

# **Versuch 308 "Spulen und Magnetfelder"**

Robert Konradi  
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder  
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 15.12.2017, Abgabe: 22.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Zielsetzung</b>	<b>3</b>
<b>2 Theorie</b>	<b>3</b>
<b>3 Durchführung</b>	<b>5</b>
<b>4 Auswertung</b>	<b>7</b>
4.1 Magnetische Flußdichte einer Spule . . . . .	7
4.2 Magnetfeld einer Helmholtz-Spule . . . . .	11
4.3 Bestimmung der Hysteresekurve . . . . .	17
<b>5 Diskussion</b>	<b>20</b>
<b>Literatur</b>	<b>20</b>

# 1 Zielsetzung

In diesem Versuch sollen Magnetfelder von verschiedenen Spulenanordnung vermessen werden.

## 2 Theorie

Magnetische Felder werden erzeugt, wenn sich elektrische Ladung bewegt. Dabei sind sie von Betrag und Richtung als Vektorgroße durch die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  beschrieben. Wichtig zu erwähnen ist das Magnetfelder keine Monopole besitzen sondern immer paarweise auftreten und die Feldlinien geschlossen sind im Gegensatz zum elektrischen Feld. Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  wird über die Feldstärke  $\vec{H}$  und über die Permeabilität  $\mu$  beschrieben durch

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} \quad (1)$$

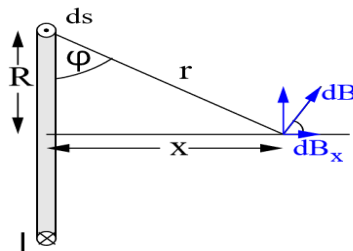
Dabei beschreibt die Permeabilität  $\mu$  die „Leitfähigkeit“ des Materials und setzt sich aus  $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$  zusammen.  $\mu_0$  ist die Vakuum-Permeabilität und beträgt  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \text{ A s / (V m)}$  und  $\mu_r$  die relative Permeabilität der Materie. Bei einem stromdurchflossenen Leiter verlaufen die Feldlinien in konzentrische Kreise und stehen senkrecht zum Stromfluss. Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetz lässt sich das Magnetfeld mit einem Abstand  $r$  und dem Strom  $I$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}$$

berechnen. Mit Hilfe des Biot-Savartschen Gesetz folgt für die stromdurchflossene Spule die Formel:

$$\vec{B}(x) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2)$$

Dabei beschreibt  $R$  den Spulenradius und  $x$  ein beliebigen Punkt in der Spule.



**Abbildung 1:** Schematische Darstellung des Biot-Savartschen Gesetz [1].

Im Inneren für langgestreckten Spule (Solenoid) ist die magnetische Feldstärke  $\vec{H}$  homogen und konstant während sie außerhalb inhomogen ist. Mit der Spulenlänge  $l$ , der Windungszahl  $n$  und den Strom  $I$  lässt sich das homogene Magnetfeld mit der Formel

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{n}{l} I \quad (3)$$

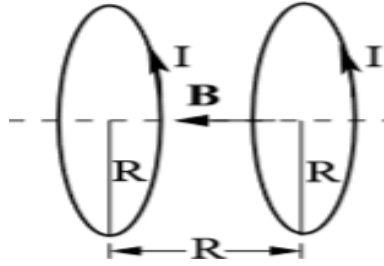
darstellen. Eine genauere Berechnung zur Magnetfeldstärke kann folgende Form verwendet werden

$$B = \frac{\mu_0 n I R^2}{2} \cdot \left( \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2 + R^2}} - \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2 + R^2}} \right) \quad (4)$$

Die Herleitung dieser Gleichung wird aus [2] entnommen. Wird die langgestreckte Spule zu einem Kreis gebogen so wird die Spulenanordnung als Torus bezeichnet. Die Besonderheit des Torus ist, dass außerhalb kein Magnetfeld existiert und im Inneren das Magnetfeld homogen ist. Somit lässt sich die Gleichung(3) mit  $l = 2\pi r_T$  zu

$$B = \mu_r \mu_0 \frac{n}{2\pi r_T} I \quad (5)$$

umschreiben. Dabei ist  $r_T$  der Radius des Torus. Ein anderes Verfahren zur Herstellung eines homogenen Magnetfeldes ist die Helmholtz-Spule. Zwei parallele Kreisspulen, die die gleiche Stromrichtung besitzen, erzeugen ein homogenes Feld im Inneren der beiden Spulen. Eine Darstellung ist in Abbildung(2) zu sehen.



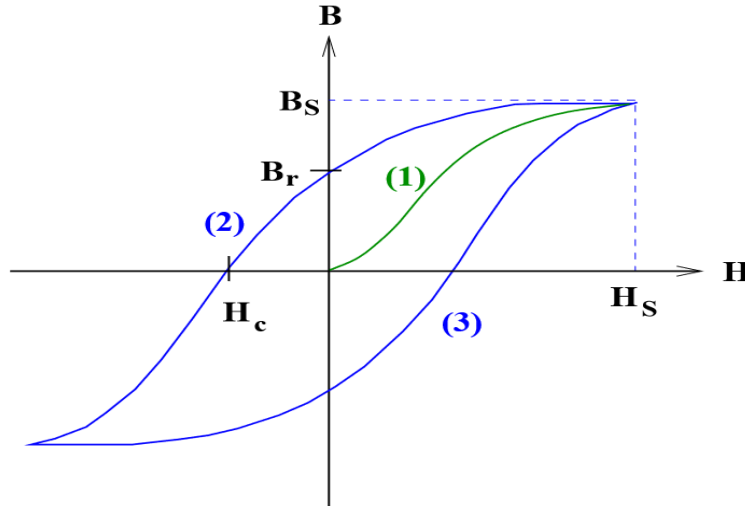
**Abbildung 2:** Schematische Darstellung der Helmholtz-Spule [1].

