Versuch 101 "Das Trägheitsmoment"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 17.11.2017, Abgabe: 24.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern soll bestimmt werden und der Satz von Steiner verifiziert werden.

2 Theorie

Das Drehmoment M, das Trägheitsmoment I als auch die Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}$ charakterisieren die Rotationsbewegung. Für eine punktförmige Masse kann das Trägheitsmoment mit $I = m * r^2$ berechnen. Dabei ist m die Masse und r der Abstand zur Drehachse. Für ein ausgedehnten Körper um eine feste Achse kann das Gesamtträgheitsmoment als:

$$I = \sum_i r_\mathrm{i}^2 \cdot m_\mathrm{i} \tag{1}$$

dargestellt werden. Das Drehmoment M ist von der Lage der Drehachse abhängig. Für geometrische Objekte, wie ein Kugel, Stab, Zylinder, lässt sich das Trägheitsmoment leicht bestimmen. In Abbildung 1 sind verschiedene Objekte mit deren Trägheitsmoment dargestellt.

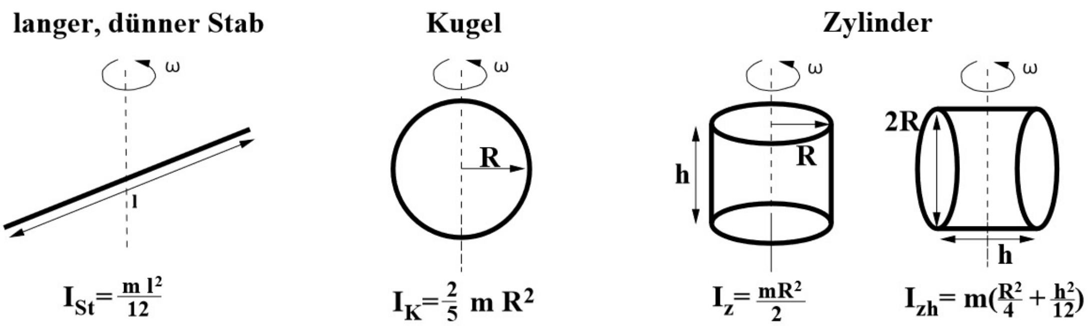

Abbildung 1: Objekte mit deren Trägheitsmoment[1]

Ist die Drehachse nicht durch den Schwerpunkt eines Körpers sondern parallel mit einem Abstand a zur gehenden Achse verschoben, so lässt sich das Trägheitsmoment mithilfe von Satz des Steiners

$$I = I_0 + m * a^2 \tag{2}$$

erechnen. Dabei ist I_0 das Trägheitsmoment der Drehachse durch den Schwerpunkt des Körpers. Greift eine Kraft mit einem Abstand r von der Achse auf ein drehenden Körper, so wirkt ein Drehmoment $\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$. In einem Schwingungssystem wirkt auf ein Körper durch die Drehung um ein Winkel ϕ aus seiner Ruhelage ein rücktreibenes Drehmoment durch eine Feder entgegen. Die harmonische Schwingung lässt sich mit der Schwingungsdauer

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{3}$$

berechnen. I ist dabei das Trägheitsmoment und D die Winkelrichtsgröße.

$$D = \frac{M}{\phi} \leftrightarrow D = \frac{F \cdot r}{\phi} \tag{4}$$

Das harmonische Verhalten bei der Drehschwingung ist nur auf kleinen Winekl ϕ beschränkt.

3 Versuchsaufbau

Zur Bestimmung des Trägheitsmoments I wird zunächst die Drillachse, siehe Abbildung 2, benötigt. Die Drillachse die über eine Spiralfeder mit einem Rahmen verbunden.

