

Versuch 351 "Fourier-Analyse und Synthese"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.12.2017, Abgabe: 15.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Durchführung	4
2.1	Fourier-Analyse	4
2.2	Fourier-Synthese	5
	Literatur	5

1 Theorie

In der Physik sind periodische Vorgänge sehr wichtig. Es lassen sich fast alle periodische Vorgänge, die in der Natur vorkommen, beschreiben durch das Fouriersche Theorem. Dieses Theorem besagt, dass die in Gleichung (1) gezeigte Reihe eine beliebige periodische Funktion darstellt, falls sie gleichmäßig konvergiert.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) \right) \quad (1)$$

Die Koeffizienten a_n und b_n können mit der folgenden Formel bestimmt werden:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T}t\right) dt \quad (2)$$

Bei der Bestimmung der Amplituden ist es wichtig ob die zu beschreibende Funktion gerade oder ungerade ist. Ist die Funktion gerade, also ist $f(t) = f(-t)$, dann sind alle $b_n = 0$. Falls die Funktion ungerade ist, also $f(t) = -f(-t)$ gilt, sind alle $a_n = 0$. Oberschwingungen werden die einzelnen Komponenten der Fourierreihe genannt. Die erste Oberschwingung, also für $n = 1$ hat die Frequenz der beschriebenen Funktion. Die nachfolgenden Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache von der Grundfrequenz. Bei den Sinus und Cosinus Funktionen in der Fourier-Reihe ist es wichtig, dass nur Phasenverschiebungen von entweder $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ oder $\frac{3\pi}{2}$ vorkommen.

Eine Anforderung an die Funktion ist, dass sie stetig ist aber sie muss nicht unbedingt differenzierbar sein. Falls die Funktion an einer Stelle nicht stetig ist, wie zum Beispiel eine Rechteckspannung, dann wird an dieser Stelle immer eine gleich große Abweichung sein, wenn sie durch eine Fourier-Reihe beschrieben wird.

Das gesamte Frequenzspektrum einer Funktion, die nicht periodisch sein muss, kann durch eine Fourier-Transformation ermittelt werden. Die Formel für diese Transformation ist in Gleichung (3) dargestellt.

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (3)$$

Für eine periodische Funktion ergibt sich mit dieser Gleichung eine Reihe von δ -Funktionen, also ein Linienspektrum. In Abbildung (1) ist ein solches Linienspektrum abgebildet. Da in Realität nicht unendlich lange gemessen werden kann, ergeben sich, anstatt δ -Funktionen, ein Linienspektrum mit endlicher Breite. Bei nicht periodischen Funktionen ergibt sich ein kontinuierliches Spektrum.

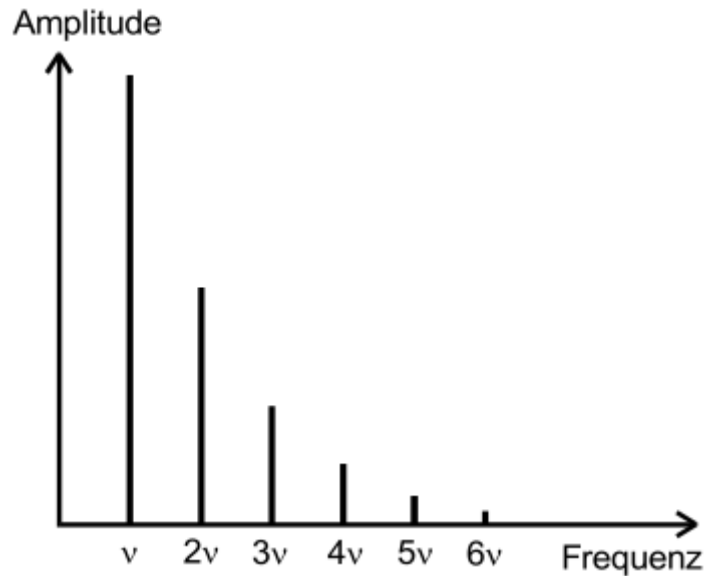


Abbildung 1: Darstellung eines Linienspektrums einer periodischen Funktion [1].

