Versuch 101 ”Das Trägheitsmoment”

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.2017, Abgabe: 24.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern soll bestimmt werden und der Satz von Steiner verifiziert werden.

2 Theorie

Das Drehmoment M, das Trägheitsmoment I als auch die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ charakterisieren die Rotationsbewegung. Für eine punktförmige Masse kann das Trägheitsmoment mit $I = m \cdot r^2$ berechnen. Dabei ist m die Masse und r der Abstand zur Drehachse. Für ein ausgedehnten Körper um eine feste Achse kann das Gesamtträgheitsmoment dargestellt werden als:

$$I = \sum_i r_{\mathrm{i}}^2 \cdot m_{\mathrm{i}} \tag{1}$$

Das Trägheitsmoment I ist von der Lage der Drehachse abhängig. Für geometrische Objekte, wie ein Kugel, Stab, Zylinder, lässt sich das Trägheitsmoment leicht bestimmen. In Abbildung 1 sind verschiedene Objekte mit deren Trägheitsmoment dargestellt.

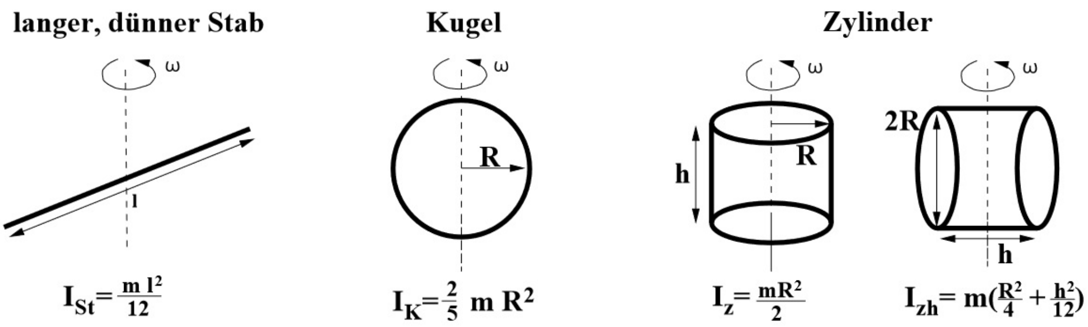

Abbildung 1: Objekte mit deren Trägheitsmoment[1]

Geht die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt eines Körpers, sondern parallel um einen Abstand a zur drehenden Achse verschoben, so lässt sich das Trägheitsmoment mithilfe des Satz von Steiner

$$I = I_0 + m \cdot a^2 \tag{2}$$

erechnen. Dabei ist I_0 das Trägheitsmoment der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers. Greift eine Kraft in einem Abstand r von der Achse auf ein drehenden Körper, so wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$. In einem Schwingungssystem wirkt auf einen Körper durch die Drehung um ein Winkel ϕ aus seiner Ruhelage ein rücktreibenes Drehmoment durch eine Feder entgegen. Die harmonische Schwingung lässt sich mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{D}} \tag{3}$$

berechnen. I ist dabei das Trägheitsmoment und D die Winkelrichtsgröße.

$$D = \frac{M}{\phi} \leftrightarrow D = \frac{F \cdot r}{\phi} \tag{4}$$

Das harmonische Verhalten bei der Drehschwingung ist nur auf kleinen Winekl ϕ beschränkt.

3 Versuchsaufbau

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments I wird zunächst die Drillachse, siehe Abbildung 2, benötigt. Die Drillachse die über eine Spiralfeder mit einem Rahmen verbunden.

