoja.

## Skirstinio uodegos indekso vertinimas

Dauguma uodegos indekso įverčių yra skaičiuojami pagal tą pačią procedūrą: imama dalis didžiausių imties reikšmių ir iš šių reikšmių kokiui nors būdu gaunama informacija apie parametrą  $\alpha$ . Tarkime, kad  $X_{N,1}, \leq X_{N,2} \leq \dots \leq X_{N,N}$  žymi surūšiuotus dydžius  $X_1, \dots, X_N$ , ir tarkime, kad imame  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , didžiausių reikšmių.

Pateiksime keletą uodegos indekso įverčių, paremtų šia idėja. Visi jie vertina parametrą  $\gamma = 1/\alpha$ :

$$\gamma_{N,k}^{(1)} = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\log X_{N,N-i} - \log X_{N,N-k}),$$

$$\gamma_{N,k}^{(2)} = (\log 2)^{-1} \log \frac{X_{N,N-[k/4]} - X_{N,N-[k/2]}}{X_{N,N-[k/2]} - X_{N,N-k}},$$

$$\gamma_{N,k}^{(3)} = \gamma_{N,k}^{(1)} + 1 - \frac{1}{2} \left( 1 - \left( \gamma_{N,k}^{(1)} \right)^2 / M_N \right)^{-1},$$

$$\gamma_{N,k}^{(4)} = \frac{M_N}{2\gamma_{N,k}^{(1)}},$$

kur

$$M_N = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} (\log X_{N,N-i} - \log X_{N,N-k})^2.$$

Turbūt populiarusias iš uodegos įvertinių, skirtų parametrui  $\gamma$  vertinti, yra  $\gamma_{N,k}^{(1)}$ , pasiūlytas B. M. Hill'o.  $\gamma_{N,k}^{(2)}$  pasiūlytas J. Pickands,  $\gamma_{N,k}^{(3)}$  — A.L.M.Dekkers, J.H.J. Einmahl ir L. de Haan,  $\gamma_{N,k}^{(4)}$  — C. G. de Vries. Tokiu būdu skaičiuojant uodegos indeksą bene didžiausia problema yra pasirinkti  $k$ .

Tačiau [3] buvo pasiūlytas naujas uodegos indekso vertinimo būdas, kuris nesiremia

duomenų išdėstymo tvarka.

Tarkime turime  $N$  dydžio imtį, kur  $N = n \cdot m$ . Praktikoje pirmiausia pasirenkame  $m$ , tuomet  $n = [N/m]$ , kur  $[.]$  yra teigiamo skaičiaus sveikoji dalis. Taigi mes padaliname imtį į  $m$  dydžio  $n$  grupių  $V_1, \dots, V_n$ , pvz.  $V_1 = \{X_1, \dots, X_m\}$ ,  $V_2 = \{X_{m+1}, \dots, X_{2m}\}$  ir t.t.

Tarkime

$$M_{ni}^{(1)} = \max\{X_j : X_j \in V_i\}$$

ir  $M_{ni}^{(2)}$  - antras pagal dydį elementas grupelėje  $V_i$ .

Apibrėžkime

$$\kappa_{ni} = \frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}}, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \kappa_{ni}, \quad Z_n = n^{-1} S_n.$$

Tuomet esant tokiemis  $m$  ir  $n$ , kad  $n, m \rightarrow \infty$  ne lėčiau nei kažkoks teigiamas  $N$  laipsnis (pvz.  $n = CN^b$ ,  $b \in (0; 1)$ ,  $C > 0$ ,  $m = [N/n] = [C^{-1}N^{1-b}]$ ) galime teigti, kad

$$Z_n \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 1} \text{ b.t.}$$

$\kappa_{ni}, i = 1, \dots, n$ , yra n.v.p. atsitiktiniai dydžiai, o  $E\kappa_{ni} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ , kai  $N \rightarrow \infty$  (Pareto skirstiniui  $E\kappa_{ni} = \frac{\alpha}{\alpha + 1}$ , tai bus parodyta toliau šiame darbe).

Uodegos indeksą vertinant šiuo metodu, pagrindinė problema tampa  $m$  ir  $n$  pasirinkimas. Ši problema yra analogiška  $k$  parametru parinkimo problemai Hill'o statistikoje.

Gerais žinoma, jog kai kurie finansiniai duomenys turi skirstinius su sunkiomis uodegomis. Taigi kai kurie įvykiai finansų rinkose yra aiškinami būtent uodegos indekso pasikeitimu. Norėdami ivertinti uodegos indekso pasikeitimą realiems duomenims, kitame skyriuje suformuluosime šią problemą matematiškai.

# 1. Teorija

## 1.1. Testas indekso pasikeitimui rasti

Tarkime stebime atsitiktinius dydžius  $X_1^{(N)}, X_2^{(N)}, \dots, X_N^{(N)}$  su pasiskirstymo funkcijomis  $F_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N$  ir egzistuoja nežinomas parametras  $0 < \tau < 1$  tokis, kad pasiskirstymo funkcijos  $F_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, [\tau N]$  yra vienodos bei turi uodegos indeksą  $\alpha_1$ , o  $F_i^{(N)}, i = [\tau N] + 1, \dots, N$  taip pat yra vienodos ir turi indeksą  $\alpha_2$ . Tarkime, kad visi dydžiai yra teigiami, t.y. nagrinėsime tik dešiniajają uodegą. Padaliname imtį į  $n$  grupių  $V_1^{(N)}, \dots, V_n^{(N)}$ , kiekvienoje grupelėje turime po  $m$  narių. Toliau kiekvienoje grupėje randame  $M_{ni}^{(1)}, M_{ni}^{(2)}, \kappa_{ni}$  analogiškai kaip apibrėžta aukščiau. Pagaliau turime seką nepriklausomų atsitiktinių dydžių  $\kappa_{ni}$ :  $\kappa_{ni}$  yra n.v.p. su vidurkiu artimu  $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}$ , kai  $1 \leq i \leq k = [\frac{\tau N}{m}]$  ir  $\kappa_{ni}$  yra n.v.p. su vidurkiu artimu  $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}$ , kai  $k+2 \leq i \leq n$ . Vienintelio  $\kappa_{n,k+1}$  skirstinys gali būti kitoks, nes šis dydis yra sukonstruotas iš grupės, kurioje yra ir duomenų turinčių indeksą  $\alpha_1$ , ir turinčių indeksą  $\alpha_2$ . Jeigu ignoruojame šį narij, gauname vidurkio pokyčio uždavinį, tik serijų schema:

Tokiam uždaviniui spręsti gali būti naudojama ši statistika:

$$u_j^{(n)} = \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right)^{1-\varsigma} \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \kappa_{ni} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n \kappa_{ni} \right),$$

kur  $1 \leq j \leq n-1$  ir  $0 \leq \varsigma \leq 1$ . O  $\tau$  įvertinys apibrėžiamas taip:

$$\hat{\tau}_n = \frac{1}{n} \min \left\{ i : |U_i^{(n)}| = \max_{1 \leq l \leq n-1} |U_l^{(n)}|, 1 \leq i \leq n-1 \right\}.$$

Tam, kad būtų galima rasti  $\hat{\tau}_n$  ribinį skirstinį, naudojamasi toliau aprašytu metodu. Imkime serijų schema su eilutėmis  $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$ ,  $n \geq 2$ , kurios yra nepriklausomi elementai. Taip pat tarkime, kad  $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_{[\tau n]}^{(n)}$  turi skirstinį  $v_1$ , o  $\xi_{[\tau n]+1}^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$  turi skirstinį  $v_{2,n}$ , kai  $\tau \in (0; 1)$ . Tarkime funkcija  $K : R^2 \rightarrow R$  ir apibrėžkime  $t \in [0; 1]$  šią funkciją:

$$r_n(t) = \begin{cases} n^{-2} \sum_{i=k+1}^n \sum_{j=1}^k K(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) , & t = \frac{k}{n}, k = 1, \dots, n-1, \\ 0, & t = 0, 1, \\ r_n\left(\frac{k}{n}\right) + (nt - k) \left(r_n\left(\frac{k+1}{n}\right) - r_n\left(\frac{k}{n}\right)\right), & t \in \left(\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right), k = 0, \dots, n-1. \end{cases}$$

Pagaliau galime  $\tau$  įvertinti apibrėžti taip:  $\tau_n = \arg \max_{t \in [0; 1]} w(t) |r_n(t)|$ , kur  $w : [0; 1] \rightarrow (0; \infty)$  yra svorio funkcija.

Reikalaujama, kad branduolys  $K$  ir a.d skirstiniai  $v_1$  ir  $v_{2,n}$  tenkintų šias sąlygas:

Antisimetriškumas (A):

$$K(x,y) = -K(y,x), \forall x, y \in R.$$

Momentų sąlyga (M):

Egzistuoja realieji skaičiai  $\delta > 0$  ir  $M_0 < \infty$ , tokie kad:

$$\int |K|^{2+\delta} d\mu_1 \otimes \mu_2 \leq M_0, \quad \forall \mu_1, \mu_2 \in \{v_1, v_{2,n}\}.$$

Taip pat reikalaujama, kad egzistuotų funkcijos:

$$R_1(y) = \int K(x,y) v_1(dx), \quad R_n(y) = \int K(x,y) v_{2,n}(dx).$$

Stabilumo sąlyga (S):

$$\int f_n g_n dP_n \rightarrow \sigma^2, \quad \forall f_n, g_n \in \{R_1, R_2\}, \quad P_n \in \{v_1, v_{2,n}\},$$

kur  $\sigma^2 = \int R_1^2 dv_1$ . Be to, pažymėkime

$$\lambda_n = \int K dv_{2,n} \otimes v_1,$$

kur laikoma, kad  $\lambda_n \neq 0 \ \forall n \in N$  ir  $\lambda_n \rightarrow 0$  taip, kad  $\lambda_n n^{\frac{1}{2}} \rightarrow \infty$ , kai  $n \rightarrow \infty$ .

Reguliarumo sąlyga (R):

$w : [0; 1] \rightarrow (0; \infty)$ ,  $w'$  yra aprėžta intervale  $[d; 1-d]$  kiekvienam teigiamam  $d$  ir tolydi taške  $\tau$ . Be to,  $\inf_{0 \leq t \leq \tau} (tw(t))' > 0$  ir  $\inf_{01-\tau \leq t \leq 1} (w(t)(1-t))' < 0$ .

[3] straipsnyje parodoma, kad imant branduoli  $K(x,y) = y - x$ , svorio funkciją  $w(t) = (t(1-t))^{-\zeta}$  ir a.d.  $\kappa_{ni}$  šios sąlygos tenkinamos.  $\zeta$  pasirenkamas lygus 0. Tarus, kad duome nyse  $X_1^{(N)}, X_2^{(N)}, \dots, X_n^{(N)}$  nėra indekso pasikeitimo ir standartinių  $\kappa_{ni}$  nuokrypių pažymėjus  $\sigma$ , gaunama, kad:

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} r_n(t) \rightarrow W^0(t)$$

pagal pasiskirstymą, kai  $n \rightarrow \infty$ , čia  $W^0(t)$  yra Brauno tiltas,  $t \in [0; 1]$ . Taigi

$$\sup_{t \in [0; 1]} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |r_n(t)| \xrightarrow{d} \sup_{t \in [0; 1]} |W^0(t)|$$

Pažymėkime

$$D = \sup_{t \in [0; 1]} |W^0(t)|.$$

Šio a.d. pasiskirstymo funkcija yra:

$$F_D(x) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} & , x \geq 0, \\ 0 & , x < 0. \end{cases}$$

Dabar, remiantis šiais rezultatais, jau galime aiškiai suformuluoti statistinių testų. Stebimi a.d.  $X_1^{(N)}, X_2^{(N)}, \dots, X_N^{(N)}$  su pasiskirstymo funkcijomis  $F_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, N$ , egzistuoja nežinomas parametras  $0 < \tau < 1$  tokis, kad pasiskirstymo funkcijos  $F_i^{(N)}, i = 1, 2, \dots, [\tau N]$  yra vienodos bei turi uodegos indeksą  $\alpha_1$ , o  $F_i^{(N)}, i = [\tau N] + 1, \dots, N$  taip pat yra vienodos ir turi indeksą  $\alpha_2$ . Statistinė hipotezė:

$$\begin{cases} H_0 : \alpha_1 = \alpha_2, \\ H_1 : \alpha_1 \neq \alpha_2. \end{cases}$$

Pažymėkime  $U_j^{(n)} = \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |u_j^{(n)}|$ . Hipotezė  $H_0$  atmetama (t.y. randamas indekso pasikeitimas) su reikšmingumo lygmeniu  $\gamma$ , jeigu  $\max_{j=1,2,\dots,n} U_j^{(n)} > z_\gamma$ , kur  $z_\gamma = \gamma$  lygmens kritinė reikšmė, randama iš  $F_D$ .

## 1.2. Testo modifikacija

Šiame darbe išbandėme minėto testo modifikaciją, kuomet vietoje  $\kappa_{ni}$  imami kiti dydžiai. Pažymėkime:

$$\kappa_{ni,r} = \kappa_{ni}^r = \begin{cases} \left(\frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}}\right)^r, & r > -\alpha, r \neq 0 \\ -\ln\left(\frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}}\right), & r = 0 \end{cases}$$

Tokius dydžius pasiūlyta nagrinėti straipsnyje [9]. Paaiškinsime tokį pasirinkimą.

Kaip buvo minėta,

$$E\kappa_{ni} \rightarrow \frac{\alpha}{\alpha + 1}.$$

Parodysime, kad

$$E\kappa_{ni,r} = \frac{\alpha}{\alpha + r}, \quad r > -\alpha, r \neq 0,$$

ir

$$E\kappa_{ni,r} = \frac{1}{\alpha}, \quad r = 0,$$

jeigu turime Pareto skirstinį.

Paimkime du nepriklausomus atsitiktinius dydžius  $X$  ir  $Y$ , turinčius tą patį Pareto skirstinį su parametru  $\alpha$ . Pasiskirstymo funkcija:

$$F(x) = 1 - C_1 x^{-\alpha}; \quad x \geq C_1^{1/\alpha},$$

tankio funkcija:

$$f(x) = C_1 \alpha x^{-\alpha-1}.$$

Pažymėkime  $W = \frac{\min(X, Y)}{\max(X, Y)}$ , tuomet  $W \leq 1$ . Rasime a.d.  $W$  pasiskirstymo funkciją.

$$\begin{aligned}
P(W \leq t) &= P\left(\left(\frac{X}{Y} \leq t, X \leq Y\right) \cup \left(\frac{Y}{X} \leq t, Y \leq X\right)\right) \\
&= P\left(\frac{X}{Y} \leq t, X \leq Y\right) + P\left(\frac{Y}{X} \leq t, Y \leq X\right) \\
&= 2P\left(\frac{Y}{X} \leq t, Y \leq X\right) = 2 \iint_{C_1^{1/\alpha} \leq y \leq \infty, \frac{y}{t} \leq x \leq \infty} f_Y(y)f_X(x)dxdy = \\
&= 2 \int_{C_1^{1/\alpha}}^{\infty} \int_{\frac{y}{t}}^{\infty} \left(C_1^{1/\alpha} \alpha y^{-\alpha-1}\right) \left(C_1^{1/\alpha} \alpha x^{-\alpha-1}\right) dxdy \\
&= 2 \int_{C_1^{1/\alpha}}^{\infty} \left(C_1^{1/\alpha} \alpha y^{-\alpha-1}\right) \left(\frac{C_1^{1/\alpha} \alpha (\frac{y}{t})^{-\alpha}}{\alpha}\right) dxdy \\
&= 2C_1^{1/\alpha} \alpha \int_{C_1^{1/\alpha}}^{\infty} \left(y^{-2\alpha-1} t^\alpha\right) dy = 2C_1^{1/\alpha} \alpha t^\alpha \frac{C_1^{-2\alpha/\alpha}}{2\alpha} = t^\alpha, t \in [0; 1]
\end{aligned}$$

Taigi,  $F_W(t) = \begin{cases} 0 & , t < 0, \\ t^\alpha & , 0 \leq t \leq 1, \text{ iš čia nesunkiai randame tankio funkciją:} \\ 1 & , t > 1 \end{cases}$

$$f_W(t) = \begin{cases} \alpha t^{\alpha-1} & , 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & , \text{kitur} \end{cases}.$$

Įveskime keletą pažymėjimų:

$$f_r(x) = \begin{cases} x^r & , r \neq 0, \\ -\ln(x) & , r = 0 \end{cases}$$

ir:

$$h_r(\alpha) = h(\alpha, f_r) = Ef_r(W).$$

Rasime a.d.  $W_r = f_r(W) = \begin{cases} W^r & , r \neq 0, \\ -\ln(W) & , r = 0 \end{cases}$  skirtinių ir tankio funkcijų.

Tegu  $r > 0$ . Tuomet

$$F_{W_r}(t) = P(W_r \leq t) = P(W^r \leq t) = P(W \leq t^{1/r}) = F_W(t^{1/r}) = t^{\alpha/r},$$

čia  $t \in [0; 1]$ . Panašiai galima parodyti, kad kai  $r < 0$ ,  $F_{W_r}(t) = 1 - t^{\alpha/r}$ , čia  $t \in [1; \infty)$ .

Kai  $r = 0$ , imame logaritmą, t.y.  $W_r = -\ln(W)$ . Tuomet skirstinys:

$$F_{W_0}(t) = P(W_0 \leq t) = P(-\ln(W) \leq t) = P(W \geq e^{-t}) = 1 - F_W(e^{-t}) = 1 - e^{-\alpha t},$$

čia  $t \in [0; \infty)$ .

Turėdami skirstinius lengvai randame tankio funkcijas:

$$f_{W_r}(t) = \frac{\alpha}{r} t^{\alpha/r-1}, t \in [0; 1], \text{ kai } r > 0,$$

$$f_{W_r}(t) = -\frac{\alpha}{r} t^{\alpha/r-1}, t \in [1; \infty), \text{ kai } -\alpha < r < 0,$$

$$f_{W_r}(t) = \alpha e^{-\alpha t}, t \in [0; \infty), \text{ kai } r = 0.$$

Pastebėsime, kad santykio pasiskirstymo ir tankio funkcijose nebelieka parametru  $C_1$ , t.y. šis dydis invariantiškas skalės transformacijai.

Turėdami skirstinius ir tankio funkcijas nesunkiai galime rasti a.d.  $W_r$  vidurkį:

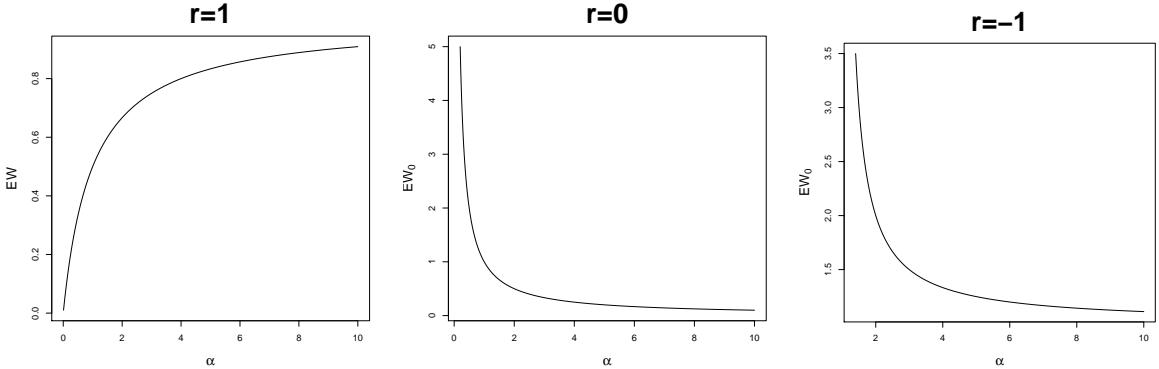
$$\begin{aligned} h(\alpha, f_r) = EW_r &= \int t F_{W_r}(dt) = \int_0^1 t \frac{\alpha}{r} t^{\alpha/r-1} dt = \int_0^1 \frac{\alpha}{r} t^{\alpha/r} dt = \frac{\alpha}{r} \frac{t^{\alpha/r+1}}{\alpha/r + 1} \Big|_0^1 = \frac{\alpha/r}{\alpha/r + 1} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + r}, \end{aligned}$$

kai  $r > 0$ . Su  $r < 0$  analogiškais skaičiavimais gautume tą patį.

Kai  $r = 0$ :

$$h_0(\alpha) = h(\alpha, f_0) = EW_0 = \int t F_{W_0}(dt) = \int_0^\infty t \alpha e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}.$$

$h_r(\alpha, f_r)$  atvirkštinę funkciją galime laikyti  $\alpha$  įvertiniu. Lygindami tarpusavyje  $h_r(\alpha, f)$  funkcijas, galime pastebėti, jog jų reikšmių sritis smarkiai skiriasi. Šis rezultatas svarbus, kadangi būtent nuo reikšmių srities priklauso kaip tiksliai šis įvertinys iš turimų duomenų įvertins tikrąjį indeksą  $\alpha$ . Kai  $r = 1$  (ši reikšmė buvo naudota [3] straipsnyje), funkcijos  $h_1(\alpha)$  reikšmių sritis yra  $(0; 1)$ , tuo tarpu imant  $r = 0$  reikšmių sritis  $(0; \infty)$ . Bendru atveju reikšmių sritis priklauso nuo parametro  $r$  ženklo. Su  $r > 0$  gausime, kad reikšmių sritis  $(0; 1)$ , tuo tarpu paėmus  $r < 0$  reikšmių sritis  $(1; \infty)$ . Šie rezultatai pateikti žemiau esančiuose grafikuose. 1 pav. kairėje funkcijos  $h_r(\alpha)$  grafikas, kai  $r = 1$ , viduryje  $h_0(\alpha)$  funkcija, dešinėje  $h_r(\alpha)$ , kai  $r = -1$ . Pastebėsime, jog vidurkio funkcija egzistuoja tik indeksams  $\alpha > -r$ , tad renkantis neigiamą  $r$  svarbu nepažeisti šio reikalavimo. Dar daugiau, galima matyti, jog vidurkio funkcija labiausiai “ištempta” būtent taške  $r = -\alpha$ , tai leidžia tikėtis,



1 pav. Vidurkio priklausomybė nuo indekso skirtiniams r

jog parinkus  $r$  arti tikrosios indekso reikšmės, indeksas bus vertinamas geriausiai. Iš šių rezultatų tampa aišku, jog  $r$  parinkimas turi įtakos indekso vertinimui, o kartu ir testo savybėms.

Šiuos samprotavimus galima pagrįsti ir analiziškai, tai padaryta [9]. Jau žinome, kad:

$$h_r(\alpha) = h(\alpha, f_r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha+r} & , -\alpha < r, r \neq 0 \\ \frac{1}{\alpha} & , r = 0 \end{cases}$$

Imkime  $r \neq 0$ , tada galime užrašyti:  $p_r = \frac{\alpha}{\alpha+r}$ . Iš čia  $\alpha = \frac{rp_r}{1-p_r}$ . Kai  $r = 0$ , turime:  $p_0 = \frac{1}{\alpha}$  ir  $\alpha = \frac{1}{p_r}$ . Taigi:

$$h^{-1}(p_r, f_r(x)) = \begin{cases} \frac{rp_r}{1-p_r} & , -\alpha < r, r \neq 0 \\ \frac{1}{p_r} & , r = 0 \end{cases}$$

Suskaičiuokime atvirkštinės funkcijos išvestinę.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp_r} h^{-1}(p_r, f_r(x)) &= \frac{d}{dp_r} \left( \frac{rp_r}{1-p_r} \right) = \frac{r(1-p_r) - (-1)rp_r}{(1-p_r)^2} = \frac{r}{(1-p_r)^2} = \frac{r}{\left(1 - \frac{\alpha}{\alpha+r}\right)^2} \\ &= \frac{(\alpha+r)^2}{r}, r \neq 0, \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dp_0} h^{-1}(p_0, f_0(x)) = \frac{d}{dp_r} \left( \frac{1}{p_r} \right) = \frac{-1}{p_r^2} = -\alpha^2, r = 0.$$

Paėmus  $r = 1$ , mažiems  $\alpha$  išvestinė arti 1, tuo tarpu, kai  $r = 0$ , funkcijos išvestinė arti 0. Pastaruoju atveju net dideli vidurkio pokyčiai neturi svarios įtakos  $\alpha$  vertinimui. Su didelėmis  $\alpha$  reikšmėmis abi funkcijos elgiasi panašiai (išvestinės auga į begalybę), tačiau uodegū indeksų tyrime retai kada domina itin didelės reikšmės. Taigi tik dar kartą įsitikiname, jog

imant logaritmą gaunami geri rezultatai.

Pamèginkime pažiūrèti, kokie rezultatai imant  $r \neq 0$ . Imant  $r < 0$  atsiranda apribojimas  $r > -\alpha$ , tačiau reikšmių sritis dabar yra begalinis intervalas. Atvirkštinė funkcija imant  $r$  arti  $-\alpha$  taip pat arti 0 ir ima elgtis panašiai, kaip logaritmo atveju.

Taigi, šie svarstymai leidžia tiketis, jog optimalus  $r$  indekso vertinimui, o kartu ir mūsų naudojamai statistikai galėtų būti neigiamas.

[9] straipsnyje nagrinėjami a.d. su skirtiniu, kuris tenkina antros eilės asimptotinę sąlygą

$$1 - F(x) = C_1 x^{-\alpha} + C_2 x^{-\beta} + o(x^{-\beta}),$$

kai  $x \rightarrow \infty$ , o parametrai tenkina sąlygą  $0 < \alpha < \beta \leq \infty$ . Jame suskaičiuotos optimalios  $r_*$  ir  $m_*$  reikšmės skirtinio uodegos indekso vertinimui, čia pateiksime tik galutines formules:

$$r_* = -\frac{1}{2} \left( (\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2} \right),$$

$$m_* = D_* N^{1/(1+2\zeta)},$$

kur

$$D_* = \left( \frac{2\zeta(\alpha + 2r_*)}{\alpha} \left( \frac{C_2 \beta \zeta \Gamma(\beta/\alpha)}{C_1^{\beta/\alpha} (\beta + r_*)} \right) \right),$$

$$\zeta = \frac{\beta - \alpha}{\alpha},$$

o  $N$  - duomenų skaičius.

### 1.3. Sąlygų tikrinimas

Toliau parodysime, kad galime taikyti tokią testo modifikaciją, t.y. imti dydžius  $\kappa_{ni,r}$ . Pasirenkame svorio funkciją tokią pačią, kaip [3] straipsnyje, t.y.  $w(t) = (t(1-t))^\zeta, \zeta \in [0; 1]$ , branduoli  $K(x,y) = y - x$ . Patikrinsime, kokiems r mūsų pasirinktų a.d. skirtiniai tenkina (A), (M), (S) ir (R) sąlygas.

Antisimetriškumo sąlyga (A):

Akivaizdu, jog antisimetriškumo sąlyga yra tenkinama:

$$K(x,y) = x - y = -(y - x) = -K(y,x).$$

Momentų sąlyga (M):

Parodysime, kad momentų sąlyga tikrai tenkinama, jeigu  $-\min(\alpha_1, \alpha_2)/3 < r$ .