Alternativ kann das Magnetfeld einer Helmholtz-Spule mit der folgenden Gleichung bestimmt werden, die auch mit dem Biot-Savart-Gesetz bestimmt wurde. Mit dieser Gleichung wird das Magnetfeld im Zentrum der Spule beschrieben, also an jeder Stelle der x-Achse.

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2R} \left[ \frac{1}{\left( \left( \frac{x}{R} \right)^2 + \frac{x}{R} + \frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left( \left( \frac{x}{R} \right)^2 - \frac{x}{R} + \frac{5}{4} \right)^{\frac{3}{2}}} \right] \quad (6)$$

Diese Gleichung wird durch [3] gegeben. Ferromagnetische Materialien wie z.B. Eisen, Kobalt oder Nickel besitzen ohne ein äußeres Magnetfeld ein permanentes magnetisches Moment. Magnetischen Momente richten sich in einzelnen Bereichen (Weißsche Bezirke) parallel zu einander aus. Ohne äußeres Feld ist die Ausrichtung der Weißschen Bezirke statisch verteilt. Mit einem äußeren Magnetfeld gibt es eine Richtungsänderung und

zu einer Vergrößerung des Bezirks. Dies wird solange ausgeführt bis alle magnetischen Momente mit der Ausrichtung vom Magnetfeld übereinstimmen. Für ferromagnetische Materialien ist die relative Permeabilität  $\mu_r$  sehr hoch, somit ist die Gültigkeit der Gleichung (1) ungültig. Die Hysteresekurve beschreibt diese Nicht-Linearität und ist in Abbildung (3) dargestellt.



**Abbildung 3:** Schematische Darstellung einer Hysteresekurve [1].

In Abbildung (3) wird **1** als Neukurve bezeichnet. Sie erreicht nach einiger Zeit ein Sättigungswert  $B_s$ . Beim Abschalten des äußeren Magnetfeldes, bleibt noch beim Ferromagnet eine "Restmagnetisierung" die als Remanenz bezeichnet wird. Die **2** beschreibt die Koerzitivkraft um die Remanenz auf null zu bekommen. Durch Erhöhung des Gegenfeldes wird ebenfalls ein negativen Sättigungswert erreicht. Die **3** zeigt den Kurvenverlauf durch Erhöhung des Magnetfeldes und sie ist symmetrisch zur Hysteresekurve. Somit wird die relative Permeabilität  $\mu_r$  eine Funktion zur Feldstärke  $\vec{H}$ . Die Neukurve wird durch die differentielle Permeabilität  $\mu_{\text{diff}}$  beschrieben und lautet

$$\mu_{\text{diff}} = \frac{dB}{\mu_0 \cdot dH}$$

### 3 Durchführung

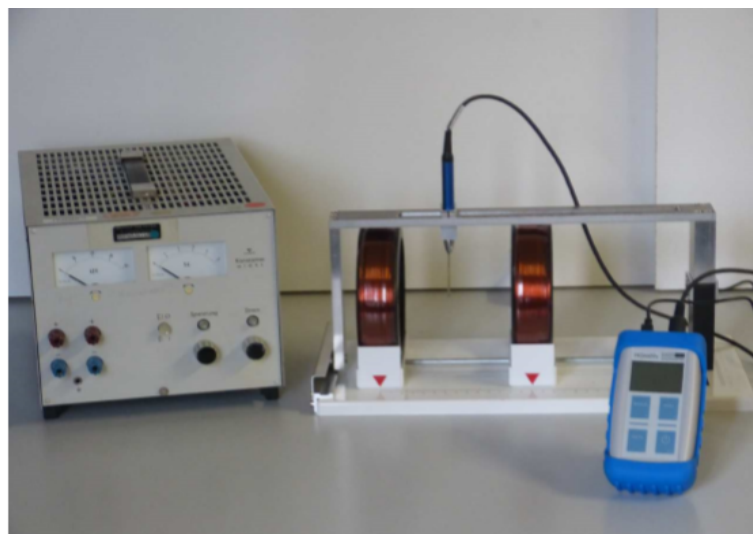
Zur Berechnung des Magnetfeldes der Spule wird eine Hall-Sonde verwendet. Die Hall-Sonde beruht auf dem Hall-Effekt. An der Spitze der Hall-Sonde befindet sich ein Leiterplättchen an das ein Strom angeschlossen ist. Durch ein Magnetfeld wirkt senkrecht auf die Ladung die Lorentzkraft und erzeugt ein Verschiebungsstrom und ebenfalls eine Spannung (Hall-Spannung). Mit Hilfe der Hall-Spannung kann die Stärke des Magnetfeldes, die von außen erzeugt worden ist, gemessen werden. In Abbildung (4) ist der Versuchsaufbau dargestellt, dabei wird eine longitudinale Sonde verwendet. Anschließend

wird die Sonde im Inneren der Magnetspule an verschiedenen Abständen positioniert und dabei misst sie das Magnetfeld.



**Abbildung 4:** Versuchsaufbau zur Messung der Magnetspule[1].

Für die Messung des Magnetfeldes der Helmholtz-Spule wird eine transversale Sonde verwendet. Dabei wird im Inneren der beiden Spule als auch außerhalb die Magnetfelder gemessen. In Abbildung (5) ist der Versuchsaufbau dargestellt.



**Abbildung 5:** Versuchsaufbau zur Messung der Magnetfelder der Helmholtz-Spule[1].

Für die Bestimmung der Hysteresekurve wird, wie in Abbildung(6) dargestellt, ebenfalls eine transversale Sonde verwendet.