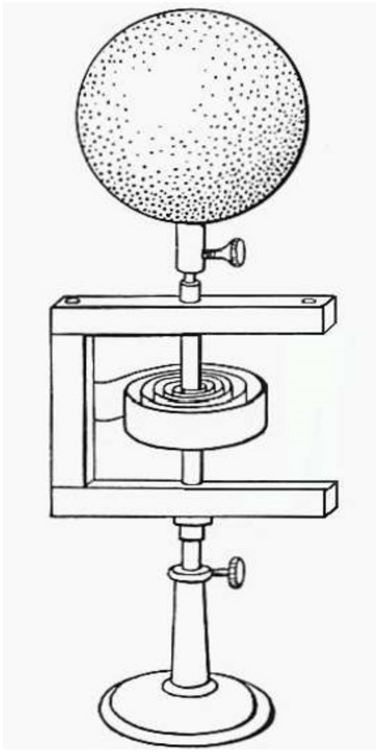

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbau[1]

Auf die Achse können verschiedene Objekte angebracht werden.

4 Durchführung

Zunächst müssen die Apparatekonstanten, die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment der Drillachse I_D, bestimmt werden. Für die Winkelrichtgröße wird auf der Apparatur eine nahezu Masselose Stange angebracht und die Kraft bei verschiedenen

Auslenkungen mithilfe einer Federwaage gemessen. Dabei ist wichtig, dass die Federwaage senkrecht gehalten wird. Für das Trägheitsmoment der Drillachse werden an der Stange nun zwei identische Massen mit gleichen Abständen zur Drehachse angebracht. Nun wird die Schwingungsdauer des Systems bei verschiedenen Abständen der Massen zur Drehachse gemessen. Die bestimmten Apparatekonstanten müssen bei den Rechnungen berücksichtigt weden.
Daraufhin können nun die Trägheitsmomente verschiedener Körper über die Schwingungsdauer bestimmt werden. In diesem Fall einer Kugel, eines Zylinders und einer Puppe in zwei verschiedenen Stellungen. Dafür werden die verschiedenen geometrischen Körper auf der Apparatur angebracht, mit dem Schwerpunkt auf der Drehachse. Nun werden die Körper aus ihrer Ausgangsposition ausgelenkt und die Schwingungsdauer wird gemessen. Die Stellungen der Puppe sind in Abbildung 3 schematisch dargestellt. In unserem Fall sind bei der linken Position auf der Abbildung die Arme nach oben gestreckt und nicht nach unten.

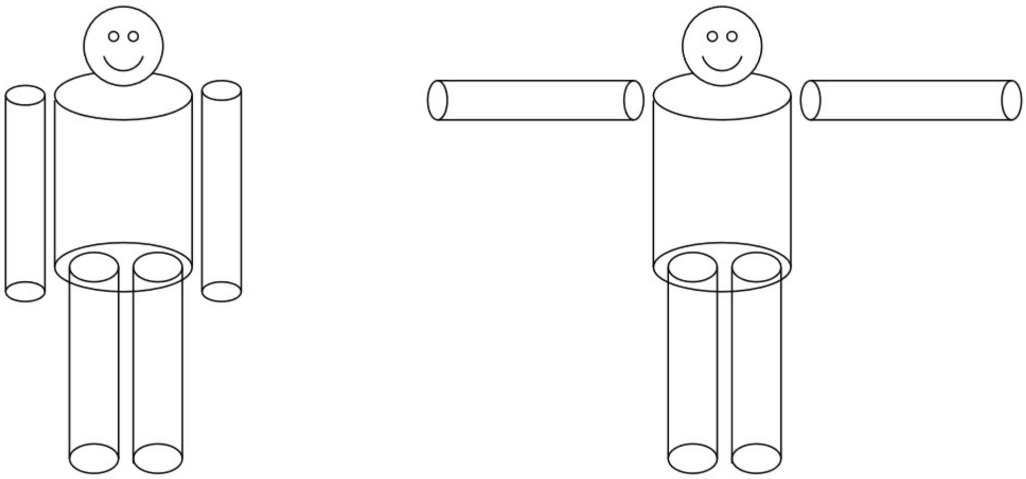

Abbildung 3: Vereinfachte Darstellung der Modelpuppe [1].