Pasirinkime  $\delta = 1$  (žr. 8 psl.). Tada

$$\begin{aligned}
\int |K|^3 d\mu_1 \otimes \mu_2 &= \int \int |x-y|^3 d\mu_1 \otimes \mu_2 = \int \int |(x-y)^3| d\mu_1 \otimes \mu_2 \\
&= \int \int |x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3| d\mu_1 \otimes \mu_2 \\
&\leq \int \int (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) d\mu_1 \otimes \mu_2 \\
&= \mathbf{E}X^3 + 3\mathbf{E}X^2\mathbf{E}Y + 3\mathbf{E}X\mathbf{E}Y^2 + \mathbf{E}Y^3 \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 3r} + 3\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + 2r} \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + r} + 3\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + r} \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + 2r} + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + 3r} < \infty,
\end{aligned}$$

jeigu tik  $-\min(\alpha_1, \alpha_2)/3 < r$ .

Patikrinsime, kada egzistuoja funkcijos  $R_1(y)$ ,  $R_n(y)$ .

$$R_1(y) = \int K(x,y)\nu_1(dx) = \int (x-y)\nu_1(dx) = \int x\nu_1(dx) - y \int \nu_1(dx) = \mathbf{E}X - y .$$

Ši funkcija egzistuoja, jei  $\mathbf{E}R_1(Y) < \infty$ . Tam pakanka, kad egzistuotų baigtiniai pirmeji momentai, t.y.  $\mathbf{E}R_1(Y) = \mathbf{E}X - \mathbf{E}Y < \infty$ , jei tik  $\mathbf{E}X, \mathbf{E}Y < \infty$ . Taigi šiuo atveju pakanka, kad  $-\min(\alpha_1, \alpha_2) < r$ . Analogiškai tikrinadami su  $R_n(y)$ , gautume tą patį reikalavimą. Taigi, matyti, jog reikalavimo  $-\min(\alpha_1, \alpha_2)/3 < r$  pilnai pakanka, kad būtų tenkinama momentų sąlyga.

## Pastaba

Paprastumo dėlei čia ėmėme  $\delta = 1$ , tačiau momentų sąlyga reikalauja tik  $\delta > 0$ . Taigi gautas reikalavimas  $-\min(\alpha_1, \alpha_2)/3 < r$  garantuoja, jog momentų sąlyga bus tenkinama, tačiau gali būti, jog pakaktų silpniesnio reikalavimo.

Stabilumo sąlyga (S):

Stabilumo sąlyga nėra tenkinama, tačiau, kaip pastebėta [3] straipsnyje, ši sąlyga ir nėra reikalinga, kadangi  $\lambda_n = \mathbf{E}\kappa_{n1,r} - \mathbf{E}\kappa_{nn,r} \rightarrow \beta_1 - \beta_2 \neq 0$ , kur  $\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_i + r}$ .

Reguliarumo sąlyga (R):

Akivaizdu, jog  $w'(t) = -\zeta \frac{1-2t}{(t(1-t))^{1+\zeta}} < \infty$ ,  $\forall t \in [d; 1-d]$ ,  $d > 0$ . Be to, funkcija tolydi šiame intervale.

Suskaiciavę reiškinio  $tw(t)$  išvestinę, gauname:  $(tw(t))' = \frac{1-\zeta-t(1-2\zeta)}{t^\zeta(1-t)^{1+\zeta}}$ . Kai  $\zeta > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0}(tw(t))' = \infty$ , tad galime imti  $t > 0$ . Aišku, kad vardiklis  $t^\zeta(1-t)^{1+\zeta} > 0$ ,  $\forall t \in (0; \tau]$ . Pertvarkę skaitiklį gauname:

$$1 - \zeta - t(1 - 2\zeta) = (1 - t) - \zeta(1 - 2t) = (1 - t)(1 - \zeta) + t\zeta > 0.$$

Kai  $\zeta = 0$  turime  $(tw(t))' = \frac{(1-t)}{(1-t)} = 1 > 0$ . Taigi,  $\inf_{0 \leq t \leq \tau} (tw(t))' > 0$ .

Suskaičiavę antrojo reiškinio išvestinę, gauname  $(w(t)(1-t))' = \frac{-\zeta - t(1-2\zeta)}{t^{1+\zeta}(1-t)^\zeta}$ . Kai  $\zeta > 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} (tw(t))' = \infty$ , tad galime imti  $t < 1$ . Matyti, jog vardiklis  $t^{1+\zeta}(1-t)^\zeta > 0$ ,  $\forall t \in [1-\tau; 1]$ . Skaitiklį vėl pertvarkome ir matome, jog

$$-\zeta - t(1-2\zeta) = -t - \zeta(1-t) + \zeta t = -\zeta(1-t) - t(1-\zeta) < 0.$$

Atveju  $\zeta = 0$  turime  $(tw(t))' = \frac{-t}{t} = -1 < 0$ . Taigi  $\inf_{1-\tau \leq t \leq 1-\tau} (w(t)(1-t)) < 0$  ir reguliarumo sąlygos tenkinamos.

## 2. Modeliavimas

Šioje dalyje empiriškai tikrinama pasiūlyto testo savybės su skirtingomis  $r$  reikšmėmis. Tyrimui modeliuojami duomenys su indeksu pasikeitimui. Duomenų modeliavimui pasirinktas Pareto skirstinys:

$$F(x) = 1 - C_1 x^{-\alpha}; \quad x \geq C_1^{1/\alpha}$$

Šiuo atveju skirstinio uodegos indeksas sutampa su Pareto skirstinio parametru ir lygus  $\alpha$ . Kadangi nagrinėjamas testas invariantiškas skalės atžvilgiu, imame  $C_1 = 1$ . Remdamiesi [9] straipsniu, galime suskaičiuoti optimalius  $r$  ir  $m$ . Pareto skirstiniui  $\beta = \infty$ , o  $C_2$  — bet koks teigiamas skaičius. tada:

$$\begin{aligned} r_* &= -\frac{1}{2} \left( (\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\left( (\alpha + \beta) - \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2} \right) \left( (\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2} \right)}{\left( (\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2} \right)} \\ &= -\frac{1}{2} \frac{2\alpha^2}{\left( (\alpha + \beta) + \sqrt{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha^2} \right)} \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Beto:

$$1/(1 + 2\zeta) = 1 / \left( 1 + 2 \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \right) = \alpha / (2\beta - \alpha) \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty$$

ir

$$D_* = \left( \frac{2\zeta(\alpha + 2r_*)}{\alpha} \left( \frac{C_2 \beta \zeta \Gamma(\beta/\alpha)}{C_1^{\beta/\alpha} (\beta + r_*)} \right) \right) \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty,$$

tad

$$m_* = D_* N^{1/(1+2\zeta)} \rightarrow 0, \beta \rightarrow \infty .$$

Kadangi negalime imti  $m = 0$  (santykiui apskaičiuoti reikalingi bent 2 elementai), pasirenkame  $m = 2$ .

Iš  $u_j^{(n)}$  išraiškos galime tikėtis, kad testas vienodai gerai randa indeksu pasikeitimą tiek indeksu padidėjimo, tiek sumažėjimo atvejais:  $u_j^{(n)}$  išraiškos priekyje stovintis koeficientas nepriklauso nuo indeksu ir yra simetriškas laiko atžvilgiu, o likusioje statistikos dalyje imamas dviejų vidurkių (santykių su indeksais  $1, 2, \dots, j$  ir santykių su indeksais  $j+1, j+2, \dots, n$ ) skirtumas. Tarkime, kad  $\pi_{ni}$  žymi analogiškai suskaičiuotus santykius, tik atvirkščiai pernumeruotiems duomenims (t.y. dabar  $\pi_{ni}$  yra n.v.p. su vidurkiu artimu  $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}$ , kai  $1 \leq i \leq n-k-1$ ,  $k = [\frac{\tau N}{m}]$  ir  $\pi_{ni}$  yra n.v.p. su vidurkiu artimu  $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{1+\alpha_1}$ , kai  $n-k+1 \leq i \leq n$ ). Užrašome  $u_j^{(n)}$  išraišką pradiniams duomenims taške  $j$  ir  $u_l^{(n)}$  iš-

raišką pernumeruotiemis duomenims taške  $l$ . Jeigu imsimė  $j = n - l$  abi jos nurodys iš tą patį tašką.

$$\begin{aligned}
 u_j^{(n)} &= \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right) \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \kappa_{ni} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n \kappa_{ni} \right) \\
 u_l^{(n)} &= \left( \frac{l(n-l)}{n^2} \right) \left( \frac{1}{l} \sum_{i=1}^l \pi_{ni} - \frac{1}{n-l} \sum_{i=l+1}^n \pi_{ni} \right) \\
 &= \left( \frac{(n-j)j}{n^2} \right) \left( \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \pi_{ni} - \frac{1}{j} \sum_{i=n-j+1}^n \pi_{ni} \right) \\
 &= - \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right) \left( \frac{1}{j} \sum_{i=n-j+1}^n \pi_{ni} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=1}^{n-j} \pi_{ni} \right) \\
 &= - \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right) \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \pi_{n(n-j+i)} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n \pi_{n(i-j)} \right) \\
 &= - \left( \frac{j(n-j)}{n^2} \right) \left( \frac{1}{j} \sum_{i=1}^j \pi_{n(n-i+1)} - \frac{1}{n-j} \sum_{i=j+1}^n \pi_{n(n-i+1)} \right),
 \end{aligned}$$

kur  $\forall i \pi_{n(n-i+1)}$  ir  $\kappa_{ni}$  turi tą patį skirstinį. Po pertvarkymų matyti, jog abiejų išraiškų moduliai turės tą patį skirstinį. Taigi, nagrinėjamas testas turėtų veikti taip pat gerai tiek indekso padidėjimo, tiek sumažėjimo atvejais, tad toliau aptarsime tik vieną iš atvejų — indekso padidėjimą.

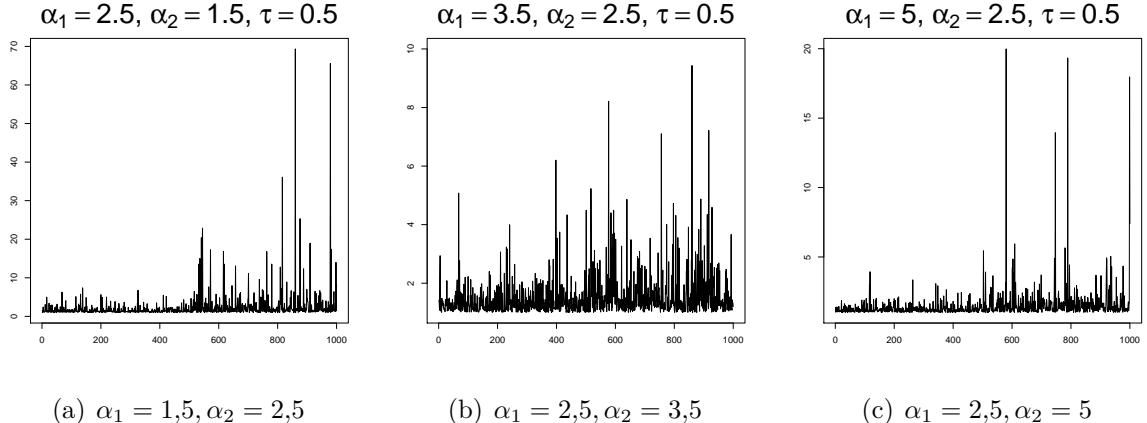
Duomenys modeliuojami su parametru  $\alpha_1$  iki pasikeitimo ir su parametru  $\alpha_2$  po jo.  $r$  parenkamas kisti kas  $0,1$  nuo  $-\min(\alpha_1, \alpha_2)/2$  iki  $2$ . Indekso pokyčio vieta parenkama keletu skirtinį atvejų:  $\tau = 0,25$ ,  $\tau = 0,5$  ir  $\tau = 0,75$ .

Testo savybės tikrinamos skirtingoms indeksų poroms:

1. Gražų skirstinio indeksas lygus  $1,5$  iki pasikeitimo ir  $2,5$  po jo.
2. Gražų skirstinio indeksas lygus  $2,5$  iki pasikeitimo ir  $3,5$  po jo.
3. Gražų skirstinio indeksas lygus  $2,5$  iki pasikeitimo ir  $5$  po jo.

2 pav. pateiktose grafikuose matyti, kaip atrodo sumodeliuoti duomenys skirtinoms indeksų poroms, kuomet indekso pasikeitimas yra taške  $\tau = 0,5$ :

Visuose trijuose grafikuose matyti indekso pokytis. Nors indeksas pirmuoju ir antruoju atveju pasikeičia tiek pat (t.y. padidėja vienetu), tačiau pirmajame grafike pokytis matyti labiau, kadangi patys indeksai mažesni ir šis pokytis tampa “svaresnis”. Trečiuoju atveju indeksų pokytis didesnis, tai gerai matyti ir grafike.

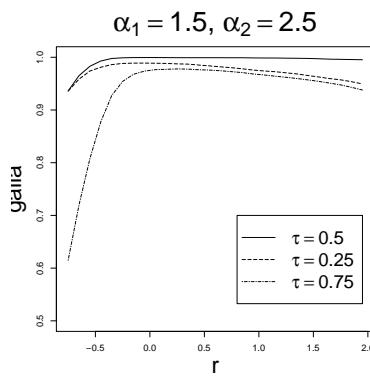


2 pav. Sumodeliuoti duomenys su indekso pasikeitimui skirtingoms indekų poroms.

## 2.1. Testo galia

Empiriškai tikrinant testo galią, duomenys modeliuojami daug kartų ( $K = 10000$ ), kiekvienu atveju imtį sudaro  $N = 1000$  duomenų. 0,95 pasiklivimo lygmenis kritinė reikšmė lygi 1,36. Kiekvienu atveju apskaičiuojame  $\max_{j=1,2,\dots,n} U_j^{(n)}$  reikšmę ir tikriname, kiek kartų ji yra didesnė už kritinę reikšmę ir indekso pokytis yra surandamas. Paėmus šio skaičiaus ir visų bandymų skaičiaus santykį, gauname testo galą atitinkamu atveju.

Toliau grafikuose pateikiame empiriškai gautą galų grafikus. 3 pav. pateiktas galios grafikas indeksų porai  $\alpha_1 = 1,5, \alpha_2 = 2,5$ .

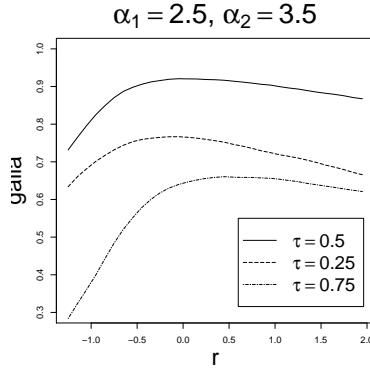


3 pav. Galia indeksų porai  $\alpha_1 = 1,5, \alpha_2 = 2,5$ .

Apskritai, rezultatai gana geri su visais  $r$ , galia beveik visur viršija 0,95. Matyti, jog testo galia didžiausia prie 0, o tolstant rezultatai tik blogėja, tačiau tokio rezultato ir tikėtasi, nes optimali reikšmė  $r_* = 0$ . Rezultatai visais trim atvejais ( $\tau = 0,25, \tau = 0,5$  ir  $\tau = 0,75$ ) “greičiau” tampa blogesni artėjant link  $-\min(\alpha_1, \alpha_2)/2$ . Tai galima paaiškinti tuo, kad artėjama prie taško, kur dispersija nėra baigtinė ir nebetenkinamos teoremos sąlygos (iš

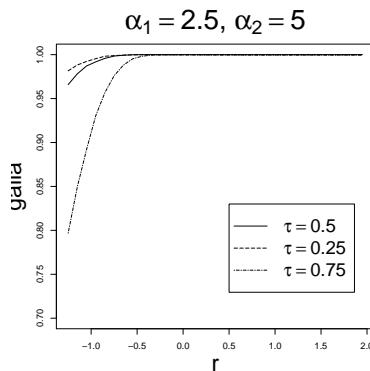
teoremos aišku, jog būtina sąlyga yra, kad egzistuotų antrasis momentas. Taip pat žinome, jog teoremos sąlygos tenkinamos, kai egzistuoja trečiasis momentas, tačiau galbūt pakaktų ir mažesnio apribojimo).

Apskritai imant rezultatai geriausi, kuomet indekso pokytis yra centre. Tai galima paaiškinti tuo, kad tokiu atveju duomenų kiekis skirtingose grupėse (su vienu ir kitu indeksu) yra vienodos. Tai, kad vienoje kurioje grupėje duomenų yra mažiau, lemia, jog sunkiau tiksliai nustatyti uodegos indekso pokytį ir jo vietą.



4 pav. Galia indeksų porai  $\alpha_1 = 2,5, \alpha_2 = 3,5$ .

4 pav. pateikiamas analogiškas grafikas indeksų porai  $\alpha_1 = 2,5, \alpha_2 = 3,5$ . Matyti, jog testas vėl geriausiai veikia, kai  $r$  arti 0, o r tolstant nuo jo galia ima blogėti. Taip pat iš grafikų matyti, kad šiuo atveju rezultatai daug blogesni nei praėjusiui (galia net aukščiausiaiame taške nesiekia 0,95). Tokius rezultatus galima paaiškinti tuo, kad šiuo atveju abu indeksai yra didesni nei pirmuoju atveju, tad tas pats indekso pokytis (padidėjimas vienetu) šiuo atveju yra ne toks reikšmingas ir dėl to sunkiau aptinkamas.



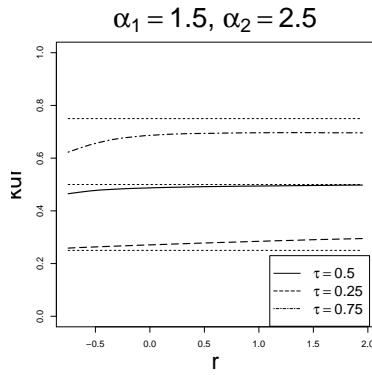
5 pav. Galia indeksų porai  $\alpha_1 = 2,5, \alpha_2 = 5$ .

5 pav. pateikiamas grafikas indeksų porai  $\alpha_1 = 2,5, \alpha_2 = 5$ . Šiuo atveju indekso pokytis buvo labai didelis, tad ir randamas labai dažnai. Galios didesnės už 0,95 beveik visiem  $r$ .

Empiriškai gautos galios indekso padidėjimo ir sumažėjimo atvejais pateikiamos ir priede, atitinkamai 3 ir 4 lentelėse. Iš jose pateiktų rezultatų galima ištikinti, kad tiek indekso padidėjimo, tiek sumažėjimo atveju testas veikia vienodai gerai.

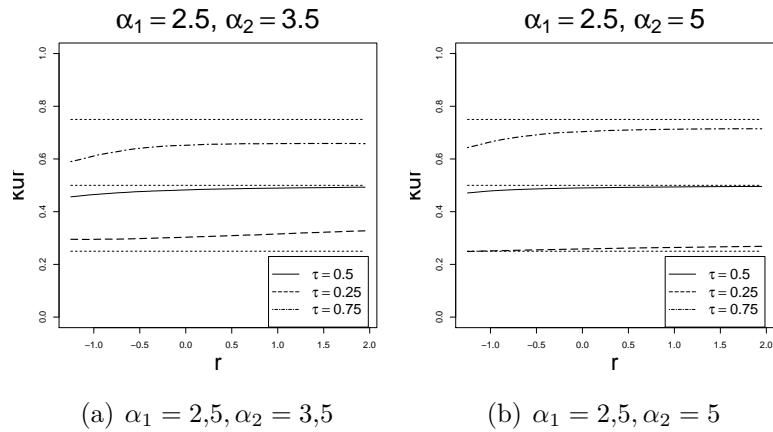
## 2.2. Indekso pasikeitimo radimo vieta

Kartu tikrinama ir kaip tiksliai testas randa indekso pasikeitimo vietą skirtingais atvejais. Tiems patiem sumodeliuotiems duomenims kiekvienoje imtyje žiūrima, kuriame taške  $U_j^{(n)}$  pasiekia maksimalią reikšmę, ir apskaičiuojamas šių reikšmių vidurkis. 6 pav. grafike parodyta, kur randamas pokytis skirtingais atvejais indeksų porai  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 2,5$ .



6 pav. Indekso pasikeitimo radimo vieta indeksų porai  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 2,5$ .

Apskritai, pasikeitimo vieta randama gana tiksliai. Matyti, jog rezultatai vėl priklauso nuo pokyčio vietas: vieta ne taip tiksliai nustatoma, kai  $\tau = 0,75$ . Indekso pasikeitimas randamas šiek tiek pavėluotai, kai  $\tau = 0,25$  ir anksčiau, kai  $\tau = 0,5$  ir  $\tau = 0,75$ .



7 pav. Lūžio radimo vieta indeksų poroms  $\alpha_1 = 2,5$ ,  $\alpha_2 = 3,5$ . ir  $\alpha_1 = 2,5$ ,  $\alpha_2 = 5$ .

Analogiški rezultatai ir kitoms indeksų poroms, jie pavaizduoti 7 pav. Galime pastebėti,

jog apskritai rezultatai šiek tiek blogėja indeksų porai  $\alpha_1 = 2,5$ ,  $\alpha_2 = 3,5$  dėl ne tokio žymaus skirtumo, tuo tarpu indeksų porai  $\alpha_1 = 2,5$ ,  $\alpha_2 = 5$  rezultatai labai geri dėl labai didelio indeksų skirtumo.

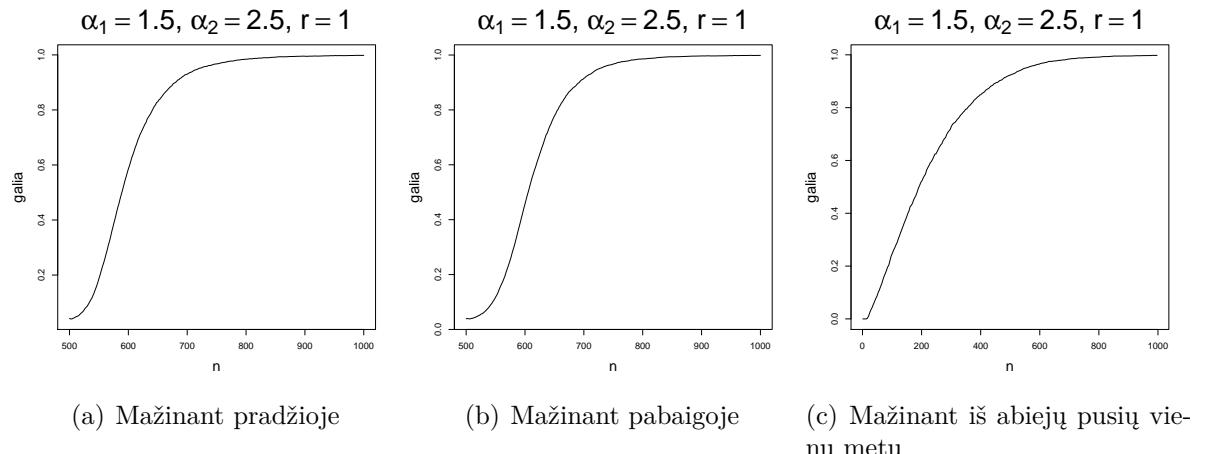
Tikslūs skaičiai pateikiami 5 ir 6 lentelėse, iš jų vėl matyti, jog indekso padidėjimo ir sumažėjimo atveju indekso pasikeitimo vieta randama panašiai gerai.

### 2.3. Intervalo mažinimas

Galiausiai, patikrinsime, kaip kinta testo galia, kintant turimų duomenų kiekiui. Tam imame duomenis, sumodeliuotus indeksų porai  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 2,5$ . Kitoms indeksų poroms rezultatai turėtų būti analogiški. Kiekvienoje imtyje mažinsime duomenų kiekį trimis skirtingais atvejais:

1. Atmetama po vieną grupelę nuo pradžios,
2. Atmetama po vieną grupelę nuo pabaigos,
3. Atmetama iš karto po dvi grupeles: vieną nuo pradžios ir vieną nuo pabaigos.

$r$  taip pat pasirenkame tris skirtinges reikšmes:  $r = 1$ ,  $r = 0$  ir  $r = -1$ . Galiausiai suskaičiuojame empirinę galą kiekvienam fiksuo tam duomenų kiekiui.



8 pav. Intervalo mažinimas indeksų porai  $\alpha_1 = 1,5$ ,  $\alpha_2 = 2,5$ .

Rezultatai su  $r = 1$  pateikiami 8 pav. Matyti, kad mažinant intervalą iš kairės ir iš dešinės pusės testo galia kinta panašiai. Galia didėja didinant duomenų kiekį, o imant daugiau nei 700 duomenų jau gaunami gana geri rezultatai. Tai pat matyti, jog galia žymiai didesnė, net ir turit mažiau duomenų, jei intervalas mažinamas iš abiejų pusiu, t.y. indekso pasikeitimo vieta keičiant duomenų kiekį lieka centre. Kai  $r = 0$  ir  $r = -1$  rezultatai analogiški.

### 3. Realūs duomenys

Šiame skyriuje vertinsime skirtinių uodegos indeksų pokyčius realiems duomenims. Dirbant su tokiais duomenimis pagrindinė problema yra ta, kad nieko nežinome apie jų skirtinius ar galimas indeksų reikšmes. Taigi sunku pritaikyti ansktesniame skyriuje aptartus optimalius  $r$  ir  $m$  pasirinkimus. Dėl šios priežasties taikysime aptartąjį testą nuosekliai keisdami  $r$  ir  $m$ , taip bandydami išvertinti indekso pasikeitimą. Pirmajame poskyryje nagrinėsime keturis skirtingus indeksus laikotarpiu, apimančiu 2008-2009 m. finansinę krizę. Antrajame — Azijos šalių valiutų kursus laikotarpiu, apimančiu 1997-1998 m. Azijos finansinę krizę.

#### 3.1. Indeksai

Duomenys tyrimui paimti iš internetinės svetainės <http://finance.yahoo.com>, aplankytos 2011 metų balandžio 5 dieną. Nagrinėjamos indeksų logaritminės grąžos. Kaip jau anksčiau buvo minėta, statistikoje  $U_j^{(n)}$  imami dviejų elementų santykiai, pakelti laipsniu  $r$ , t.y.

$$\kappa_{ni,r} = \kappa_{ni}^r = \left( \frac{M_{ni}^{(2)}}{M_{ni}^{(1)}} \right)^r.$$

Todėl jei didžiausias ir antras pagal dydį grupelės elementas (t.y. dvi didžiausios grąžos grupelėje) yra priešingų ženklų,  $\kappa_{ni}$  gauname neigiamą ir nebegalime imti  $r < 1$ . Taigi  $U_j^{(n)}$  statistika negali būti taikoma neigiamiems duomenims. Tačiau finansinėse grąžose neigiamos grąžos pasitaiko taip pat dažnai, kaip ir teigiamos. Dėl šios priežasties šiuose skaičiavimuose naudosime grąžų modulius. Kad galētume daryti šią modifikaciją, pirmiausia tikrinsime simetriškumo hipotezę visiems turimiems duomenims. Vizualiai simetriškumo tendenciją galima pastebeti jau iš grąžų histogramų. Jos pavaizduotos kiekvienam indeksui skirtame poskyryje, t.y. 9(d), 17(d), 24(d) ir 31(d) pav. Kad galima būtų drąsiai teigti, jog naudojami duomenys yra simetriški, atliekame statistinius simetriškumo testus. Naudojamas Vilkoksono (angl. Wilkoxon *signed rank*) testas, tikrinantis hipotezę, kad duomenys yra pasiskirstę simetriškai apie tam tikrą reikšmę. Detalesnis testo aprašymas pateikiamas priede.