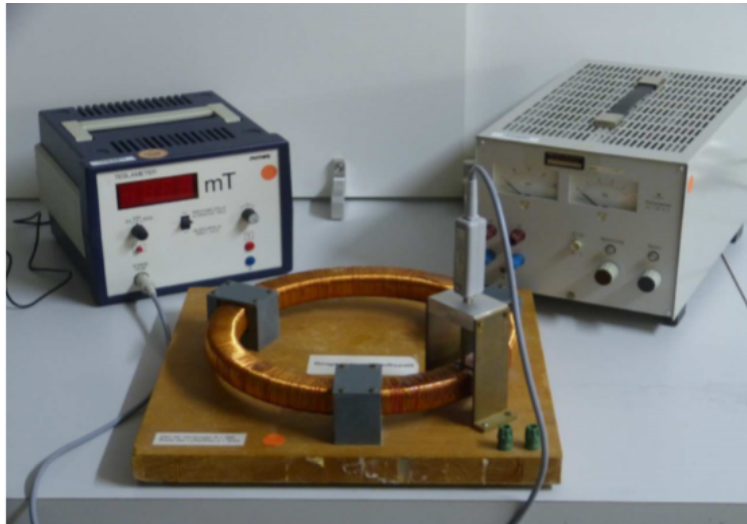


Abbildung 6: Versuchsaufbau zur Messung der Hysteresekurve[1].

## 4 Auswertung

### 4.1 Magnetische Flußdichte einer Spule

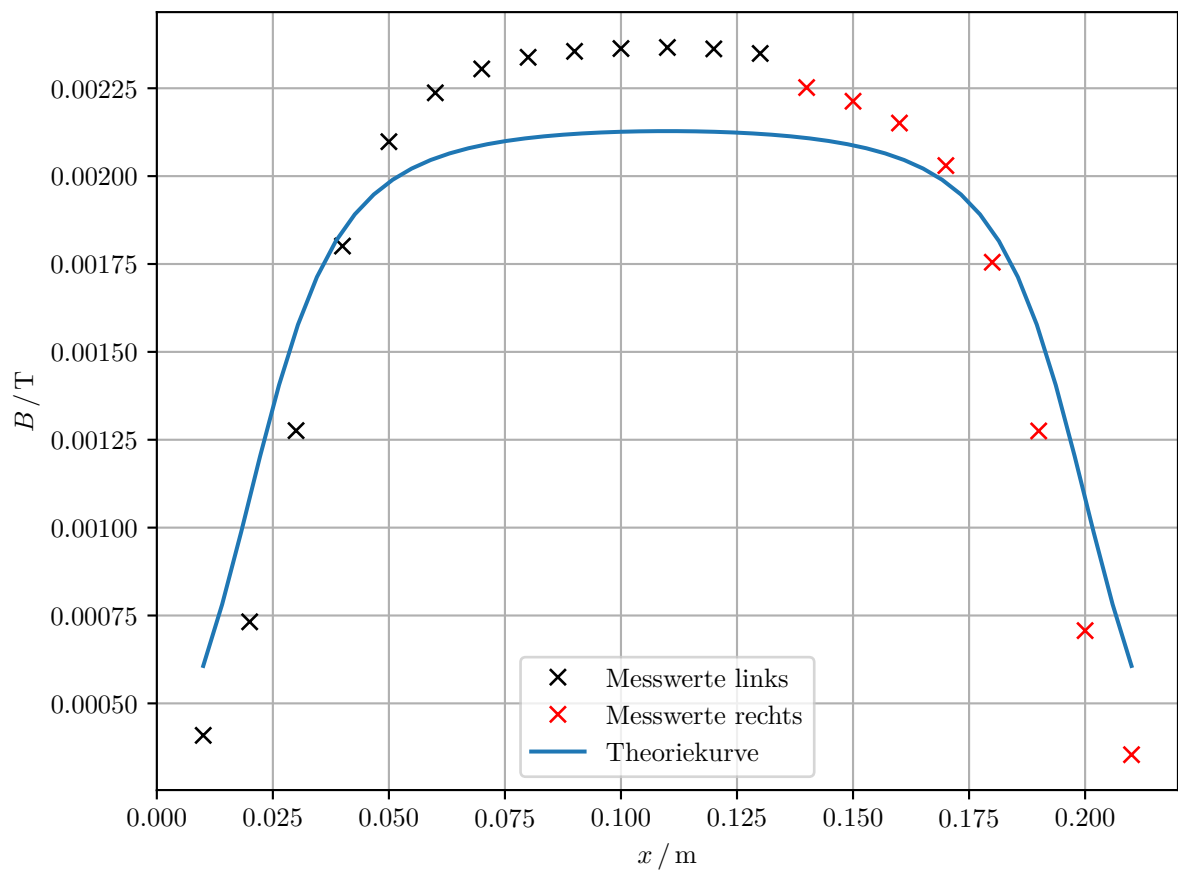
Zunächst wird das Magnetfeld einer langen Spule mit einer Hall-Sonde ausgemessen. Die Messergebnisse sind in Abbildung (7) graphisch dargestellt und in der Tabelle (1) tabellarisch. Das Magnetfeld dieser Spule wird von links und von rechts separat gemessen, da die Hall-Sonde nicht lang genug ist. Mithilfe der Gleichung (4) wird die Theoriekurve bestimmt. Die Parameter der Spule lauten:

- Windungszahl:  $n=300$
- mittlerer Spulendurchmesser:  $d = 0,041 \text{ m}$
- Spulenlänge:  $l = 0,19 \text{ m}$
- Strom:  $I = 1 \text{ A}$

**Tabelle 1:** Messwerte des Magnetfeldes der langen Spule.

$x/\text{m}$	$B/\text{mT}$
0,01	0,409
0,02	0,732
0,03	1,276
0,04	1,801
0,05	2,098
0,06	2,237
0,07	2,305
0,08	2,338
0,09	2,355
0,10	2,363
0,11	2,366
0,12	2,362
0,13	2,349
0,14	2,252
0,15	2,213
0,16	2,151
0,17	2,030
0,18	1,755
0,19	1,275
0,20	0,707
0,21	0,354





