

Versuch 354 "Gedämpfte und erzwungene Schwingungen"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.2017, Abgabe: 08.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Zielsetzung	3
2 Theorie	3
3 Durchführung	6
4 Auswertung	7
5 Diskussion	17
Literatur	17

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll der effektive Dämpfungswiderstand einer gedämpften Schwingkreisschaltung als auch beim aperiodischen Grenzfall untersucht und ermittelt werden. Ebenso wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung von der außen gelegten Spannung untersucht.

2 Theorie

Ein CL -Schwingkreis, das aus der Kapazität C des Kondensators und der Induktivität L der Spule besteht, wird in der Physik durch den Energieaustausch der beiden Bauelemente als eine periodische Schwingung bezeichnet. Solange kein energieverbrauchendes Bauelement hinzukommt ist der Austausch unbegrenzt lang und wird als ungedämpfte Schwingung bezeichnet. Bei einer gedämpften Schwingung wird als energieverbrauchendes Bauelement ein ohmscher Widerstand R hinzugeschaltet wie in Abbildung (1) zu sehen ist.

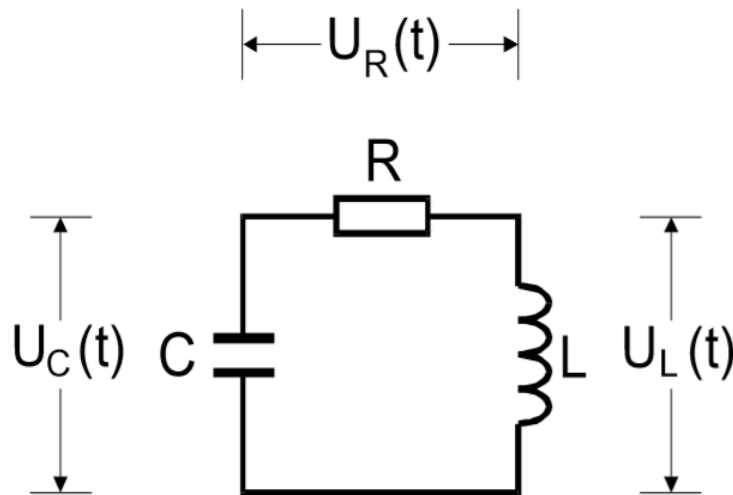


Abbildung 1: Schaltdarstellung einer gedämpften Schwingung[2].

Nun beginnt kein unendlicher Energieaustausch zwischen der Kapazität C des Kondensators und der Induktivität L der Spule statt. Die Spannungen die an den einzelnen Bauelementen abfallen, können mit Hilfe der Maschenregel, zu einer Differentialgleichung aufgestellt und umgeformt werden.

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \quad (1)$$

Die Lösung der Gleichung (1) lautet:

$$I(t) = A_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{i\omega_2 t} \quad (2)$$

Dabei ist

$$\omega_{1,2} = i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Es werden nun 2 Fälle betrachtet.

Der erste Fall $\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{4L^2}$ folgt, dass ω reell ist.

Somit wird die Gleichung(2) mit Hilfe der Eulerschen Form zu

$$I(t) = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad (3)$$

umgeschrieben. Dabei ist

$$\mu = \frac{R}{4\pi L}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Die Gleichung (3) stellt eine gedämpfte Schwingung da. Die Amplitude nimmt nach zunehmender Zeit exponentiell ab und somit folgt für die Schwingungsdauer folgende Formel:

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{2L}{R} \quad (4)$$

Der zweite Fall $\frac{1}{LC} \ll \frac{R^2}{4L^2}$ folgt daraus, dass ω imaginär ist und somit sich

$$I(t) \sim e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t}$$

verhält.

Ein Spezial Fall ist, wenn

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_{ap}^2}{4L^2} \quad (5)$$

folgt daraus das der aperiodische Grenzfall eintritt und der Strom am schnellsten gegen null geht.

Erzwungene Schwingungen werden mit einer Sinusspannung, wie in Abbildung(2) dargestellt, erzeugt.

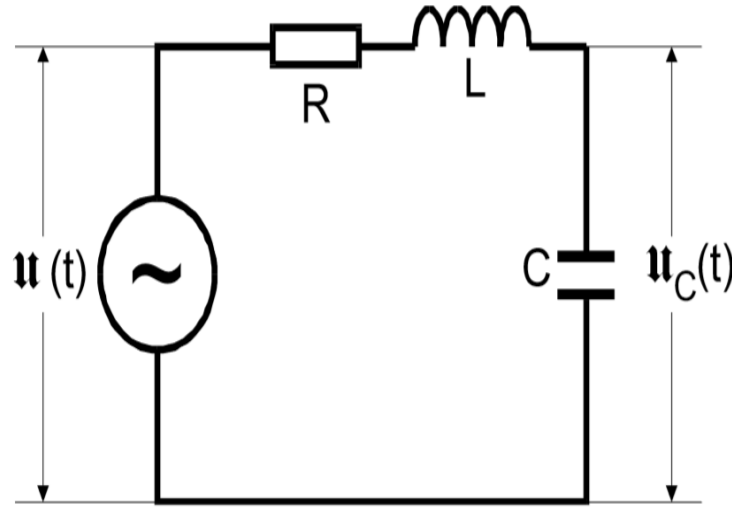


Abbildung 2: Schaltdarstellung einer erzwungene Schwinung[2].