Pažymėkime indekso  $i$  simetrijos ašę  $\theta_i$ , kur  $i = 1; 2; 3; 4$ , o skaičiai 1,2,3,4 žymi atitinkamai indeksus DJIA, NASDAQ, S&P 500 ir FTSE 100. Mes tikriname hipotezę

$$H_0 : \theta_i = \tilde{X}_i,$$

čia  $\tilde{X}_i$  žymi indekso  $i$  grąžų  $X$  medianas. Alternatyvi hipotezė

$$H_a : \theta_i \neq \tilde{X}_i.$$

Testo, atlikto naudojant visų keturių tiriamų indeksų duomenis, rezultatai pateikiami lentelėje 7 . Kaip matome iš rezultatų, Vilkoksono testo  $p$  reikšmės ženkliai viršija reikšmingumo lygmenį  $\alpha = 0,05$ , todėl galime drąsiai teigti, kad visų tiriamų indeksų grąžos yra pasiskirsčiusios simetriškai apie savo medianas. Taip pat atliekami dar trys simetriškumo testai: Mira testas [7], Cabilio-Masaro testas [1] ir MGG (Miao, Gel ir Gastwirth) [6] testas. Rezultatai pateikiami lentelėje 8 . Esant reikšmingumo lygmeniui 0,05, visi trys testai neatmeta nulinės hipotezės apie simetriškumą dviems iš tiriamų indeksų: DJIA ir FTSE 100. Tačiau reikšmingumo lygmenį sumažinus iki 0,01, Mira testas ir Cabilio-Masaro testas taip pat neatmeta hipozės ir likusiems dviems indeksams: NASDAQ ir S&P 500. Kadangi visų nagrinėjamų indeksų grąžų medianos beveik nesiskiria nuo 0, kas matoma iš lentelės 7 , galima daryti išvadą, kad indeksų grąžos gana simetriškai pasiskirsčiusios apie 0. Todėl tolesniusose skaičiavimuose naudosime grąžų modulius.

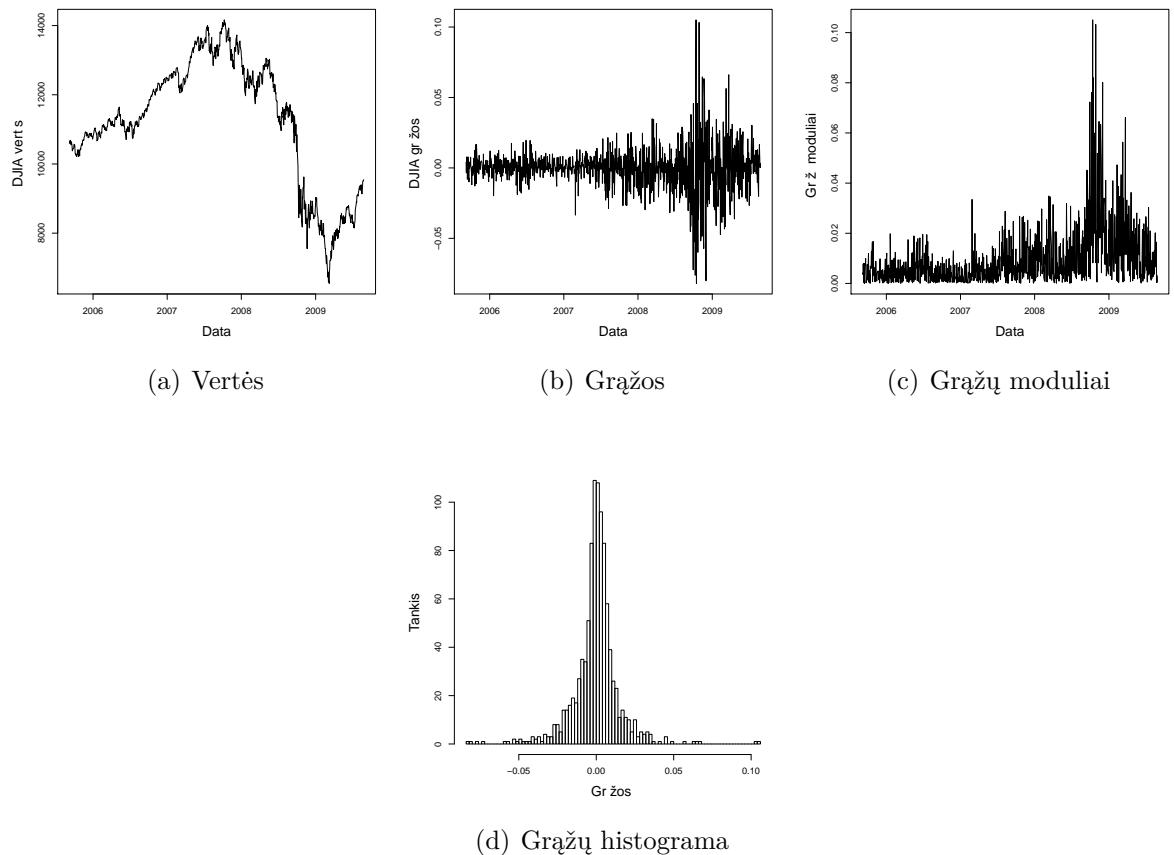
### 3.1.1. DJIA (angl. Dow Jones Industrial Average) indeksas

The Dow Jones Industrial Average — vienas iš keleto akcijų rinkos indeksų, XIX a. sukurta Šarlio Dau — „The Wall Street Journal“ redaktoriaus ir „Dow Jones & Company“ įkūrėjo. Šis indeksas atspindi JAV industrinio sektoriaus akcijų kursus. Tai yra antras pagal senumą indeksas Jungtinėse Valstijose, einantis po to paties verslininko sukurto Dow Jones Transportation Average indekso. Indeksas apskaičiuojamas naudojant 30-ties didžiausių ir paklausiausių JAV kompanijų akcijų kainas. Žodis industrinis yra istorinis reliktas, nes šiuo metu daug didžiausių firmų neturi nieko bendro su senaja sunkiaja industriją. Dow Jones Industrial Average (DJIA) — pramoninis Dow Jones indeksas tam tikru būdu išreiškia kotiruojamą Niujorko vertybinių popierių biržos (angl. New York Stock Exchange arba NYSE) 30-ties stambiausių JAV pramonės korporacijų vidutinį paprastųjų akcijų kursą. Didesnė dalis DJIA korporacijų yra žinomos visame pasaulyje. Tai „IBM“, „Boeing“, „General Electric“, „General Motors“, „Philip Morris“ ir pan. Beje, iš šiuolaikinio DJIA sudėtį yra ištrauktos ir 2 korporacijos, kurių pagrindinė veiklos sritis nėra pramoninė gamyba. Tai žinoma finansinė kompanija „American Express“ ir stambiausia JAV telekomunikacijų kompanija „American Telephone & Telegraph Co“. Indeksas gaunamas sudėjus 30 pagrindinių JAV korporacijų vienos akcijos kainas, neatsižvelgiant į bendrą išleistų akcijų skaičių, ir padalinus iš specialaus daliklio, kuris kinta, kai akcijos dalinamos arba keičiasi akcijų sąrašas.

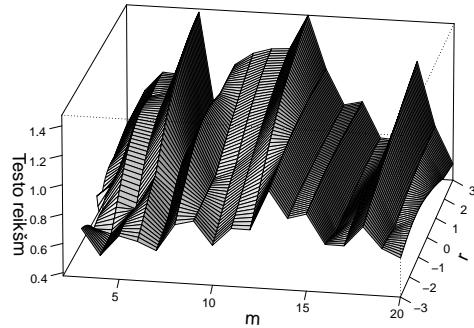
$$DJIA_t = \frac{\sum_{i=1}^{30} p_t^i}{d_t},$$

čia  $p_t^i$  —  $i$ -tosios kompanijos vienos akcijos kaina momentu  $t$ , o  $d_t$  — specialus daliklis. 9(a) pav. pavaizduotos DJIA indekso vertės, 9(b) pav. - grąžos, 9(c) pav. - grąžų moduliai ir 9(d) pav. - grąžų histograma kasdieniniams duomenims nuo 2005-09-07 iki 2009-08-26. Iš

viso nagrinėjama 1000 duomenų seka. Kadangi iš histogramos, pavaizduotos 9(d) pav. grafiuke, ir iš simetriškumo testų, kurių rezultatai pateikti lentelėse 7 ir 8 , galime daryti išvadą, kad grąžų skirstinys simetrinis, skaičiavimai atliekami absoliučioms DJIA grąžų vertėms.

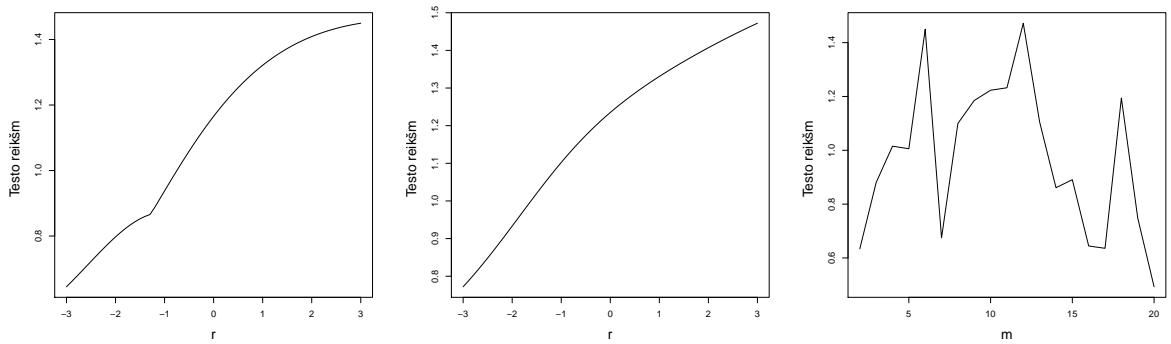


9 pav. DJIA indekso duomenys nuo 2005-09-07 iki 2009-08-26



10 pav. Testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  DJIA duomenims nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26

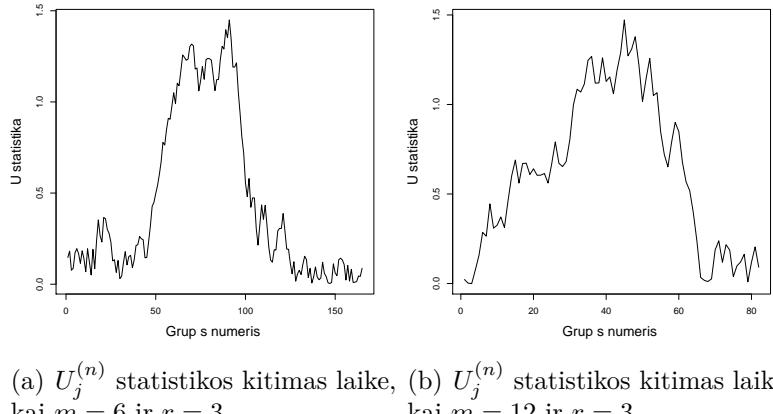
10 pav. pavaizduotos maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmės, priklausančios nuo parametrų  $r$  ir  $m$ . Didžiausia statistikos reikšmė randama, kai  $m = 12$  ir  $r = 3$  ir yra lygi 1,4721, taigi kritinė reikšmė 1,36 viršijama ir nusatomas indekso pasikeitimas. Iš visų tikrintų parametru  $r$  ir  $m$  kombinacijų indekso pasikeitimą aptinka visi  $r = 1,4; 1,5; \dots; 3$ , kai  $m = 6$  arba  $m = 12$ . 11(a) pav. ir 11(b) pav. grafike pavaizduota testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  tiems  $m$ , su kuriais buvo surastas indekso pasikeitimas, t.y.  $m = 6$  ir  $m = 12$ . Pav 11(c) grafike pavaizdota testo reikšmių priklausomybė nuo  $m$ , tam  $r$ , su kuriuo buvo surasta maksimali  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmė, t.y.  $r = 3$ . Kaip matome, testo reikšmės daug labiau priklauso nuo parametro  $m$  negu nuo  $r$ .



(a) testo reikšmių priklausomybė  
nuo  $r$ , kai  $m = 6$       (b) testo reikšmių priklausomybė  
nuo  $r$ , kai  $m = 12$       (c) testo reikšmių priklausomybė  
nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .

11 pav. DJIA indekso testo reikšmių priklausomybės nuo  $r$  ir nuo  $m$  pjūviai.

Lentelėje 9 pateikiamas testo reikšmės, nustatytos indekso pasikeitimą, vietos, kuriose



12 pav. Statistikos  $U_j^{(n)}$  kitimas laike DJIA duomenims nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26

nustatytais pasikeitimais, atitinkami parametrai  $r$  ir  $m$ , bei  $\alpha_1$  ir  $\alpha_2$  indeksai prieš ir po pasikeitimo — DJIA indekso duomenims nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26. Indeksai prieš ir po pasikeitimo čia ir toliau darbe nustatomi pagal šią procedūrą. Pirmiausia suskaičiuojami  $\kappa_{ni,r} = \kappa_{ni}^r$  vidurkiai iki pasikeitimo ir po jo. Kadangi, kaip buvo parodyta 1.2. dalyje, funkcija

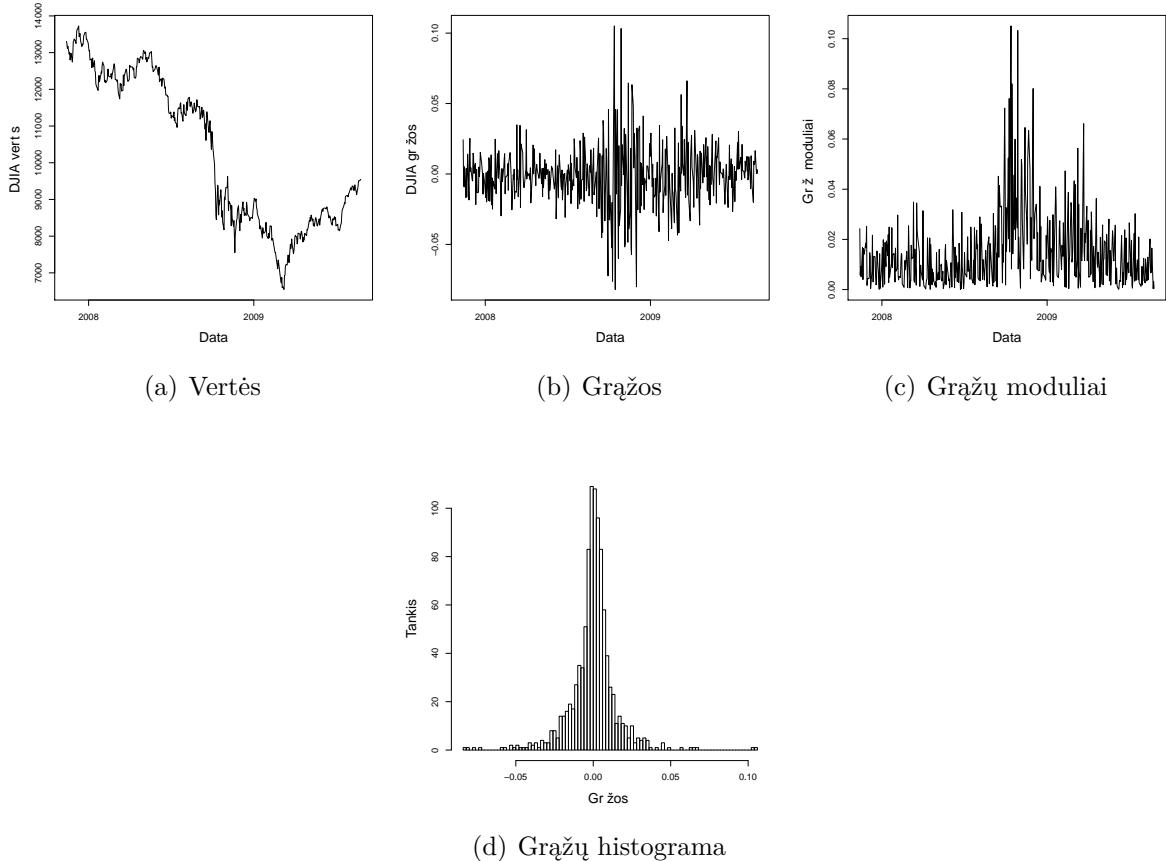
$$h^{-1}(p_r, f_r(x)) = \begin{cases} \frac{rp_r}{1-p_r} & , -\alpha < r, r \neq 0 \\ \frac{1}{p_r} & , r = 0 \end{cases}$$

galima laikyti  $\alpha$  įvertiniu,  $p_r$  imamas lygus  $\kappa_{ni,r}$  vidurkiui iki ir po indekso pasikeitimo ir taip įvertinami uodegos indeksai  $\alpha_1$  ir  $\alpha_2$ . Indeksų pasikeitimo vieta nustatoma 2007 metų spalio pabaigoje - lapkričio pradžioje, kas yra palyginti anksti.

Tačiau, kaip matome iš rezultatų, pateiktų lentelėje 9 , indekso pasikeitimas nustatomas iš mažesnio į didesnį, kas reikštų uodegos palengvėjimą. Šis rezultatas neatitinka rezultatų, kurių buvo galima tikėtis, tačiau tam įtakos gali turėti per ilgo intervalo parinkimas ar intervalo nesimetriškumas. Toliau bus tiriami to paties indekso duomenys trumpesniu laikotarpiu, o šios dalies pabaigoje, t.y. poskyryje 3.1.5. pateiksime testo veikimo priklausomybę nuo intervalo ilgio bei vietas, kurioje yra indekso pasikeitimas.

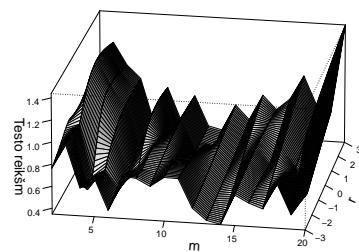
12(a) pav. pateikiamas  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike, naudojant parametrus  $m = 6$  ir  $r = 3$ , 12(b) pav. — su parametrais  $m = 12$  ir  $r = 3$ .

Kadangi ankstesniuose tyrimuose buvo pastebėta, kad indekso pasikeitimo radimas gali priklausyti ir nuo vietos, kurioje jis yra turimuose duomenyse (arčiau pradžios, viduryje ar arčiau pabaigos), toliau nagrinėjami tie patys DJIA indekso kasdieniniai duomenys tik nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26. 13(a) pav. pavaizduotos DJIA indekso vertės, 13(b) pav. — DJIA gražos, 13(c) pav. — gražų moduliai ir 13(d) pav. gražų histograma kasdieniniams

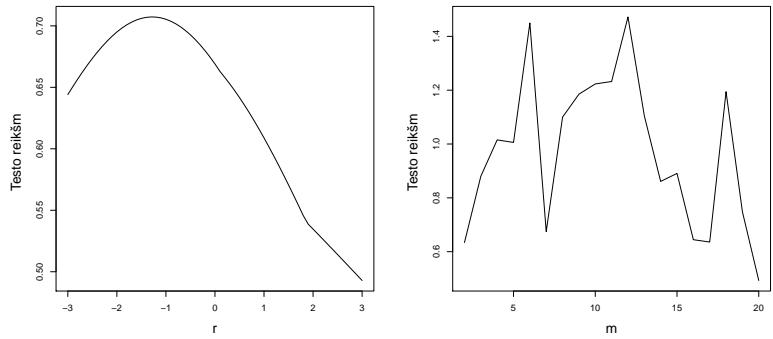


13 pav. DJIA indekso duomenys nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26.

atitinkamo laikotarpio duomenims. Iš viso nagrinėjama 450 duomenų seka. Kaip matome iš 13(b) pav. ir 13(c) pav., didžiausios grąžų reikšmės yra maždaug intervalo viduryje. Toliau analizuojame duomenis pagal tą pačią procedūrą kaip ir prieš tai. 14 pav. pavaizduotos teste reikšmės DJIA duomenims nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26.



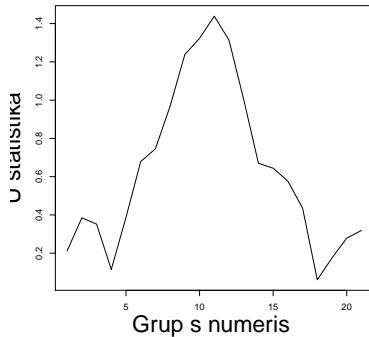
14 pav. Testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  DJIA duomenims nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26



(a) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 20$ .  
 (b) testo reikšmių priklausomybė nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .

15 pav. DJIA indekso testo reikšmių priklausomybės nuo  $r$  ir nuo  $m$  pjūviai.

15(a) pav. grafike pavaizduota testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  tam  $m$ , su kuriuo buvo surasta maksimali  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmė, t.y.  $m = 20$ . 15(b) pav. grafike pavaizdota testo reikšmių priklausomybė nuo  $m$ , tam  $r$ , su kuriuo buvo surasta maksimali  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmė, t.y.  $r = 3$ . Šiuo atveju maksimali statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmė randama, kai  $m = 20$  ir  $r = 3$ , ir yra lygi 1,4385. Taigi kritinė reikšmė viršijama ir lūžis randamas. Bendrai paėmus, kritinė reikšmė viršijama su visais  $r = 0,7; 0,8; \dots; 3$ , kai  $m = 20$ . Lentelėje 10 pateikiame testo reikšmės, nustačiusios indekso pasikeitimą, vietas, kuriose nustatyta pasikeitimas, atitinkami parametrai  $r$  ir  $m$ , bei  $\alpha_1$  ir  $\alpha_2$  — indeksai prieš ir po pasikeitimo — DJIA indekso duomenims nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26. Indekso pasikeitimo vieta nustatoma 2008 metų rugpjūčio - rugsėjo mėnesį. Kaip matome, šikart indeksai iki nustatyto pasikeitimo vietas yra didesni negu po jos. Priešingai nei nagrinėjant indekso duomenis nuo 2005-09-07 iki 2009-08-26, rezultatai atitinka lūkesčius. Galima daryti išvadą, kad testo veikimas priklauso ne tik nuo parametrų  $r$  ir  $m$ , bet ir nuo intervalo ilgio bei simetriškumo.

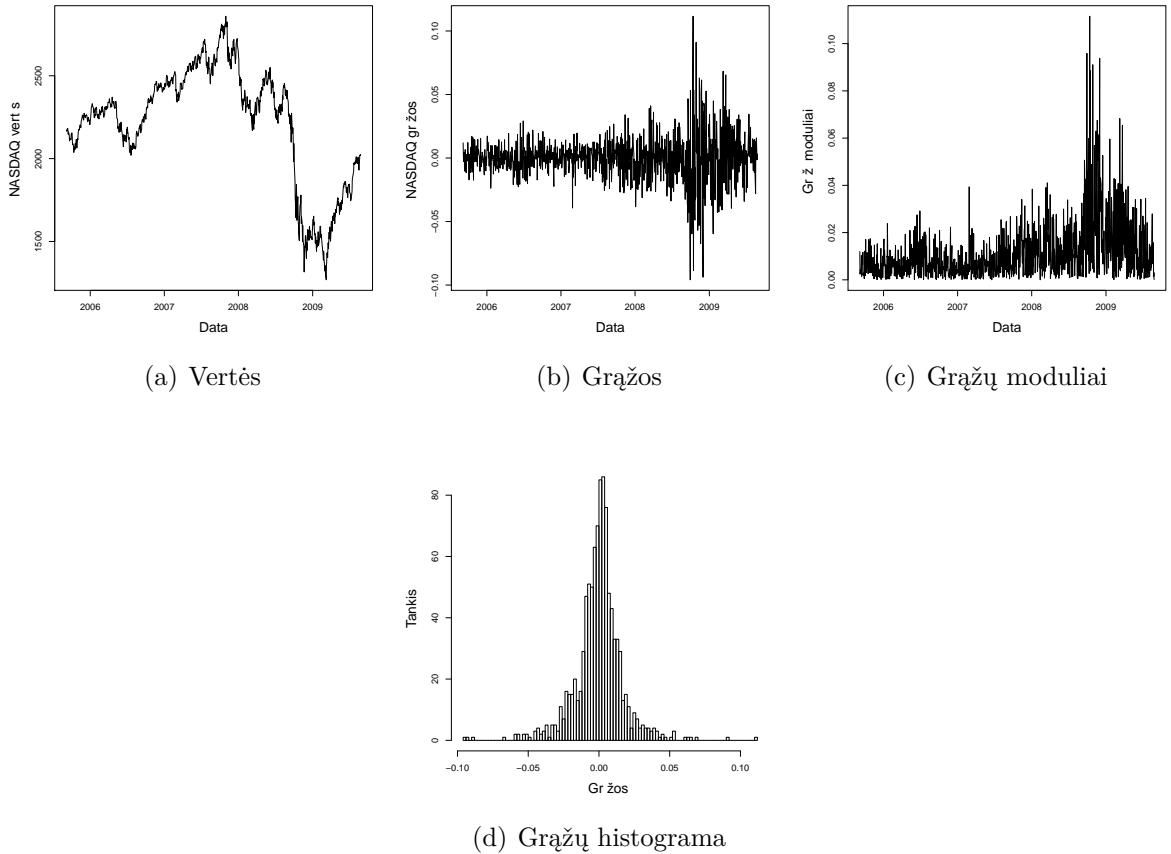


16 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike DJIA indekso duomenims nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26.

16 pav. pavaizduotas statistikos kitimas laike su geriausiais rastais parametrais. Laikas šiame grafike yra matuojamas grupelių numeriais grupuojant po 20 grąžų, t.y.  $U_j^{(n)}$  statistikos maksimumas, pasiektas vienuoliktoje grupelėje reiškia nuo 2008-08-29 iki 2008-09-26 realiam laike.

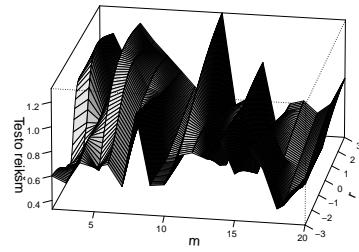
### 3.1.2. NASDAQ (angl. National Association of Securities Dealers Automated Quotations) Composite indeksas

Tai vertybinių popierių indeksas, kurio svarią dalį sudaro aukštujų technologijų bendrovės ir kurių akcijomis prekiaujama NASDAQ VP biržoje. NASDAQ indeksą sudaro virš 3000 įvairaus pobūdžio, daugiausiai akcijų vertybinių popieriai. Nagrinėjame NASDAQ indekso reikšmes nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26, t.y. 1000 dieninių grąžų. 17 pav. matome NASDAQ Composite indekso vertes, grąžas, grąžų modulius ir histogramą kasdieniniams duomenims.

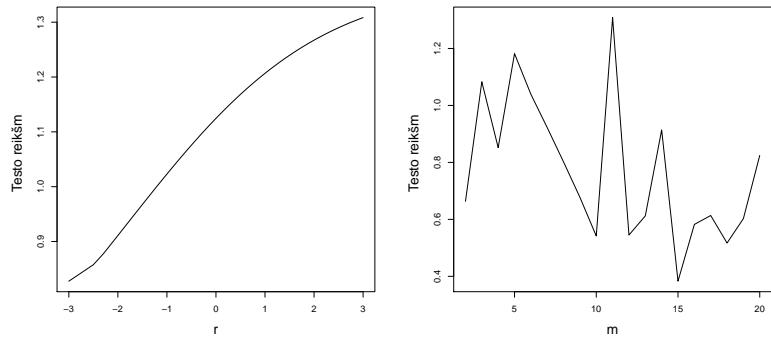


17 pav. NASDAQ indekso duomenys nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26

Kartojame tą pačią procedūrą kaip ir su DJIA indeksu. Pateikiami analogiški grafikai. Maksimali testo reikšmė yra lygi 1,3083 ir randama, kai  $m = 11$  ir  $r = 3$ , todėl 19(a) pav. matome testo reikšmių priklausomybę nuo  $r$ , kai  $m = 11$ , o 19(a) pav. — nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .



