

Versuch 354 "Gedämpfte und erzwungene Schwingungen"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 01.12.2017, Abgabe: 08.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

| | |
|-----------------------|-----------|
| 1 Zielsetzung | 3 |
| 2 Theorie | 3 |
| 3 Durchführung | 5 |
| 4 Auswertung | 7 |
| Literatur | 18 |

1 Zielsetzung

In diesem Versuch soll der effektive Dämpfungswiderstand einer gedämpften Schwingkreisschaltung als auch beim aperiodischen Grenzfall untersucht und ermittelt werden. Ebenso wird die Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung und die Phasenverschiebung von der außen gelegten Spannung untersucht.

2 Theorie

Ein CL -Schwingkreis, das aus der Kapazität C des Kondensators und der Induktivität L der Spule besteht, wird in der Physik durch den Energieaustausch der beiden Bauelemente als eine periodische Schwingung bezeichnet. Solange kein energieverbrauchendes Bauelement hinzukommt ist der Austausch unbegrenzt lang und wird als ungedämpfte Schwingung bezeichnet. Bei einer gedämpften Schwingung wird als energieverbrauchendes Bauelement ein ohmscher Widerstand R hinzugeschaltet wie in Abbildung (1) zu sehen ist.

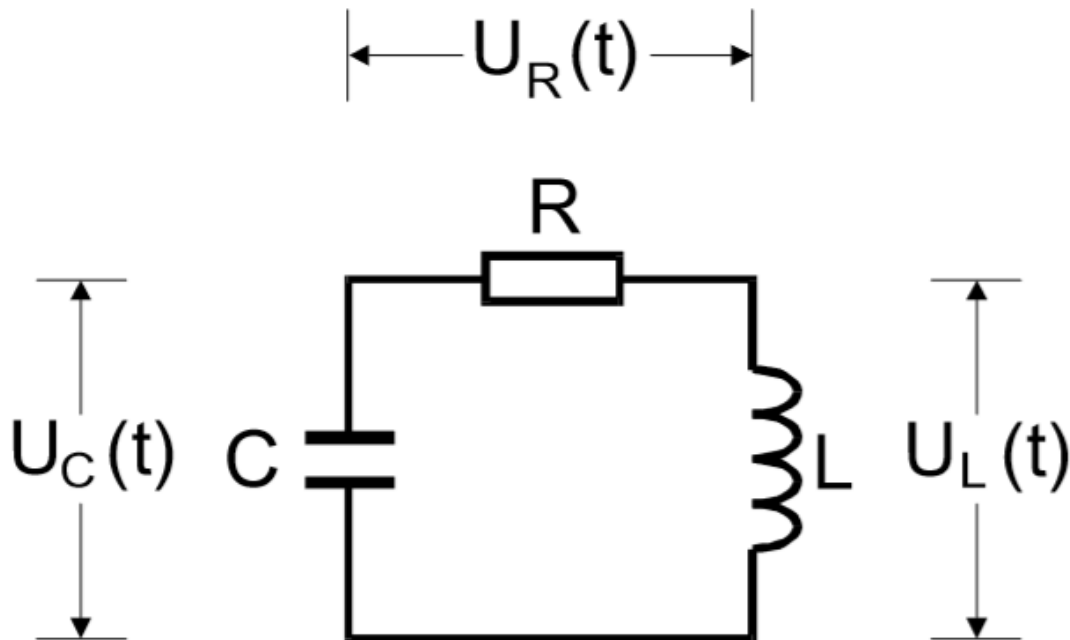


Abbildung 1: Schaltdarstellung einer gedämpften Schwingung[1].

Nun beginnt kein unendlicher Energieaustausch zwischen der Kapazität C des Kondensators und der Induktivität L der Spule statt. Die Spannungen die an den einzelnen Bauelementen abfallen, können mit Hilfe der Maschenregel, zu einer Differentialgleichung

aufgestellt und umgeformt werden.

$$\ddot{I} + \frac{R}{L} \cdot \dot{I} + \frac{1}{LC} \cdot I = 0 \quad (1)$$

Die Lösung der Gleichung (1) lautet:

$$I(t) = A_1 \cdot e^{i\omega_1 t} + A_2 \cdot e^{i\omega_2 t} \quad (2)$$

Dabei ist

$$\omega_{1,2} = i \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Es werden nun 2 Fälle betrachtet.

Der erste Fall $\frac{1}{LC} \gg \frac{R^2}{4L^2}$ folgt, dass ω reell ist.

Somit wird die Gleichung(2) mit Hilfe der Eulerschen Form zu

$$I(t) = A_0 \cdot e^{-2\pi\mu t} \cdot \cos(2\pi\nu t + \varphi) \quad (3)$$

umgeschrieben. Dabei ist

$$\mu = \frac{R}{4\pi L}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

Der zweite Fall $\frac{1}{LC} \ll \frac{R^2}{4L^2}$ folgt daraus, dass ω imaginär ist und somit sich

$$I(t) \sim e^{-(2\pi\mu - i2\pi\nu)t}$$

verhält.

Ein Spezial Fall ist, wenn $\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2}$ folgt daraus das der aperiodische Grenzfall eintritt und der Strom am schnellsten gegen null geht.

Erzwungene Schwingungen werden mit einer Sinusspannung, wie in Abbildung(2) dargestellt, erzeugt.