Dabei verändert sich die Gleichung (1) und die Lösung für solch eine Differentialgleichung lautet:

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2 + (RC\omega)^2)}} \quad (6)$$

Die Phasenverschiebung zwischen der angelegten Sinusspannung und der Kondensatorspannung kann mit der Formel

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega CR}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (7)$$

errechnet werden.

Für $\omega \rightarrow \infty$ ist $U_c = 0$ und für $\omega \rightarrow 0$ strebt U_c gegen U_0 . Ab einer bestimmten Frequenz erreicht U_c ein Maximum und ist größer als U_0 . Solch ein Phänomen wird als Resonanz bezeichnet. Die Resonanzfrequenz lässt sich mit der Formel

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (8)$$

berechnen. Bei einer schwachen Dämpfung trifft der Fall, dass $\frac{1}{LC} \ll \frac{R^2}{2L^2}$ das $\omega_{res} \rightarrow \omega_0$ wird. Somit lässt sich die Formel mit Hilfe der Gleichung (8)

$$U_{c,max} = \frac{1}{\omega RC} \cdot U_0 \quad (9)$$

darstellen. Der Faktor $\frac{1}{\omega_0 RC}$ wird als Resonanzüberhöhung oder Güte q bezeichnet. Für die Breite der Resonanzkurve kann eine Näherung mit der Formel

$$\omega_+ - \omega_- = \frac{R}{L} \quad (10)$$

annehmen.

3 Durchführung

Zu Beginn werden sämtliche Bauteile deren Werte aufgezeichnet. Für die Bestimmung des Dämpfungswiderstandes wird die Schaltung wie in Abbildung (3) dargestellt genutzt.

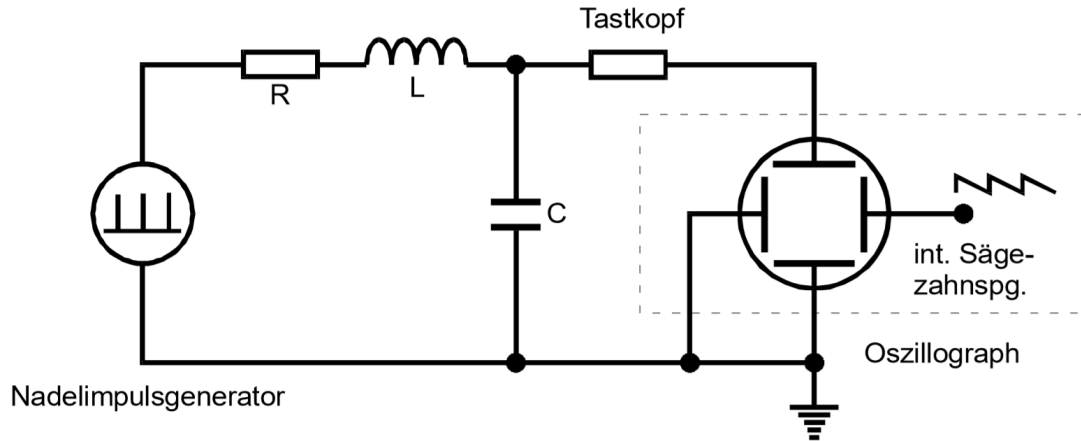


Abbildung 3: Schaltdarstellung zur Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes[2].

Mit Hilfe eines Oszilloskops wird die Kondensatorspannung gegen die Zeit dargestellt und ein Thermodruck ausgeführt. Der Widerstand zur Messung des aperiodischen Grenzfalls wird ebenfalls mit Hilfe eines Oszilloskops und einem Potentiometer bestimmt. Für die Messung der Phasenverschiebung und der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung wird die Schaltung wie in Abbildung (4) benötigt.