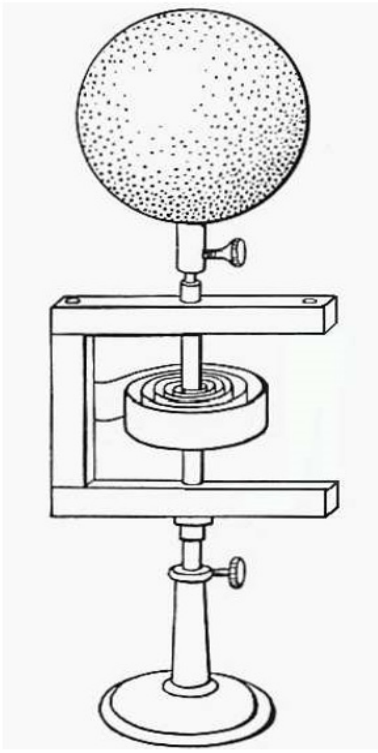

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Versuchsaufbau[1]

Auf die Achse können verschiedene Objekte angebracht werden.

4 Durchführung

Zur Bestimmung der Apperaturkonstanten D und das Eigenträgheitsmoment I_{D} der Drillachse wird eine Federwaage eingehakt und um ein Winkel ausgelenkt. Es ist zu beachten, dass die Federwaage senkrecht zum Radius gehalten wird, da sich das Kreuzprodukt vom

Drehmoment aufhebt. Mit der Formel aus (4) kann nun die Winkelrichtgröße berechnet werden. Zur Bestimmung des Eigenträgheismoments wird ein masselosen Metallstab, an denen zwei Gewicht senkrecht zur Drehachse befindet, angesteckt. Das Trägheismoment verschiedener Objekte wird mithilfe der Formel (2) bestimmt. Für eine Modelpuppe wird ebenfalls das Trägheitsmoment mithilfe der Formel (1) als auch (2) errechnet. Zur Vereinfachung wird die Puppe aus verschiedenen Zylindern zusammengebaut (siehe Abbildung 3).

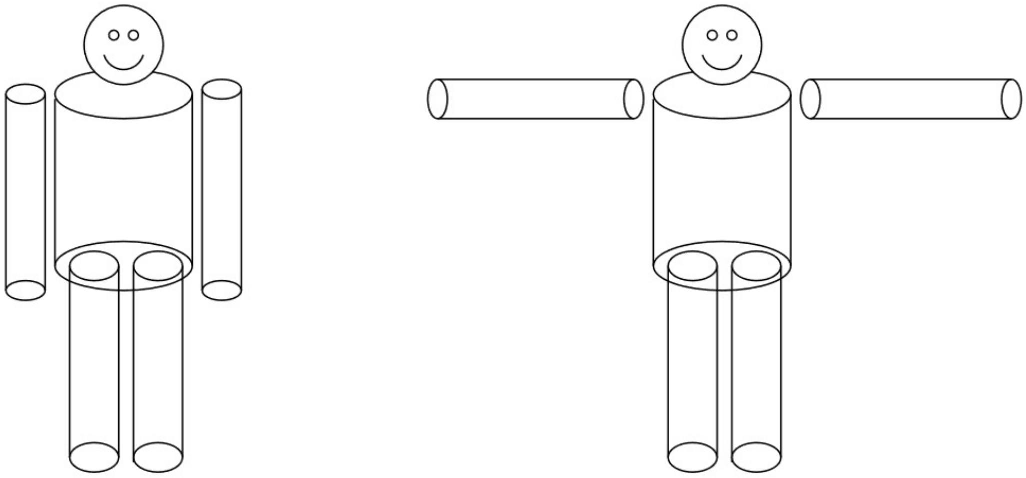

Abbildung 3: Vereinfachte Darstellung der Modelpuppe[1]

5 Auswertung

5.1 Bestimmung der Apparatekonstanten

Bevor die Trägheitsmomente der verschiedenen Körper bestimmt werden können müssen die Apparatekonstanten bestimmt werden. Das ist zum einen die Winkelrichtgröße D und das Trägheitsmoment der Drillachse I_D.
Die Winkelrichtgröße wird mithilfe der Gleichung (4) bestimmt. Die Kraft wird im Abstand von $r = 4{,}3\,\mathrm{cm} = 4{,}3 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ gemessen.