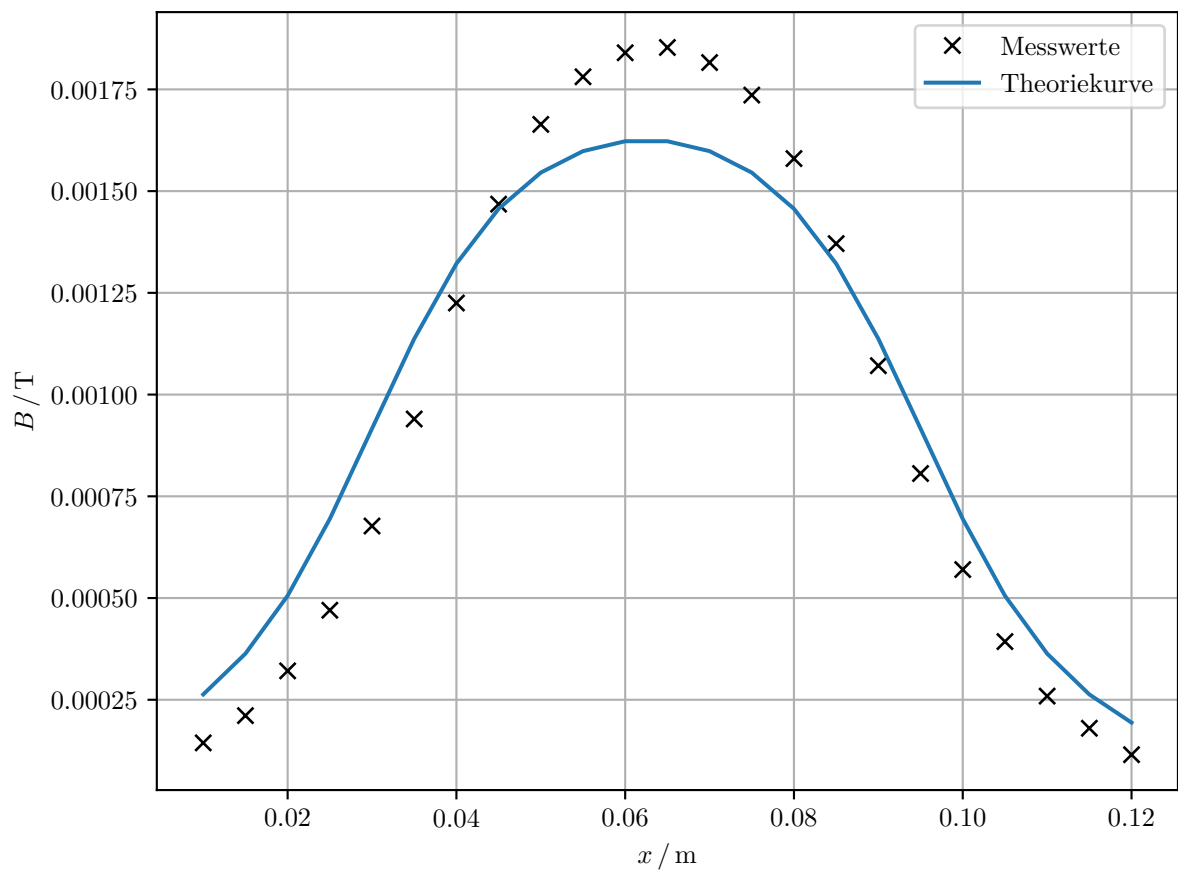
**Abbildung 7:** Graphische Darstellung der Messwerte, die von links und von rechts Gemessen wurden.

Daraufhin wird das Magnetfeld einer kürzeren Spule untersucht. Die Messwerte sind in Tabelle (2) und in Abbildung (8) dargestellt. Auch bei dieser Spule werden die Theoriewerte mithilfe der Gleichung (4) bestimmt. Die Parameter dieser Spule lauten wie folgt:

- Windungszahl:  $n = 100$
- mittlerer Spulendurchmesser:  $d = 0,041 \text{ m}$
- Spulenlänge:  $l = 0,085 \text{ m}$
- Strom:  $I = 1 \text{ A}$

**Tabelle 2:** Messwerte des Magnetfeldes der kurzen Spule.

$x/\text{m}$	$B/\text{mT}$
0,01	0,144
0,015	0,211
0,02	0,321
0,025	0,470
0,03	0,677
0,035	0,940
0,04	1,225
0,045	1,468
0,05	1,664
0,055	1,781
0,06	1,840
0,065	1,853
0,07	1,816
0,075	1,736
0,08	1,580
0,085	1,371
0,09	1,071
0,095	0,806
0,10	0,570
0,105	0,393
0,11	0,259
0,115	0,180
0,12	0,115



**Abbildung 8:** Graphische Darstellung der Messwerte für die kurze Spule.

## 4.2 Magnetfeld einer Helmholtz-Spule

In dem zweiten Teil des Versuches wird nun das Magnetfeld einer Helmholtz-Spule mit verschiedenen Abständen der Spule ermittelt. Die Parameter des Spulenpaares lauten:

- Windungszahl pro Spule:  $n = 100$
- mittlerer Spulendurchmesser:  $d = 1,25 \text{ m}$
- Spulenbreite:  $b = 0,033 \text{ m}$
- Strom:  $I = 3 \text{ A}$

Der erste Abstand der beiden Spulen ist  $0,07 \text{ m}$ . Für diesen Fall sind die Messergebnisse in Tabelle (3) und in der Abbildung (9) dargestellt. Bei diesem Abstand ist das Spulenpaar einer Helmholtz-Spule am ähnlichsten, deshalb kann mit der Gleichung (6) eine Theoriekurve bestimmt werden.