2 Durchführung

2.1 Fourier-Analyse

Bei diesem Teil des Versuches sollen die Amplituden der einzelnen Oberwellen von drei verschiedenen Spannungen bestimmt werden. Diese drei Spannungen sind eine Rechteckspannung, eine Dreieckspannung und eine Sägezahnspannung.

Diese verschiedenen Spannungen werden von einem Funktionsgenerator erzeugt. Die erzeugte Spannung wird auf ein Oszilloskop übertragen, in dem ein Analog-Digital-Konverter und ein Rechner für eine Fourier-Transformation verbaut sind. Damit lässt sich die Spannung und das Frequenzspektrum gleichzeitig auf dem Oszilloskop anzeigen. Der Analog-Digital-Konverter besitzt eine sogenannte Abtastfrequenz, da er nur in endlichen Abständen die Spannung messen kann. Aus diesem Grund muss die Frequenz der Spannung viel kleiner sein als die Abtastfrequenz. Es muss viel kleiner sein, da diese Voraussetzung auch für die Frequenzen der zu messenden Oberwellen gelten muss, die eine größere Frequenz als die Spannung haben. Bei den verwendeten Apparaturen sind diese Voraussetzungen allerdings immer gegeben und müssen bei der Durchführung nicht berücksichtigt werden.

Nun werden die einzelnen Amplituden der Oberwellen auf dem Oszilloskop dargestellt und können mithilfe von dem Cursor abgelesen werden.

2.2 Fourier-Synthese

Der zweite Teil des Versuches besteht daraus, dass aus einzelnen Oberwellen die drei oben genannten Spannungen zusammengesetzt werden sollen. Dazu müssen vorher die Koeffizienten a_n und b_n für die verschiedenen Schwingungen theoretisch bestimmt werden. Die Rechnungen dazu sind in der Auswertung angegeben.

Es wird ein Signalgenerator, der Sinusschwingungen erzeugt, für diesen Teil verwendet. Der Generator kann bis zu 9 Sinusschwingungen, mit verschiedenen Amplituden und Phasen erzeugen.

Als erstes müssen die verschiedenen Sinusschwingungen in Phase gebracht werden. Dazu wird immer die erste Spannung und der Reihe nach die folgenden Spannungen auf dem Oszilloskop, im XY-Betrieb, dargestellt. Auf dem Oszilloskop lassen sich nun Lissajous-Figuren beobachten, die in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung anders aussehen. In Abbildung (2) sind zwei Beispiele gezeigt. Mithilfe der Lissajous-Figuren, werden die einzelnen Sinusspannungen in Phase gebracht. Besteht die zusammengesetzte Schwingung aus Cosinusschwingungen ist zu beachten, dass $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ gilt.



Abbildung 2: Lissajous-Figuren von zwei Cosinusschwingungen mit dem Frequenzverhältnis 1:3, links Phase $\phi = 0$, rechts Phase $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ [1].

Nun müssen noch die Amplituden der einzelnen Sinusschwingungen jeweils für die darzustellende Spannung eingestellt werden. Die Amplituden werden mit einem Millivoltmeter bestimmt. Es wird die Amplitude von der ersten Spannung ermittelt und die anderen Spannungen werden, im Verhältnis zur ersten Spannung so eingestellt, wie es in der theoretischen Rechnung für die jeweiligen Spannungen ermittelt wurde.

Zum Schluss werden die korrekt eingestellten Sinusspannungen durch den Ausgang für die Summenschwingung auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht. Es werden nach und nach mehr Spannungen hinzugeschalt und bei jeder zugeschalteten Spannung wird ein Thermodruck angefertigt.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 351: Fourier-Analyse und Synthese*. 2017.