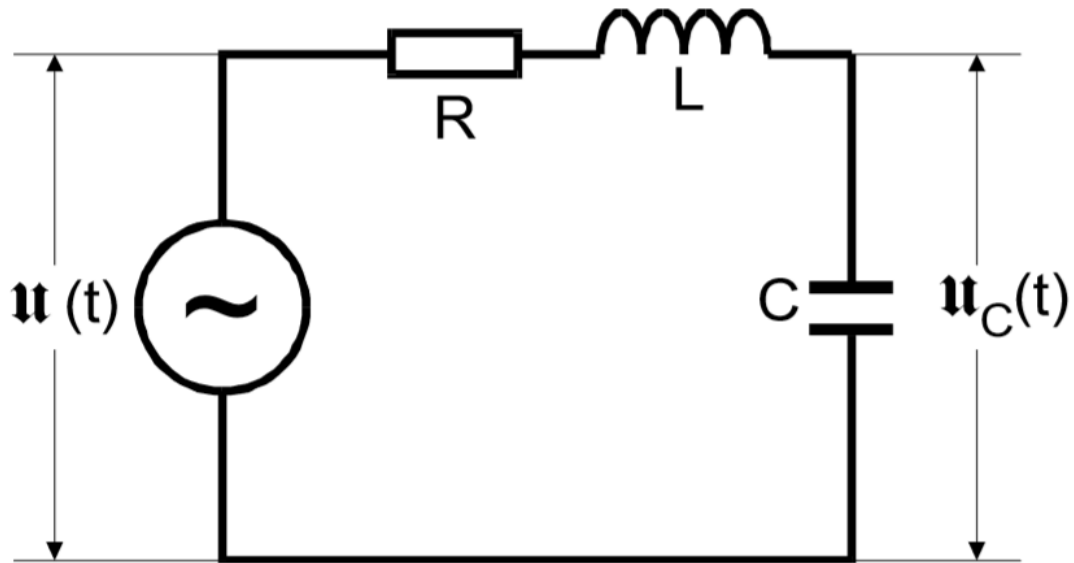


Abbildung 2: Schaltdarstellung einer erzwungene Schwinung[1].

Dabei verändert sich die Gleichung (1) und die Lösung für solch eine Differentialgleichung lautet:

$$U_c(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \quad (4)$$

Die Phasenverschiebung zwischen der angelegten Sinusspannung und der Kondensatorspannung kann mit der Formel

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-\omega CR}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (5)$$

errechnet werden.

Für $\omega \rightarrow \infty$ ist $U_c = 0$ und für $\omega \rightarrow 0$ strebt U_c gegen U_0 . Ab einer bestimmten Frequenz erreicht U_c ein Maximum und ist größer als U_0 . Solch ein Phänomen bezeichnet man als Resonanz. Die Resonanzfrequenz lässt sich mit der Formel

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}} \quad (6)$$

berechnen.

3 Durchführung

Zu Beginn werden sämtliche Bauteile deren Werte aufgezeichnet. Für die Bestimmung des Dämpfungswiderstandes wird die Schaltung wie in Abbildung (3) dargestellt genutzt.

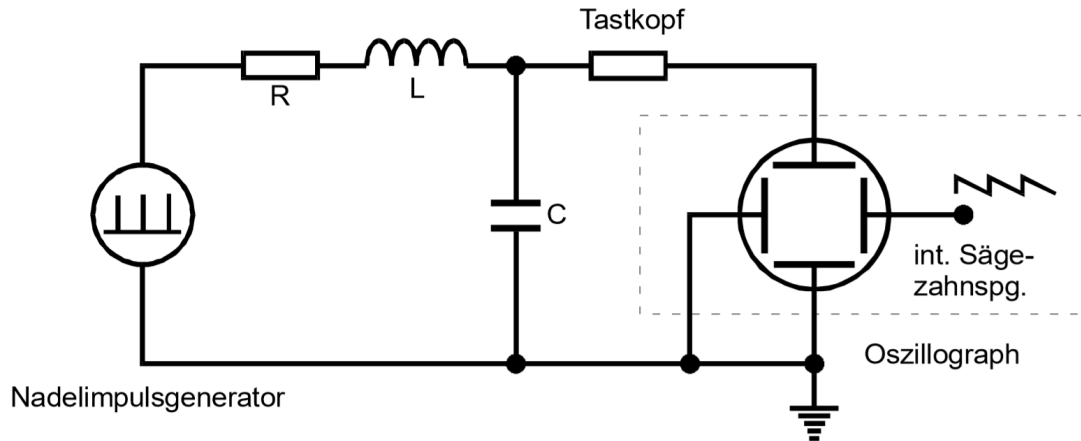


Abbildung 3: Schaltdarstellung zur Bestimmung des effektiven Dämpfungswiderstandes[1].

Mit Hilfe eines Oszilloskops wird die Kondensatorspannung gegen die Zeit dargestellt und ein Thermodruck ausgeführt. Der Widerstand zur Messung des aperiodischen Grenzfalls wird ebenfalls mit Hilfe eines Oszilloskops und einem Potentiometer bestimmt. Für die Messung der Phasenverschiebung und der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung wird die Schaltung wie in Abbildung (4) benötigt.