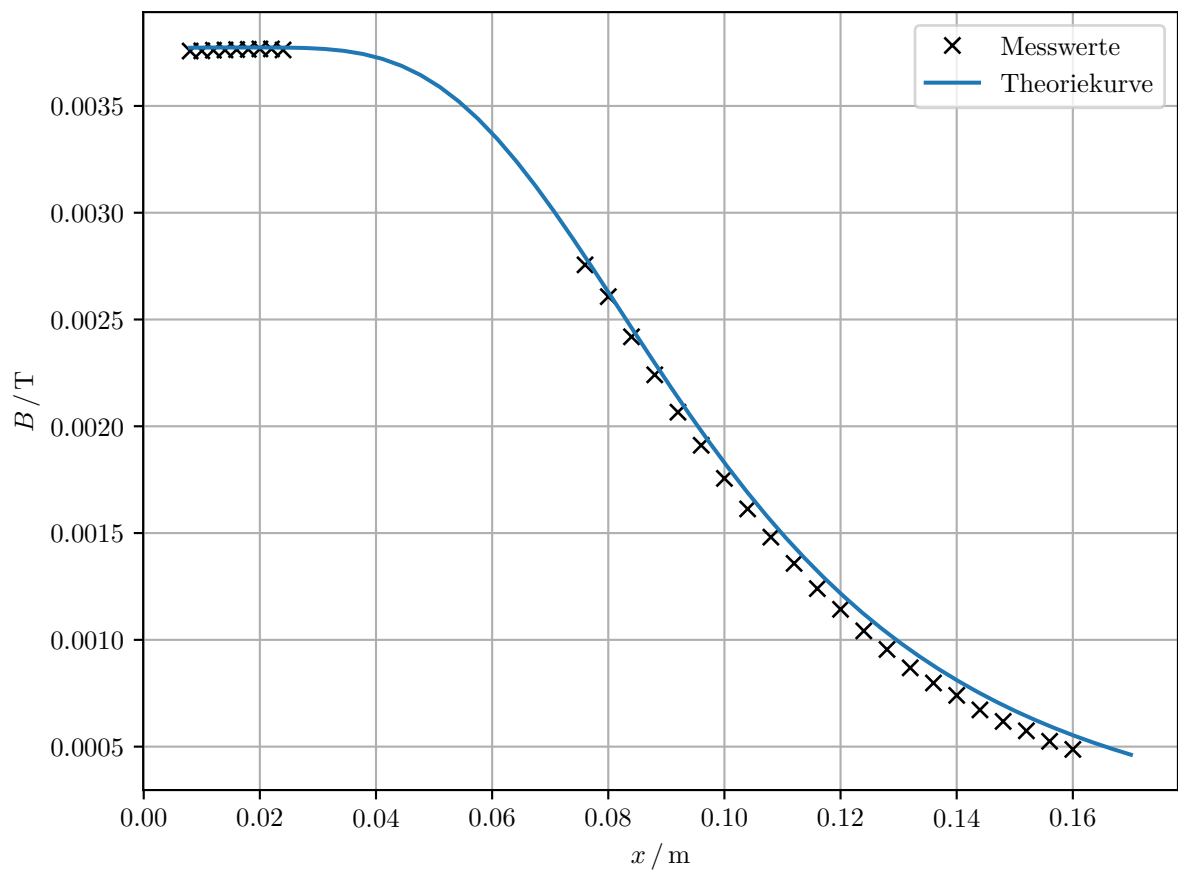
Der Theoretische Wert des Magnetfeldes zwischen den Spulen ergibt sich mithilfe der Gleichung (2) zu:

$$B = 4,006 \text{ mT}$$

Im Zentrum des Spulenpaares wurde der Wert 3,764 mT, damit ergibt sich eine Abweichung von 6,04%.

**Tabelle 3:** Messwerte der Helmholtz-Spule für den Abstand 0,07 m.

$x/\text{cm}$	$B/\text{mT}$
0,8	3,757
1,0	3,758
1,2	3,761
1,4	3,762
1,6	3,764
1,8	3,765
2,0	3,767
2,2	3,767
2,4	3,762
7,6	2,756
8,0	2,607
8,4	2,419
8,8	2,241
9,2	2,066
9,6	1,911
10,0	1,756
10,4	1,613
10,8	1,481
11,2	1,358
11,6	1,240
12,0	1,143
12,4	1,042
12,8	0,955
13,2	0,869
13,6	0,798
14,0	0,740
14,4	0,672
14,8	0,618
15,2	0,574
15,6	0,525
16,0	0,487



**Abbildung 9:** Graphische Darstellung der Messwerte für das Spulenpaar bei 0,07 m.

Der nächste Abstand der beiden Spulen ist 0,1 m. Auch in diesem Fall werden die Messwerte in der Tabelle (4) und Abbildung (10) dargestellt.