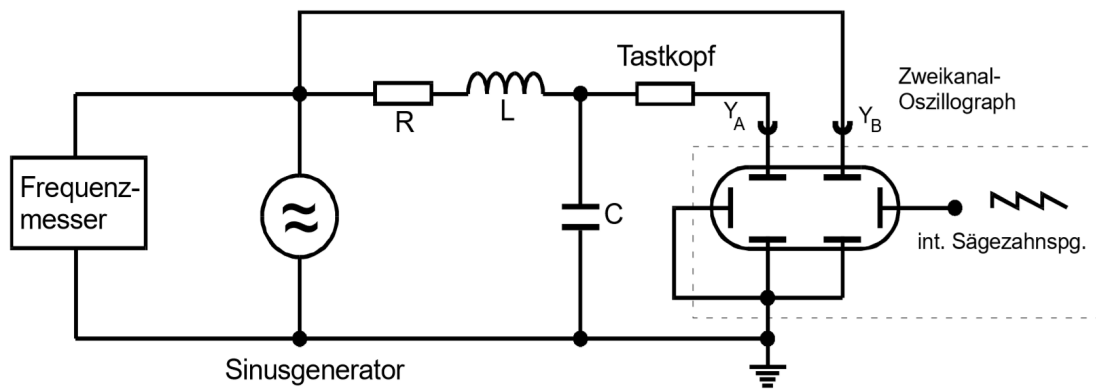


Abbildung 4: Schaltdarstellung zur Bestimmung der Phasenverschiebung[2].

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wird wie in Abbildung (5) mit

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 360 \quad \text{oder} \quad \phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (11)$$

bestimmt.

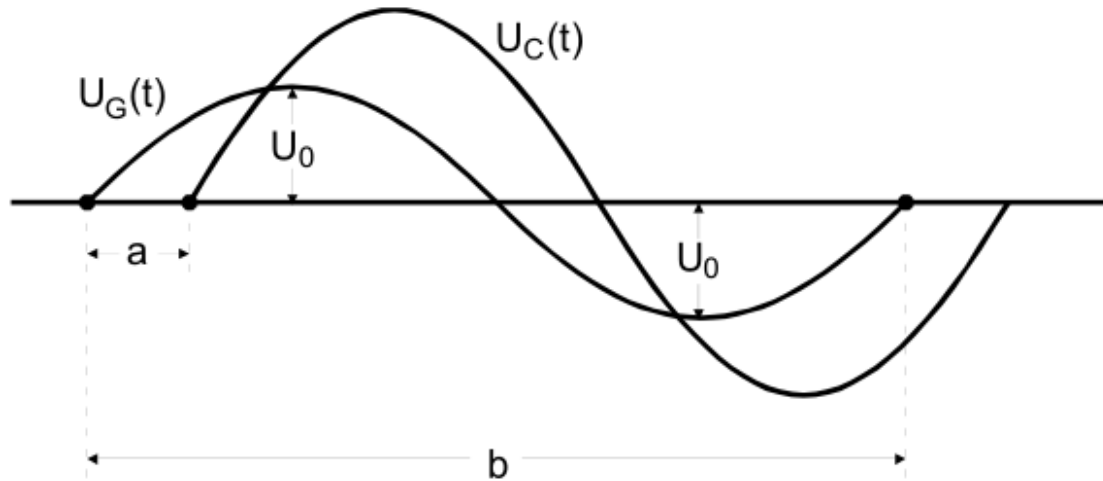


Abbildung 5: Berechnung der Phasenverschiebung[1].

4 Auswertung

Die notierten Gerätedaten lauten:

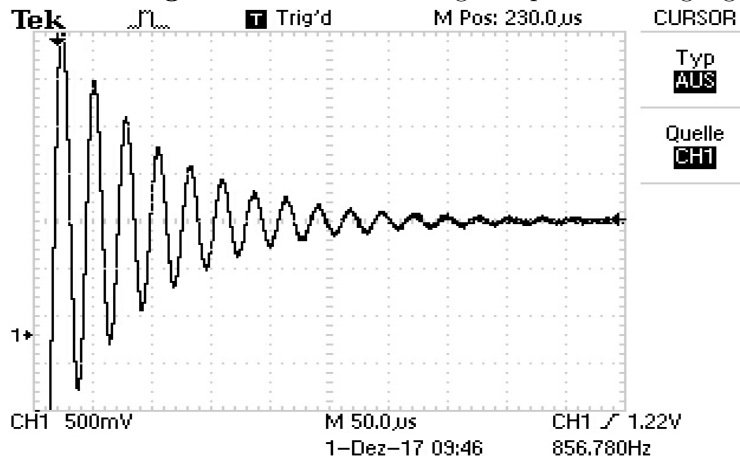
- $L = (3,53 \pm 0,03) \text{ m}$
- $C = (5,015 \pm 0,015) \text{ nF}$
- $R_1 = (30,3 \pm 0,1) \Omega$
- $R_2 = (271,6 \pm 0,3) \Omega$

Zunächst wird eine gedämpfte Schwingung mithilfe eines RCL-Kreises untersucht. Die Messwerte der Minima und Maxima sind in Tabelle (1) dargestellt und in Abbildung (6) wird der Thermodruck des Oszilloskopes gezeigt. U_0 ist die Spannung des Generators und in diesem Fall beträgt sie 1,18V.

Tabelle 1: Messwerte einer gedämpften Schwingung.