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Apparatekonstanten

Bevor die Trägheitsmomente der verschiedenen Körper bestimmt werden können müssen die Apparatekonstanten bestimmt werden. Das ist zum einen die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment der Drillachse I_D.
Die Winkelrichtgröße wird mithilfe der Gleichung (4) bestimmt. Die Kraft wird im Abstand von $r = 4{,}3\,\mathrm{cm} = 4{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ gemessen. Die entsprechenden Ergebnisse sind in Tabelle 1 zu sehen.

Tabelle 1: Tabelle mit den Messdaten für die Winkelrichtgröße

$\phi/^\circ$	$\phi/$ rad	F/N	$D/10^{-2}N$m
50	$\frac{5\pi}{18}$	0,42	2,07
60	$\frac{\pi}{3}$	0,56	2,23
80	$\frac{4\pi}{9}$	0,8	2,46
90	$\frac{\pi}{2}$	0,82	2,24
100	$\frac{5\pi}{9}$	0,96	2,37
120	$\frac{2\pi}{3}$	1,16	2,38
140	$\frac{7\pi}{9}$	1,34	2,36
160	$\frac{8\pi}{9}$	1,54	2,37
180	π	1,78	2,44
200	$\frac{10\pi}{9}$	2	2,46

Der Mittelwert von D und der zugehörige Fehler der Winkelrichtgrößen wird nun mit folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \tag{5}$$

$$\Delta\bar{x} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \tag{6}$$

Damit ergibt sich für die Winkelrichtgröße:

$$\bar{D} = (2{,}388 \pm 0{,}039) \cdot 10^{-2}Nm$$

Nun muss noch das Trägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Dazu muss die Gleichung (3) für diesen Fall noch angepasst werden, da sich das gesamte Trägheitsmoment aus dem der Drillachse und der zwei Massen zusammensetzt:

$I = I_D + 2(I_{zh} + ma^2) = I_D + 2(m\left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) + ma^2)$

Die geometrischen Abmessungen der beiden Massen sind:

- Masse m $= 222{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg
- Höhe h $= 0{,}03$ m
- Durchmesser d $= 0{,}035$ m

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment der Massen:

$$I_{zh} = 3{,}37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Durch Umformung der Gleichung (3) folgt:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m}{D} a^2 + \frac{8\pi^2}{D} I_{zh} + \frac{4\pi^2}{D} I_D \tag{7}$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse wird nun mit einer Ausgleichsrechnung bestimmt. Die Ausgleichsrechnung wird mit Python 3.6 durchgeführt. Die Daten für die Ausgleichsrechnung sind in Tabelle 2 dargestellt und in Abbilgung 4 graphisch gezeigt.

Tabelle 2: Tabelle mit den Messdaten für das Trägheitsmoment der Drillachse

T / s	a / 10^{-2} m	T^2 / s^2	a^2 / 10^{-4} m^2
2,32	3,5	5,38	12,25
2,64	5,5	6,97	30,25
2,67	7,5	7,13	56,25
3,16	9,5	9,99	90,25
3,56	12.5	12,67	156,25
4,44	14.5	19,71	210,25
5,09	18.5	25,91	342,25
5,89	20.5	34,69	420,25
6,52	23.5	42,51	552,25
7,4	26.5	54,76	702,25