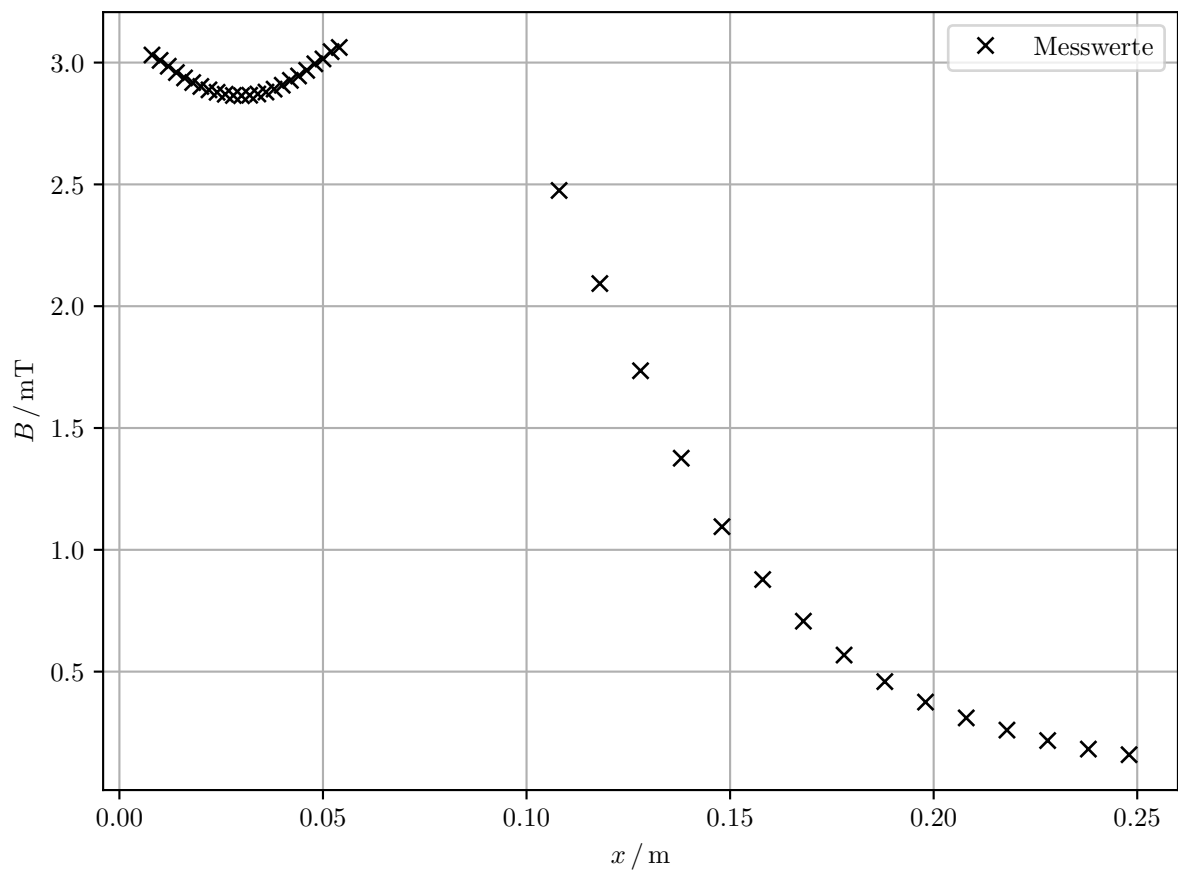
Auch hier lässt sich der Theoriewert mit der Gleichung (2) berechnen:

$$B = 2,872 \text{ mT}$$

Der gemessene Wert im Zentrum der Spule ist 2,864 mT womit die Abweichung 0,28% beträgt.

**Tabelle 4:** Messwerte des Spulenpaares mit dem Abstand 0,1 m.

$x/\text{cm}$	$B/\text{mT}$
0,8	3,031
1,0	3,009
1,2	2,985
1,4	2,959
1,6	2,937
1,8	2,918
2,0	2,902
2,2	2,888
2,4	2,878
2,6	2,870
2,8	2,865
3,0	2,864
3,2	2,866
3,4	2,871
3,6	2,879
3,8	2,891
4,0	2,907
4,2	2,927
4,4	2,945
4,6	2,968
4,8	2,995
5,0	3,015
5,2	3,045
5,4	3,062
10,8	2,475
11,8	2,093
12,8	1,735
13,8	1,376
14,8	1,095
15,8	0,878
16,8	0,707
17,8	0,568
18,8	0,459
19,8	0,375
20,8	0,310
21,8	0,260
22,8	0,217
23,8	0,182
24,8	0,159



**Abbildung 10:** Graphische Darstellung der Messwerte des Spulenpaares für den Abstand 0,1 m.

Als letztes wird eine Helmholtz-Spule mit dem Abstand 0,14 m untersucht. Die Messwerte des Magnetfeldes werden in der Tabelle (5) und in der Abbildung (11) dargestellt. Der theoretische Wert im Zentrum des Spulenpaares beträgt für diesen Abstand