Tabelle 1: Tabelle mit den Messdaten für die Winkelrichtgröße

ϕ in Grad	ϕ in rad	F in N	D in $10^{-2}Nm$
50	$\frac{5\pi}{18}$	0.42	2.07
60	$\frac{\pi}{3}$	0.56	2.23
80	$\frac{4\pi}{9}$	0.8	2.46
90	$\frac{\pi}{2}$	0.82	2.24
100	$\frac{5\pi}{9}$	0.96	2.37
120	$\frac{2\pi}{3}$	1.16	2.38
140	$\frac{7\pi}{9}$	1.34	2.36
160	$\frac{8\pi}{9}$	1.54	2.37
180	π	1.78	2.44
200	$\frac{10\pi}{9}$	2	2.46

Der Mittelwert und der zugehörige Fehler der Winkelrichtgrößen wird nun mit folgenden Gleichungen bestimmt:

$\bar{D} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} D_i$

$\Delta\bar{D} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_i (D_i - \bar{D})^2}$

Damit ergibt sich für die Winkelrichtgröße:

$$\bar{D} = (2{,}388 \pm 0{,}039) \cdot 10^{-2} Nm$$

Nun muss noch das TräTrägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Dazu muss die Gleichung (3) für diesen Fall noch angepasst werden, da sich das gesamte Trägheitsmoment aus dem der Drillachse und der zwei Massen zusammensetzt:
$I = I_D + 2(I_{zh} + ma^2) = I_D + 2(m \left(\frac{d^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right) ma^2)$
Die geometrischen Abmessungen der beiden Massen sind:

- Masse m $= 222{,}5 \cdot 10^{-3}$ kg
- Höhe h $= 0{,}03$ m
- Durchmesser d $= 0{,}035$ m

Damit ergibt sich für das Trägheitsmoment der Massen:

$$I_{zh} = 3{,}37 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Durch Umformung der Gleichung (3) folgt:

$$T^2 = \frac{8\pi^2 m}{D} a^2 + \frac{8\pi^2}{D} I_{zh} + \frac{4\pi^2}{D} I_D \tag{5}$$

Das Trägheitsmoment der Drillachse wird nun mit einer Ausgleichsrechnung bestimmt. Die Ausgleichsrechnung wird mit Python 3.6 durchgeführt.

Tabelle 2: Tabelle mit den Messdaten für das Trägheitsmoment der Drillachse

T in s	a in 10^{-2} m	T^2 in s^2	a^2 in $10^{-4}\,\mathrm{m}^2$
2.32	3.5	5.38	12.25
2.64	5.5	6.97	30.25
2.67	7.5	7.13	56.25
3.16	9.5	9.99	90.25
3.56	12.5	12.67	156.25
4.44	14.5	19.71	210.25
5.09	18.5	25.91	342.25
5.89	20.5	34.69	420.25
6.52	23.5	42.51	552.25
7.4	26.5	54.76	702.25