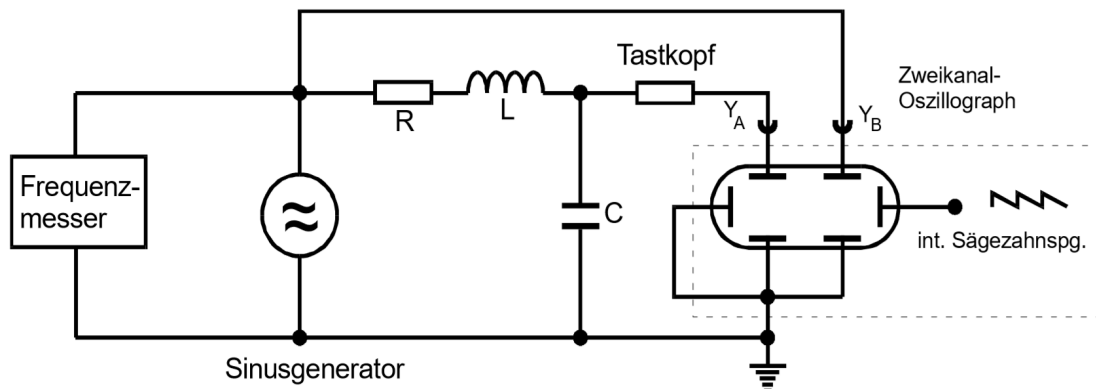


Abbildung 4: Schaltdarstellung zur Bestimmung der Phasenverschiebung[1].

Zur Bestimmung der Phasenverschiebung wird wie in Abbildung (5) mit

$$\phi = \frac{a}{b} \cdot 360 \quad \text{oder} \quad \phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi \quad (7)$$

bestimmt.

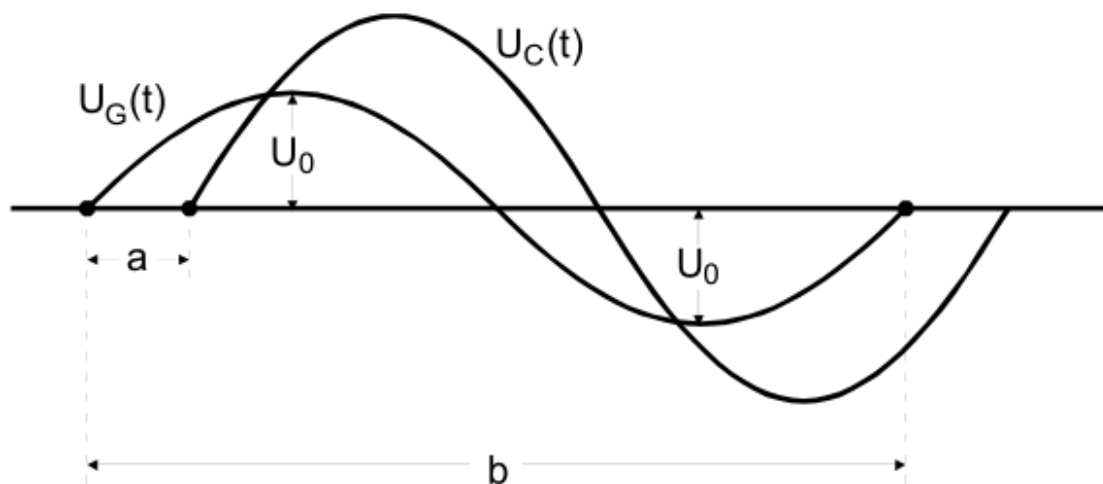


Abbildung 5: Berechnung der Phasenverschiebung[2].

4 Auswertung

Die notierten Gerätedaten lauten:

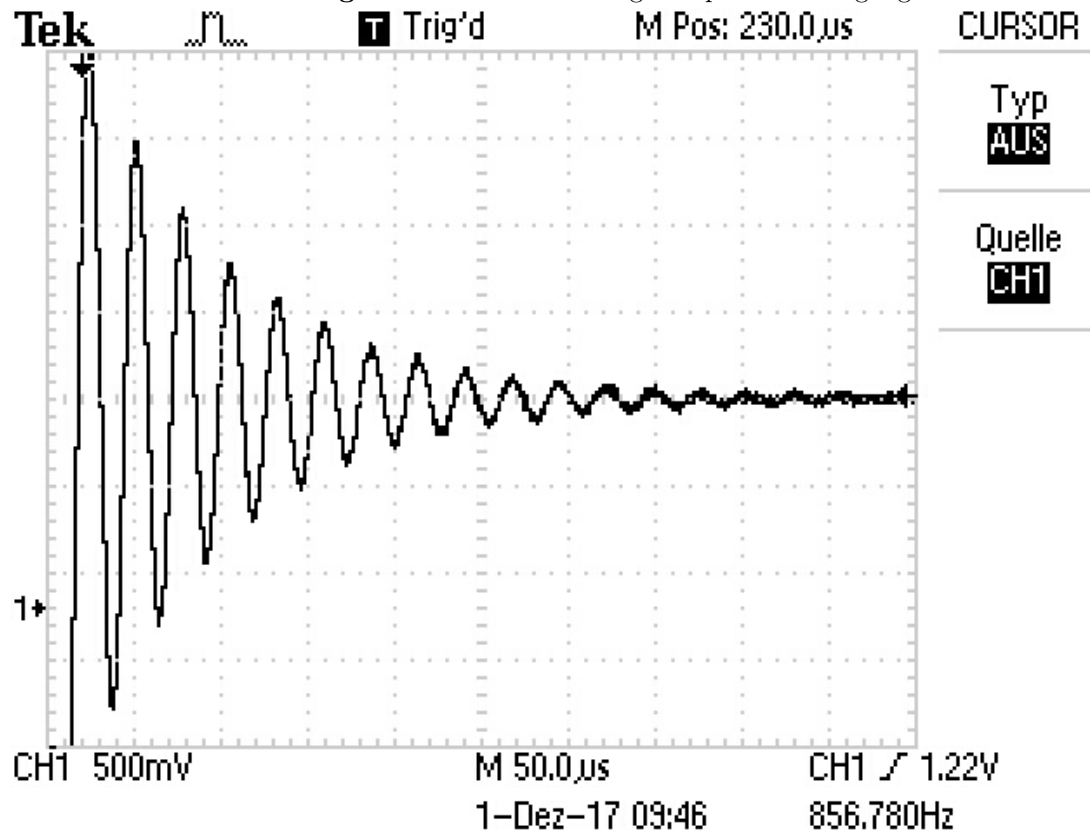
- $L = (3,53 \pm 0,03) \text{ m}$
- $C = (5,015 \pm 0,015) \text{ nF}$
- $R_1 = (30,3 \pm 0,1) \Omega$
- $R_2 = (271,6 \pm 0,3) \Omega$