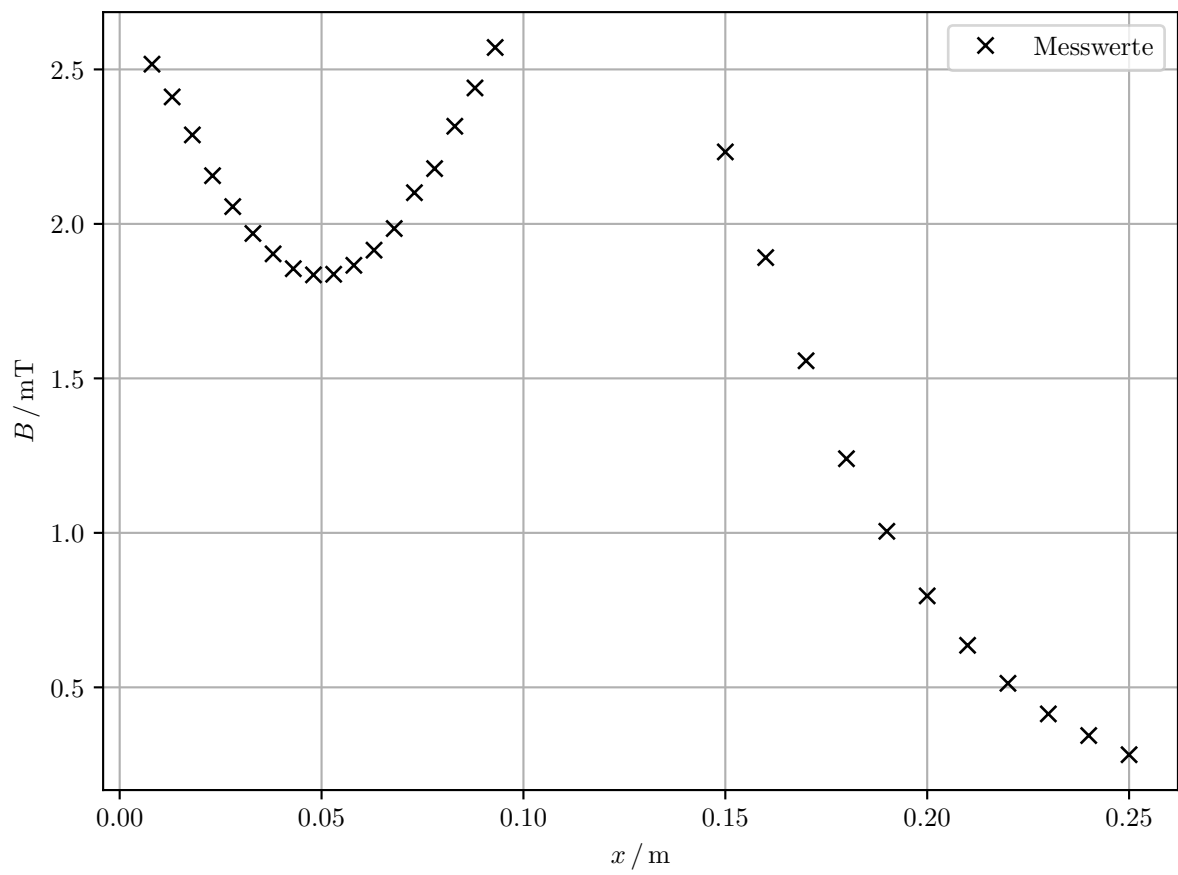
$$B = 1,782 \text{ mT}$$

Dieser Wert wurde mithilfe der Gleichung (2) bestimmt. Der gemessene Wert im Zentrum der Spule beträgt 1,835 mT womit sich eine Abweichung von 2,97% ergibt.

**Tabelle 5:** Messwerte des Spulenpaares mit dem Abstand 0,14 m.

$x/\text{cm}$	$B/\text{mT}$
0,8	2,517
1,3	2,411
1,8	2,288
2,3	2,156
2,8	2,056
3,3	1,969
3,8	1,903
4,3	1,855
4,8	1,835
5,3	1,837
5,8	1,866
6,3	1,915
6,8	1,985
7,3	2,101
7,8	2,179
8,3	2,316
8,8	2,440
9,3	2,571
15	2,233
16	1,891
17	1,557
18	1,240
19	1,005
20	0,796
21	0,636
22	0,513
23	0,414
24	0,344
25	0,282





**Abbildung 11:** Graphische Darstellung der Messwerte des Spulenpaares für den Abstand 0,14 m.

### 4.3 Bestimmung der Hysteresekurve

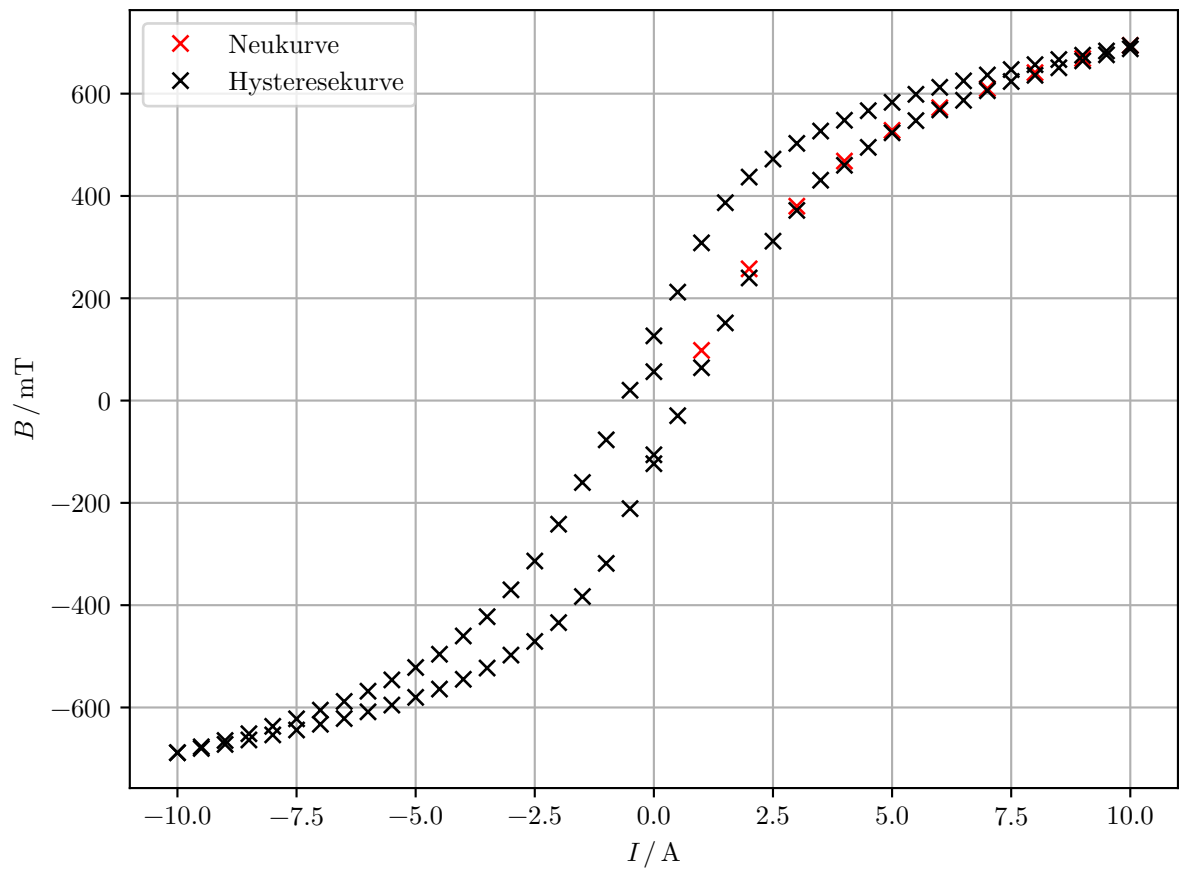
In dem letzten Teil wird nun die Hysteresekurve eines Materials bestimmt. Dafür werden die Messwerte graphisch in der Abbildung (12) dargestellt um die Parameter der Kurve zu bestimmen.