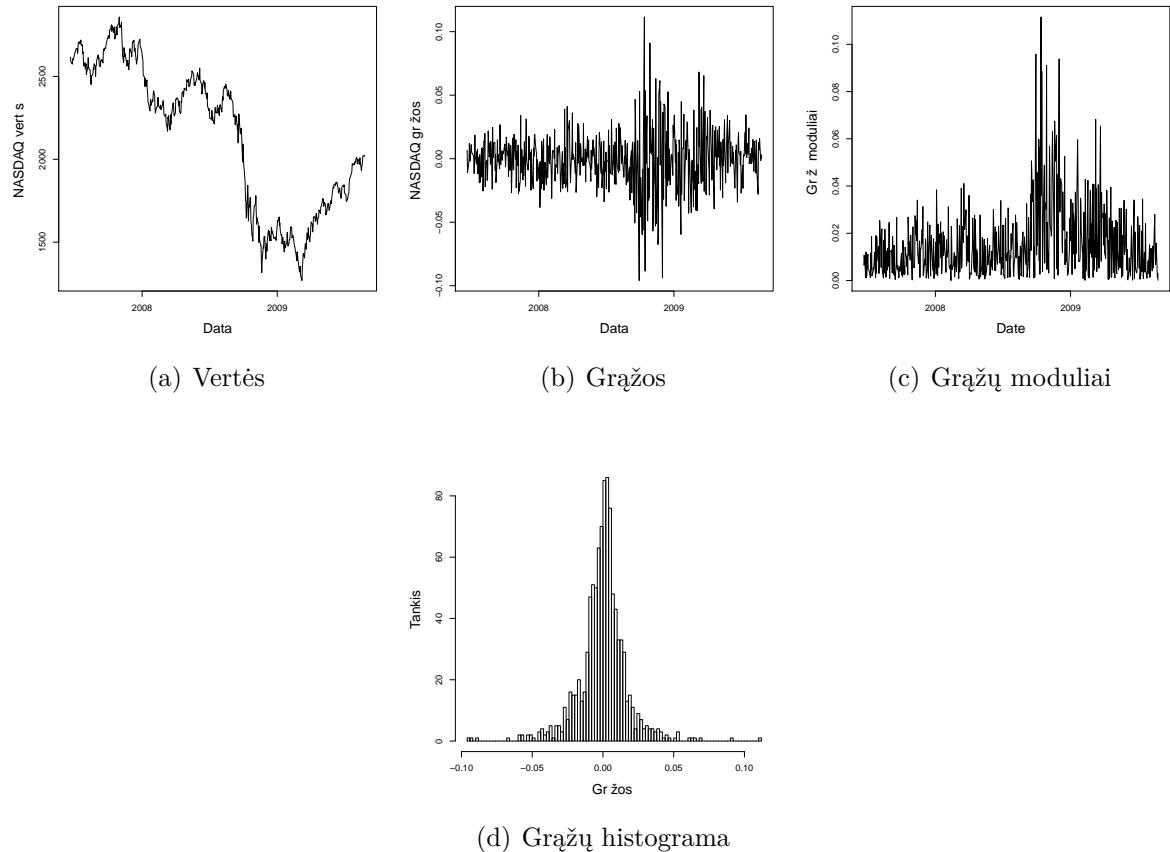
18 pav. Testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  NASDAQ duomenims nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26



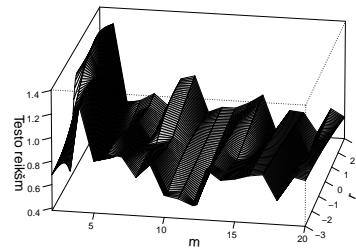
(a) testo reikšmių priklausomybė  
nuo  $r$ , kai  $m = 11$ . (b) testo reikšmių priklausomybė  
nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .

19 pav. NASDAQ indekso testo reikšmių priklausomybės nuo  $r$  ir nuo  $m$  pjūviai.

Kadangi maksimali rasta  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmė neviršija kritinės reikšmės 1,36, indekso pasikeitimo su 1000 duomenų seka nerandama, todėl tie patys skaičiavimai pritaikomi mažesniams intervalui, kur didžiausios gražos yra maždaug intervalo viduryje. Tyrinėjama 550 ilgio seka - nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26. Vėlgi 20 pav. pavaizduotos NASDAQ indekso vertės, gražos, gražų moduliai ir gražų histograma atitinkamam laikotarpiui.



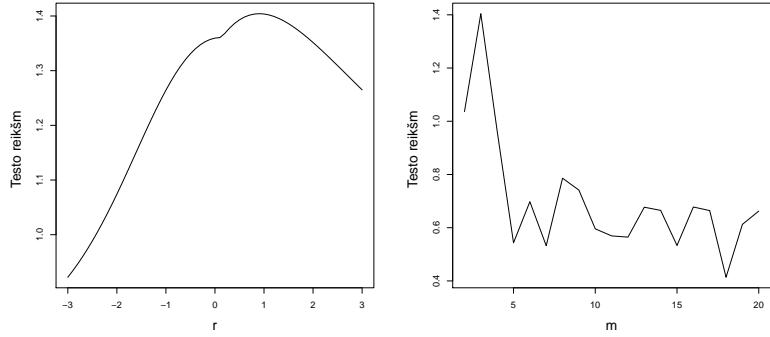
20 pav. NASDAQ indekso duomenys nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26.



21 pav. Testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  NASDAQ duomenims nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26

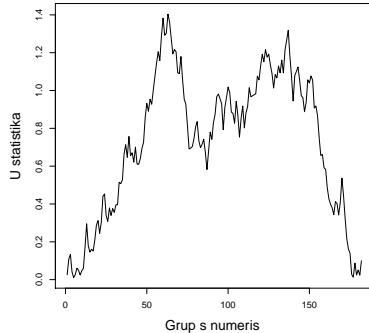
Šiuo atveju kritinė reikšmė viršijama su visais  $r = 0,1; 0,2; \dots; 1,8$ , kai  $m = 3$ . 22 pav. vaizduoja pjūvius pagal tokias  $m$  ir  $r$  reikšmes, kurios suranda didžiausią statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmę, t.y.  $m = 3$  ir  $r = 0,9$ . Lentelėje 11 pateikiamas testo reikšmės, nustačiusios indekso pasikeitimą, vietas, kuriose nustatyta pasikeitimas, atitinkami parametrai  $r$  ir  $m$ ,

bei  $\alpha_1$  ir  $\alpha_2$  — indeksai prieš ir po pasikeitimo — NASDAQ indekso duomenims nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26. Indekso pasikeitimo vieta nustatoma 2008 metų kovo mėnesį. Kaip matome, indeksai iki nustatyto pasikeitimo vietos yra didesni negu po jos. Todėl galime teigti, kad krizės metu šio indekso pasiskirstymo uodega pasunkėjo.



(a) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 3$ .  
(b) testo reikšmių priklausomybė nuo  $m$ , kai  $r = 0,9$ .

22 pav. NASDAQ indekso testo reikšmių priklausomybės nuo  $r$  ir nuo  $m$  pjūviai.



23 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike NASDAQ indekso duomenims nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26

23 pav. pavaizduotas  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimo laike grafikas, nubrėžtas su parametru  $r$  ir  $m$  kombinacija, aptinkusia didžiausią  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmę, t.y.  $m = 3$  ir  $r = 0,9$ .

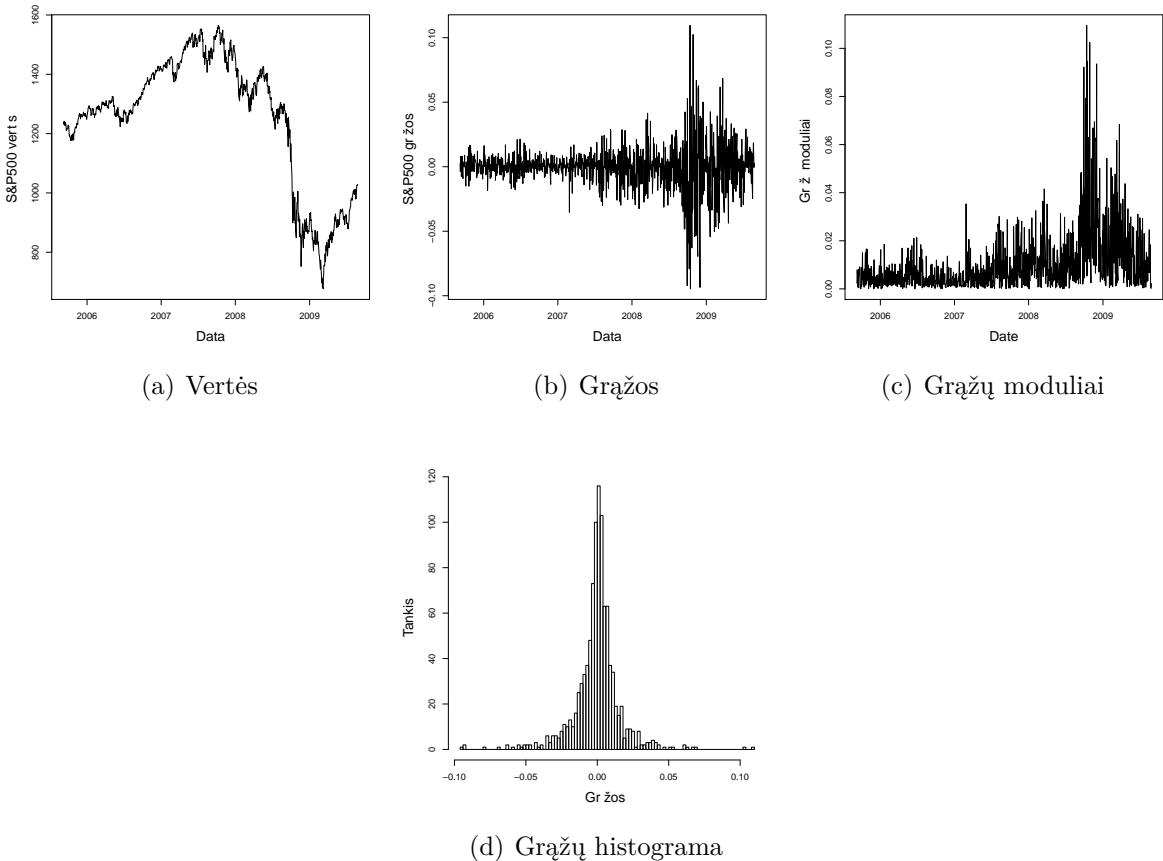
### 3.1.3. Standard & Poor's 500 (S&P500) indeksas

S&P500 apskaičiuojamas įtraukiant 500 pirmaujančių įmonių svarbiausiųose JAV sektoriuose, suskirstytuose pagal GICS (angl. Global Industry Classification Standard) klasifikaciją, akcijų kainos. S&P 500 rodo apie 75 proc. JAV akcijų biržos kapitalizacijos. Pagrindiniu

kriterijumi atrenkant įmones yra laikoma rinkos kapitalizacija, tačiau atsižvelgiama į akcijos likvidumą, augimo tempus, įmonės veiklos rūšį. Beveik pusę indekso reikšmės sudaro finansų, informacinių technologijų ir energetikos sektorių akcijos. Šis indeksas buvo pradėtas skaičiuoti 1923 metais. Tuo metu skaičiuojant indekso reikšmę atsižvelgta tik į 233 įmonių akcijų kainas, o 1957 metais jis buvo pradėtas skaičiuoti atsižvelgiant į 500 įmonių akcijų kainas. Indekso sudėtis yra peržiūrima tada, kai reikia, t.y. nėra nustatyta konkrečių datų, kada turi susirinkti komitetas. Indeksas skaičiuojamas naudojant formulę:

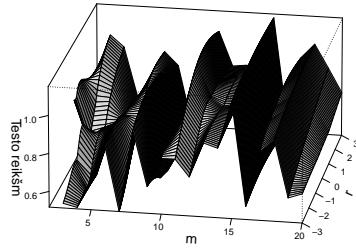
$$S&P_t = \frac{\sum_{i=1}^{500} p_t^i n_t^i}{K_t},$$

čia  $p_t^i$  ir  $n_t^i$  —  $i$ -tosios kompanijos vienos akcijos kaina ir akcijų skaičius momentu  $t$ , o  $K_t$  — specialus daliklis. Kaip ir  $d_t$ , naudojamas skaičiujant  $DJIA_t$ , daliklis  $K_t$  yra kintamas, tačiau kinta žymiai rečiau negu  $d_t$ .

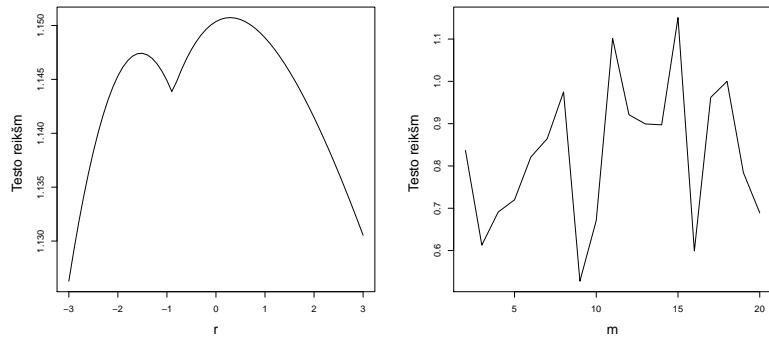


24 pav. S&P 500 indekso duomenys nuo 2005-09-07 iki 2009-08-26

24 pav. pavaizduota indekso vertės, grąžos, grąžų moduliai ir histograma kasdieniniam S&P500 indekso duomenims nuo 2005-09-04 iki 2009-08-26. 25 pav. pavaizduotos maksimi-



25 pav. Statistikos  $U_j^{(n)}$  priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  S&P 500 duomenims nuo 2005-09-07 iki 2009-08-26

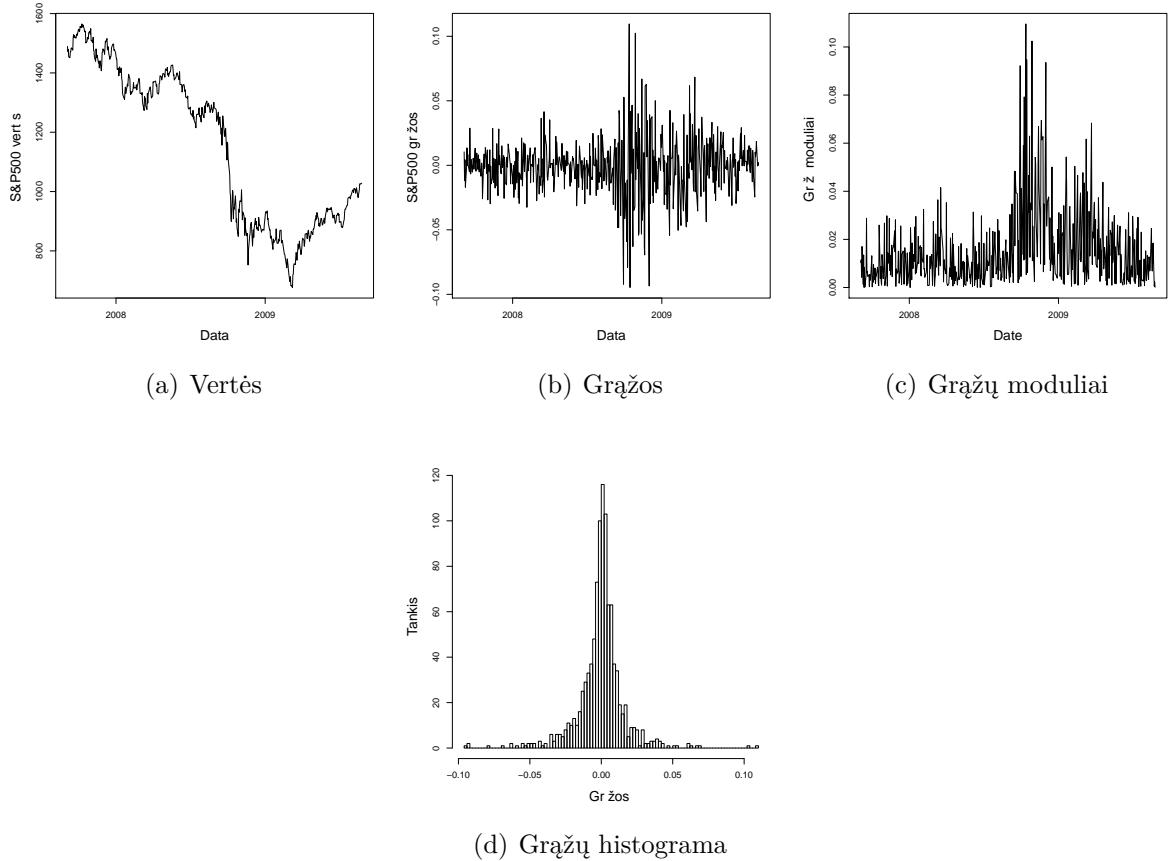


(a) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 15$ . (b) testo reikšmių priklausomybė nuo  $m$ , kai  $r = 0,3$ .

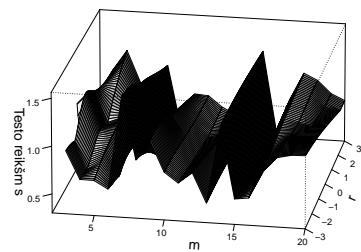
26 pav. S&P 500 indekso testo reikšmių priklausomybės nuo  $r$  ir  $m$  pjūviai.

malios  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmės, priklausančios nuo parametrų  $r$  ir  $m$ . 26 pav. pavaizduota maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 15$ , ir nuo  $m$ , kai  $r = 0,3$ .

Uodegos indekso pasikeitimo šikart nerandama. Didžiausia rasta maksimali  $U_j^{(n)}$  reikšmė buvo 1,1507 su  $m = 15$ , ir  $r = 0,3$ . Taigi vėl visi skaičiavimai kartojami su mažiau duomenų taip, kad numatomas indekso pasikeitimas būtų maždaug viduryje. Nagrinėjama 500 indekso grąžų seka nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26. 27 pav. pavaizduotos S&P 500 indekso vertės, grąžos, grąžų moduliai ir histograma kasdieniniams indekso duomenims atitinkamu laikotarpiu. 28 pav. pavaizduota testo reikšmių priklausomybė nuo parametrų  $r$  ir  $m$ .

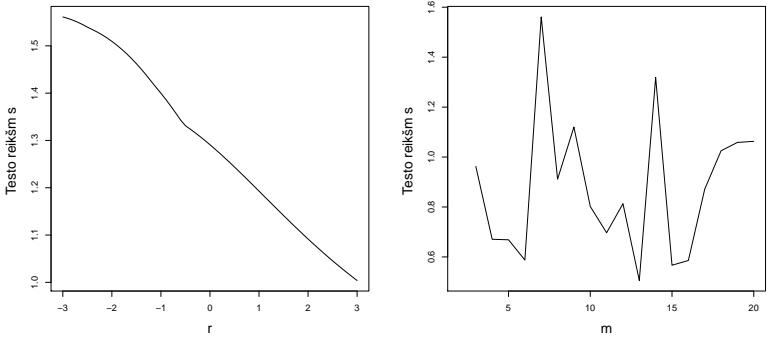


27 pav. S&P 500 indekso duomenys nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26.



28 pav. Testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  S&P 500 duomenims nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26.

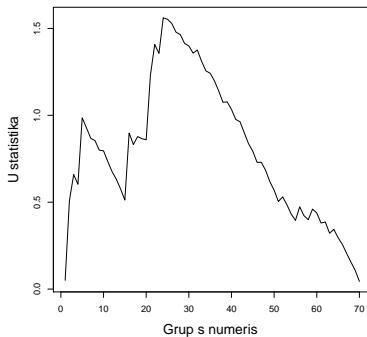
Didžiausia testo reikšmė buvo 1,5611, rasta kai  $m = 7$ , ir  $r = -3$ , taigi indekso pasikeitimas aptinkamas. Bendrai paėmus, jis randamas su visais  $r = -3; -2,9; \dots; -0,8$ . Pjūviai pateikti 29 pav.



(a) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 7$ .  
 (b) testo reikšmių priklausomybė nuo  $m$ , kai  $r = -3$ .

29 pav. S&P 500 testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 7$ , ir nuo  $m$ , kai  $r = -3$ .

Lentelėje 12 pateikiamas testo reikšmės, nustatytos indekso pasikeitimą, vietas, kuriose nustatytas pasikeitimas, atitinkami parametrai  $r$  ir  $m$ , bei  $\alpha_1$  ir  $\alpha_2$  — indeksai prieš ir po pasikeitimo — S&P 500 indekso duomenims nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26. Indeksas pasikeitimo vieta nustatoma 2008 metų balandžio - gegužės mėnesį.



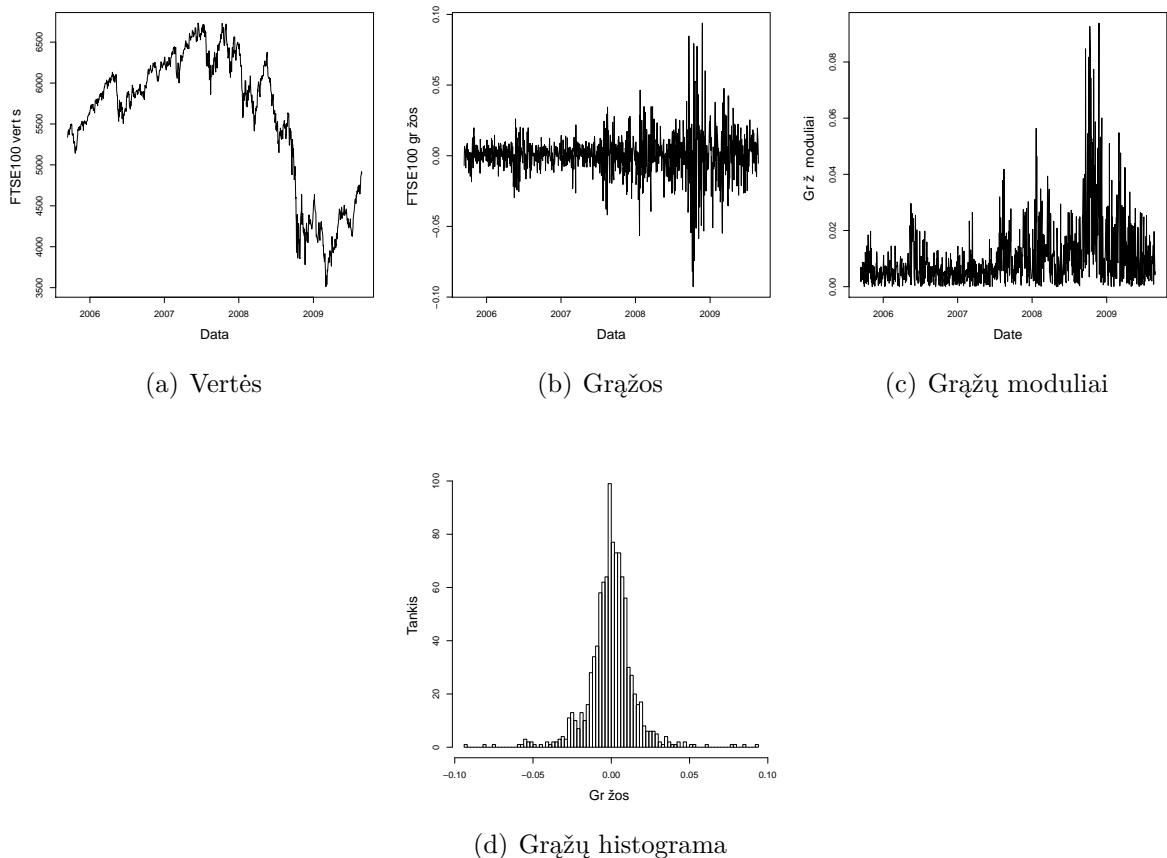
30 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike S&P 500 indekso duomenims nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26.

30 pav. pavaizduotas  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike S&P 500 indekso duomenims nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26.

Kaip matome iš lentelės 12, nors indekso pasikeitimas ir aptinkamas, jis rodomas iš mažesnio į didesnį. Tai reikštų uodegos palengvėjimą. Ir šis rezultatas nėra tokis, kokio buvo laukta.

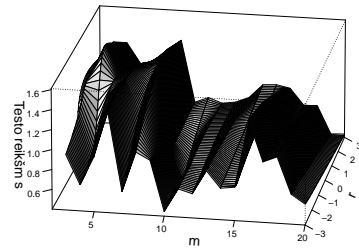
### 3.1.4. FTSE 100 (angl. Financial Times Stock Exchange 100) indeksas

FTSE 100 - akcijų indeksas, apskaičiuojamas įvertinus 100 didžiausios kapitalizacijos įmonių, kurių akcijomis prekiaujama Londono akcijų biržoje, akcijų kainas. Indekso įmonių akcijų rinkos vertė sudaro apie 80 proc. visos rinkos vertės. Ši indeksą agentūra FTSE pradėjo skaičiuoti 1984 metais.

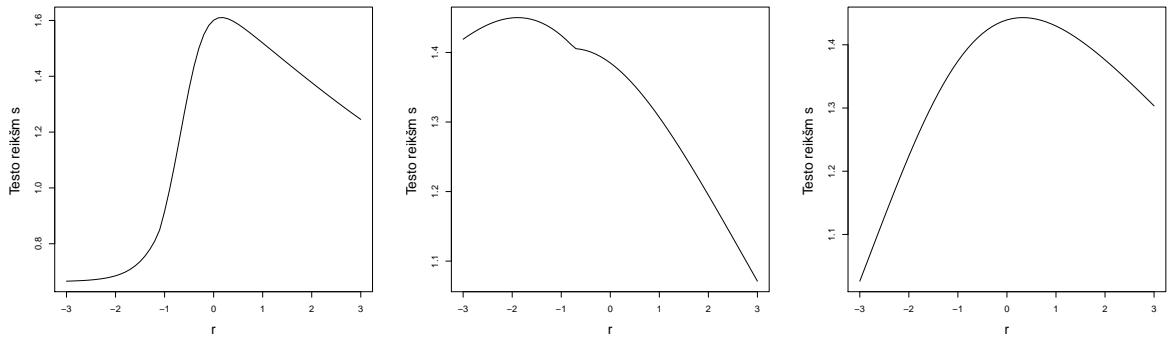


31 pav. FTSE 100 indekso vertės ir grąžos nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26.

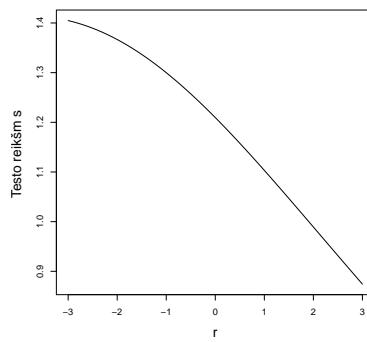
31 pav. pavaizduotos indekso vertės, grąžos, grąžų moduliai ir histograma kasdieniniams FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26. 32 pav. pavaizduotos maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmės, priklausančios nuo parametru  $r$  ir  $m$ . 33(a) pav. pavaizduota teste reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 4$ , 33(b) pav., kai  $m = 6$ , 33(c) pav., kai  $m = 8$ , 33(d) pav., kai  $m = 16$ .