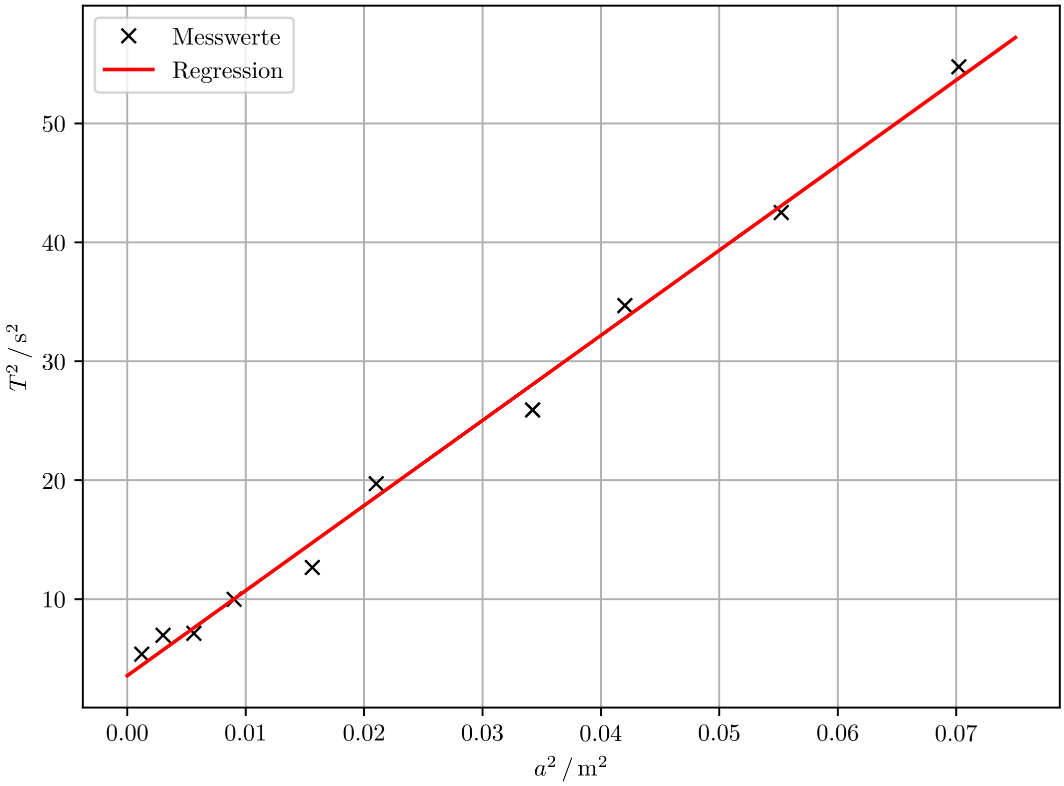

Abbildung 4: Graphische Darstellung der Messwerte und der Ausgleichsgeraden zur bestimmung des Eigenträgheitsmomentes.

Damit ergeben sich die Parameter der Ausgleichsgeraden zu der Form:

$$y = m'x + b \tag{8}$$

- $m' = (715{,}28 \pm 19{,}21)\,\mathrm{s}^2/\mathrm{m}^2$
- $b = (3{,}571 \pm 0{,}658)\,\mathrm{s}^2$

Durch Vergleichen der Gleichungen (7) und (8) lässt sich das Trägheitsmoment der Drillachse und die Winkelrichtgröße bestimmen:

$$D_2 = \frac{8\pi^2 m}{m'} \tag{9}$$

$$I_D = \frac{D_2}{4\pi^2} b - 2I_{zh} \tag{10}$$

Der Fehler der neu bestimmten Winkelrichtgröße wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$\Delta D_2 = \sqrt{\left(\frac{-8\pi^2 m}{m'^2} \cdot \Delta m'\right)^2}$

Die Winkelrichtgröße ist also:

$$D_2 = (2{,}456 \pm 0{,}066) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N\,m}$$

Damit kann nun das Trägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Der Fehler wird wieder mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{b}{4\pi^2} \cdot \Delta D_2\right)^2 + \left(\frac{D_2}{4\pi^2} \cdot \Delta b\right)^2}$

$$I_D = (2{,}154 \pm 0{,}414) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Mit den Apparatekonstanten kann nun das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern mithilfe der Gleichung (3) bestimmt werden.