**Tabelle 6:** Messwerte der Neukurve.

$I/A$	$B/\text{mT}$
1	98,1
2	257,5
3	380,0
4	468,2
5	528,2
6	572,4
7	609,8
8	641,1
9	668,6
10	694,2

**Tabelle 7:** Messwerte für die Hysteresekurve.

$I/A$	$B/\text{mT}$	$I/A$	$B/\text{mT}$	$I/A$	$B/\text{mT}$	$I/A$	$B/\text{mT}$
10	694,2	0	56,5	-9,5	-680,1	0	-106,0
9,5	683,4	-0,5	20,2	-9	-672,2	0,5	-29,6
9	675,1	-1	-76,8	-8,5	-663,5	1	64,2
8,5	666,7	-1,5	-160,2	-8	-653,6	1,5	151,8
8	656,7	-2	-241,7	-7,5	-644,0	2	239,7
7,5	647,1	-2,5	-313,7	-7	-632,8	2,5	311,6
7	636,5	-3	-370,0	-6,5	-621,6	3	371,8
6,5	625,0	-3,5	-422,5	-6	-608,5	3,5	430,8
6	612,4	-4	-460,2	-5,5	-595,3	4	460,0
5,5	598,7	-4,5	-495,9	-5	-580,2	4,5	495,0
5	583,1	-5	-521,8	-4,5	-564,0	5	523,5
4,5	566,7	-5,5	-546,1	-4	-544,9	5,5	547,3
4	548,0	-6	-568,2	-3,5	-522,9	6	568,2
3,5	526,9	-6,5	-588,2	-3	-497,6	6,5	587,0
3	502,8	-7	-605,2	-2,5	-470,9	7	605,8
2,5	472,1	-7,5	-622,2	-2	-434,1	7,5	623,8
2	436,9	-8	-636,9	-1,5	-383,1	8	635,9
1,5	386,8	-8,5	-651,3	-1	-318,3	8,5	650,6
1	308,3	-9	-664,6	-0,5	-211,3	9	664,1
0,5	212,0	-9,5	-676,9	0	-123,4	9,5	675,9
0	126,5	-10	-688,4	-	-	10	687,7



**Abbildung 12:** Graphische Darstellung der Hysteresekurve.

Aus dem Graphen lässt sich nun die Sättigungsmagnetisierung, die Remanenz und die Koerzitivkraft bestimmen.

Die Sättigungsmagnetisierung kann nur näherungsweise bestimmt werden, da die maximale Spannung des Generators 10 V ist und sich bei dieser Spannung noch keine Sättigungsmagnetisierung einstellt. Näherungsweise ist die Sättigungsmagnetisierung damit

$$B_s = 694,2 \text{ mT}.$$

Auch die Remanenz lässt sich aus dem Graphen ablesen. Da nicht genau gemessen werden kann muss der Mittelwert und die Standardabweichung aus den zwei möglichen Werten der Remanenz bestimmt werden mit folgenden Formeln.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (7)$$

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \quad (8)$$

Damit ergibt sich die Remanenz zu:

$$B_r = (91,5 \pm 35,0) \text{ mT}$$

Für die Koerzitivkraft wird wieder der Graph der Hysteresekurve betrachtet. Die Koerzitivkraft ist in diesem Fall als Strom angegeben, der für das Magnetfeld der Spule verantwortlich ist. Die Koerzitivkraft ist somit:

$$I_c = -0,6 \text{ A}$$

## 5 Diskussion

Bei dem Vergleich der magnetischen Flussdichte der beiden Spulen fällt auf, dass die Theoriekurve unterhalb der gemessenen Werten liegt. Das kann daran liegen, dass der Strom der Spule nicht genau ermittelt wurde durch Parallaxefehler. Außerdem musste bei der langen Spule von beiden Seiten separat gemessen werden und die jeweiligen Messwerte haben sich nie überschritten, was erklärt warum die Messwerte im inneren der Spule einen Sprung von 0,1 mT. Ein weiterer Grund für das Abweichen der Messwerte ist, dass nicht genau bestimmt werden konnte ab wann in der Spule gemessen wurde.

Die ersten Graphen des Spulenpaares geht hervor, dass bei dem Abstand 0,07 m das Magnetfeld innerhalb der Spule sehr homogen ist, was die Theorie auch ergeben hat. Da der Abstand nicht genau der Radius der Spulen ist, ergibt sich eine leichte Abweichung von den Theoriewerten. Auch bei den breiteren Abständen wird gut sichtbar, dass das Magnetfeld zwischen den Spulen immer inhomogener wird, wie es in der Theorie erwartet wird. Das wird auch gut sichtbar anhand der prozentualen Abweichungen, die 2,97%, 0,28%, 6,04% betragen.

Wie vorher erwähnt ergibt sich aus der Hysteresekurve die Sättigungsmagnetisierung zu  $B_s = 694,2 \text{ mT}$ , die Remanenz zu  $B_r = (91,5 \pm 35,0) \text{ mT}$  und die Koerzitivkraft zu  $I_c = -0,6 \text{ A}$ . Bei der Hysteresekurve fällt auf, dass es bei der Remanenz einen Sprung des Magnetfeldes gibt, weil der Generator nur eine Spannung von 0 – 10V erzeugen kann und er bei der Remanenz umgepolt werden muss. Außerdem konnte das Material nicht vollständig entmagnetisiert werden, was auch zu Fehlern geführt haben könnte.

## Literatur

- [1] T. Dortmund, *Anleitung zum Versuch 308: Spulen und Magnetfelder*, 2017.
- [2] *Magnetic Field on the Axis of a Solenoid*, 26. März 2008. Adresse: <http://www.phys.uri.edu/gerhard/PHY204/ts1215.pdf> (besucht am 20.12.2017).

- [3] E. Dennison, *On-Axis Field of an Ideal Helmholtz Coil*, 2005. Adresse: <https://tiggerntatie.github.io/emagnet/helmholtz/idealhelmholtz.htm> (besucht am 20.12.2017).