32 pav. Testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26



(a) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 4$ . (b) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 6$ . (c) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 8$ .

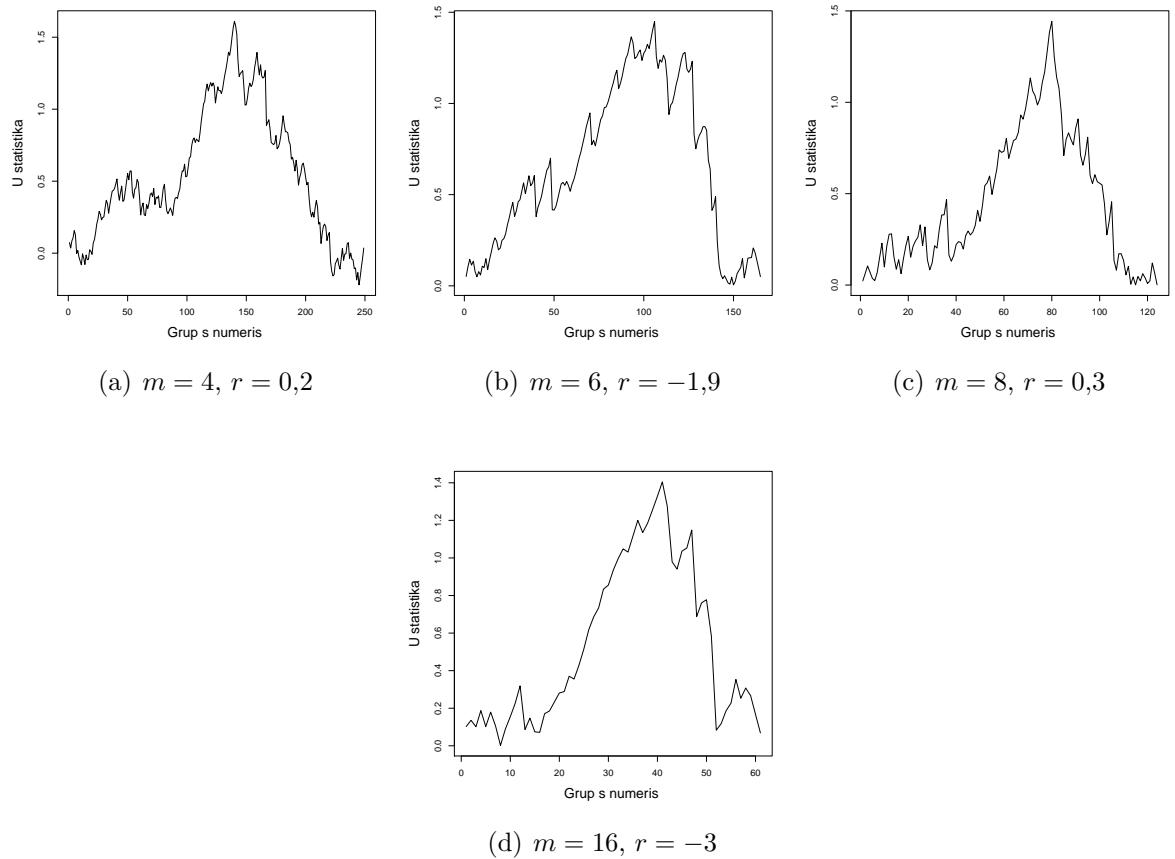


(d) testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 16$ .

33 pav. FTSE 100 indekso testo reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 4, m = 6, m = 8$  ir  $m = 16$ .

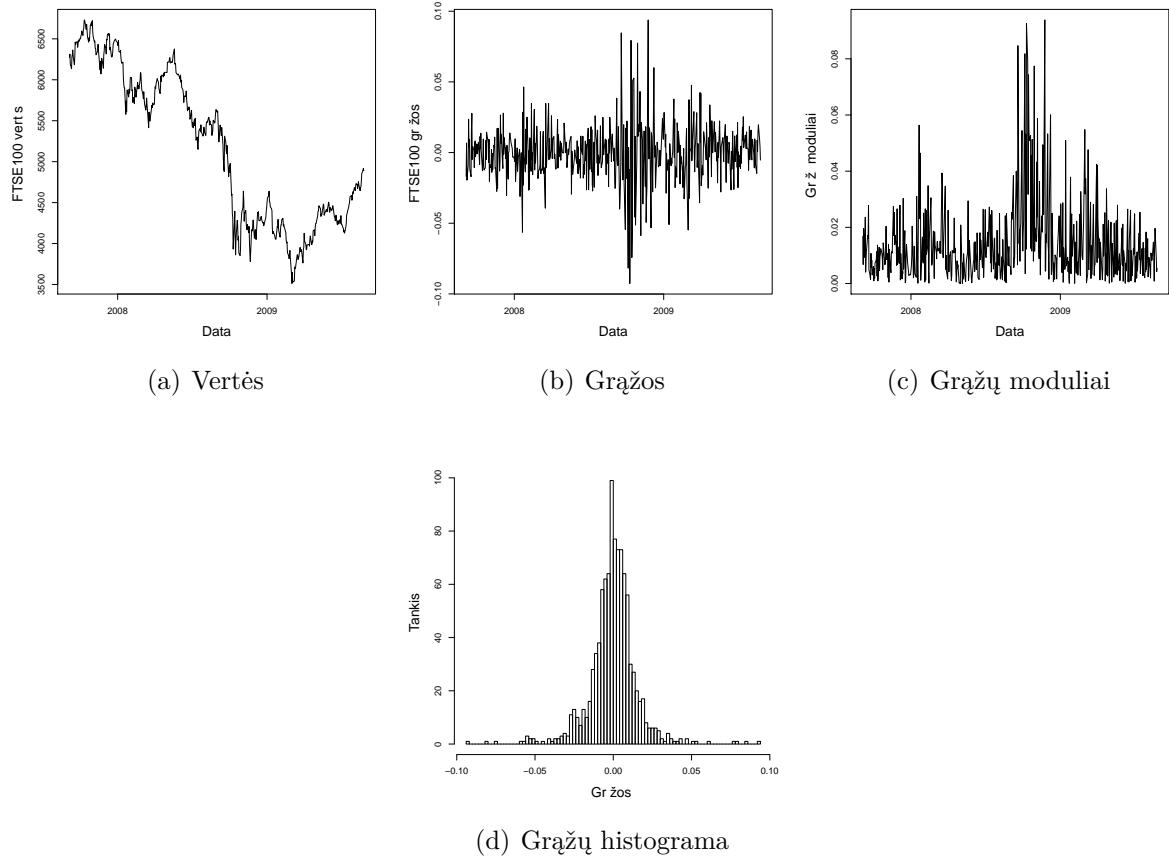
Kaip matome iš lentelių 13 , 14 , 15 ir 16 , su visomis parametru  $r$  ir  $m$  kombinacijomis indekso pasikeitimas aptinkamas panašiose vietose, t.y. 2007 metų pabaigoje arba 2008 metų

pradžioje. Kaip matome iš lentelių 13 , 14 , 15 ir 16 , indeksai iki nustatytos pasikeitimo vietos yra didesni negu po jos. Tai reiškia uodegos pasunkėjimą nustatytu momentu. Su kiekviena  $m = 4; 6; 8; 16$  ir  $r$ , kurie rado didžiausią  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmę, nubrėžiame statistikos kitimą laike. Laikas, kaip minėta anksčiau, skaičiuojamas grupelių numeriais. Kadangi grupelių dydžiai skirtinguose grafikuose skiriasi, tai ir jų numeriai nurodo skirtingus momentus realiame laike. Grafikai pavaizduoti 34 pav.

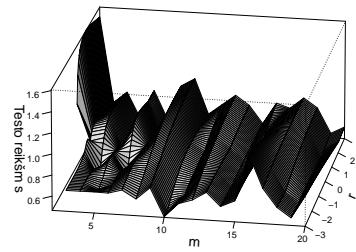


34 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike su skirtingomis parametru kombinacijomis FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26

Nors indekso pasikeitimas buvo surastas ir visais atvejais indeksai iki pasikeitimo buvo didesni negu po jo, tačiau kaip ir prieš tai nagrinėtiems indeksams, taip ir FTSE 100, indekso pasikeitimo nustatymo procedūra kartojama trumpesnei duomenų sekai. Nagrinėjamos FTSE 100 indekso grąžos nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26. Iš viso 500 kasdieninių grąžų sekai. 35 pav. pavaizduotos indekso vertės, grąžos, grąžų moduliai ir histograma kasdieniniam FTSE 100 indekso duomenims nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26.



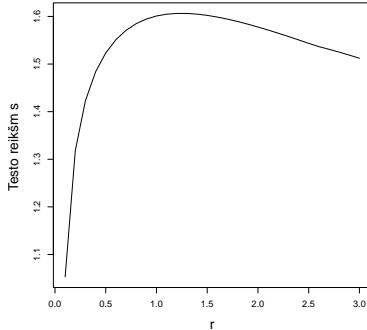
35 pav. FTSE 100 indekso vertės ir gržos nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26.



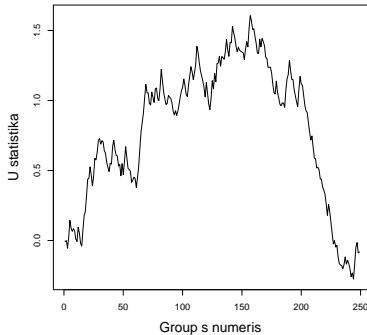
36 pav. Statistikos  $U_j^{(n)}$  priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  FTSE 100 indekso duomenims nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26

36 pav. pavaizduotos maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmės, priklausančios nuo parametru  $r$  ir  $m$ . 37 pav. pavaizduota maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ . 38 pav. pavaizduotas  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26 su parametrais  $m = 2$  ir  $r = 1.2$ . Lentelėje 17 pateikiama informacija apie indekso aptikimą FTSE 100

indekso duomenims: parametru  $r$  reikšmės, indeksai  $\alpha_1, \alpha_2$  ir nustatyto indekso pasikeitimo vietas. Indekso pasikeitimo vieta nustatoma 2008 metų liepos - lapkričio mėnesį. Indeksai iki nustatyto pasikeitimo vietas vėlgi didesni negu po jos, kas reiškia uodegos pasunkėjimą, kaip ir buvo tikėtasi.



37 pav. Maksimalių  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$  FTSE 100 indekso duomenims nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26.



38 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos kitimas laike FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26 su parametrais  $m = 2$  ir  $r = 1.2$ .

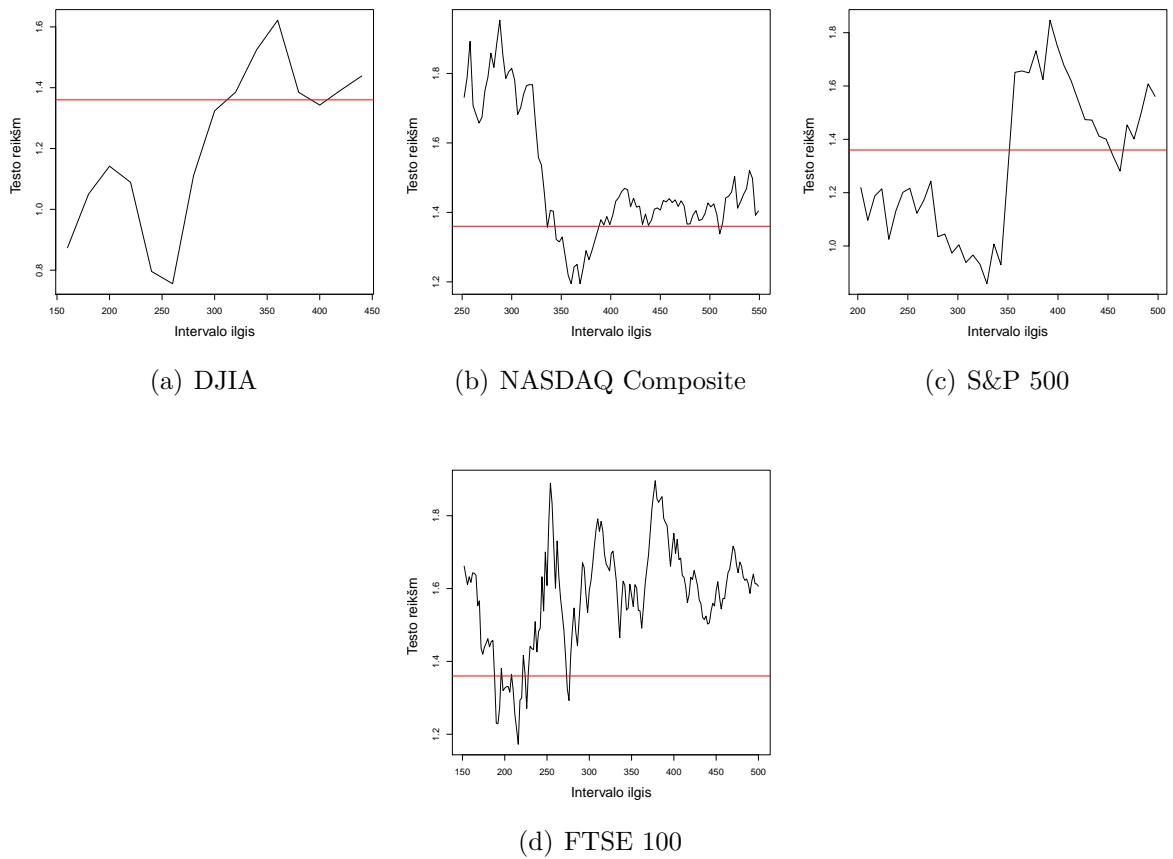
### 3.1.5. Intervalo mažinimas

Kadangi buvo pastebėta, kad intervalo ilgis bei indekso pasikeitimo vieta tiriamuose duomenyse turi įtakos indekso pasikeitimo aptikimui, toliau atliekamas tyrimas  $U_j^{(n)}$  statistikos jautrumui dėl intervalo ilgio sumažėjimo ar padidėjimo tirti. Intervalas mažinamas trimis būdais:

1. Mažinant intervalą po vieną grupelę tik iš pradžių.
2. Mažinant intervalą po vieną grupelę tik pabaigoje.

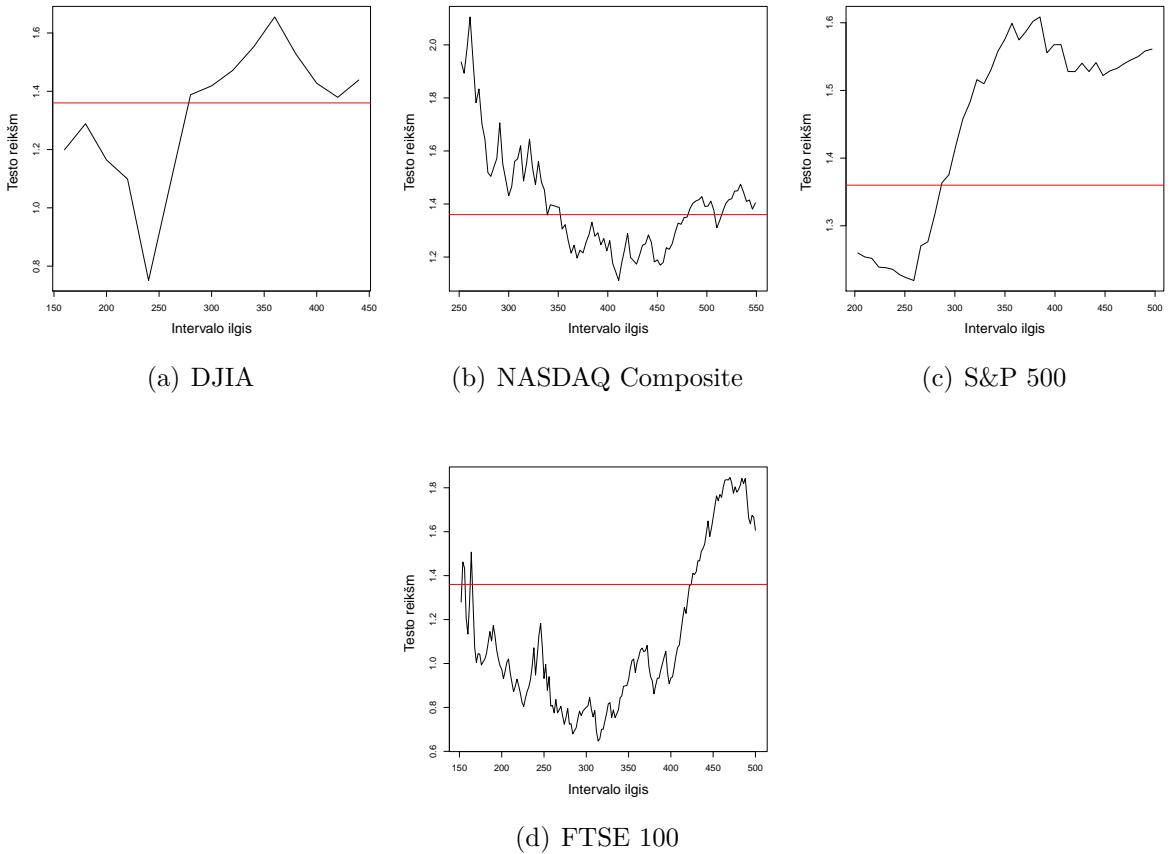
3. Mažinant intervalą tuo pat metu po vieną grupelę iš abiejų pusiu.

Pradinis duomenų intervalas imamas lygus maždaug pusei ilgojo, t.y. ilgio  $n = 1000$  intervalo. Parametrai  $m$  ir  $r$  pasirenkami tokie, kurie randa indekso pasikeitimą pradiname intervale ir intervalas mažinamas palaipsniui atliekant skaičiavimus su tais pačiais parametrais. Tyrimas vėlgi kartojamas visiems tiriamiems indeksams: DJIA, NASDAQ Composite, S&P 500 ir FTSE 100. Taip pat pateikiami grafikai, vaizduojantys testo reikšmių priklausomybę nuo intervalo ilgio visiems keturiems indeksams. Pradiniai intervalų ilgiai skirtiniems indeksams skiriasi, tačiau nežymiai: nuo 450 iki 550. Intervalų mažėjimo greitis taip pat skiriasi skirtiniems indeksams, nes parametrai  $m$  ir  $r$  imami ne vienodi — priklausomai nuo to, kurie surado didžiausią testo reikšmę pradiname intervale.



39 pav. Intervalo mažinimas mažinant tik iš pradžių.

39 pav. pateikiamas testo reikšmių kitimas mažinant intervalą iš pradžių: 39(a) pav. — DJIA, 39(b) pav. — NASDAQ Composite, 39(c) pav. — S&P 500 ir 39(d) pav. — FTSE 100 indekso duomenims.

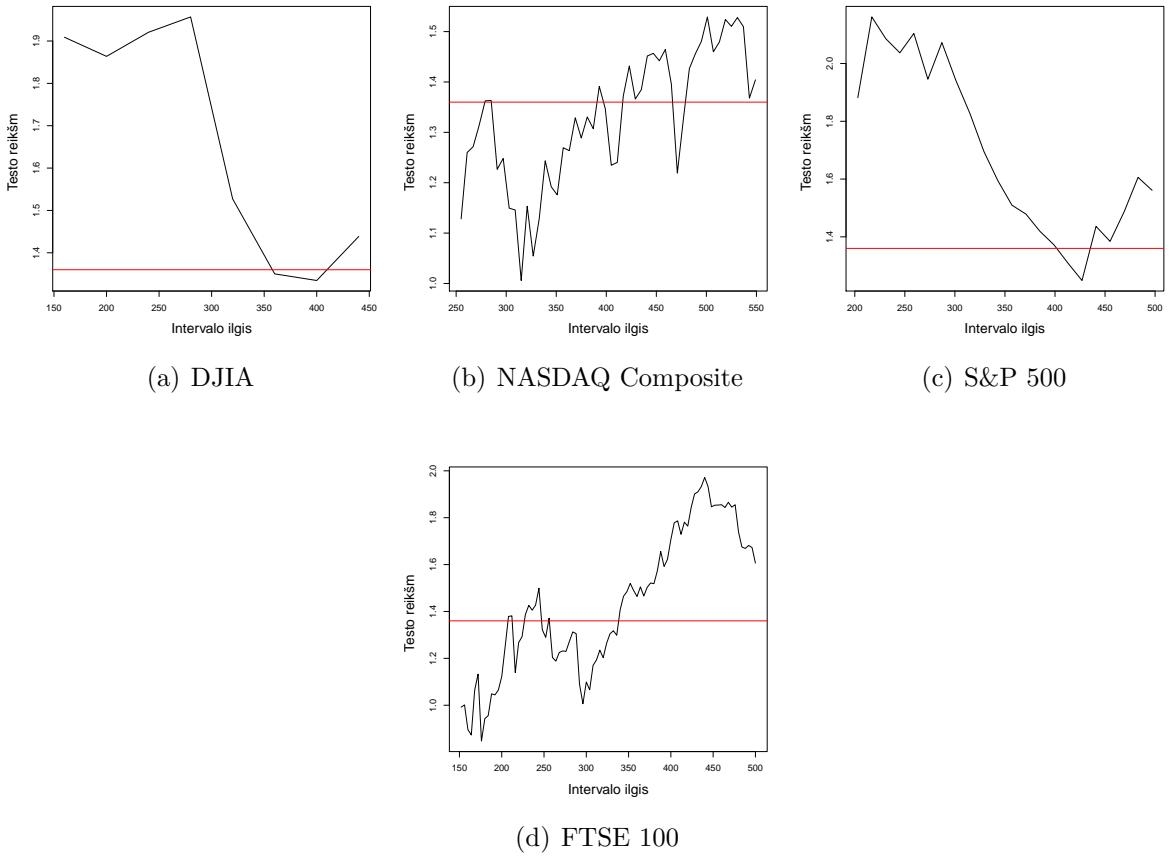


40 pav. Intervalo mažinimas mažinant tik pabaigoje.

40 pav. pateikiamas testo reikšmių kitimas mažinant intervalą pabaigoje atitinkamiems indeksams. 41 pav. pateikiama ta pati informacija mažinant intervalą iš abiejų intervalo pusiu vienu metu. Grafikuose nubrėžta horizontali linija žymi kritinę testo reikšmę, lygią 1,36 tam, kad būtų lengviau atskirti kokiam intervalo ilgiui kritinė reikšmė viršijama, kokiam ne.

Informacija apie intervalo ilgius ir intervalo tyrimui naudojamų parametru reikšmes skirtiniems indeksams:

- DJIA indekso duomenų intervalas apima 450 indekso gražų nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26. Parametrai:  $m = 20$ ,  $r = 3$ .
- NASDAQ Composite — 550 indekso gražų nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26. Parametrai:  $m = 3$ ,  $r = 0,9$ .
- S&P 500 indekso — 500 indekso gražų nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26. Parametrai:  $m = 7$ ,  $r = -3$ .



41 pav. Intervalo mažinimas mažinant iš abiejų pusų vienu metu.

- FTSE 100 indekso — 500 indekso grąžų nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26. Parametrai:  $m = 2$ ,  $r = 1,2$ .

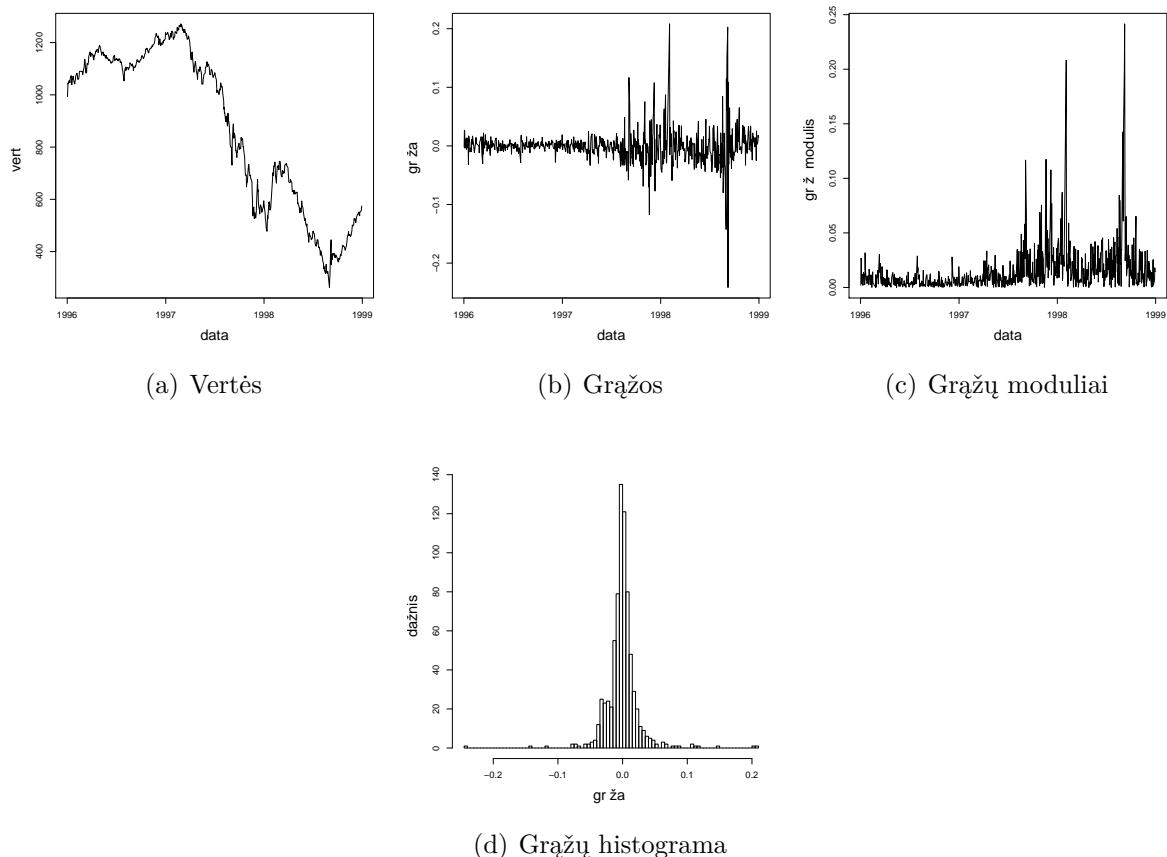
Kaip matome iš 39 , 40 ir 41 pav., intervalo mažinimas yra jautresnis, kai mažinama iš vienos pusės, t.y. kai intervalas tampa nesimetrišku. Taip pat galima daryti išvadą, kad per ilgas intervalas gali trukdyti testo veikimui. Kadangi jo principas yra grupelių  $\kappa_{ni,r}$  vidurkių lyginimas iki tam tikro momento ir po jo, tai faktas, kad intervalas yra labai ilgas ir grąžų reikšmių uodegos indeksai sugrįžta į buvusias reikšmes, gali kenkti testo veikimui. Geriausi testo rezultatai pasiekiami tada, kai indekso pasikeitimas yra maždaug intervalo viduryje ir kai indekso reikšmė nesugrįžta atgal į buvusią prieš pasikeitimą. Čia minima problema jau yra šiek tiek kitokia negu nagrinėjama mūsų darbe. Tai būtų ne indekso pasikeitimo, o epidemijos, t.y. indekso sumažėjimo tam tikram laikui ir vėl padidėjimo, radimas.