Zunächst wird eine gedämpfte Schwingung mithilfe eines RCL-Kreises untersucht. Die Messwerte der Minima und Maxima sind in Tabelle (1) dargestellt und in Abbildung (6) wird der Thermodruck des Oszilloskopes gezeigt. U_0 ist die Spannung des Generators und in diesem Fall beträgt sie 1,18V.

Tabelle 1: Messwerte einer gedämpften Schwingung.

| Maxima | | | Minima | | |
|--------|-----------------|-------|--------|-----------------|-------|
| U/V | $\frac{U}{U_0}$ | t/s | U/V | $\frac{U}{U_0}$ | t/s |
| 3,2 | 2,02 | 4 | -0,52 | -1,7 | 18 |
| 2,64 | 1,46 | 32 | -0,08 | -1,26 | 44 |
| 2,26 | 1,08 | 58 | 0,28 | -0,9 | 72 |
| 1,96 | 0,78 | 86 | 0,52 | -0,66 | 98 |
| 1,76 | 0,58 | 112 | 0,7 | -0,48 | 126 |
| 1,6 | 0,42 | 140 | 0,86 | -0,32 | 152 |
| 1,5 | 0,32 | 166 | 0,94 | -0,24 | 180 |
| 1,44 | 0,26 | 194 | 1 | -0,18 | 208 |
| 1,36 | 0,18 | 220 | 1,08 | -0,10 | 234 |
| 1,3 | 0,12 | 248 | 1,1 | -0,08 | 260 |
| 1,26 | 0,08 | 274 | 1,14 | -0,04 | 288 |
| 1,24 | 0,06 | 302 | 1,16 | -0,02 | 316 |

Abbildung 6: Thermodruck einer gedämpften Schwingung.



Zu diesen Messwerten lassen sich nun zwei nicht lineare Ausgleichsrechnungen durchführen, für die Minima und die Maxima. Für die Ausgleichsrechnungen werden folgende Gleichungen verwendet:

