Versuch 101 "Das Trägheitsmoment"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.2017, Abgabe: 24.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern soll bestimmt werden und der Satz von Steiner verifiziert werden.

2 Theorie

Das Drehmoment M, das Trägheitsmoment I als auch die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ charakterisieren die Rotationsbewegung. Für eine punktförmige Masse kann das Trägheitsmoment mit $I = m * r^2$ berechnen. Dabei ist m die Masse und r der Abstand zur Drehachse. Für ein ausgedehnten Körper um eine feste Achse kann das Gesamtträgheitsmoment als:

$$I = \sum_i r_{\mathrm{i}}^2 \cdot m_{\mathrm{i}} \tag{1}$$

dargestellt werden. Das Drehmoment M ist von der Lage der Drehachse abhängig. Für geometrische Objekte, wie ein Kugel, Stab, Zylinder, lässt sich das Trägheitsmoment leicht bestimmen. In Abbildung 1 sind verschiedene Objekte mit deren Trägheitsmoment dargestellt.

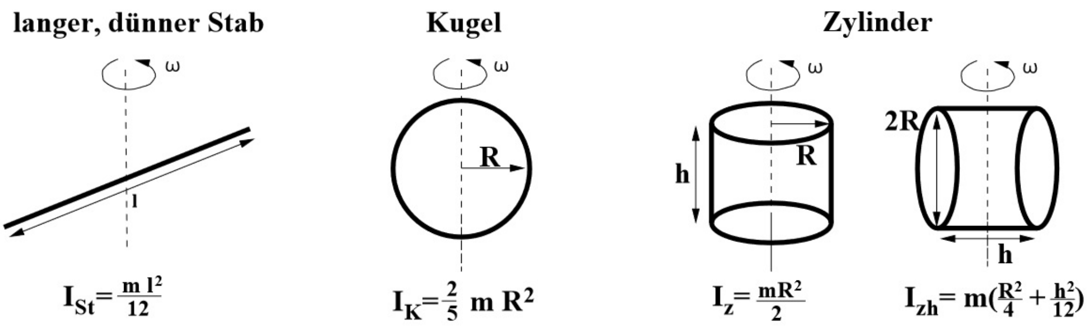

Abbildung 1: Objekte mit deren Trägheitsmoment[1]

Ist die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt eines Körpers sondern parallel mit einem Abstand a zur gehenden Achse verschoben, so lässt sich das Trägheitsmoment mithilfe von Satz des Steiners

$$I = I_0 + m * a^2 \tag{2}$$

erechnen. Dabei ist I_0 das Trägheitsmoment der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers. Greift eine Kraft mit einem Abstand r von der Achse auf ein drehenden Körper, so wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$. In einem Schwingungssystem wirkt auf ein Körper durch die Drehung um ein Winkel ϕ aus seiner Ruhelage ein rücktreibenes Drehmoment durch eine Feder entgegen. Die harmonische Schwingung lässt sich mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \tag{3}$$

berechnen. I ist dabei das Trägheitsmoment und D die Winkelrichtsgröße.

$$D = \frac{M}{\phi} \leftrightarrow D = \frac{F \cdot r}{\phi} \tag{4}$$

Das harmonische Verhalten bei der Drehschwingung ist nur auf kleinen Winekl ϕ beschränkt.

3 Versuchsaufbau

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments I wird zunächst die Drillachse, siehe Abbildung 2, benötigt. Die Drillachse die über eine Spiralfeder mit einem Rahmen verbunden.

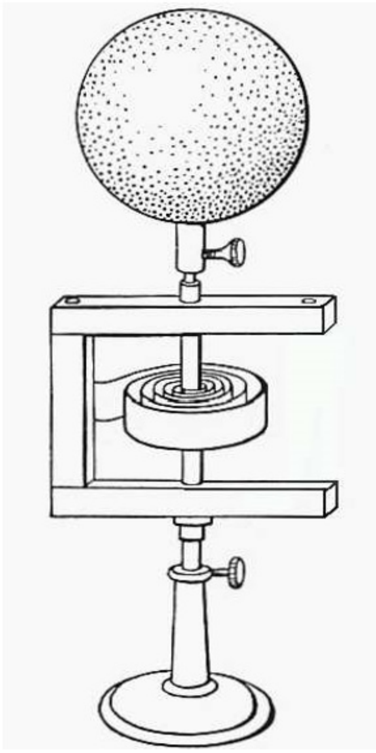

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbau[1]

Auf die Achse können verschiedene Objekte angebracht werden.