5.2 Trägheitsmoment Kugel

Um das Trägheitsmoment einer Kugel bestimmen zu können muss die Schwingungsdauer T auf der Apparatur bei einer Auslenkung um einen bestimmten Winkel gemessen werden. Dann ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_k = \frac{\bar{D}}{4\pi^2}\bar{T}^2 - I_D \tag{11}$$

Tabelle 3: Tabelle mit den Messwerten für die Kugel

T / s
1,61
1,41
1,67
1,63
1,49

Der Mittelwert der Schwingungsdauer mit der zugehörigen Standardabweichung wird mit den Gleichungen (5) und (6) bestimmt.
Somit ist der Mittelwert von den gemessenen T-Werten:

$$\bar{T} = (1{,}562 \pm 0{,}048)\,\mathrm{s}$$

Mit der Gleichung (11) lässt sich dann das Trägheitsmoment der Kugel bestimmen. Der zugehörige Fehler wird mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$$\Delta I_k = \sqrt{\left(\frac{\bar{T}^2}{4\pi^2} \cdot \Delta\bar{D}\right)^2 + \left(\frac{2\bar{D}\bar{T}}{4\pi^2} \cdot \Delta\bar{T}\right)^2 + (-1 \cdot \Delta I_D)^2} \tag{12}$$

$$I_k = (-6{,}7817 \pm 4{,}2450) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Diese Lösung kann nicht sein, da es physikalisch nicht möglich ist. In der Diskussion wird dies noch weiter diskutiert. Das Trägheitsmoment der Kugel lässt sich auch mit dieser Gleichung berechnen:

$$I_k = \frac{2}{5} m \frac{D^2}{4} \tag{13}$$

Die geometrischen Abmessungen der Kugel sind:

- Masse: $m = 812{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Durchmesser: $D = 13{,}77 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Damit ist das errechnete Trägheitsmoment der gleichen Kugel:

$$I_k = 1{,}541 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.3 Trägheitsmoment Zylinder

Die Gleichung zur Bestimmung des Trägheitsmoment von einen Zylinder lässt sich wieder aus der Gleichung (3) herleiten. Dann ergibt sich die Gleichung (11) für den Zylinder.

Tabelle 4: Tabelle mit den Messwerten für den Zylinder.

T / s
2,23
2,26
2,24
2,26
2,23

Die Messwerte der Schwingungsdauer müssen wieder gemittelt werden. Den Mittelwert und die Standardabweichung werden mit den Gleichungen (5) und (6) berechnet.

Der Mittelwert der Schwingungsdauer ist also:

$$\bar{T} = (2{,}244 \pm 0{,}007)\,\mathrm{s}$$

Nun lässt sich das Trägheitsmoment des Zylinders bestimmen und den Feher mit Gauß´scher Fehlerfortpflanzung. Die Formel für den Fehler lässt sich mit der Gleichung (12) berechnen.
Das Trägheitsmoment ist also:

$$I_z = (8{,}9193 \pm 4{,}1741) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Auch das Trägheitsmoment des Zylinders lässt sich mithilfe der geometrischen Abmessungen bestimmen:

$$I_z = \frac{mD^2}{8} \tag{14}$$

- Masse: $m = 2{,}3961\,\mathrm{kg}$
- Durchmesser: $D = 10{,}025 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Höhe: $h = 14 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Damit ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_z = 3{,}01 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.4 Trägheitsmoment der Puppe mit Arme zur Seite

Das Trägheitsmoment der Puppe wird wieder genauso bestimmt wie bei den zwei anderen geometrischen Figuren. Die Formel ist durch die Gleichung (11) gegeben.

Tabelle 5: Tabelle mit den Messwerten für die Puppe mit Armen zur Seite.