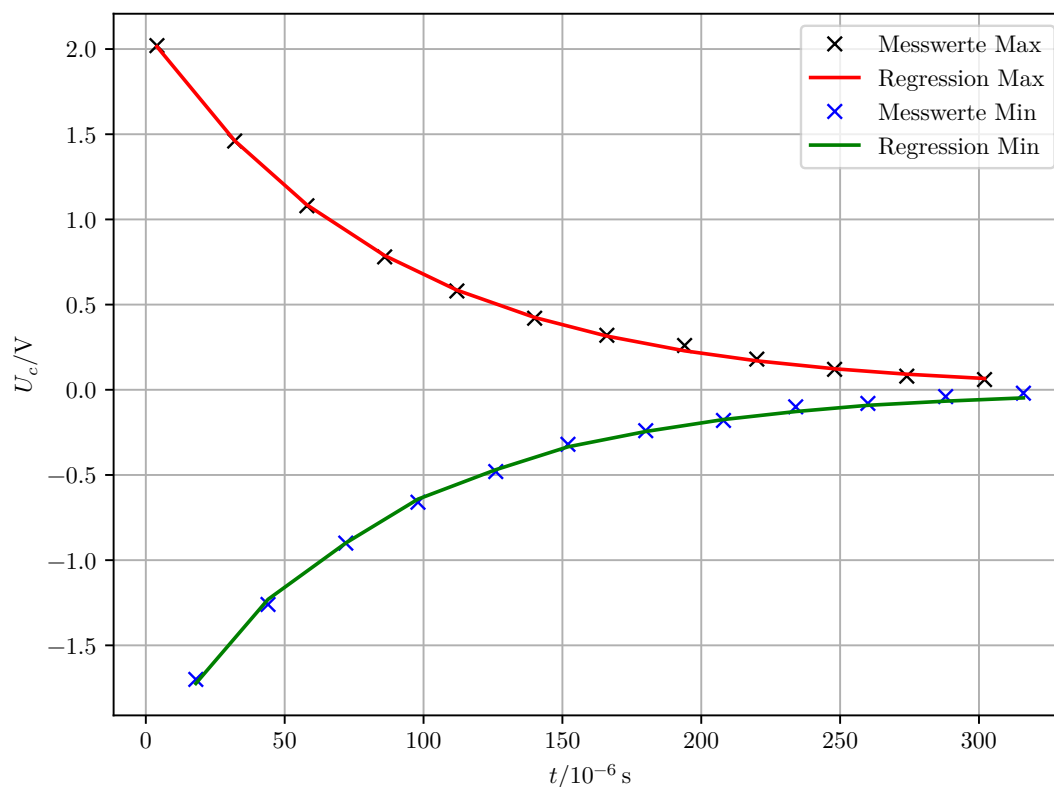
$$y = a \cdot \exp(-bx)$$

$$y = c \cdot \exp(-dx)$$

Die Ausgleichsrechnung wird mit Python 3.6 durchgeführt. In Abbildung (7) ist die Ausgleichsrechnung graphisch dargestellt.

- $a = (2,109 \pm 0,011) \text{ V}$
- $b = (11\,450,50 \pm 96,46) / \text{s}$
- $c = (-1,809 \pm 0,020) \text{ V}$
- $d = (12\,049,80 \pm 212,47) / \text{s}$

Abbildung 7: Darstellung der Messwerte und der Ausgleichsrechnung für die gedämpfte Schwingung.



Durch Vergleichen der Gleichungen für die Ausgleichsrechnung und der Gleichung () folgt für den effektiven Dämpfungswiderstand:

$$b = \frac{R_{eff}}{2L} \Leftrightarrow R_{eff} = 2bL$$

Die Fehler werden mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta R_{eff} = \sqrt{(2L \cdot \Delta b)^2 + (2b \cdot \Delta L)^2}.$$

Damit ergibt sich für die Maxima:

$$R_{eff} = (80,8 \pm 1,0) \Omega.$$

Der eingebaute Widerstand hat $R = (30,3 \pm 0,1) \Omega$, damit ergibt sich eine Abweichung von 50,5%.

Die Rechnung für die Minima ist die selbe.

$$R_{eff} = (85,1 \pm 1,7) \Omega$$

Bei dieser Rechnung ergibt sich eine Abweichung von 54,8 %.

Mithilfe der Gleichung () lässt sich nun auch die Abklingdauer bestimmen.

$$T_{ex} = \frac{1}{2\pi\mu} = \frac{1}{b}$$

Für die Maxima ergibt sich somit:

$$T_{ex} = (8,73 \pm 0,07) \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Analog für die Minima:

$$T_{ex} = (8,30 \pm 0,15) \cdot 10^{-5} \text{ s.}$$

Bei der Bestimmung des Widerstandes für den aperiodischen Grenzfall, wurde folgender Widerstand durch Messungen ermittelt:

$$R_{ap} = 2810 \Omega$$

Durch Umformung der Gleichung () lässt sich dieser Widerstand auch theoretisch bestimmen.

$$\Leftrightarrow R_{ap} = \sqrt{\frac{4L}{C}}$$

Der Fehler wird wieder mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta R_{ap} = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{4LC}} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{4L}}{2C^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta C\right)^2}$$

Nun folgt für den theoretisch bestimmten Widerstand $R_{ap} = (1678 \pm 8) \Omega$, es gibt also eine Abweichung von 67,64%.

Daraufhin wird die Kondensatorspannung in Abhängigkeit von der angelegten Spannungsfrequenz untersucht. In der Abbildung (8) ist die relative Kondensatorspannung und die Frequenz halblogarithmisch aufgetragen. Die Generatorspannung ist dabei konstant $U_0 = 1,3 \text{ V}$.

Abbildung 8: Messwerte der relativen Kondensatorsspannung bei einer angelegten Sinusspannung.