Maxima			Minima		
U/V	$\frac{U}{U_0}$	t/s	U/V	$\frac{U}{U_0}$	t/s
3,2	2,02	4	-0,52	-1,7	18
2,64	1,46	32	-0,08	-1,26	44
2,26	1,08	58	0,28	-0,9	72
1,96	0,78	86	0,52	-0,66	98
1,76	0,58	112	0,7	-0,48	126
1,6	0,42	140	0,86	-0,32	152
1,5	0,32	166	0,94	-0,24	180
1,44	0,26	194	1	-0,18	208
1,36	0,18	220	1,08	-0,10	234
1,3	0,12	248	1,1	-0,08	260
1,26	0,08	274	1,14	-0,04	288
1,24	0,06	302	1,16	-0,02	316

Abbildung 6: Thermodruck einer gedämpften Schwingung.



Zu diesen Messwerten lassen sich nun zwei nicht lineare Ausgleichsrechnungen durchführen, für die Minima und die Maxima. Für die Ausgleichsrechnungen werden folgende Gleichungen verwendet:

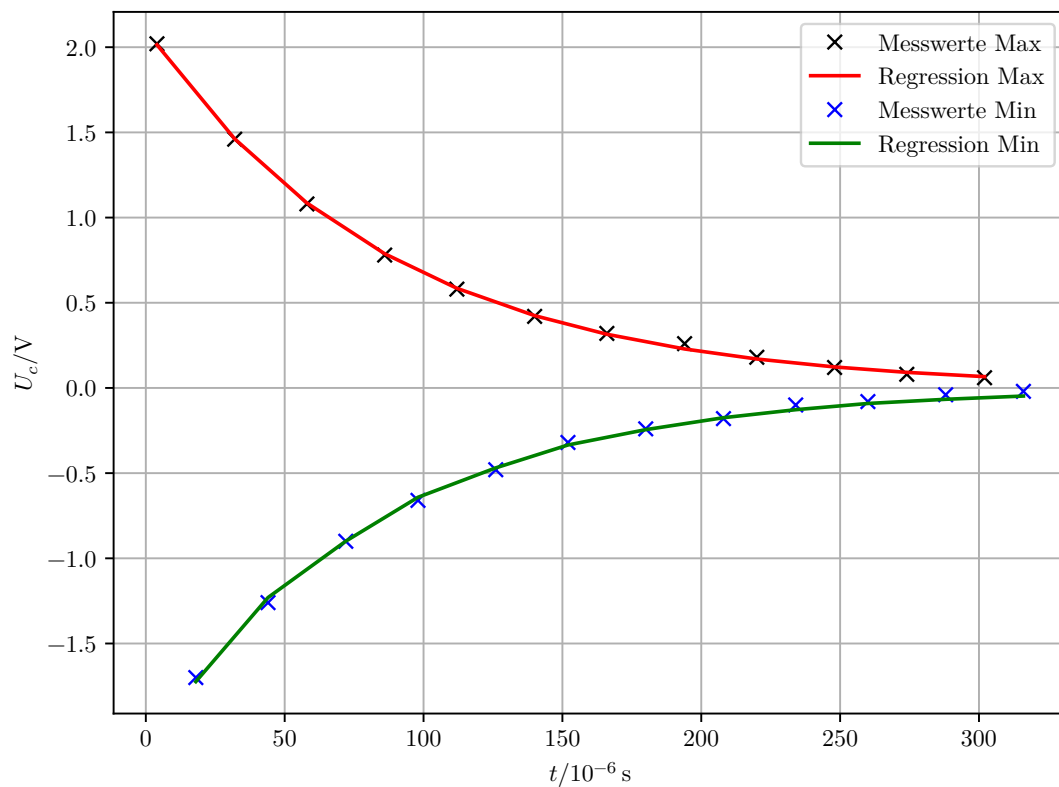
$$y = a \cdot \exp(-bx)$$

$$y = c \cdot \exp(-dx)$$

Die Ausgleichsrechnung wird mit Python 3.6 durchgeführt. In Abbildung (7) ist die Ausgleichsrechnung graphisch dargestellt.

- $a = (2,109 \pm 0,011) \text{ V}$
- $b = (11\,450,50 \pm 96,46)/\text{s}$
- $c = (-1,809 \pm 0,020) \text{ V}$
- $d = (12\,049,80 \pm 212,47)/\text{s}$

Abbildung 7: Darstellung der Messwerte und der Ausgleichsrechnung für die gedämpfte Schwingung.



Durch Vergleichen der Gleichungen für die Ausgleichsrechnung und der Gleichung (3) folgt für den effektiven Dämpfungswiderstand:

$$b = \frac{R_{eff}}{2L} \Leftrightarrow R_{eff} = 2bL$$

Die Fehler werden mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta R_{eff} = \sqrt{(2L \cdot \Delta b)^2 + (2b \cdot \Delta L)^2}.$$

Damit ergibt sich für die Maxima:

$$R_{eff} = (80,8 \pm 1,0) \Omega.$$

Der eingebaute Widerstand hat $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega$, damit ergibt sich eine Abweichung von $50,5 \Omega$.