### 3.2. Azijos duomenys

Toliau analizuosime Azijos šalių valiutų kursų lyginant su JAV doleriu duomenis, kadangi 1997-1998 m. vyko Azijos finansinė, dažnai dar vadinama Rytų Azijos valiutų krize. Tai vienas žymiausių rinkos kritimų po Antrojo Pasaulinio karo. Dar ir šiandien nagrinėjamos šio nuosmukio priežastys, analizuojami duomenys, nes tik pasibaigus krizei galima aiškiai pamatyti tai, kas įvyko, įvertinti priežastis ir pasekmes bei ieškoti būdų, kaip išvengti tokios situacijos.

Krizė prasidėjo Tailande po to, kai 1997 m. liepos 2 d. šalies vyriausybė nusprendė atsieti bato kursą nuo JAV dolerio. Bato kursas iš karto nukrito daugiau nei 20%. Toliau sekė kitos šalys: liepos 11 d. savo valiutą nuo JAV dolerio atsiejo Indonezija, liepos 14 d. — Malaizija. 1997 m. liepą Tainando, Indonezijos, Filipinų ir Malaizijos valiutos nuvertėjo 30-40 proc. Taigi šių valstybių duomenis ir aptarsime.

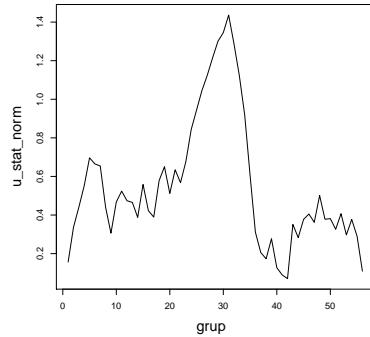
#### 3.2.1. Malaizijos duomenys



42 pav. Malaizijos ringito vertės ir grąžos nuo 1996-01-01 iki 1998-12-31.

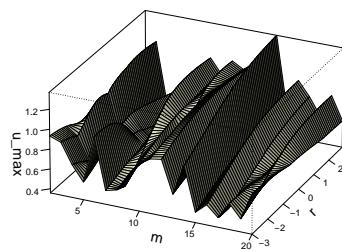
Visų pirmą pakartosime [3] straipsnyje gautus rezutatus. Jame testas taikomas 1996 - 1998 metų duomenims. Pav.42 pateikiamos Malaizijos ringito kurso vertės, grąžos, jų moduliai ir histograma.

Nesunku pastebėti, kad duomenyse yra struktūrinių pasikeitimų. Nagrinėjamame straipsnyje testo parametrai pasirenkami tokie:  $r = 1$  ir  $m = 13$ . 43 pav. pateikiame  $U_j^{(n)}$  statistikos grafiką šiuo atveju.



43 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos grafikas Malaizijos ringito duomenims, kai  $r = 1$ ,  $m = 13$

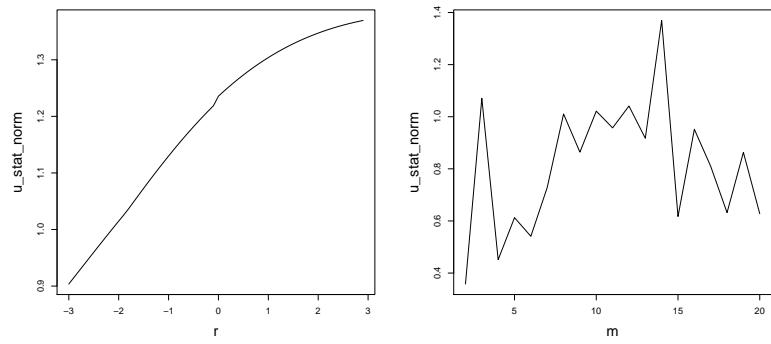
Gauname, kad maksimali  $U_j^{(n)}$  reikšmė yra 1,44, todėl duomenų pasikeitimą laikome statistiškai reikšmingu. Testu nustatoma, kad duomenų pasiskirstymo pasikeitimas įvyko 1997 m. liepos 31 - rugpjūčio 18 dienomis, o tai galima paaiškinti Malaizijos valiutos kurso atsiejimu nuo JAV dolerio, kuris įvyko 1997 m. liepos 14 d. Straipsnyje [2] naudojamas Hilo įvertinys (Hill's estimator) uodegos indekso pasikeitimą šiuose duomenyse aptinkta 1997 m. gegužę, tačiau stebėdami pačius duomenis 42(b) pav. galime pastebėti, kad labiau išsiskiriančios ringito grąžos buvo fiksuojamos antrojoje 1997m. pusėje, taigi galime teigti, jog šiame straipsnyje nagrinėjamas testas pasikeitimą Malaizijos duomenims randa tiksliau. Taip pat gauname, kad  $\alpha_1 = 3,04$ ,  $\alpha_2 = 1,43$ , tai rodo skirtinio uodegos pasunkėjimą.



44 pav. Maksimalių  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  Malaizijos duomenims

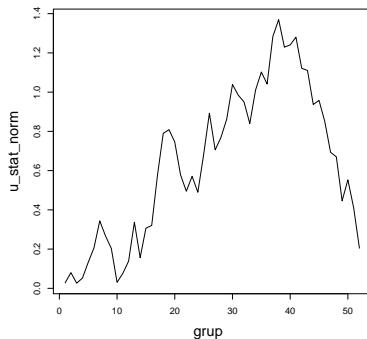
Toliau taikome testą Malaizijos ringito grąžų duomenų moduliams. Atlikę Vilkoksono simetriškumo testą, gauname p-reikšmę, lygią  $0,06014 > 0,05$ . Taigi su 95% tikimybe galime teigti, kad nagrinėjami duomenys yra simetriški ir šis pakeitimasis gautiems rezultatams įtakos neturės. Taip pat išmetame nulines grąžų reikšmes, kadangi taikomas testas neveikia, kai  $r < 0$  ir grupėje yra nulinė grąža. Keičiame parametrą  $r$  kas 0,1 intervale nuo -3 iki 3 ir  $m$  intervale nuo 2 iki 20 kas 1. Rezultatai pateikiami 44 pav.

Pastebime, kad testo rezultatai labiau priklauso nuo  $m$  parinkimo negu nuo  $r$ . Uodegos indekso pasikeitimą testas randa, kai  $m = 2$ , o  $r$  kinta nuo 2,6 iki 3. Didžiausia testo statistikos reikšmė, lygi 1,370, yra fiksuojama, kai  $m = 14$  ir  $r = 3$ . 45(a) pav. pateikiama maksimalios statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmės priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 14$ , o 45(b) pav. nuo  $m$ , kai  $r = 3$ . 46 pav. pateikiame testo statistikos grafiką, kai  $m = 14$ ,  $r = 3$ .



(a) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri- (b) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri-  
klausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 14$ . klausomybė nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .

45 pav. Malaizijos ringito maksimalių  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 14$ , ir  $m$ , kai  $r = 3$ .

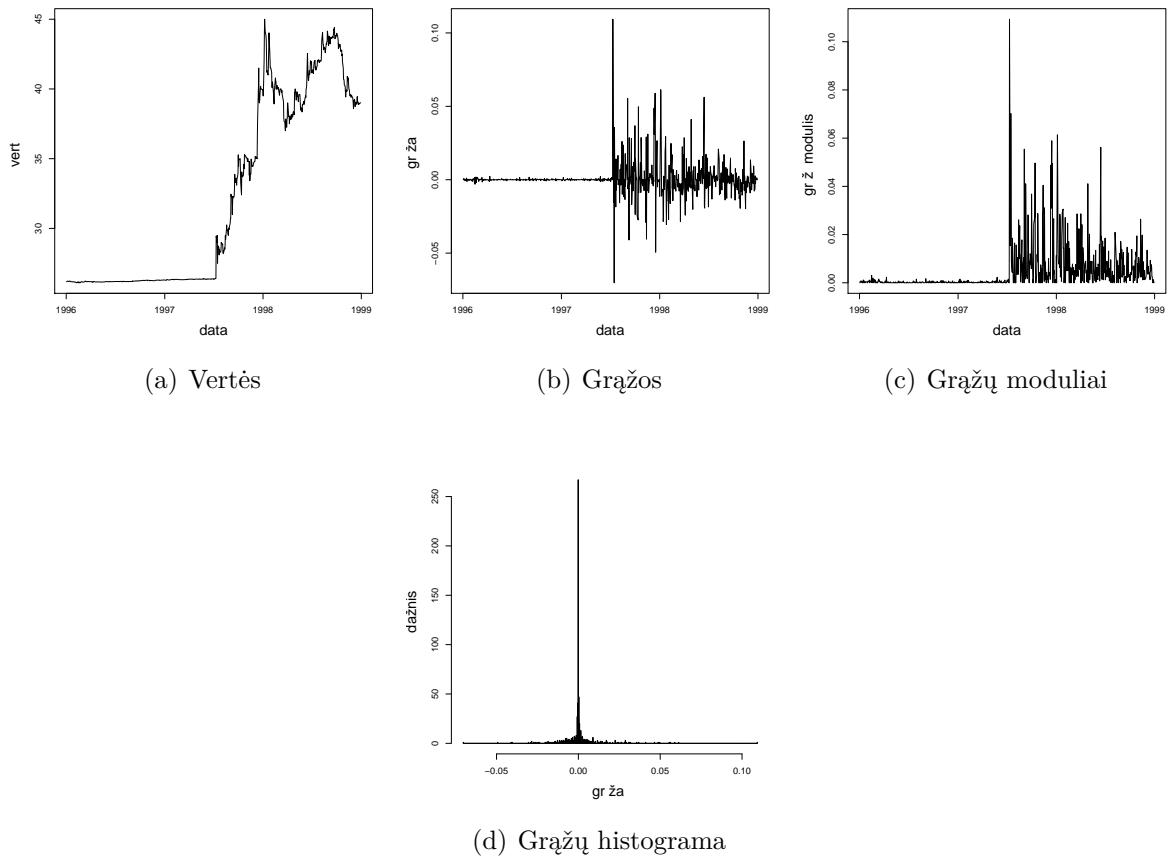


46 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos grafikas Malaizijos ringito duomenims, kai  $m = 14$ ,  $r = 3$

Lentelėje 18 pateikiamos tos maksimalios statistikos  $U_j^{(n)}$  ir jas atitinkančios  $r$ ,  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės, kurios nurodo indekso pasikeitimą, t.y. kurias naudojant gaunama statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmė, viršijanti kritinę reikšmę 1,36, kai  $m = 2$ . Taip pat pateikiamos nustatytos indekso pasikeitimo vietas. Šiuo atveju pastebime, kad uodegos indekso pokytis randamas gana vėlai. Be to, gauname, kad  $\alpha_1 < \alpha_2$ , kas reikštų uodegos palengvėjimą. Taip greičiausiai yra dėl to, kad imdami pakankamai daug duomenų vienoje grupėje, nebegalime tiksliai įvertinti duomenų pasikeitimo ir fiksuojame ne pirmąjį duomenų pasikeitimą, bet antrąjį, t.y. susiduriame su epidemijos problema.

### 3.2.2. Filipinų duomenys

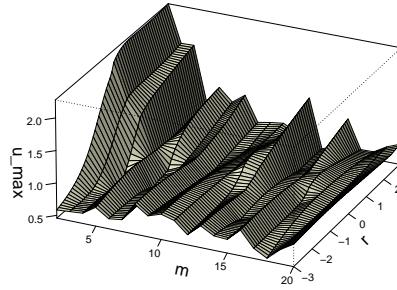
Toliau aptariamos testas taikomos Filipinų valiutos — peso — kurso grąžų duomenims tuo pačiu 1996 - 1998-ųjų metų laikotarpiui. 47 pav. pateikiamos šios valiutos kurso vertės, grąžos, jų moduliai ir histograma.



47 pav. Filipinų peso vertės ir grąžos nuo 1996-01-01 iki 1998-12-31.

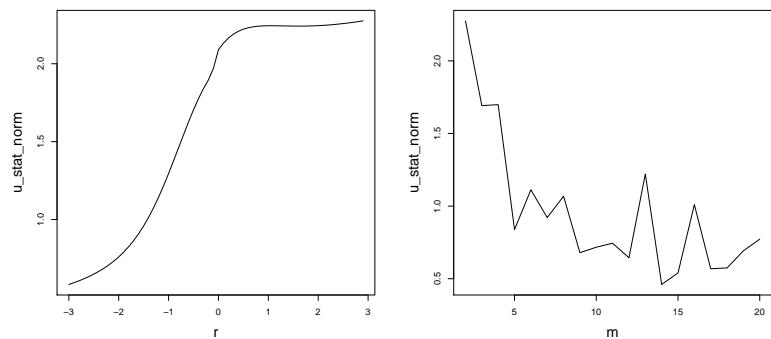
Norėdami įsitikinti, kad duomenys simetriški ir galime tyrimui naudoti absoliučias reikšmes, atliekame keletą simetriškumo testų. Rezultatai, pateikti 7 ir 8 lentelėse, rodo, kad

duomenys pasiskirstę simetriškai apie savo medianą, artimą nuliui. Taigi toliau testą tai-  
kome analogiškai keisdami  $m$  ir  $r$ , kaip ir Malaizijos duomenims. Bendra maksimalios  $U_j^{(n)}$   
reikšmės priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  pateikiama 48 pav.



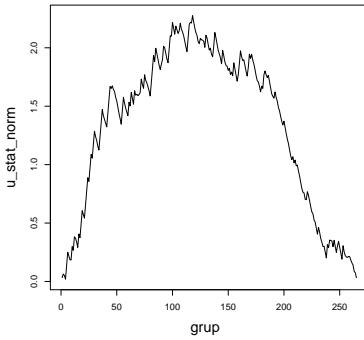
48 pav.  $U_j^{(n)}$  maksimalios reikšmės priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  Filipinų peso duomenims

Filipinų duomenims uodegos indekso pasikeitimas randamas su šiais parametrais  $m$  ir  $r$ :  
 $m = 2, r = -0,9; -0,8; \dots; 3; m = 3, r = -0,3; -0,2; \dots; 3$  ir  $m = 4, r = 0,3; 0,2; \dots; 3$ . Didžiausia testo reikšmė, lygi 2,281, fiksuojama, kai  $m = 2$  ir  $r = 3$ . 49(a) pav. pateikiama maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ , o 49(b) pav. nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .  $U_j^{(n)}$  grafikas, kai  $m = 2$  ir  $r = 3$ , pateikiamas 50 pav.



(a) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri- (b) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri-  
klausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ . klausomybė nuo  $m$ , kai  $r = 3$ .

49 pav. Filipinų peso maksimalių  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ ,  
ir  $m$ , kai  $r = 3$ .



50 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos grafikas Filipnų peso duomenims, kai  $m = 2$  ir  $r = 3$ .

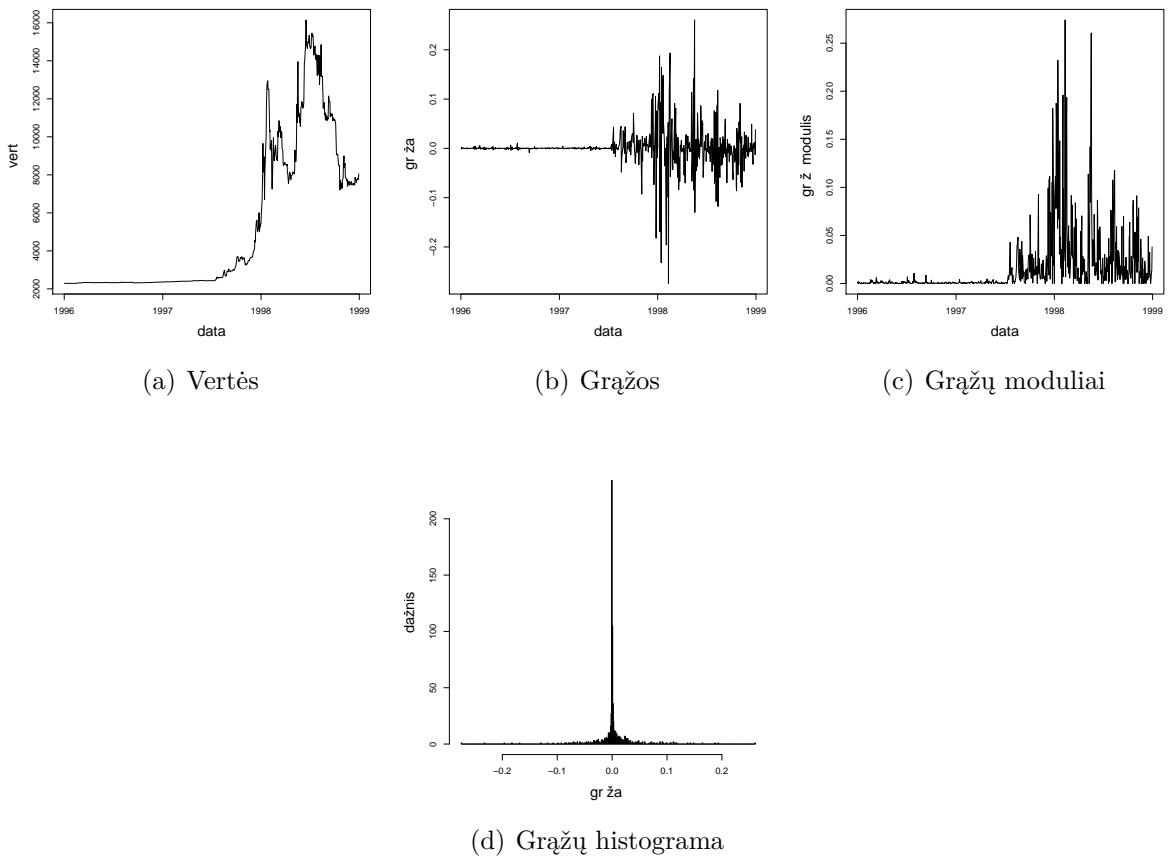
Kadangi nagrinėjamas testas uodegos indekso pasikeitimą dažniausiai randa, kai  $m = 2$ . Todėl lentelėje 19 pateikiama maksimalios statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmės bei jas atitinkančios  $r$ ,  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės, kurios nurodo indekso pasikeitmą, t.y. kurias naudojant gaunama statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmė, viršijanti kritinę reikšmę 1,36, kai  $m = 2$ . Matome, kad duomenų pasiskirstymo pasikeitimą randamas, kai parametras  $r$  kinta tarp  $-0.9$  ir  $3$ . Taip pat pateikiama nustatyta indekso pasikeitimo vietas. Straipsnyje [2] naudotas Hilo testas duomenų pasiskirstymo pasikeitimą aptinka 1997 m. lapkritį, tuo tarpu šiame darbe nagrinėjamas testas esminių pokyčių duomenyse randa jau 1997 m. liepą, kada ir prasidėjo Azijos šalių valiutų krizę. Taigi galime teigti, kad nagrinėjamas testas uodegos indekso pasikeitimą aptinka tiksliau.

### 3.2.3. Indonezijos duomenys

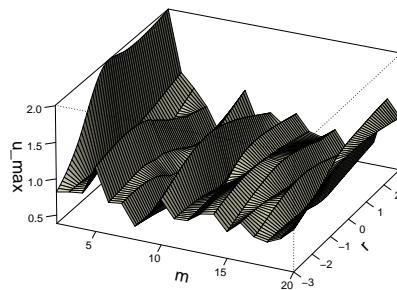
Tiriame galimą uodegos indekso pokytį Indonezijos rupijos kurso grąžų duomenims 1996-1998 metų laikotarpyje. 51 pav. pateikiama šios valiutos kurso vertės, grąžos, jų moduliai ir histograma.

Hipotezę, kad Indonezijos duomenys pasiskirstę simetriškai apie savo medianą, lygią 0.0006 atmeta Vilkoksono ir Mira testai, tačiau Cabilio-Masaro ir MGG testai vis dėl to fiksuoja duomenų simetriškumą (7, 8 lentelės), todėl galime teigti, kad absoliutinių reikšmių naudojimas būsimų rezultatų neturėtų iškraipyti. Bendra maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  pateikiama 52 pav.

Indonezijos duomenims uodegos indekso pasikeitimą randamas, kai  $m = 2$ , o  $r$  kinta nuo  $-1.6$  iki  $3$ . Didžiausia testo reikšmė, lygi 2,007, fiksuojama, kai  $m = 2$ ,  $r = -0.2$ . 53(a) pav. pateikiama maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ , o 53(b) pav. nuo  $m$ , kai  $r = -0.3$ .  $U_j^{(n)}$  grafikas, kai  $m = 2$ ,  $r = -0.3$ , pateikiamas 54 pav.

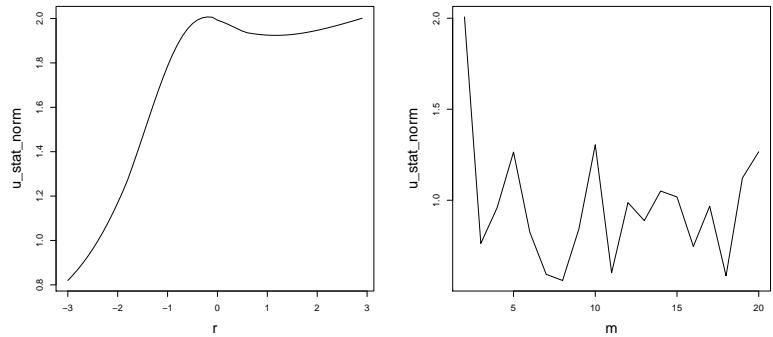


51 pav. Indonezijos rupijos vertės ir grąžos nuo 1996-01-01 iki 1998-12-31.



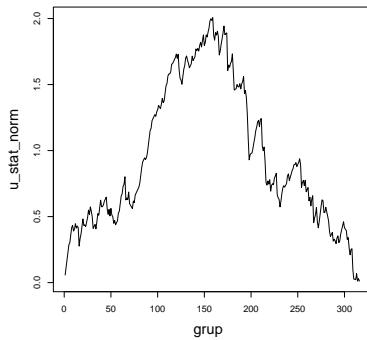
52 pav.  $U_j^{(n)}$  maksimalios reikšmės priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  Indonezijos rupijos duomenims

Lentelėje 20 pateikiamas tos maksimalios statistikos  $U_j^{(n)}$  ir jas atitinkančios  $r$ ,  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės, kurios nurodo indekso pasikeitimą, t.y. kurias naudojant gaunama statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmė, viršijanti kritinę reikšmę 1,36, kai  $m = 2$ . Su šia parametru  $m$  reikšme uodegos



(a) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri-  
klausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ . (b) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri-  
klausomybė nuo  $m$ , kai  $r = -0,3$ .

53 pav. Indonezijos rupijos maksimalių  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ , ir  $m$ , kai  $r = -0,3$ .

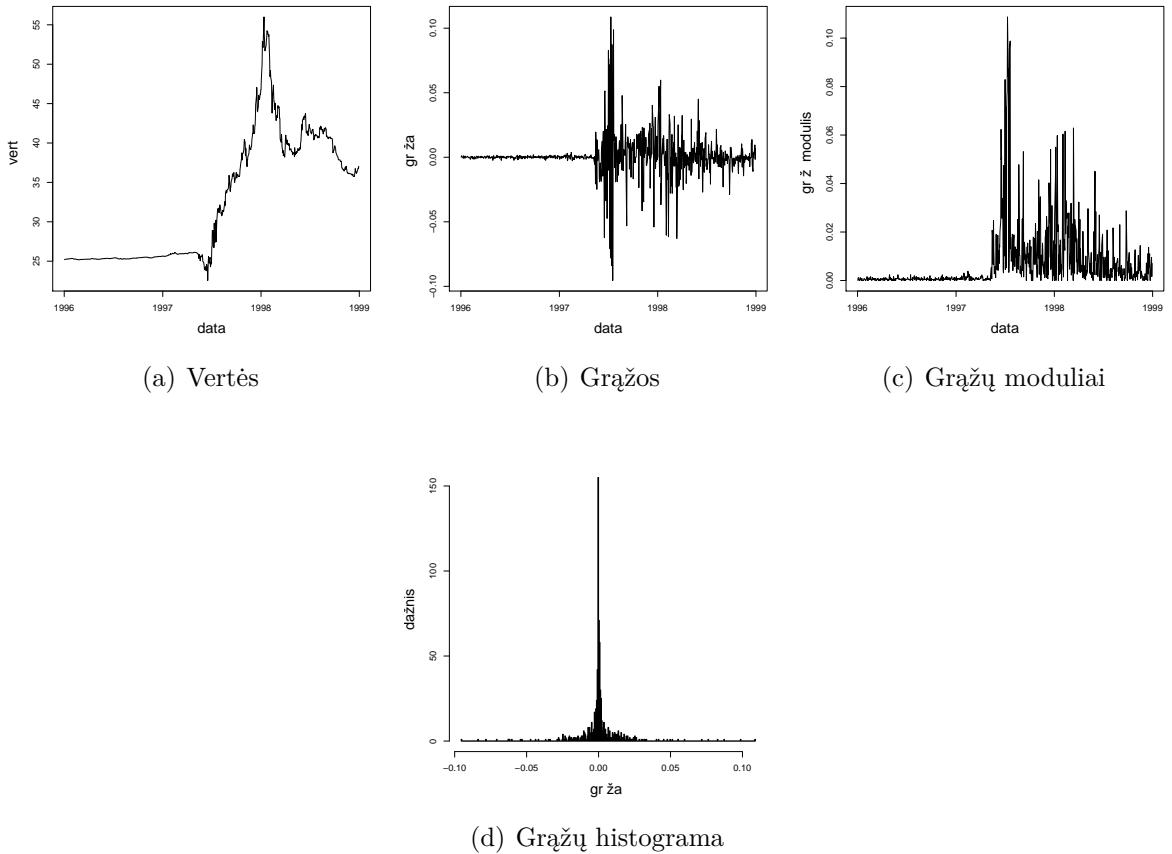


54 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos grafikas Indonezijos rupijos duomenims, kai  $m = 2$ ,  $r = -0,3$

indekso pasikeitimas Indonezijos duomenims randamas itin dažnai: kai  $r$  kinta tarp  $-1,6$  ir  $3$ . Taip pat pateikiamos nustatytos indekso pasikeitimo vietas. Straipsnyje [2] naudojamas Hilo testas lūži šiuose duomenyse aptinkta 1997 m. liepą, tuo tarpu šiame darbe aptariaamas testas ryškiausią duomenų pasiskirtymo pasikeitimą fiksuoja 1997 m. rugpjūčio gale. Stebint pačius duomenis pav. 51(b) galima teigti, kad šiame darbe nagrinėjamas testas duomenų pasiskirstymo pasikeitimą aptinka tiksliau, nes didžiausi grąžų pasikeitimai fiksujami 1997m. gale.

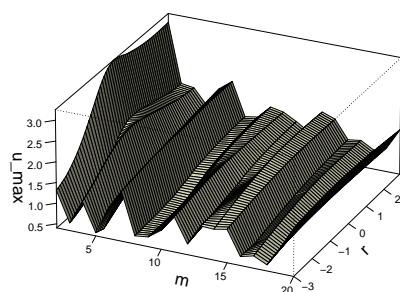
### 3.2.4. Tailando duomenys

Toliau ieškosime uodegos indekso pasikeitimo Tailando bato kurso grąžų duomenims 1996-1998-ųjų metų laikotarpiu. 55 pav. pateikiamos šios valiutos kurso vertės, grąžos, jų moduliai ir histograma.