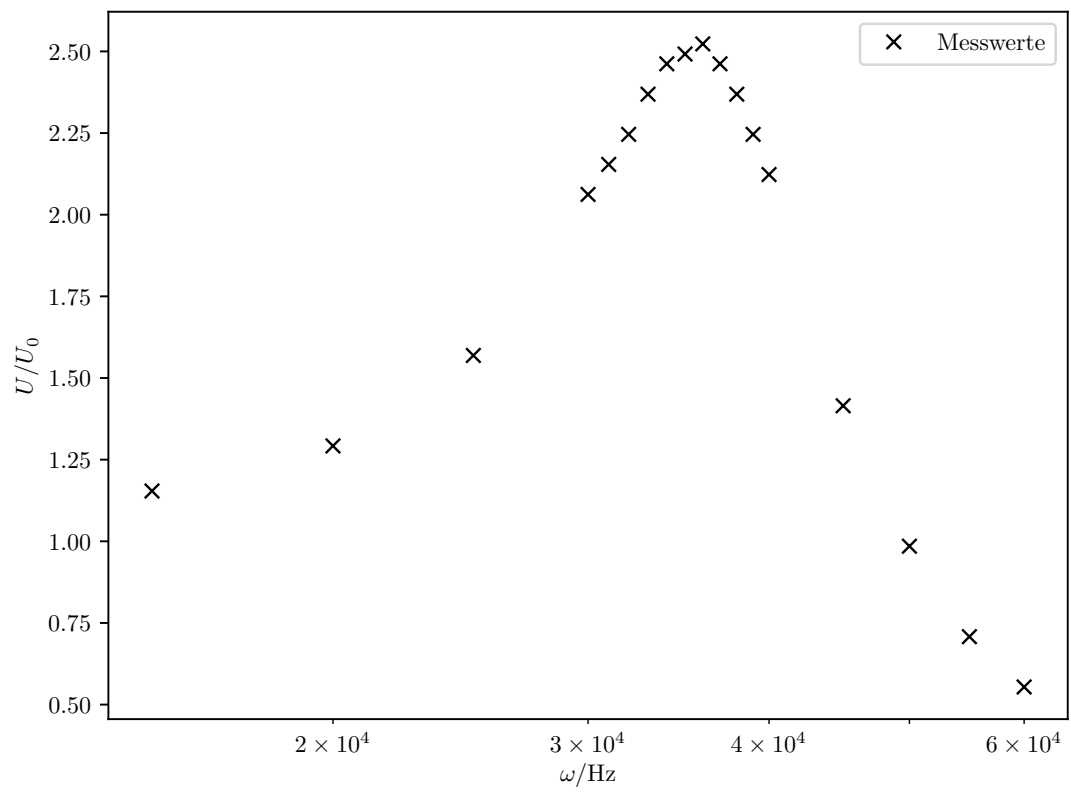


Tabelle 2: Tabelle mit den Messdaten zur bestimmung der Resonanzüberhöhung.

| U/V | $\frac{U}{U_0}$ | ω/Hz |
|-------|-----------------|-------------|
| 1,5 | 1,154 | 15000 |
| 1,68 | 1,292 | 20000 |
| 2,04 | 1,569 | 25000 |
| 2,68 | 2,062 | 30000 |
| 2,8 | 2,154 | 31000 |
| 2,92 | 2,246 | 32000 |
| 3,08 | 2,369 | 33000 |
| 3,2 | 2,462 | 34000 |
| 3,24 | 2,492 | 35000 |
| 3,28 | 2,523 | 36000 |
| 3,2 | 2,462 | 37000 |
| 3,08 | 2,369 | 38000 |
| 2,92 | 2,246 | 39000 |
| 2,76 | 2,123 | 40000 |
| 1,84 | 1,415 | 45000 |
| 1,28 | 0,985 | 50000 |
| 0,92 | 0,708 | 55000 |
| 0,72 | 0,554 | 60000 |

Aus der Abbildung (8) lässt sich entnehmen und mithilfe der Gleichung (), dass die Resonanzüberhöhung

$$q = \frac{U_{c,max}}{U_0} = 2,523$$

ist. Der theoretische Wert lässt sich mit der Gleichung () und mit dem Zusammenhang $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ bestimmen. Damit ergibt sich dann:

$$q_{theo} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Die Formel für den Fehler ergibt sich mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta q = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{L}}{R^2\sqrt{C}} \cdot \Delta R\right)^2 + \left(\frac{1}{2R\sqrt{LC}} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{L}}{2RC^{\frac{3}{2}}} \cdot \Delta C\right)^2}$$

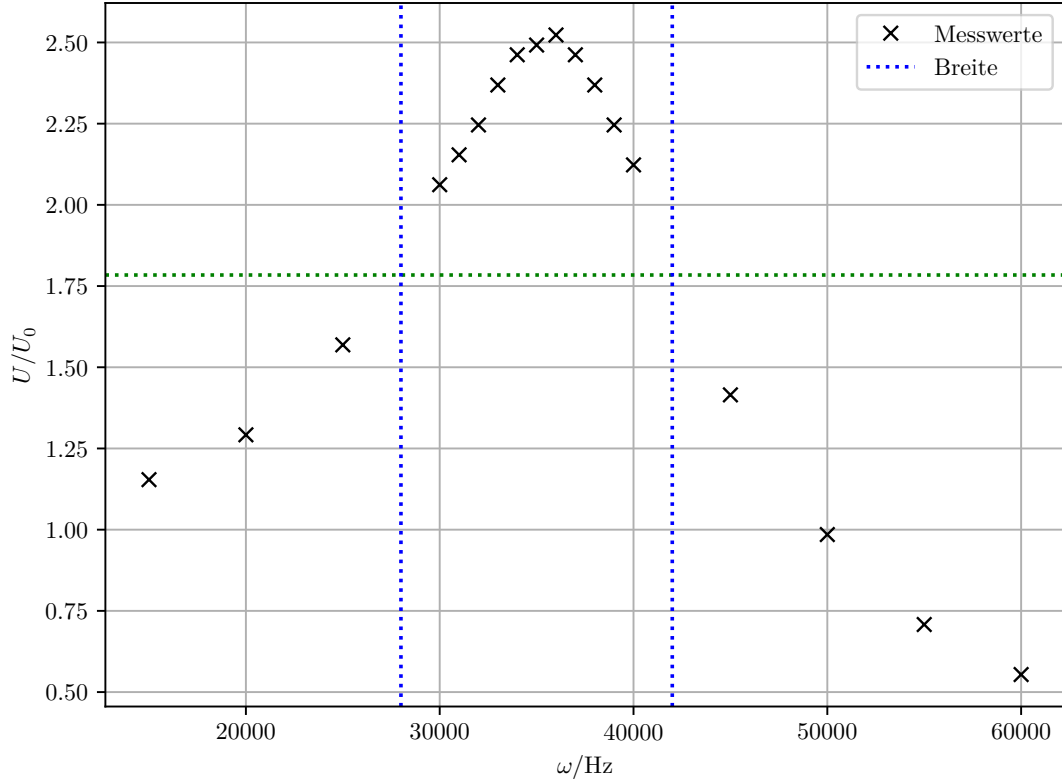
Bei dieser Messung wurde der Widerstand R_2 benutzt. Somit ergibt sich für den theoretischen Wert:

$$q_{theo} = 3,089 \pm 0,014$$

Die Abweichung ist damit 18,32%.