T / s
1,44
1,25
1,35
1,36
1,41

Der Mittelwert und die Standardabweichung der Schwingungsdauer müssen nun wieder mithilfe der Gleichungen (5) und (6) bestimmt werden.
Der Mittelwert ist damit:

$$\bar{T} = (1{,}362 \pm 0{,}032)\,\mathrm{s}$$

Um den Fehler des Trägheitsmoments zu bestimmen muss wieder eine Gauß´sche Fehlerfortpflanzung durchgeführt werden. Dafür wird die Gleichung (12) verwendet.

$$I_{p1} = (-1{,}0319 \pm 0{,}4177) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Auch dieses Ergebnis ist physikalisch nicht möglich, der Grund für diesen Wert wird in der Diskussion erleutert.

5.5 Trägheitsmoment der Puppe mit Armen nach oben

Zuletzt wird das Trägheitsmoment der Puppe in einer anderen Position bestimmt. In dem fall hat die Puppe die Arme nach oben gestreckt. Die Formel zur berechnung des Trägheitsmoments lässt sich wieder aus der Gleichung (3) herleiten wodurch sich wieder die Gleichung (11).

Tabelle 6: Tabelle mit den Messwerten für die Puppe mit Armen nach oben.

T / s
0,76
0,46
0,46
0,44
0,45

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes wird zunächst der Mittelwert und der Fehler der Messungen bestimmt mithilfe der Gleichungen (5) und (6).
Mithilfe dieser Formeln ergibt sich nun der Mittelwert:

$$\bar{T} = (0{,}514 \pm 0{,}062)\,\mathrm{s}$$

Für den Fehler des Trägheitsmomentes wird wieder die Gauß´sche Fehlerfortpflanzung benutzt, also die Gleichung (12).

$$I_{p2} = (-1{,}9942 \pm 0{,}4158) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Es ergibt sich wieder ein negatives Trägheitsmoment, der mögliche Grund wird wieder in der Diskussion erläutert.

5.6 Trägheitsmoment der Puppe über geometrische Abmessungen

Auch bei der Puppe lässt sich wieder das Trägheitsmoment über die geometrischen Abmessungen bestimmen, indem die einzelnen Körperteile als Zylinder angenommen werden.

Tabelle 7: Tabelle mit den Durchmessern für die Puppe.

d_{Kopf} / 10^{-2} m	d_{Rumpf} / 10^{-2} m	d_{Arm} / 10^{-2} m	d_{Bein} / 10^{-2} m
3,44	5,62	2,09	2,18
3,635	5,91	2,1	2,54
2,77	4,21	1,8	1,8
2,245	3,5	1,53	1,49
	4,7	1,92	2,35
	4,96	1,71	1,79
		1,4	1,64

Die gemessenen Durchmesser müssen gemittelt werden und die Standardabweichung muss bestimmt werden mit den Gleichungen (5) und (6).
Damit ergeben sich die geometrischen Abmessungen der Puppe zu:

- Kopf:
  - Höhe: $h = 7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (3{,}0225 \pm 0{,}3186) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Rumpf:
  - Höhe: $h = 12{,}03 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (4{,}817 \pm 0{,}364) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Arm:
  - Höhe: $h = 17{,}13 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (1{,}793 \pm 0{,}101) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Bein:
  - Höhe: $h = 18{,}99 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (1{,}97 \pm 0{,}15) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Nun werden die Massen der einzelnen Körperteile bestimmt, aus der Gesamtmasse der Puppe $m_{ges} = 341{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$. Dazu wird folgende Gleichung benutzt:

$$\frac{V}{V_{ges}} = \frac{m}{m_{ges}} \iff m = \frac{V \cdot m_{ges}}{V_{ges}} \tag{15}$$

Also müssen zunächst die Volumina der Körperteile berechnet werden. Da sie alle als Zylinder angenommen werden kann die Formel $V = \frac{\pi}{4}\bar{d}^2 h$ dafür verwendet werden.
Da die Durchmesser fehlerbehaftet sind muss der Fehler des Volumens mithilfe der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet werden.