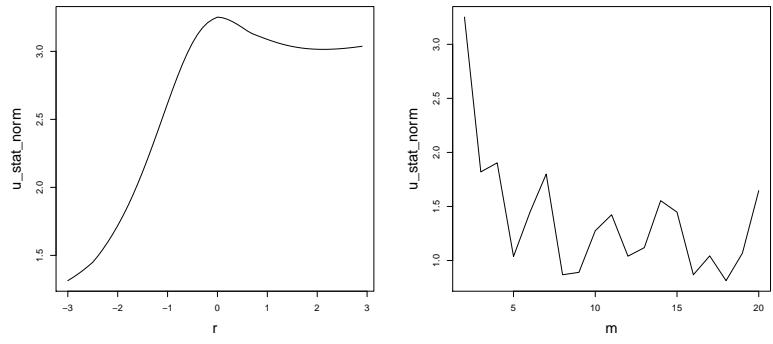
55 pav. Tailando bato kurso vertės ir grąžos nuo 1996-01-01 iki 1998-12-31.

Iš 7 , 8 lentelėse pateikiamų simetrijos testų rezultatų matome, kad Tailando duomenys pasiskirstę simetriškai, todėl toliau galime naudoti duomenų modulius. Bendra maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  pateikiamą 56 pav.



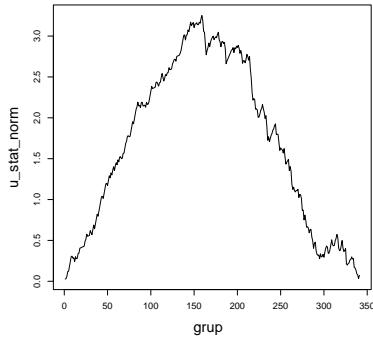
56 pav.  $U_j^{(n)}$  maksimalios reikšmės priklausomybė nuo  $r$  ir  $m$  Tailando bato duomenims

Tailando duomenims uodegos indekso pasikeitimas randamas itin dažnai: beveik visiems  $r$ , kai  $m = 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 20$ . Didžiausia statistikos reikšmė, lygi 3,253, fiksuojama, kai  $m = 2$ , o  $r = 0,1$ . 57(a) pav. pateikiama maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ , o 57(b) pav. nuo  $m$ , kai  $r = 0,1$ .  $U_j^{(n)}$  grafikas, kai  $m = 2$ , o  $r = 0,1$ , pateikiamas 58 pav.



(a) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri- (b) maksimalių  $U_j^{(n)}$  reikšmių pri-  
klausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ . klausomybė nuo  $m$ , kai  $r = 0,1$ .

57 pav. Tailando bato maksimalių  $U_j^{(n)}$  statistikos reikšmių priklausomybė nuo  $r$ , kai  $m = 2$ , ir  $m$ , kai  $r = 0,1$ .



58 pav.  $U_j^{(n)}$  statistikos grafikas Tailando bato duomenims, kai  $m = 2$ , o  $r = 0,1$ .

Lentelėje 21 pateikiamas tos maksimalios statistikos  $U_j^{(n)}$  ir jas atitinkančios  $r$ ,  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės, kurios nurodo indekso pasikeitimą, t.y. kurias naudojant gaunama statistikos  $U_j^{(n)}$  reikšmė, viršijanti kritinę reikšmę 1,36, kai  $m = 2$ . Su šia parametru  $m$  reikšme uodegos indekso pasikeitimas Tailando duomenims randamas beveik visam parametru  $r$  nagrinėjamam intervalui: kai  $r$  kinta tarp  $-2.7$  ir  $3$ . Taip pat pateikiamas nustatytos indekso pasikeitimo vietas. Straipsnyje [2] naudojamas testas duomenų pasikeitimą randa 1997 m. balandžio - gegužės mėnesiais, tuo tarpu šiame darbe aptariamas testas uodegos indekso pasikeitimą

fiksuoja 1997 m. birželį. Vizualiai stebint duomenis (pav. 55(b) ), galima spręsti, kad šiame darbe nagrinėjamas testas duomenų pasiskirstymo pasikeitimą randa tiksliau.

## Pastebėjimai

- Dirbant su realiais duomenimis pastebėtas statistikos trūkumas tuo atveju, kai duomenyse pasitaiko dvi vienodos reikšmės iš eilės, t.y. nulinė grąža, ir kai dalijama po 2 elementus, t.y.  $m = 2$ . Tokiu atveju, jei imame  $r < 0$ ,  $\kappa_{ni,r}$  gaunama begalinė, todėl statistika neveikia. Lygiai taip pat jei būtų keletas nulinii grąžų iš eilės, statistika neveiktų ir grupuojant po daugiau negu 2 elementus. Atitinkamai jei būtų 2 nulinės grąžos, neveiktų su  $m = 2; 3$ , jei 3 nulinės grąžos, neveiktų su  $m = 2; 3; 4$  ir t.t. Nagrinėtuose duomenyse pasitaikė tik atvejų su viena nuline grąža. I juos atsižvelgta buvo ir  $U_j^{(n)}$  maksimumai buvo skaičiuojami pagal  $r$  ir  $m$  reikšmes be šių reikšmių. Tačiau iš rezultatų buvo nesunku spręsti, kad tai galutinių išvadų nekeitė.
- Indekso pasikeitimo testo rezultatai daug labiau priklauso nuo parametro  $m$  parinkimo negu nuo  $r$ .
- Testo veikimas taip pat jautrus intervalo ilgiui ir jo simetriškumui. Testas geriausiai veikia, kai indekso pasikeitimas yra maždaug intervalo viduryje ir indekso reikšmė pasikeičia vieną kartą, t.y. nesugrįžta atgal į buvusią prieš pasikeitimą. Tai, kaip jau buvo minėta, yra šiek tiek kita problema — epidemijos, o ne indekso pasikeitimo radimas.
- Testo veikimas taip pat priklauso nuo tam tikrų pačių duomenų savybių. Kaip matome iš analizės rezultatų, tie patys parametrai suranda indekso pasikeitimą vieniems duomenims, tačiau neranda kitiem, nors jų reikšmės ir yra susijusios ir finansinė krizė ženkliai atispindi visuose tirtuose duomenyse.

## 4. Išvados

- darbe aptartas [3] pasiūlytas testas ir jo modifikacija, remiantis [9] ir [8] straipsniais;
- surastos sąlygos prie kurių galima naudoti minėto testo modifikaciją;
- testo tikslumas empiriškai lyginamas skirtiniems  $r$  parametram, modeliuojant indeksą pasikeitimą įvairiose vietose bei imant skirtingus duomenų kiekius;
- testas vienodai gerai randa indeksą pasikeitimą tiek indekso padidėjimo, tiek sumažėjimo atveju;
- modeliuojant pastebėta, kad Pareto skirstiniui geriausi rezultatai gaunami imant optimalų  $r_*$ , suskaičiuotą pagal [9] straipsnyje nurodytas formules;
- testo galia mažesnė, kai indekso pasikeitimas modeliuojamas ne centre;
- testas gana tiksliai randa indeksą pasikeitimo vietą įvairiomis  $\tau$  reikšmėmis;
- testo galia mažėja, kuomet mažėja duomenų kiekis;
- realiems duomenims sunkiau parinkti optimalias  $r$  ir  $m$  reikšmes, kadangi nežinomi duomenų skirstiniai: skirtiniems duomenims indeksą pasikeitimai randami skirtinėms parametru reikšmėms;
- realiems duomenims indeksą pasikeitimas gali būti randamas geriau imant mažiau duomenų: tai galima paaiškinti tuo, kad po kiek laiko indeksas pasikeičia dar kartą (stebima epidemija);

## Literatūros sąrašas

- [1] Cabilio, P. and Masaro, J.: A simple test of symmetry about an unknown median, *The Canadian Journal of Statistics*, 24 (1996), 349-361
- [2] Candelon B., Straetmans S.: Testing for Multiple Regimes in the Tail Behavior of Emerging Currency Returns, *Journal of International Money and Finance*, 25 (2006), 1187-1205
- [3] Gadeikis K., Paulauskas V.: On the Estimation of a Changepoint in a Tail Index, *Lithuanian Math. J.*, 45 (2005), 272-283
- [4] Lapinskas R.: Įvadas į statistiką su R. Paskaitų konspektas, 2003
- [5] Leipus R.: Finansines laiko eilutes, Paskaitų konspektas, 2003
- [6] Miao, W., Gel, Y. R., and Gastwirth, J. L.: A New Test of Symmetry about an Unknown Median. Random Walk, Sequential Analysis and Related Topics - A Festschrift in Honor of Yuan-Shih Chow. Eds.: Agnes Hsiung, Cun-Hui Zhang, and Zhiliang Ying, World Scientific Publisher, Singapore, 2006
- [7] Mira, A.: Distribution-free test for symmetry based on Bonferroni's measure, *Journal of Applied Statistics*, 26 (1999), 959-972
- [8] Paulauskas V., Vaičiulis M.: Once more on comparison of tail index estimators, *Preprint*, (2010), arXiv:1104.1242.
- [9] Paulauskas V., Vaičiulis M.: Several Modifications of DPR Estimator of the Tail Index, *Lithuanian Math. J.*, 51 (2011), 36-50
- [10] Quintos c., Fan Zh., Phillips P.: Structural Change Tests in Tail Behaviour and the Asian Crisis, *Review of Economic Studies*, 13 (2001), 633-663
- [11] [www.bloomberg.com](http://www.bloomberg.com) (aplankytą 2011-03-01)
- [12] [finance.yahoo.com](http://finance.yahoo.com) (aplankytą 2011-04-05)

## Priedas Nr. 1.

### Kritinių reikšmių radimas

Žinoma [3], kad

$$\sup_{t \in [0;1]} \frac{\sqrt{n}}{\sigma} |r_n(t)|$$

konverguoja pagal pasiskirstymą į

$$D = \sup_{t \in [0;1]} |W^0(t)|.$$

Čia  $\{W^0(t), 0 \leq t \leq 1\}$  yra Brauno tiltas:  $W^0(t) = W(t) - tW(1)$ . Atsitiktinio dydžio  $D$  pasiskirstymo funkcija:

$$F_D(x) = \begin{cases} 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 x^2} & ,x \geq 0, \\ 0 & ,x < 0. \end{cases}$$

Kvantilius lengvai galime rasti iš jos:

Pasiklivimo lygmuo	0,9	0,95	0,99
Kritinė reikšmė	1,223848	1,358099	1,627624

1 lentelė. Testo kritinės reikšmės.

## Priedas Nr. 2.

### Vilkoksono *signed rank* testas

Trumpai aprašysime testo procedūrą:

1. Pažymėkime  $Z_j = X_j - \tilde{X}$  kiekvienam  $j = 1, 2, \dots, n$ .
2. Pašaliname duomenis, lygius tikrinamai reikšmei  $Z_j = \tilde{X}$ . Tarkime, kad  $m$  yra sumažintos duomenų imties dydis.
3. Sunumeruojame absoliučias duomenų reikšmes  $|Z_1|, |Z_2|, \dots, |Z_m|$  didėjimo tvarka ir priskiriame kiekvienam, nelygiam nuliui,  $|Z_j|$  rangą  $R_j$ . T.y. mažiausias teigiamas  $|Z_j|$  gauna rangą, lygį 1, o vienodiems duomenims, jei tokią yra, priskiriamas rangą vidurkis.
4. Pažymėkime teigiamas reikšmes  $Z_j$  su  $\phi_j = I(Z_j > 0)$ , kur  $I(\cdot)$  yra indikatorinė funkcija:  $\phi_j = 1$  visiems  $Z_j > 0$ , priešingai  $\phi_j = 0$ .
5. Vilkoksono *signed rank* statistika  $W_+$  nusakoma taip:

$$W_+ = \sum_{j=1}^n \phi_j R_j.$$

6. Suskaičiuojame  $W_-$  analogiškai sumuodami neigiamų skirtumų  $Z_j$  rangus.
7. Priskiriame  $S$  mažesnę iš šių dviejų reikšmių:  $S = \min(W_+, W_-)$ .

Pateikiame testo statistikos skaičiavimo pavyzdį. Tarkime, kad  $X_j, j = 1, 2, \dots, 10$  yra dešimties dienų DJIA indekso vertės. Mediana  $\tilde{X} = 0.003836308$ . Lentelėjo apačioje matome pavyzdį.

$X_j$	$Z_j = X_j - \tilde{X}$	Ženklas	$ Z_j $	Rangas	Ženklas*Rangas
0.0036384076	-0.0001979000	-	0.0001979000	1.5	-1.5
0.0002929903	-0.0035433174	-	0.0035433174	7	-7
0.0040342077	0.0001979000	+	0.0001979000	1.5	1.5
0.0111175801	0.0072812724	+	0.0072812724	10	10
0.0083711378	0.0045348301	+	0.0045348301	9	9
0.0015416342	-0.0022946735	-	0.0022946735	5	-5
0.0027728518	-0.0010634559	-	0.0010634559	3	-3
0.0077175458	0.0038812381	+	0.0038812381	8	8
0.0008018024	-0.0030345052	-	0.0030345052	6	-6
0.0059045976	0.0020682899	+	0.0020682899	4	4

2 lentelė. Vilkoksono *signed rank* testo pavyzdys.

Taigi pateiktieji pavyzdiniams duomenims  $W_+ = \sum_{j=1}^n \phi_j R_j = 1.5 + 10 + 9 + 8 + 4 = 32.5$ , o  $W_- = \sum_{j=1}^n (1 - \phi_j) R_j = 1.5 + 7 + 5 + 3 + 6 = 22.5$ . Taigi  $S = \min(W_+, W_-) = 22.5$ . Tuo tarpu  $ES = 0.5 * 0.5 * n * (n + 1) = 0.5 * 0.5 * 10 * 11 = 27.5$ . Gauta statistikos reikšmė lyginama su kritinėmis reikšmėmis ir daromas sprendimas dėl nulinės hipotezės apie duomenų simetriškumą atmetimo ar priėmimo. Šiame darbe kritinės reikšmės nepateikiamas, nes testas atliekamas statistinio paketo **R** pagalba. Parodoma tik pavyzdinė testo statistikos skaičiavimo procedūra.

**Priedas Nr. 3.**  
**Rezultatai modeliuotiems duomenims**

	$\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 2.5$			$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 3.5$			$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 5$		
$r \setminus \tau$	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	0.75
-1.25	-	-	-	0.7324	0.6264	0.2902	0.9674	0.977	0.788
-1.15	-	-	-	0.7606	0.6508	0.3252	0.978	0.986	0.8482
-1.05	-	-	-	0.7914	0.6722	0.3688	0.9862	0.9918	0.8946
-0.95	-	-	-	0.8238	0.6922	0.4182	0.9922	0.9952	0.929
-0.85	-	-	-	0.8476	0.708	0.4558	0.9954	0.9974	0.958
-0.75	0.9377	0.9401	0.6142	0.867	0.7232	0.4986	0.9978	0.9984	0.9744
-0.65	0.9668	0.9585	0.7218	0.8838	0.7336	0.531	0.9994	0.9994	0.987
-0.55	0.983	0.9723	0.8083	0.894	0.7436	0.5656	1	0.9996	0.9942
-0.45	0.994	0.9813	0.8776	0.9024	0.749	0.597	1	0.9998	0.9976
-0.35	0.998	0.9865	0.9243	0.9096	0.7532	0.6196	1	0.9998	0.9988
-0.25	0.9988	0.9891	0.9521	0.9128	0.7544	0.6398	1	0.9998	0.999
-0.15	0.999	0.9899	0.9661	0.9152	0.756	0.6568	1	0.9998	0.9994
-0.05	0.9991	0.9902	0.9706	0.9172	0.7564	0.6668	1	0.9998	0.9996
0.05	0.9991	0.99	0.973	0.9194	0.7538	0.6748	1	1	0.9996
0.15	0.9991	0.9893	0.9743	0.9208	0.7514	0.6806	1	1	0.9996
0.25	0.9989	0.9879	0.9743	0.9216	0.7476	0.6852	1	1	0.9996
0.35	0.9989	0.9871	0.9745	0.9198	0.7426	0.6866	1	1	0.9996
0.45	0.9988	0.9864	0.9741	0.9188	0.7394	0.6884	1	1	0.9996
0.55	0.9987	0.9854	0.9731	0.9174	0.7358	0.687	1	1	0.9996
0.65	0.9986	0.9834	0.9717	0.9158	0.7328	0.6858	1	1	0.9996
0.75	0.9986	0.9816	0.9708	0.9128	0.73	0.6828	1	1	0.9996
0.85	0.9984	0.9799	0.9696	0.9088	0.7214	0.6834	1	1	0.9996
0.95	0.9982	0.9772	0.9682	0.9064	0.716	0.6828	1	1	0.9996
1.05	0.9976	0.9756	0.9663	0.903	0.7108	0.6792	1	1	0.9996
1.15	0.9974	0.9723	0.9641	0.9	0.7032	0.676	1	1	0.9996
1.25	0.9973	0.9688	0.9607	0.8962	0.6966	0.6736	1	1	0.9996
1.35	0.9969	0.9664	0.9573	0.8922	0.6912	0.67	1	1	0.9996
1.45	0.9964	0.9634	0.9536	0.8888	0.6866	0.6656	1	1	0.9996
1.55	0.996	0.9589	0.9509	0.8858	0.6806	0.6622	1	1	0.9994
1.65	0.9958	0.9555	0.9469	0.8824	0.6734	0.6572	1	1	0.9994
1.75	0.9952	0.9508	0.9428	0.877	0.6662	0.651	1	1	0.9994
1.85	0.9948	0.9479	0.9392	0.8724	0.6606	0.6468	1	0.9998	0.9994
1.95	0.9939	0.9435	0.9353	0.8692	0.6532	0.6432	1	0.9998	0.9994

3 lentelė. Empirinės galios skirtingoms indeksų poroms, kai indeksas padidėja.

	$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 1.5$			$\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 2.5$			$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 2.5$		
$r \setminus \tau$	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	0.75
-1.25	-	-	-	0.7388	0.2824	0.6404	0.9644	0.7956	0.9782
-1.15	-	-	-	0.7734	0.323	0.662	0.9766	0.8456	0.9862
-1.05	-	-	-	0.809	0.3616	0.6844	0.9858	0.8908	0.9914
-0.95	-	-	-	0.8336	0.4084	0.7026	0.9922	0.9292	0.9946
-0.85	-	-	-	0.8568	0.4542	0.7184	0.997	0.9566	0.9966
-0.75	0.9362	0.621	0.9356	0.8738	0.4942	0.7316	0.9994	0.9734	0.9986
-0.65	0.9648	0.7178	0.957	0.8896	0.5326	0.7452	0.9998	0.9876	0.999
-0.55	0.9836	0.8074	0.9732	0.8996	0.5618	0.7558	1	0.995	0.999
-0.45	0.9934	0.8786	0.982	0.9076	0.5922	0.7628	1	0.997	0.9996
-0.35	0.9986	0.9278	0.9872	0.9126	0.6162	0.7672	1	0.999	1
-0.25	0.9996	0.9532	0.9882	0.9164	0.6352	0.7702	1	0.9994	1
-0.15	0.9998	0.9652	0.987	0.9192	0.6478	0.7686	1	0.9994	1
-0.05	0.9998	0.972	0.9874	0.9192	0.6594	0.7694	1	0.9996	1
0.05	0.9998	0.975	0.987	0.9208	0.6658	0.7668	1	0.9996	1
0.15	0.9998	0.9758	0.9864	0.9214	0.6698	0.764	1	0.9996	1
0.25	0.9998	0.9754	0.9862	0.9208	0.6712	0.7602	1	0.9996	1
0.35	0.9998	0.9762	0.9844	0.9198	0.6724	0.7568	1	0.9996	1
0.45	0.9996	0.9756	0.9836	0.9182	0.6714	0.7514	1	0.9996	1
0.55	0.9994	0.9742	0.9816	0.9152	0.6716	0.7444	1	0.9996	1
0.65	0.9988	0.9726	0.9802	0.9132	0.671	0.7408	1	0.9996	1
0.75	0.9988	0.9714	0.9776	0.911	0.671	0.7352	1	0.9996	1
0.85	0.9988	0.9694	0.9742	0.9094	0.6694	0.73	1	0.9996	1
0.95	0.9986	0.9676	0.9716	0.9072	0.6668	0.7246	1	0.9996	1
1.05	0.9982	0.9654	0.9686	0.9042	0.665	0.719	1	0.9996	1
1.15	0.998	0.9632	0.9652	0.9004	0.6634	0.7132	1	0.9996	1
1.25	0.9978	0.9604	0.9612	0.898	0.6608	0.7072	1	0.9996	1
1.35	0.9974	0.9578	0.9578	0.8948	0.658	0.7	1	0.9996	1
1.45	0.997	0.9544	0.954	0.891	0.653	0.6946	1	0.9996	0.9998
1.55	0.9966	0.9496	0.9506	0.8874	0.6474	0.6878	1	0.9996	0.9998
1.65	0.9966	0.9452	0.9482	0.8846	0.6424	0.6804	0.9998	0.9996	0.9998
1.75	0.9964	0.942	0.9448	0.881	0.6406	0.675	0.9998	0.9996	0.9996
1.85	0.9956	0.9386	0.9412	0.8788	0.6358	0.6698	0.9998	0.9996	0.9996
1.95	0.9952	0.9348	0.9386	0.8732	0.6304	0.6622	0.9998	0.9996	0.9996

4 lentelė. Empirinės galios skirtingoms indeksų poroms, kai indeksas sumažėja.

	$\alpha_1 = 1.5, \alpha_2 = 2.5$			$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 3.5$			$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 5$		
$r \setminus \tau$	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	0.75	0.5	0.25	0.75
-1.25	-	-	-	0.4563	0.2953	0.5900	0.4711	0.2489	0.6430
-1.15	-	-	-	0.4599	0.2949	0.5979	0.4741	0.2499	0.6515
-1.05	-	-	-	0.4636	0.2946	0.6069	0.4774	0.2509	0.6603
-0.95	-	-	-	0.4662	0.2954	0.6155	0.4799	0.2516	0.6685
-0.85	-	-	-	0.4688	0.2959	0.6219	0.4817	0.2522	0.6750
-0.75	0.4649	0.2586	0.6227	0.4714	0.2958	0.6275	0.4834	0.2532	0.6804
-0.65	0.4705	0.2606	0.6372	0.4732	0.2965	0.6338	0.4847	0.2540	0.6857
-0.55	0.4755	0.2623	0.6505	0.4756	0.2974	0.6388	0.4858	0.2548	0.6892
-0.45	0.4792	0.2640	0.6610	0.4768	0.2985	0.6423	0.4868	0.2554	0.6936
-0.35	0.4815	0.2656	0.6701	0.4785	0.2994	0.6456	0.4877	0.2561	0.6970
-0.25	0.4836	0.2671	0.6763	0.4796	0.3008	0.6482	0.4885	0.2569	0.6999
-0.15	0.4853	0.2687	0.6809	0.4806	0.3015	0.6503	0.4892	0.2576	0.7015
-0.05	0.4865	0.2703	0.6851	0.4820	0.3025	0.6515	0.4899	0.2583	0.7028
0.05	0.4878	0.2715	0.6876	0.4830	0.3038	0.6525	0.4903	0.2589	0.7044
0.15	0.4888	0.2731	0.6901	0.4844	0.3051	0.6542	0.4907	0.2595	0.7057
0.25	0.4897	0.2745	0.6918	0.4851	0.3060	0.6559	0.4912	0.2603	0.7077
0.35	0.4906	0.2759	0.6929	0.4858	0.3073	0.6560	0.4917	0.2609	0.7085
0.45	0.4914	0.2774	0.6936	0.4865	0.3085	0.6565	0.4921	0.2616	0.7093
0.55	0.4920	0.2786	0.6940	0.4871	0.3097	0.6574	0.4925	0.2621	0.7101
0.65	0.4925	0.2800	0.6949	0.4877	0.3113	0.6580	0.4928	0.2627	0.7110
0.75	0.4931	0.2811	0.6954	0.4884	0.3117	0.6577	0.4931	0.2632	0.7115
0.85	0.4936	0.2824	0.6958	0.4888	0.3132	0.6578	0.4934	0.2636	0.7121
0.95	0.4940	0.2838	0.6961	0.4892	0.3148	0.6582	0.4937	0.2640	0.7127
1.05	0.4943	0.2850	0.6963	0.4896	0.3161	0.6585	0.4940	0.2644	0.7130
1.15	0.4947	0.2864	0.6966	0.4902	0.3174	0.6584	0.4943	0.2648	0.7135
1.25	0.4952	0.2873	0.6966	0.4906	0.3192	0.6585	0.4947	0.2653	0.7137
1.35	0.4957	0.2885	0.6967	0.4908	0.3201	0.6587	0.4949	0.2660	0.7140
1.45	0.4961	0.2899	0.6966	0.4911	0.3213	0.6588	0.4951	0.2666	0.7143
1.55	0.4964	0.2911	0.6964	0.4914	0.3227	0.6588	0.4952	0.2669	0.7144
1.65	0.4968	0.2919	0.6961	0.4919	0.3237	0.6588	0.4954	0.2673	0.7147
1.75	0.4973	0.2930	0.6961	0.4924	0.3253	0.6588	0.4955	0.2677	0.7146
1.85	0.4976	0.2938	0.6961	0.4928	0.3263	0.6587	0.4956	0.2681	0.7146
1.95	0.4978	0.2949	0.6959	0.4929	0.3274	0.6581	0.4958	0.2685	0.7146

5 lentelė. Randama indekso pasikeitimo vieta, kai indeksas padidėja.

	$\alpha_1 = 2.5, \alpha_2 = 1.5$			$\alpha_1 = 3.5, \alpha_2 = 2.5$			$\alpha_1 = 5, \alpha_2 = 2.5$		
-1.25	-	-	-	0.5448	0.4090	0.7076	0.5286	0.3557	0.7510
-1.15	-	-	-	0.5411	0.4009	0.7075	0.5256	0.3470	0.7498
-1.05	-	-	-	0.5372	0.3931	0.7067	0.5231	0.3386	0.7488
-0.95	-	-	-	0.5337	0.3867	0.7070	0.5205	0.3312	0.7482
-0.85	-	-	-	0.5308	0.3795	0.7066	0.5187	0.3249	0.7473
-0.75	0.5370	0.3773	0.7415	0.5284	0.3730	0.7064	0.5171	0.3189	0.7465
-0.65	0.5315	0.3610	0.7402	0.5265	0.3687	0.7053	0.5157	0.3140	0.7458
-0.55	0.5259	0.3464	0.7382	0.5245	0.3640	0.7043	0.5147	0.3099	0.7451
-0.45	0.5220	0.3361	0.7364	0.5225	0.3598	0.7029	0.5138	0.3063	0.7444
-0.35	0.5190	0.3280	0.7349	0.5210	0.3560	0.7023	0.5130	0.3035	0.7438
-0.25	0.5168	0.3222	0.7334	0.5197	0.3532	0.7020	0.5121	0.3009	0.7429
-0.15	0.5147	0.3177	0.7319	0.5181	0.3516	0.7012	0.5115	0.2986	0.7422
-0.05	0.5132	0.3148	0.7305	0.5171	0.3493	0.6997	0.5110	0.2968	0.7415
0.05	0.5122	0.3126	0.7287	0.5161	0.3477	0.6985	0.5104	0.2953	0.7407
0.15	0.5113	0.3104	0.7274	0.5152	0.3465	0.6979	0.5100	0.2941	0.7401
0.25	0.5103	0.3090	0.7262	0.5145	0.3458	0.6972	0.5094	0.2932	0.7394
0.35	0.5095	0.3078	0.7247	0.5137	0.3454	0.6960	0.5090	0.2923	0.7389
0.45	0.5087	0.3061	0.7233	0.5128	0.3449	0.6948	0.5086	0.2911	0.7383
0.55	0.5080	0.3052	0.7221	0.5124	0.3437	0.6935	0.5082	0.2901	0.7378
0.65	0.5073	0.3042	0.7207	0.5117	0.3427	0.6915	0.5078	0.2893	0.7372
0.75	0.5069	0.3035	0.7191	0.5109	0.3422	0.6901	0.5074	0.2885	0.7366
0.85	0.5061	0.3034	0.7174	0.5103	0.3421	0.6882	0.5071	0.2881	0.7360
0.95	0.5059	0.3036	0.7161	0.5097	0.3423	0.6872	0.5068	0.2879	0.7354
1.05	0.5055	0.3034	0.7149	0.5092	0.3424	0.6863	0.5065	0.2874	0.7351
1.15	0.5052	0.3035	0.7139	0.5089	0.3423	0.6853	0.5063	0.2871	0.7347
1.25	0.5049	0.3034	0.7123	0.5085	0.3421	0.6837	0.5061	0.2870	0.7340
1.35	0.5046	0.3034	0.7113	0.5079	0.3423	0.6831	0.5060	0.2865	0.7333
1.45	0.5044	0.3035	0.7102	0.5077	0.3425	0.6818	0.5059	0.2864	0.7327
1.55	0.5040	0.3035	0.7093	0.5077	0.3421	0.6802	0.5057	0.2863	0.7323
1.65	0.5038	0.3037	0.7077	0.5074	0.3428	0.6795	0.5055	0.2863	0.7316
1.75	0.5035	0.3039	0.7067	0.5071	0.3426	0.6785	0.5053	0.2862	0.7310
1.85	0.5031	0.3041	0.7056	0.5068	0.3430	0.6773	0.5051	0.2862	0.7305
1.95	0.5026	0.3041	0.7045	0.5066	0.3429	0.6766	0.5050	0.2860	0.7300

6 lentelė. Randame indeko pasikeitimo vietas, kai indeksas sumažėja.