Aus der Abbildung (8) lässt sich auch die Breite der Kurve bestimmen, wenn sie um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{2}}$ abgefallen ist. In Abbildung (9) ist das graphisch dargestellt.

Abbildung 9: Graphische Darstellung der Messwerte und der Breite der Resonanzkurve.



Aus dem Graphen lässt sich dann die Breite berechnen:

$$\omega_+ - \omega_- = 42000\text{Hz} - 28000\text{Hz} = 14\text{kHz}$$

Mit der Gleichung () wird nun die Breite auch theoretisch bestimmt. Daraus ergibt sich

$$\omega_+ - \omega_- = (12\,250 \pm 100) \text{ Hz}$$

Der Fehler der Breite im theoretischen Fall ergibt sich zu:

$$\Delta(\omega_+ - \omega_-) = \sqrt{\left(\frac{1}{L2\pi} \cdot \Delta R\right)^2 + \left(\frac{-R}{L^2 2\pi} \cdot \Delta L\right)^2}$$

Die Abweichung zwischen den Werten beträgt 14,29%.

Als letztes wird die Phasenverschiebung bei einer erzwungenen Schwingung untersucht. In der Abbildung (10) ist der Verlauf der Phasenverschiebung in einem halblogarithmischen Diagramm dargestellt. Die Messwerte für den Graphen wurden aus Tabelle (3) entnommen.

Abbildung 10: Darstellung der Messwerte für die Phasenverschiebung.

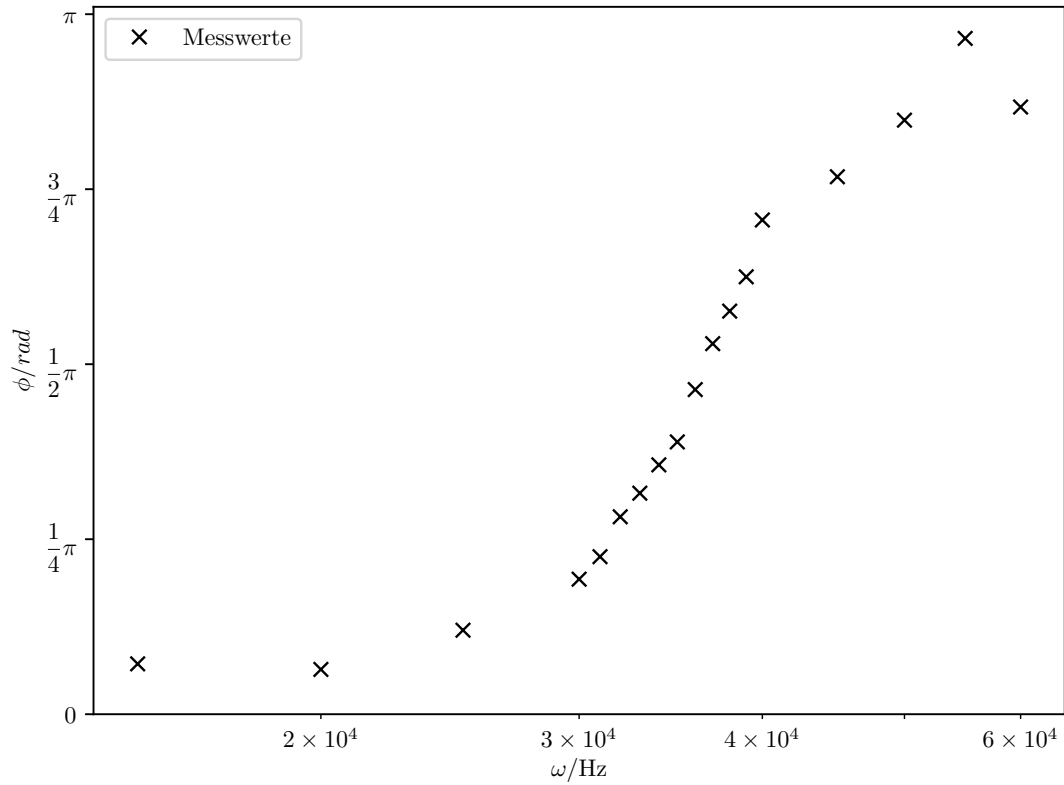


Tabelle 3: Messwerte der Phasenverschiebung bei einer erzwungenen Schwingung.

| $\phi/$ rad | ω/Hz |
|-------------|--------------------|
| 0,226 | 15000 |
| 0,201 | 20000 |
| 0,377 | 25000 |
| 0,606 | 30000 |
| 0,707 | 31000 |
| 0,886 | 32000 |
| 0,992 | 33000 |
| 1,119 | 34000 |
| 1,222 | 35000 |
| 1,457 | 36000 |
| 1,663 | 37000 |
| 1,809 | 38000 |
| 1,963 | 39000 |
| 2,218 | 40000 |
| 2,412 | 45000 |
| 2,666 | 50000 |
| 3,033 | 55000 |
| 2,725 | 60000 |

Nun werden die Messwerte noch linear in Abbildung (11) dargestellt, um die Resonanzfrequenz zu bestimmen.