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{2\pi \bar{d} h}{4} \cdot \Delta \bar{d}\right)^2}$$

- Kopf: $V_k = (5{,}0 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$
- Rumpf: $V_r = (21{,}9 \pm 3{,}3) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$
- Arm: $V_a = (4{,}3 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$
- Bein: $V_b = (5{,}8 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$

Das Gesamtvolumen der Puppe ist damit:

$$V_{ges} = (47 \pm 4) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

Um mit der Gleichung (15) nun die eizelnen Massen zu bestimmen muss außerdem wieder der Fehler der Massen mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet werden:

$$\Delta m = \sqrt{\left(\frac{m_{ges}}{V_{ges}} \cdot \Delta V\right)^2 + \left(\frac{-V \cdot m_{ges}}{V_{ges}^2} \cdot \Delta V_{ges}\right)^2}$$

Die Massen der einzelnen Körperteile der Puppe sind:

- Kopf: $m_k = (4{,}1 \pm 1{,}3) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Rumpf: $m_r = (159 \pm 28) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Arm: $m_a = (31 \pm 4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Bein: $m_b = (42 \pm 7) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$

Nun können die Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile einzeln ausgerechnet werden und zu dem Gesamtträgheitsmoment aufsummiert werden. Da die Puppe zwei unterschiedliche Stellungen hat, wird diese Rechnung für beide Fälle einzeln durchgeführt.

5.6.1 Puppe mit Armen zur Seite

In diesem Fall geht die Drehachse nur durch den Schwerpunkt des Kopfes und des Rumpfes. Die Trägheitsmomente von diesen beiden Körperteilen kann also mit der Gleichung (14) bestimmt werden.
Der Fehler für diese beiden Trägheitsmomente wird mit folgender Formel berechnet:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\bar{d}^2}{8} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{2m\bar{d}}{8} \cdot \Delta \bar{d}\right)^2}$$

Für die Trägheitsmomente der Arme und der Beine muss der Steinersche Satz angewendet werden. Der Schwerpunkt der Beine ist um $a = \frac{d_b}{2}$ von der Drehachse verschoben. Damit ergibt sich für die Beine die Formel:

$$I_b = \frac{m_b \bar{d_b}^2}{8} + m_b \frac{\bar{d_b}^2}{4}$$

Der Fehler des Trägheitsmomentes der Beine wird mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta I_b = \sqrt{\left(\frac{3\bar{d_b}^2}{8} \cdot \Delta m_b\right)^2 + \left(\frac{6\bar{m}_b \bar{d}_b}{8} \cdot \Delta \bar{d_b}\right)^2}$$

Der Schwerpunkt der Arme ist um $a = \frac{d_r}{2} + \frac{h_a}{2}$ von der Drehachse verschoben und die Arme stehen auch anders zur Drehachse, deshalb lautet die Gleichung zur bestimmung des Trägheitsmomentes der Arme:

$$I = m\left(\frac{\bar{d}^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right)$$

Mit dem Steinerschen Satz folgt dann:

$$I_a = m_a\left(\frac{\bar{d_a}^2}{16} + \frac{h_a^2}{12}\right) + m_a\left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{h_a}{2}\right)^2$$

Der Fehler des Trägheitsmomentes der Arme ergibt sich aus der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta I_a = \sqrt{\left(\left(\frac{\bar{d_a}^2}{16} + \frac{h_a^2}{12} + \left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{h_a}{2}\right)^2\right) \cdot \Delta m_a\right)^2 + \left(\frac{m_a \bar{d_a}}{8} \cdot \Delta \bar{d_a}\right)^2 + \left(m_a\left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{h_a}{2}\right) \cdot \Delta \bar{d_r}\right)^2}$$

Nun werden die einzelnen Trägheitsmomente der Körperteile bestimmt.