## Priedas Nr. 4.

### Simetriškumo testų rezultatai

Dumenys	Vidurkis	Medianą	p reikšmė
DJIA	0.0000883376	0.0005871616	0.7629
NASDAQ	0.0001549799	0.001075969	0.1791
S&P 500	0.0000205371	0.0008421679	0.3014
FTSE 100	0.0000490420	0.0002801097	0.9116
Malaizija	-0.0007561369	-0.001018778	0.6014
Filipinai	0.000509675	- 0.0000004221	0.9901
Indonezija	0.001609247	0.0006054785	0.01496
Tailandas	0.0004933776	0.0001914533	0.1554

7 lentelė. Vilkoksono testo rezultatai.

Duomenys	Mira testas	Cabilio-Masaro testas	Miao-Gel-Gastwirth testas
DJIA	0.1414	0.1287	0.05251
NASDAQ	0.02632	0.0272	0.007896
S&P 500	0.01776	0.01307	0.001307
FTSE 100	0.5293	0.5255	0.4422
Malaizija	0.974	0.9816	0.9833
Filipinai	0.001068	0.07531	0.179
Indonezija	0.002077	0.09336	0.2004
Tailandas	0.03787	0.2258	0.3306

8 lentelė. Trijų simetriškumo testų p-reikšmės visiems tertiems duomenims.

**Priedas Nr. 5.**  
**Rezultatai realiems duomenims**

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
6	1.4	91	1.77	2.58	1.3634	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	1.5	91	1.75	2.57	1.3724	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	1.6	91	1.74	2.57	1.3807	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	1.7	91	1.72	2.56	1.3886	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	1.8	91	1.71	2.56	1.3959	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	1.9	91	1.69	2.55	1.4026	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	2	91	1.68	2.55	1.4089	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	2.1	91	1.66	2.54	1.4148	Tarp 2007-10-30 ir 2007-11-06
6	2.2	89	1.66	2.49	1.4202	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.3	89	1.65	2.49	1.4251	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.4	89	1.64	2.48	1.4297	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.5	89	1.62	2.48	1.4339	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.6	89	1.61	2.48	1.4377	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.7	89	1.6	2.47	1.4412	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.8	89	1.58	2.47	1.4443	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	2.9	89	1.57	2.47	1.4472	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
6	3	89	1.56	2.46	1.4497	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-19
12	1.4	45	2.4	3.77	1.3629	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	1.5	45	2.38	3.77	1.3706	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	1.6	45	2.35	3.77	1.3781	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	1.7	45	2.33	3.77	1.3855	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	1.8	45	2.31	3.76	1.3928	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	1.9	45	2.29	3.76	1.4000	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2	45	2.27	3.76	1.4071	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.1	45	2.25	3.76	1.4140	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.2	45	2.23	3.76	1.4209	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.3	45	2.21	3.76	1.4277	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.4	45	2.19	3.76	1.4343	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.5	45	2.17	3.76	1.4409	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.6	45	2.15	3.76	1.4473	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.7	45	2.13	3.76	1.4537	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.8	45	2.11	3.76	1.4600	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	2.9	45	2.09	3.76	1.4661	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29
12	3	45	2.08	3.76	1.4722	Tarp 2007-10-12 ir 2007-10-29

9 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$  ir indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas DJIA duomenims nuo 2005-09-06 iki 2009-08-26

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
20	0.7	11	11.19	3.41	1.3609	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	0.8	11	11.21	3.38	1.3649	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	0.9	11	11.23	3.36	1.3688	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1	11	11.25	3.33	1.3727	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.1	11	11.27	3.31	1.3766	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.2	11	11.29	3.28	1.3804	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.3	11	11.31	3.26	1.3841	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.4	11	11.33	3.24	1.3878	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.5	11	11.35	3.22	1.3915	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.6	11	11.37	3.2	1.3950	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.7	11	11.39	3.17	1.3986	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.8	11	11.41	3.15	1.4020	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	1.9	11	11.43	3.13	1.4054	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2	11	11.45	3.11	1.4087	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.1	11	11.47	3.09	1.4120	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.2	11	11.49	3.07	1.4152	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.3	11	11.51	3.05	1.4184	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.4	11	11.53	3.03	1.4214	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.5	11	11.55	3.02	1.4245	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.6	11	11.57	3	1.4274	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.7	11	11.59	2.98	1.4303	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.8	11	11.61	2.96	1.4331	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	2.9	11	11.63	2.94	1.4359	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26
20	3	11	11.65	2.93	1.4386	Tarp 2008-08-29 ir 2008-09-26

10 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$  ir indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas DJIA duomenims nuo 2007-11-13 iki 2009-08-26

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
3	0.1	137	1.38	0.95	1.3605	Tarp 2009-02-04 ir 2009-02-06
3	0.2	63	1.57	1.09	1.3680	Tarp 2008-03-19 ir 2008-03-24
3	0.3	63	1.55	1.07	1.3781	Tarp 2008-03-19 ir 2008-03-24
3	0.4	60	1.56	1.06	1.3864	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	0.5	60	1.54	1.04	1.3930	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	0.6	60	1.53	1.02	1.3980	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	0.7	60	1.52	1.01	1.4015	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	0.8	60	1.51	0.99	1.4035	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	0.9	60	1.5	0.98	1.4042	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1	60	1.49	0.96	1.4037	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1.1	60	1.48	0.95	1.4020	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1.2	60	1.47	0.94	1.3993	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1.3	60	1.46	0.93	1.3957	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1.4	60	1.45	0.92	1.3912	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1.5	60	1.44	0.91	1.3860	Tarp 2008-03-06 ir 2008-03-10
3	1.6	63	1.41	0.89	1.3801	Tarp 2008-03-19 ir 2008-03-24
3	1.7	63	1.41	0.88	1.3736	Tarp 2008-03-19 ir 2008-03-24
3	1.8	63	1.4	0.87	1.3667	Tarp 2008-03-19 ir 2008-03-24

11 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$  ir indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės NASDAQ indekso duomenims nuo 2007-06-21 iki 2009-08-26

$r$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
-3	3.38	4.26	1.561072	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.9	3.31	4.21	1.558030	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.8	3.24	4.16	1.554380	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.7	3.17	4.11	1.550099	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.6	3.11	4.06	1.545165	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.5	3.04	4.01	1.539554	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.4	2.95	4.15	1.534442	Tarp 2008-04-04 ir 2008-04-14
-2.3	2.89	4.10	1.529232	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-2.2	2.83	4.05	1.523352	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-2.1	2.77	4.01	1.516784	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-2	2.72	3.96	1.509514	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.9	2.66	3.92	1.501514	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.8	2.61	3.87	1.492821	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.7	2.56	3.83	1.483382	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.6	2.51	3.79	1.473209	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.5	2.47	3.75	1.462300	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.4	2.43	3.71	1.450659	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.3	2.38	3.67	1.438292	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.2	2.34	3.64	1.425209	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1	2.32	3.64	1.412404	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-1.0	2.28	3.60	1.399803	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-0.9	2.25	3.57	1.386579	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02
-0.8	2.21	3.54	1.372753	Tarp 2008-04-24 ir 2008-05-02

12 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $r$  ir indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas S&P 500 duomenims nuo 2007-09-04 iki 2009-08-26 su  $m = 7$

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
4	-0.4	138	2.35	1.63	1.4358	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	-0.3	137	2.33	1.63	1.5008	Tarp 2007-11-06 ir 2007-11-09
4	-0.2	135	2.31	1.62	1.5493	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	-0.1	135	2.29	1.61	1.5819	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	0	135	2.28	1.6	1.6010	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	0.1	135	2.26	1.59	1.6095	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	0.2	135	2.25	1.57	1.6102	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	0.3	135	2.23	1.56	1.6055	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	0.4	135	2.22	1.55	1.5971	Tarp 2007-10-25 ir 2007-10-30
4	0.5	137	2.21	1.54	1.5864	Tarp 2007-11-06 ir 2007-11-09
4	0.6	137	2.19	1.53	1.5743	Tarp 2007-11-06 ir 2007-11-09
4	0.7	138	2.18	1.52	1.5611	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	0.8	138	2.17	1.51	1.5474	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	0.9	138	2.16	1.5	1.5334	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	1	138	2.15	1.49	1.5192	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	1.1	138	2.14	1.48	1.5049	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	1.2	138	2.13	1.47	1.4906	Tarp 2007-11-12 ir 2007-11-15
4	1.3	139	2.12	1.46	1.4763	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-21
4	1.4	139	2.12	1.45	1.4620	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-21
4	1.5	139	2.11	1.44	1.4477	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-21
4	1.6	139	2.1	1.43	1.4335	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-21
4	1.7	139	2.09	1.43	1.4194	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-21
4	1.8	139	2.09	1.42	1.4053	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-21
4	1.9	140	2.08	1.41	1.3913	Tarp 2007-11-22 ir 2007-11-27
4	2	140	2.07	1.41	1.3774	Tarp 2007-11-22 ir 2007-11-27
4	2.1	140	2.07	1.4	1.3637	Tarp 2007-11-22 ir 2007-11-27

13 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26 su  $m = 4$

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
6	-3	105	3.82	3.34	1.42	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.9	105	3.77	3.26	1.42	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.8	105	3.72	3.19	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.7	105	3.67	3.13	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.6	105	3.63	3.06	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.5	105	3.58	3	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.4	105	3.54	2.93	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.3	105	3.5	2.87	1.45	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.2	105	3.46	2.82	1.45	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2.1	105	3.42	2.76	1.45	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-2	105	3.38	2.71	1.45	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-10
6	-1.9	93	3.35	2.65	1.45	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.8	93	3.31	2.61	1.45	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.7	93	3.28	2.56	1.45	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.6	93	3.25	2.51	1.45	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.5	93	3.22	2.47	1.45	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.4	93	3.19	2.43	1.44	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.3	93	3.17	2.39	1.44	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.2	93	3.14	2.35	1.43	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1.1	93	3.11	2.32	1.43	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-1	93	3.09	2.28	1.42	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.9	93	3.07	2.25	1.42	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.8	93	3.05	2.22	1.41	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.7	93	3.09	2.26	1.41	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.6	93	3.07	2.23	1.4	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.5	93	3.06	2.21	1.4	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.4	93	3.04	2.18	1.4	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.3	93	3.03	2.16	1.4	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.2	93	3.01	2.14	1.39	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	-0.1	93	3	2.12	1.39	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	0	93	2.99	2.1	1.39	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	0.1	93	2.97	2.08	1.38	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	0.2	93	2.96	2.07	1.37	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23
6	0.3	93	2.95	2.05	1.37	Tarp 2007-11-16 ir 2007-11-23

14 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26 su  $m = 6$

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
8	-1.1	80	4.27	2.95	1.36	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	-1	80	4.26	2.92	1.37	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	-0.9	80	4.24	2.89	1.38	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	-0.8	80	4.22	2.86	1.39	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	-0.7	80	4.21	2.83	1.4	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	-0.6	80	4.2	2.81	1.41	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	-0.5	79	4.18	2.78	1.42	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	-0.4	79	4.17	2.76	1.42	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	-0.3	79	4.15	2.73	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	-0.2	79	4.14	2.71	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	-0.1	79	4.13	2.69	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0	79	4.11	2.66	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.1	79	4.1	2.64	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.2	79	4.09	2.62	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.3	79	4.07	2.6	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.4	79	4.06	2.59	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.5	79	4.05	2.57	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.6	79	4.04	2.55	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.7	79	4.02	2.53	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.8	79	4.01	2.52	1.44	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	0.9	79	4	2.5	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	1	79	3.99	2.49	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	1.1	79	3.98	2.47	1.43	Tarp 2008-03-03 ir 2008-03-12
8	1.2	80	3.96	2.46	1.42	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.3	80	3.95	2.44	1.42	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.4	80	3.94	2.43	1.41	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.5	80	3.93	2.42	1.41	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.6	80	3.92	2.41	1.4	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.7	80	3.91	2.39	1.4	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.8	80	3.9	2.38	1.39	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	1.9	80	3.89	2.37	1.38	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	2	80	3.88	2.36	1.38	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	2.1	80	3.87	2.35	1.37	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26
8	2.2	80	3.86	2.34	1.36	Tarp 2008-03-13 ir 2008-03-26

15 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26 su  $m = 8$

m	r	kur	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
16	-3	41	5.86	4.22	1.4	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.9	41	5.82	4.17	1.4	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.8	41	5.78	4.11	1.4	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.7	41	5.75	4.06	1.4	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.6	41	5.71	4.01	1.39	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.5	41	5.67	3.96	1.39	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.4	41	5.63	3.91	1.39	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.3	41	5.6	3.86	1.38	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.2	41	5.56	3.82	1.38	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2.1	41	5.53	3.77	1.37	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-2	41	5.49	3.73	1.37	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17
16	-1.9	41	5.46	3.68	1.36	Tarp 2008-03-27 ir 2008-04-17

16 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $m$ ,  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas FTSE 100 indekso duomenims nuo 2005-09-13 iki 2009-08-26 su  $m = 16$

r	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
0.3	0.87	0.61	1.42	Tarp 2008-11-27 ir 2008-11-28
0.4	0.87	0.60	1.48	Tarp 2008-11-25 ir 2008-11-26
0.5	0.87	0.58	1.52	Tarp 2008-11-19 ir 2008-11-20
0.6	0.87	0.57	1.55	Tarp 2008-10-16 ir 2008-10-17
0.7	0.87	0.56	1.57	Tarp 2008-10-16 ir 2008-10-17
0.8	0.87	0.55	1.58	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
0.9	0.87	0.54	1.59	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1	0.87	0.53	1.60	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1.1	0.86	0.52	1.60	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1.2	0.86	0.51	1.61	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1.3	0.86	0.51	1.61	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1.4	0.86	0.50	1.60	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1.5	0.86	0.49	1.60	Tarp 2008-07-23 ir 2008-07-24
1.6	0.86	0.48	1.60	Tarp 2008-09-30 ir 2008-10-01
1.7	0.86	0.48	1.59	Tarp 2008-09-30 ir 2008-10-01
1.8	0.86	0.47	1.59	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
1.9	0.86	0.47	1.58	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2	0.87	0.46	1.58	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.1	0.87	0.46	1.57	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.2	0.87	0.45	1.56	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.3	0.87	0.45	1.56	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.4	0.87	0.45	1.55	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.5	0.87	0.44	1.54	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.6	0.88	0.48	1.54	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.7	0.88	0.48	1.53	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.8	0.89	0.47	1.53	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
2.9	0.89	0.47	1.52	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03
3	0.89	0.47	1.51	Tarp 2008-10-02 ir 2008-10-03

17 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas FTSE 100 indekso duomenims nuo 2007-09-05 iki 2009-08-26 su  $m = 2$

r	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
2.6	2.75	7.07	1.36	Tarp 1998-02-09 ir 1998-02-26
2.7	2.74	7.06	1.36	Tarp 1998-02-09 ir 1998-02-26
2.8	2.73	7.05	1.37	Tarp 1998-02-09 ir 1998-02-26
2.9	2.72	7.05	1.37	Tarp 1998-02-09 ir 1998-02-26
3	2.71	7.04	1.37	Tarp 1998-02-09 ir 1998-02-26

18 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas Malaizijos duomenims nuo 1996-01-01 iki 1998-01-01 su  $m = 14$

$r$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
-0,9	1,79	1,24	1,38	Tarp 1997-07-03 ir 1997-07-04
-0,8	1,78	1,20	1,46	Tarp 1997-07-03 ir 1997-07-04
-0,7	1,77	1,17	1,54	Tarp 1997-07-03 ir 1997-07-04
-0,6	1,77	1,14	1,63	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
-0,5	1,77	1,12	1,70	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
-0,4	1,76	1,09	1,78	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
-0,3	1,76	1,08	1,84	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
-0,2	1,76	1,06	1,90	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
-0,1	1,66	1,02	1,97	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,1	1,69	1,00	2,09	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,2	1,70	0,98	2,13	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,3	1,71	0,97	2,17	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,4	1,72	0,96	2,19	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,5	1,73	0,95	2,21	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,6	1,75	0,95	2,22	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,7	1,76	0,94	2,23	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,8	1,77	0,93	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
0,9	1,78	0,93	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1	1,80	0,92	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,1	1,81	0,92	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,2	1,83	0,92	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,3	1,85	0,91	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,4	1,87	0,91	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,5	1,88	0,90	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,6	1,90	0,90	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,7	1,92	0,90	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,8	1,94	0,90	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
1,9	1,97	0,89	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2	1,99	0,89	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,1	2,01	0,89	2,24	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,3	2,06	0,89	2,25	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,4	2,09	0,89	2,25	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,5	2,11	0,88	2,25	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,6	2,14	0,88	2,26	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,8	2,20	0,88	2,27	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
2,9	2,23	0,88	2,27	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02
3	2,26	0,88	2,28	Tarp 1997-07-01 ir 1997-07-02

19 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas Filipinų duomenims nuo 1996-01-01 iki 1998-01-01 su  $m = 2$

$r$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
-1,6	1,94	1,69	1,40	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-1,5	1,88	1,62	1,47	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-1,4	1,83	1,54	1,54	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-1,3	1,79	1,47	1,60	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-1,2	1,74	1,41	1,67	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-1,1	1,70	1,35	1,73	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-1	1,66	1,30	1,79	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,9	1,63	1,25	1,84	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,8	1,60	1,20	1,88	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,7	1,57	1,16	1,92	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,6	1,55	1,12	1,95	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,5	1,52	1,09	1,98	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,4	1,50	1,06	1,99	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,3	1,48	1,03	2,00	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,2	1,47	1,01	2,01	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
-0,1	1,45	0,99	2,01	Tarp 1997-08-26 ir1997-08-27
0,1	1,42	0,95	1,98	Tarp 1997-08-20 ir1997-08-21
0,2	1,42	0,94	1,98	Tarp 1997-08-20 ir1997-08-21
0,3	1,42	0,93	1,98	Tarp 1997-08-20 ir1997-08-21
0,4	1,41	0,92	1,96	Tarp 1997-08-20 ir1997-08-21
0,5	1,41	0,90	1,95	Tarp 1997-08-20 ir1997-08-21
0,6	1,40	0,89	1,94	Tarp 1997-08-20 ir1997-08-21
0,7	1,38	0,87	1,94	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
0,8	1,38	0,86	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
0,9	1,38	0,85	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1	1,38	0,84	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,1	1,39	0,84	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,2	1,39	0,83	1,92	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,3	1,40	0,82	1,92	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,5	1,41	0,81	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,6	1,42	0,80	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,7	1,43	0,79	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,8	1,44	0,79	1,93	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
1,9	1,45	0,78	1,94	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
2,1	1,48	0,77	1,95	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
2,2	1,49	0,77	1,95	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
2,3	1,51	0,76	1,96	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
2,4	1,52	0,76	1,96	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
2,6	1,55	0,75	1,98	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
2,7	1,57	0,75	1,98	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01
3	1,62	0,74	2,00	Tarp 1997-09-30 ir1997-10-01

20 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas Indonezijos duomenims nuo 1996-01-01 iki 1998-01-01 su  $m = 2$

$r$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$U_j^{(n)}$	Lūžio vieta
-2,7	2,77	2,71	1,39	Tarp 1997-09-04 ir 1997-09-05
-2,5	2,60	2,51	1,45	Tarp 1997-09-04 ir 1997-09-05
-2,3	2,77	2,32	1,54	Tarp 1997-06-24 ir 1997-06-25
-2,1	2,64	2,13	1,66	Tarp 1997-06-24 ir 1997-06-25
-1,9	2,53	1,95	1,79	Tarp 1997-06-24 ir 1997-06-25
-1,7	2,45	1,78	1,94	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-1,5	2,36	1,62	2,11	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-1,3	2,28	1,47	2,31	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-1,1	2,21	1,35	2,51	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-0,9	2,15	1,24	2,72	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-0,7	2,10	1,15	2,91	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-0,5	2,05	1,08	3,06	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-0,3	2,02	1,03	3,17	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
-0,1	2,00	0,99	3,23	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
0,1	1,98	0,96	3,25	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
0,3	1,98	0,93	3,24	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
0,5	1,98	0,92	3,20	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
0,7	1,99	0,90	3,15	Tarp 1997-06-20 ir 1997-06-23
0,9	2,10	0,92	3,12	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
1,1	2,14	0,91	3,09	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
1,3	2,17	0,90	3,06	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
1,5	2,22	0,89	3,04	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
1,7	2,27	0,89	3,03	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
1,9	2,33	0,89	3,02	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
2,1	2,39	0,88	3,02	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
2,3	2,45	0,88	3,01	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
2,5	2,52	0,88	3,02	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
2,7	2,60	0,88	3,02	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
2,9	2,68	0,88	3,03	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16
3	2,72	0,88	3,04	Tarp 1997-05-15 ir 1997-05-16

21 lentelė. Maksimalios  $U_j^{(n)}$  statistikos, parametru  $r$ , indeksų  $\alpha_1$  bei  $\alpha_2$  reikšmės ir indekso pasikeitimo vietas Tailando duomenims nuo 1996-01-01 iki 1998-01-01 su  $m = 2$

## Priedas Nr. 6.

### R kodas

Šiame darbe duomenų modeliavimą ir skaičiavimus realiemis duomenims atlikome statistiniu R paketu, 2.12.1 versija. Žemiau pateikiamas pagrindinės naudotos funkcijos.

```
#####
##### FUNKCIJOS #####
#####

### Generavimas:

#Pareto pasiskirsymo generavimas
rParet <- function(kiek, alpha){
    return(runif(kiek)^(-1/alpha))
}

generate2<-function(t,kur,a1,a2){
    t1<-floor(kur*t)
    return(c(rParet(t1,a1), rParet(t-t1,a2)))
}

### kapu (santykiu skaiciavimas)

santykis2 <- function(x, r){
    p1 <- which.max(x)
    m1 <- x[p1]
    m2 <- max(x[-p1])
    return((m2/m1)^r)
}

### fKapos:
fKapos <- function(x, m, r){
    n <- floor(length(x)/m)
    XM <- matrix(x[1:(n*m)], ncol=m, byrow=TRUE)
    if(m==2){
        kapa = XM[,1]/XM[,2]
        kapa[kapa>1]=1/kapa[kapa>1]
        kapa = kapa^r
    }else{
        kapa <- apply(XM, 1, santykis2, r)
    }
}
```

```

#### ustatistikos:

U_stat2 <-function(kapa, dzeta){
  n<-length(kapa)
  return( ((1:(n-1)*(n-1):(n-1))/n^2)^(1-dzeta))*( cumsum(kapa[1:(n-1)])/(1:(n-1))
  - (sum(kapa) - cumsum(kapa[1:(n-1)])))/((n-1):1) )
}

#### callc, all

U_all2 <-function(x, m=2, r = -1){
  n <- floor(length(x)/m)
  XM <- matrix(x[1:(n*m)], ncol=m, byrow=TRUE)
  if(m==2){
    kapa = XM[,1]/XM[,2]
    kapa [kapa>1]=1/kapa [kapa>1]
    kapa = kapa^r
  }else{
    kapa <- apply(XM, 1, sanykis2, r)
  }
  u <- U_stat2(kapa,0)
  u_norm_max <- max(abs(u*sqrt(n)/sd(kapa)))
  return(u_norm_max)
}

U_all2w <-function(x, m=2, r = -1){
  n <- floor(length(x)/m)
  XM <- matrix(x[1:(n*m)], ncol=m, byrow=TRUE)
  if(m==2){
    kapa = XM[,1]/XM[,2]
    kapa [kapa>1]=1/kapa [kapa>1]
    kapa = kapa^r
  }else{
    kapa <- apply(XM, 1, sanykis2, r)
  }
  u <- U_stat2(kapa,0)
  u_norm_maxw <- which.max(abs(u*sqrt(n)/sd(kapa)))
  u_norm_max <- (abs(u*sqrt(n)/sd(kapa)))[ u_norm_maxw ]
  u_norm_maxw <- u_norm_maxw /n
  ats<-c( u_norm_max,u_norm_maxw )
  return(ats)
}

```

```

#####
##### SIMULIAVIMAS #####
#####

Sim_test_rw <- function(
    kur = 0.5                      # kur simuliujamas luzis
    , kiek = 1000                   # kokio ilgio x generuojamas
    , a1 = 1.5                      # pirmos dalies indeksas
    , a2 = 2.5                      # antros dalie indeksas
    , iter = 10000                  # iteraciju skaicius
    , r_ser = round(seq(-a1/2, 2, 0.2), 2) # kokius r tikrinti
){
    r_ser = r_ser[r_ser!=0]
    #sugeneruojam duomenis. Visi duomenis patalpinami i matrica kiek x iter. X[,i]
    # yra itos iteracijos realizacija
    X = sapply( rep(kiek, iter), generate2, kur=kur, a1=a1, a2=a2 )
    #Skaiciuojam sup(U) kiekvienai is realizaciju imdami skirtingus r.
    calc_supUw = sapply(r_ser, function(r) apply(X, 2, U_all2w, m =2, r=r))
    colnames(calc_supUw) <- paste("r=",r_ser)
    return(calc_supUw)
}

#####
## DUOMENU MODELIAVIMAS ##
#####

ribq = 0.95
ribu = 1.36

# apribreziam kintamuosius:
kur = 0.5
kiek = 1000
a1 = 1.5
a2 = 2.5
iter= 10000

r_ser = round(seq(-a1/2, 2, 0.1), 2)
r_ser = r_ser[!r_ser==0]

# skaiciuojam sup(u)
st = proc.time()
test_rw <- Sim_test_rw(kur, kiek, a1, a2, iter, r_ser )

```

```
proc.time()-st  
  
idx<-seq(1, 2*iter, 2)  
  
#galia priklausomai nuo n  
galia = apply(test_rw[idx,], 2, function(x) sum(x>ribu)/length(x))  
vieta = apply(test_rw[-idx,], 2, function(x) mean(x))
```