Die Rechnung für die Minima ist die selbe.

$$R_{eff} = (85,1 \pm 1,7) \Omega$$

Bei dieser Rechnung ergibt sich eine Abweichung von $54,8 \Omega$.

Mithilfe der Gleichung (4) lässt sich nun auch die Abklingdauer bestimmen.

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{1}{b}$$

Für die Maxima ergibt sich somit:

$$T_{ex} = (8,73 \pm 0,07) \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Analog für die Minima:

$$T_{ex} = (8,30 \pm 0,15) \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Bei der Bestimmung des Widerstandes für den aperiodischen Grenzfall, wurde folgender Widerstand durch Messungen ermittelt:

$$R_{ap} = 2810 \Omega$$

Durch Umformung der Gleichung (5) lässt sich dieser Widerstand auch theoretisch bestimmen.

$$\Leftrightarrow R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Der Fehler wird wieder mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta R_{ap} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{4LC}} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{4L}}{2C^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta C\right)^2}$$

Nun folgt für den theoretisch bestimmten Widerstand $R_{ap} = (1678 \pm 8) \Omega$, es gibt also eine Abweichung von $67,64\%$.

Daraufhin wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der angelegten Spannungsfrequenz untersucht. In der Abbildung (8) ist die relative Kondensatorspannung und die Frequenz halblogarithmisch aufgetragen. Die Generatorspannung ist dabei konstant $U_0 = 1,3 \text{ V}$.

Abbildung 8: Messwerte der relativen Kondensatorsspannung bei einer angelegten Sinusspannung.

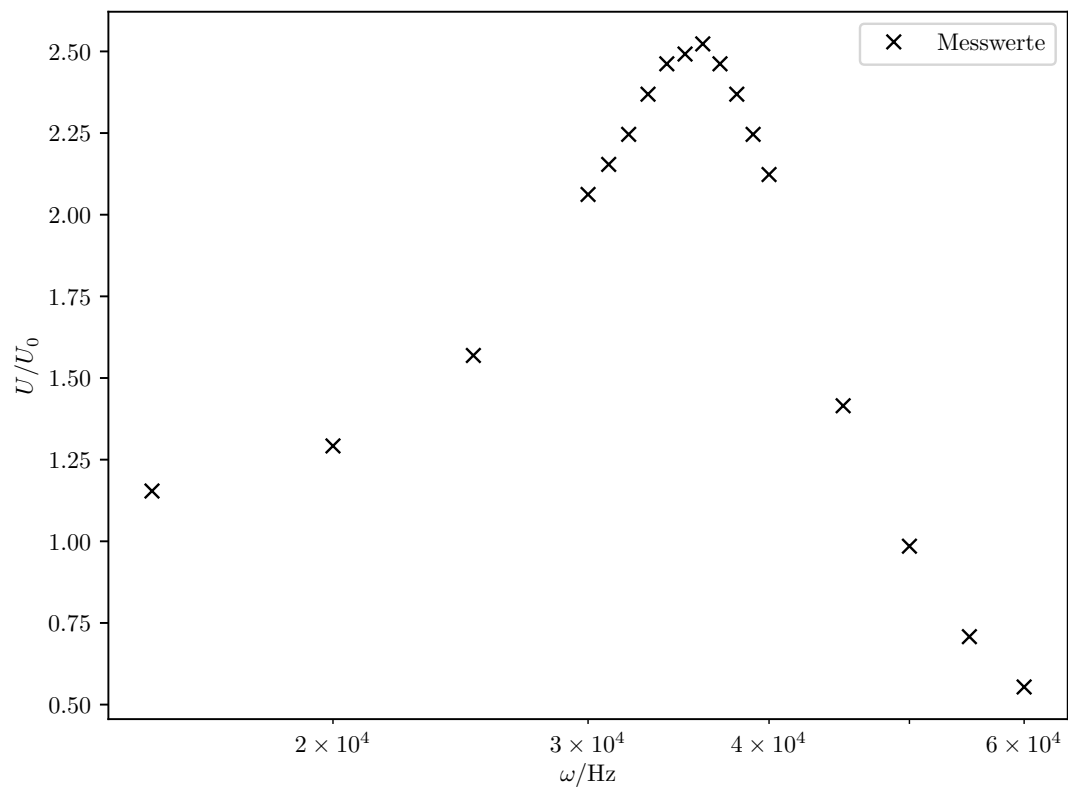


Tabelle 2: Tabelle mit den Messdaten zur bestimmung der Resonanzüberhöhung.