- $I_k = (4{,}1 \pm 1{,}3) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$
- $I_r = (4{,}6 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$
- $I_a = (2{,}82 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$

- $I_b = (6{,}1 \pm 1{,}4) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$

Das gesamte Trägheitsmoment der Puppe in diesem Fall lässt sich durch das Addieren der einzelnen Trägheitsmomente bestimmen. Der Fehler wird mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt.

$$\Delta I_{ges} = \sqrt{\Delta I_k^2 + \Delta I_r^2 + 4\Delta I_a^2 + 4\Delta I_b^2} \tag{16}$$
$$I_{ges} = (5{,}7 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.6.2 Puppe mit Armen nach oben

Da die Stellung von dem Kopf, dem Rumpf und den Beinen identisch zu den vorherigen Fall ist, sind die Trägheitsmomente der genannten Körperteile auch gleich. Nur das Trägheitsmoment der Arme muss neu bestimmt werden.
Nun ist der Schwerpunkt der Arme um den Abstand $a = \frac{d_r}{2} + \frac{d_a}{2}$ von der Drehachse verschoben. Außerdem ist die Stellung der Arme in diesem Fall anders, deshalb kann die Gleichung (14) für den Steinerschen Satz verwendet werden.

$$I_a = \frac{m_a \bar{d_a}^2}{8} + m_a \left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{\bar{d_a}}{2}\right)^2$$

Der Fehler wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$\Delta I_a = \sqrt{\left(\left(\frac{\bar{d_a}^2}{8} + \left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{\bar{d_a}}{2}\right)^2\right)\Delta m_a\right)^2 + \left(\left(\frac{m_a \bar{d_a}}{4} + m_a\left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{\bar{d_a}}{2}\right)\right)\Delta\bar{d_a}\right)^2 + \left(\left(m_a \frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{\bar{d_a}}{2}\right)\Delta\bar{d_r}\right)^2}$$

Damit ergibt sich für das neu bestimmte Trägheitsmoment der Arme:

- $I_a = (3{,}5 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$

Der Fehler des gesamten Trägheitsmoments lässt sich mit der Gleichung (16) berechnen. Das gesamte Trägheitsmoment für diesen Fall ist damit:

$$I_{ges} = (1{,}33 \pm 0{,}19) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

6 Diskussion

Zwischen dem theoretisch und experimentell bestimmten Trägheitsmoment sind die Werte weit auseinander. Da bei allen Messungen, bis auf eine, negative Trägheitsmomente

errechnet wurden lohnt es sich nicht Abweichungen zu berechnen. Für den Zylinder ist die Abweichung $70,4\%$.
Das kann daran liegen, dass die Winkelrichtsgröße D zu Beginn fehlerhaft bestimmt worden ist und somit sich der Fehler fortsetzt. Außerdem könnte auch das Trägheismoment der Drillachse zu groß bestimmt worden sein und da man zur Bestimmung der Trägheitsmomente das Trägheitsmoment der Drillachse abziehen muss kann dies zu den negativen Werten geführt haben. Bei der Bestimmung des Trägheitsmoments der Drillachse wurde die Metallstange als masselos angenommen, was auch eine Fehlerquelle des Trägheitsmomentes ist. Das Messen der Schwingungsdauer der Objekte war zum Teil sehr schwierig und die Messuhren haben nicht genau dann ausgelößt, wenn sie betätigt wurden. Dadurch ist der Fehler der Trägheitsmomente groß geworden und das könnte auch dazu beigetragen haben, dass die Trägheitsmomente negativ geworden sind. Es gibt keine negativen Trägheitsmomente, da sie physikalisch nicht sinnvoll sind bzw. nicht möglich sind. Die Näherung der Körperteile der Puppe als Zylinder ist ungenau, wodurch der theoretisch bestimmte Wert nicht sehr genau sein kann. Die Messungen könnten verbessert werden, durch geeichte Federwaagen mit denen genau senkrecht gemessen werden kann.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 101: Das Trägheitsmoment*. 23. Nov. 2017. URL: `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/MEDPHYS/BACHELOR/AP/SKRIPT/TraegheitMP.pdf`.