4 Durchführung

Zur Bestimmung der Apperaturkonstanten D und das Eigenträgheitsmoment I_{D} der Drillachse wird eine Federwaage eingehakt und um ein Winkel ausgelenkt. Es ist zu beachten, dass die Federwaage senkrecht zum Radius gehalten wird, da sich das Kreuzprodukt vom

Drehmoment aufhebt. Mit der Formel aus (4) kann nun die Winkelrichtgröße berechnet werden. Zur Bestimmung des Eigenträgheismoments wird ein masselosen Metallstab, an denen zwei Gewicht senkrecht zur Drehachse befindet, angesteckt. Das Trägheismoment verschiedener Objekte wird mithilfe der Formel (2) bestimmt. Für eine Modelpuppe wird ebenfalls das Trägheitsmoment mithilfe der Formel (1) als auch (2) errechnet. Zur Vereinfachung wird die Puppe aus verschiedenen Zylindern zusammengebaut (siehe Abbildung 3).

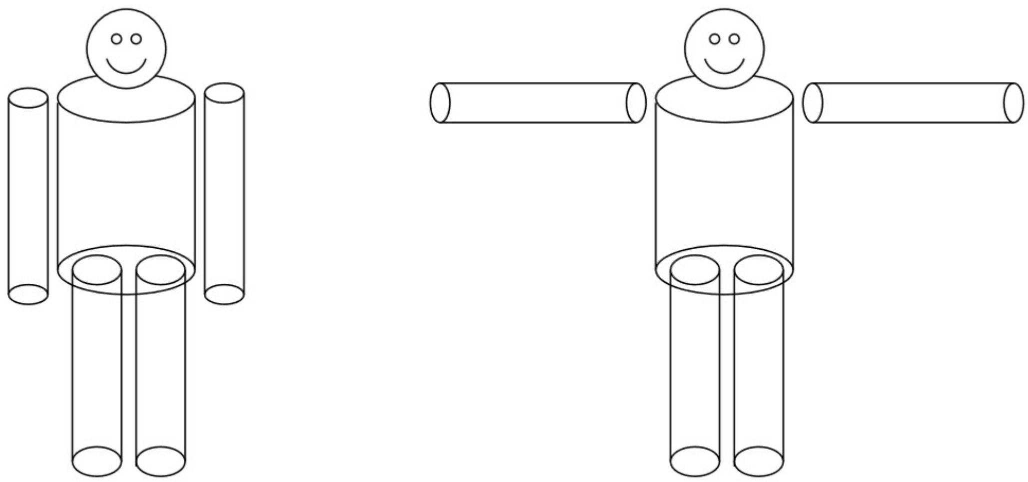

Abbildung 3: Vereinfachte Darstellung der Modelpuppe[1]

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Apparatekonstanten

Bevor die Trägheitsmomente der verschiedenen Körper bestimmt werden können müssen die Apparatekonstanten bestimmt werden. Das ist zum einen die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment der Drillachse I_D.
Die Winkelrichtgröße wird mithilfe der Gleichung (4) bestimmt. Die Kraft wird im Abstand von $r = 4{,}3\,\mathrm{cm} = 4{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ gemessen.
Der Mittelwert und der zugehörige Fehler der Winkelrichtgrößen wird nun mit folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\bar{D} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} D_i \tag{5}$$

$$\Delta D = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_i (D_i - \bar{D})^2} \tag{6}$$

Tabelle 1: Tabelle mit den Messdaten für die Winkelrichtgröße

ϕ in Grad	ϕ in rad	F in N	D in $10^{-2} N$m
50	$\frac{5\pi}{18}$	0.42	2.07
60	$\frac{\pi}{3}$	0.56	2.23
80	$\frac{4\pi}{9}$	0.8	2.46
90	$\frac{\pi}{2}$	0.82	2.24
100	$\frac{5\pi}{9}$	0.96	2.37
120	$\frac{2\pi}{3}$	1.16	2.38
140	$\frac{7\pi}{9}$	1.34	2.36
160	$\frac{8\pi}{9}$	1.54	2.37
180	π	1.78	2.44
200	$\frac{10\pi}{9}$	2	2.46

Damit ergibt sich für die Winkelrichtgröße:

$$D = (2{,}388 \pm 0{,}039) \cdot 10^{-2} Nm$$

Nun muss noch das TräTrägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Dazu muss die Gleichung (3) für diesen Fall noch angepasst werden, da sich das gesamte Trägheitsmoment aus dem der Drillachse und der zwei Massen zusammensetzt:
$I = I_D + 2(I_{zh} + ma^2) = I_D + 2(m\left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) ma^2)$
Die geometrischen Abmessungen der beiden Massen sind:

- Masse m = $222{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg
- Höhe h = 0,03 m
- Durchmesser d = 0,035 m

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment der Massen:

$$I_{zh} = 3{,}37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Durch Umformung der Gleichung (3) folgt:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m}{D} a^2 + \frac{8\pi^2}{D} I_{zh} + \frac{4\pi^2}{D} I_D \tag{7}$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse wird nun mit einer Ausgleichsrechnung bestimmt. Die Ausgleichsrechnung wird mit Python 3.6 durchgeführt.