U/V	$\frac{U}{U_0}$	ω/Hz
1,5	1,154	15000
1,68	1,292	20000
2,04	1,569	25000
2,68	2,062	30000
2,8	2,154	31000
2,92	2,246	32000
3,08	2,369	33000
3,2	2,462	34000
3,24	2,492	35000
3,28	2,523	36000
3,2	2,462	37000
3,08	2,369	38000
2,92	2,246	39000
2,76	2,123	40000
1,84	1,415	45000
1,28	0,985	50000
0,92	0,708	55000
0,72	0,554	60000

Aus der Abbildung (8) lässt sich entnehmen und mithilfe der Gleichung (9), dass die Resonanzüberhöhung

$$q = \frac{U_{c,max}}{U_0} = 2,523$$

ist. Der theoretische Wert lässt sich mit der Gleichung (9) und mit dem Zusammenhang $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ bestimmen. Damit ergibt sich dann:

$$q_{theo} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Die Formel für den Fehler ergibt sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{L}}{R^2\sqrt{C}} \cdot \Delta R\right)^2 + \left(\frac{1}{2R\sqrt{LC}} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{L}}{2RC^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta C\right)^2}$$

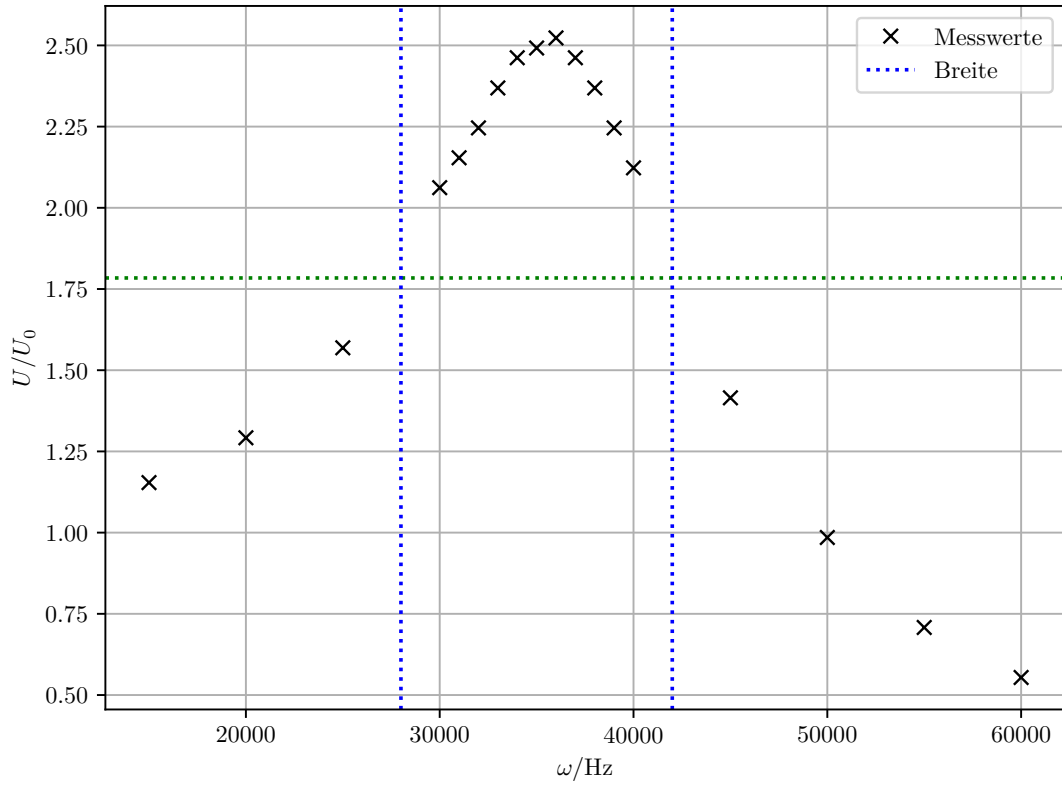
Bei dieser Messung wurde der Widerstand R_2 benutzt. Somit ergibt sich für den theoretischen Wert:

$$q_{theo} = 3,089 \pm 0,014$$

Die Abweichung ist damit 18,32%.

Aus der Abbildung (8) lässt sich auch die Breite der Kurve bestimmen, wenn sie um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. In Abbildung (9) ist das graphisch dargestellt.

Abbildung 9: Graphische Darstellung der Messwerte und der Breite der Resonanzkurve.



Aus dem Graphen lässt sich dann die Breite berechnen:

$$\omega_+ - \omega_- = 42000\text{Hz} - 28000\text{Hz} = 14\text{kHz}$$

Mit der Gleichung (10) wird nun die Breite auch theoretisch bestimmt. Daraus ergibt sich

$$\omega_+ - \omega_- = (12\,250 \pm 100) \text{ Hz}$$

Der Fehler der Breite im theoretischen Fall ergibt sich zu:

$$\Delta(\omega_+ - \omega_-) = \sqrt{\left(\frac{1}{L2\pi} \cdot \Delta R\right)^2 + \left(\frac{-R}{L^2 2\pi} \cdot \Delta L\right)^2}$$

Die Abweichung zwischen den Werten beträgt 14,29%.