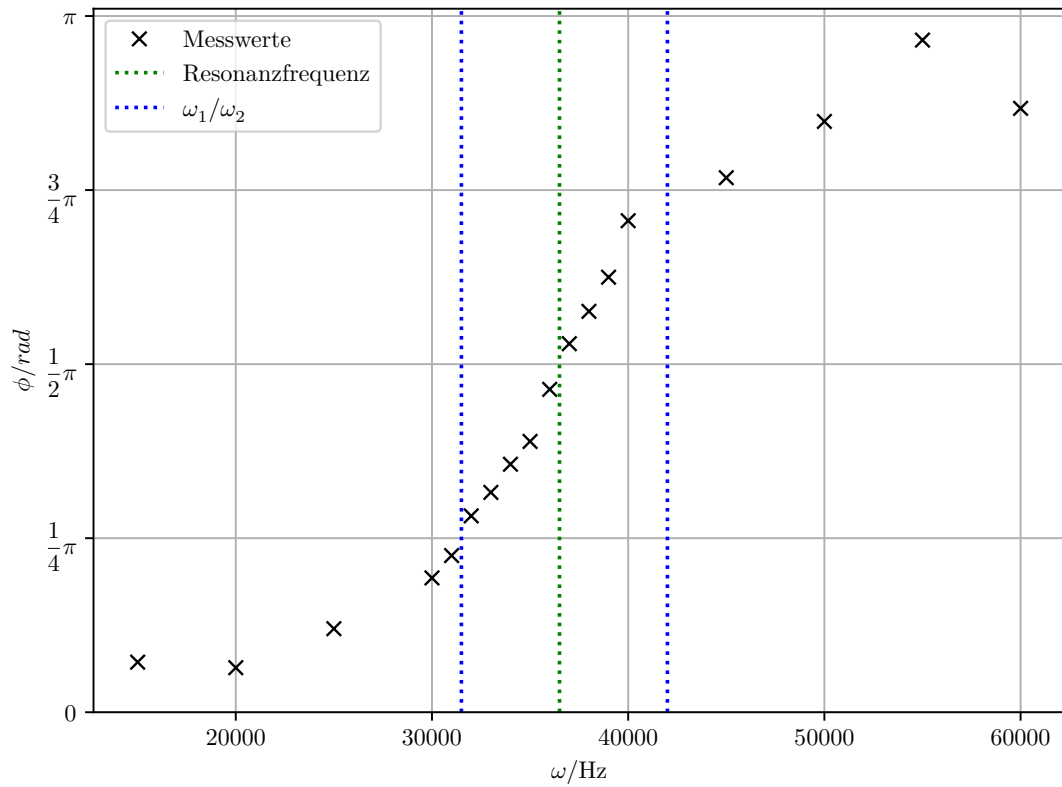


Abbildung 11: Lineare Darstellung der Messwerte zur Bestimmung der Resonanzfrequenz und der Breite der Kurve.

Aus der Abbildung (11) lässt sich nun die Resonanzfrequenz bestimmen.

$$\omega_r = 36500\text{Hz}$$

Diese wird nun wieder theoretisch mit der Gleichung (eq:6) bestimmt. Daraus ergibt sich $\omega_r = (36\,820 \pm 160)\text{Hz}$.

Die Formel für den Fehler lautet in diesem Fall:

$$\Delta\omega_r = \sqrt{\left(\frac{1}{\pi} \left(\frac{-1}{L^2C} + \frac{R^2}{L^3}\right) \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta L\right)^2 + \left(\frac{1}{\pi} \frac{-R}{L^2} \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \Delta R\right)^2}$$

Somit ist die Abweichung in diesem Fall 0,87%.

Auch die Breite der Resonanzkurve lässt sich aus der Abbildung (11) entnehmen.

- $\omega_1 = 31500\text{Hz}$
- $\omega_2 = 42000\text{Hz}$

Nun werden auch diese Werte erneut theoretisch mithilfe der Gleichung () bestimmt. Der Fehler wird erneut mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung berechnet und ist für beide Rechnungen gleich:

$$\Delta\omega_{1,2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\pm \frac{1}{2L} + \frac{R}{2L^2} \left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}\right)^{\frac{-1}{2}} \Delta R\right)^2 + \left(\mp \frac{R}{2L^2} + \left(\frac{-R^2}{2L^2} - \frac{1}{L^2C}\right) \left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}\right)^{\frac{-1}{2}} \Delta L\right)^2}$$

Somit lauten die theoretisch berechneten Werten von ω_1 und ω_2 :

- $(32\,200 \pm 130)$ Hz
- $(44\,440 \pm 230)$ Hz

Die Abweichungen sind damit für $\omega_1 = 2,17\%$ und für $\omega_2 = 5,49\%$.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017.
- [2] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 354: Gedämpfte und erzwungene Schwingungen*. 2017.