Tabelle 2: Tabelle mit den Messdaten für das Trägheitsmoment der Drillachse

T in s	a in 10^{-2} m	T^2 in s^2	a^2 in $10^{-4}\,\mathrm{m}^2$
2.32	3.5	5.38	12.25
2.64	5.5	6.97	30.25
2.67	7.5	7.13	56.25
3.16	9.5	9.99	90.25
3.56	12.5	12.67	156.25
4.44	14.5	19.71	210.25
5.09	18.5	25.91	342.25
5.89	20.5	34.69	420.25
6.52	23.5	42.51	552.25
7.4	26.5	54.76	702.25

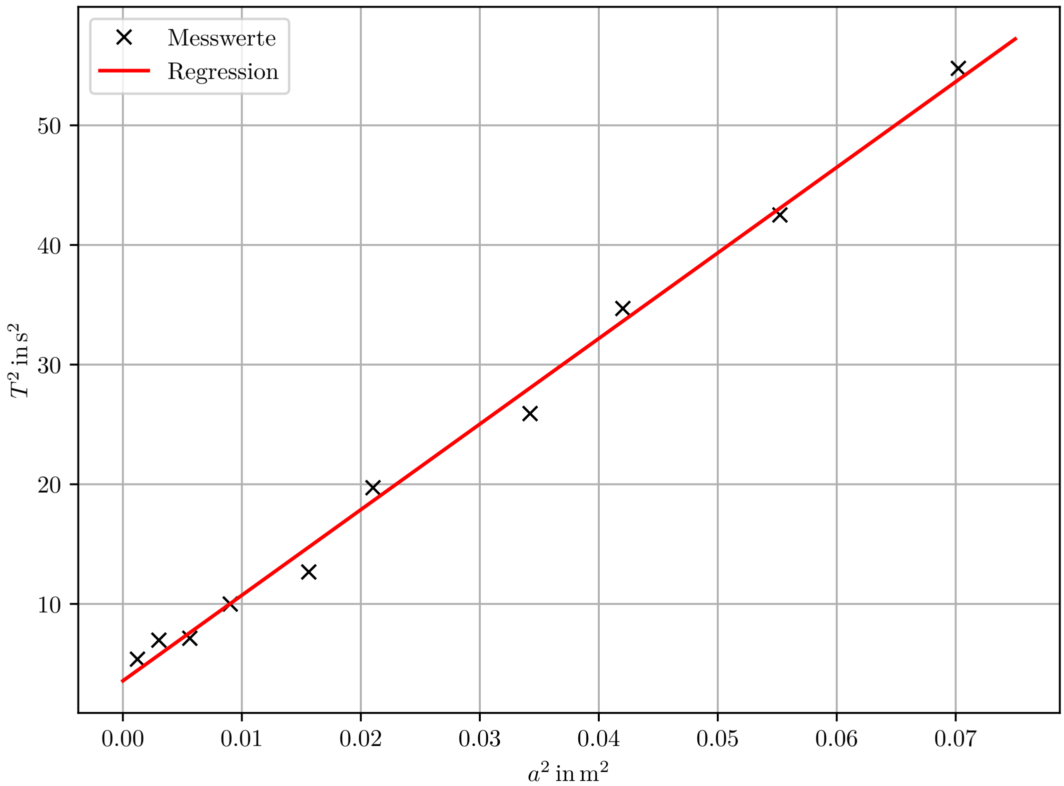

Abbildung 4: Graphische Darstellung der Messwerte und der Ausgleichsgeraden

Damit ergeben sich die Parameter der Ausgleichsgeraden zu:

$$y = m'x + b \tag{8}$$

- $m' = (715{,}28 \pm 19{,}21)\,\mathrm{kg/Nm}$
- $b = (3{,}571 \pm 0{,}658)\,\mathrm{kg\,m/N}$

Durch Vergleichen der Gleichungen (7) und (8) lässt sich das Trägheitsmoment der Drillachse und die Winkelrichtgröße nochmal bestimmen.

$$D_2 = \frac{8\pi^2 m}{m'} \tag{9}$$

$$I_D = \frac{D_2}{4\pi^2} b - 2I_{zh} \tag{10}$$

Der Fehler der neu bestimmten Winkelrichtgröße wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$\Delta D_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial D_2}{\partial m'} \cdot \Delta m'\right)^2} = \frac{8\pi^2 m}{m'^2} \cdot \Delta m'$

Die Winkelrichtgröße ist also:

$$D_2 = (2{,}456 \pm 0{,}066) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N\,m}$$

Damit kann nun das Trägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Der Fehler wird wieder mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial D_2} \cdot \Delta D_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2}$

$$I_D = (2{,}154 \pm 0{,}414) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.2 Trägheitsmoment Kugel

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 101: Das Trägheitsmoment.* 2017.