Als letztes wird die Phasenverschiebung bei einer erzwungenen Schwingung untersucht. In der Abbildung (10) ist der Verlauf der Phasenverschiebung in einem halblogarithmischen Diagramm dargestellt. Die Messwerte für den Graphen wurden aus Tabelle (3) entnommen.

Abbildung 10: Darstellung der Messwerte für die Phasenverschiebung.

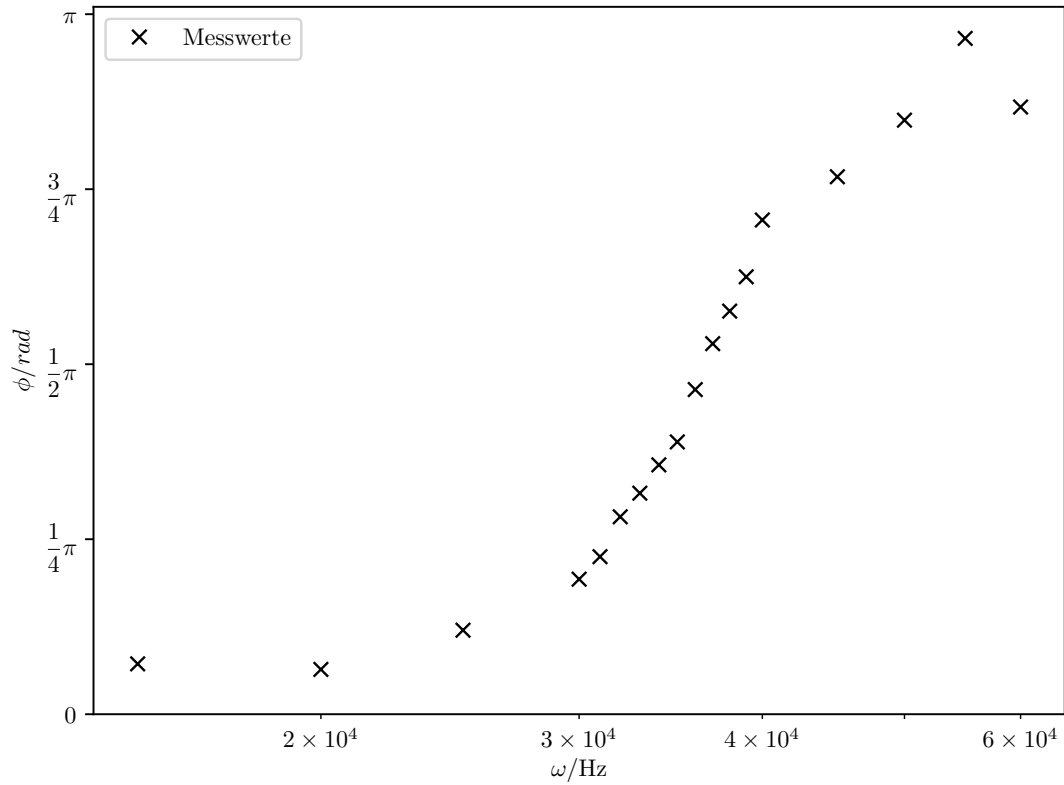


Tabelle 3: Messwerte der Phasenverschiebung bei einer erzwungenen Schwingung.

$\phi/$ rad	ω/Hz
0,226	15000
0,201	20000
0,377	25000
0,606	30000
0,707	31000
0,886	32000
0,992	33000
1,119	34000
1,222	35000
1,457	36000
1,663	37000
1,809	38000
1,963	39000
2,218	40000
2,412	45000
2,666	50000
3,033	55000
2,725	60000

Nun werden die Messwerte noch linear in Abbildung (11) dargestellt, um die Resonanzfrequenz zu bestimmen.

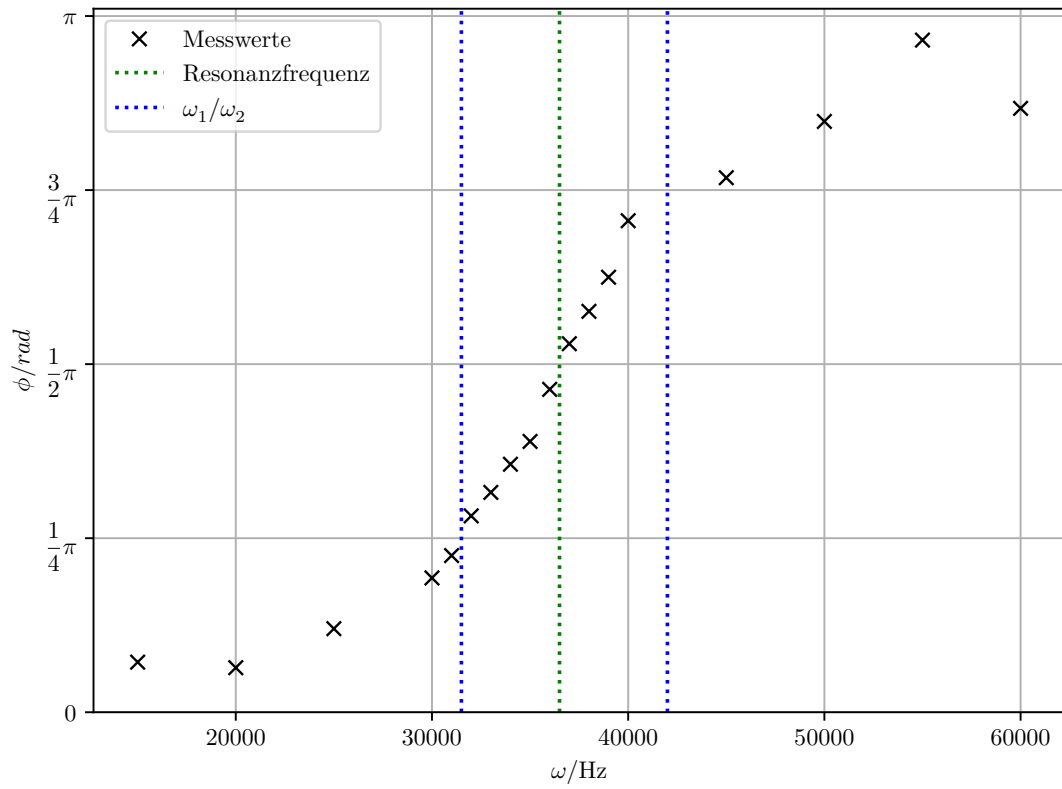


Abbildung 11: Lineare Darstellung der Messwerte zur Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Breite der Kurve.

Aus der Abbildung (11) lässt sich nun die Resonanzfrequenz bestimmen.

$$\omega_r = 36500 \text{ Hz}$$

Diese wird nun wieder theoretisch mit der Gleichung (8) bestimmt. Daraus ergibt sich $\omega_r = (36\,820 \pm 160) \text{ Hz}$.

Die Formel für den Fehler lautet in diesem Fall:

$$\Delta\omega_r = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{L^2 C} + \frac{R^2}{L^3}\right) \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{1-R}{\pi L^2} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta R\right)^2}$$

Somit ist die Abweichung in diesem Fall 0,87%.

Auch die Breite der Resonanzkurve lässt sich aus der Abbildung (11) entnehmen.

- $\omega_1 = 31500 \text{ Hz}$
- $\omega_2 = 42000 \text{ Hz}$

Nun werden auch diese Werte erneut theoretisch mithilfe der Gleichung (10) bestimmt. Der Fehler wird erneut mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet und ist für beide Rechnungen gleich:

$$\Delta\omega_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} A &= \left(\pm \frac{1}{2L} + \frac{R}{2L^2} \left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \right)^{\frac{-1}{2}} \Delta R \right) \\ B &= \left(\mp \frac{R}{2L^2} + \left(\frac{-R^2}{2L^2} - \frac{1}{L^2 C} \left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \right) \right)^{\frac{-1}{2}} \Delta L \right) \\ C &= \left(\frac{-1}{LC^2} \left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC} \right)^{\frac{-1}{2}} \Delta C \right) \end{aligned}$$

Somit lauten die theoretisch berechneten Werten von ω_1 und ω_2 :

- $(32\,200 \pm 130) \text{ Hz}$
- $(44\,440 \pm 230) \text{ Hz}$

Die Abweichungen sind damit für $\omega_1 = 2,17\%$ und für $\omega_2 = 5,49\%$.

5 Diskussion

Bei der Bestimmung des Dämpfungswiderstandes R_{eff} fällt auf, dass der gemessene Widerstand um $50,5 \Omega$ von den eingebauten Widerstand abweicht. Das liegt daran, dass der Innenwiderstand des Generators nicht berücksichtigt wurde.

Die Abweichung des Widerstandes bei dem aperiodischen Grenzfall ist sehr groß. Das kann zum einen daran liegen, dass das Oszilloskop nicht genau genug gemessen hat um den Widerstand genau zu bestimmen. Zum anderen wurde bei der theoretischen Berechnung der gesamte Widerstand der Schaltung bestimmt wurde und die anderen Bauelement auch Widerstände haben wurde nicht betrachtet.

Die restlichen Abweichungen sind im Toleranzbereich. Bei der Bestimmung der Resonanzüberhöhung ist die Abweichung etwas höher, was daran liegen kann, dass das Maximum der Spannung am Kondensator nicht genau bestimmt wurde.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017.
- [2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2017.