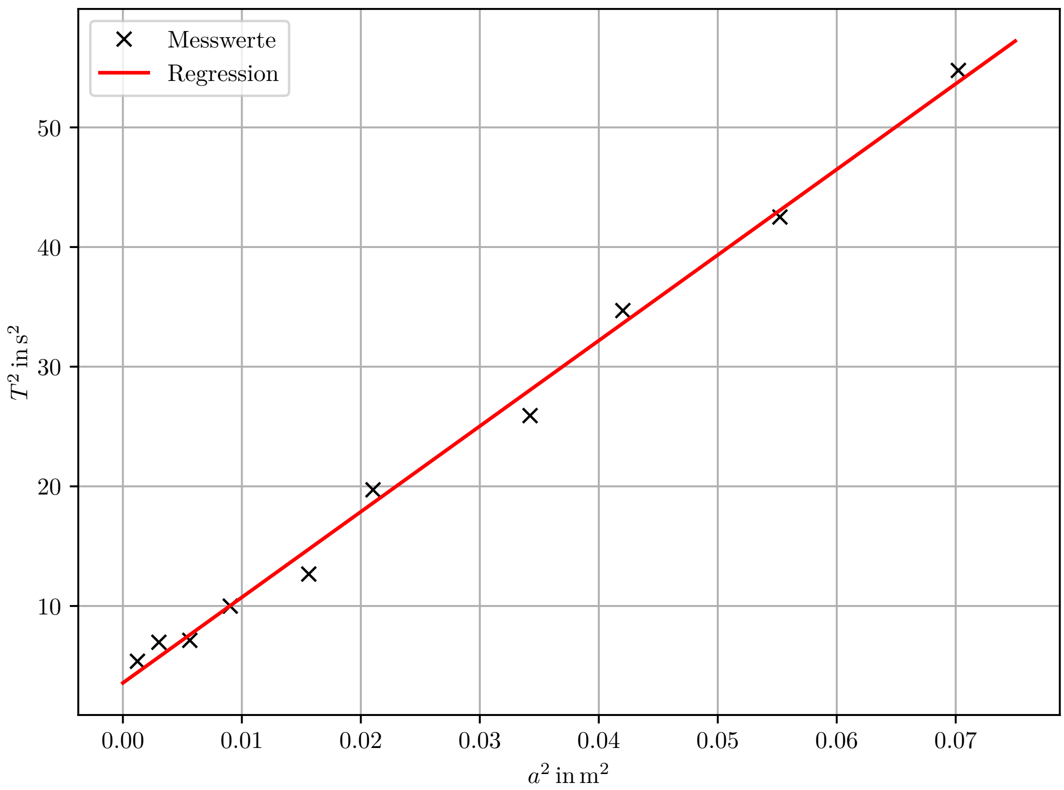

Abbildung 4: Graphische Darstellung der Messwerte und der Ausgleichsgeraden

Damit ergeben sich die Parameter der Ausgleichsgeraden zu:

$$y = m'x + b \tag{6}$$

- $m' = (715{,}28 \pm 19{,}21)\,\mathrm{kg/Nm}$
- $b = (3{,}571 \pm 0{,}658)\,\mathrm{kg\,m/N}$

Durch Vergleichen der Gleichungen (5) und (6) lässt sich das Trägheitsmoment der Drillachse und die Winkelrichtgröße nochmal bestimmen.

$$D_2 = \frac{8\pi^2 m}{m'} \tag{7}$$
$$I_D = \frac{D_2}{4\pi^2} b - 2I_{zh} \tag{8}$$

Der Fehler der neu bestimmten Winkelrichtgröße wird mit der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta D_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial D_2}{\partial m'} \cdot \Delta m'\right)^2}$$

Die Winkelrichtgröße ist also:

$$D_2 = (2{,}456 \pm 0{,}066) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N\,m}$$

Damit kann nun das Trägheitsmoment der Drillachse bestimmt werden. Der Fehler wird wieder mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta I_D = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial D_2} \cdot \Delta D_2\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2}$$

$$I_D = (2{,}154 \pm 0{,}414) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Mit den Apparatekonstanten kann nun das Trägheitsmoment von verschiedenen Körpern mithilfe der Gleichung (3) bestimmt werden.

5.2 Trägheitsmoment Kugel

Um das Trägheitsmoment einer Kugel bestimmen zu können muss die Schwingungsdauer T auf der Apparatur gemessen werden bei einer Auslenkung um einen bestimmten Winkel. Dann ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_k = \frac{\bar{D}}{4\pi^2} \bar{T}^2 - I_D \tag{9}$$

Tabelle 3: Tabelle mit den Messwerten für die Kugel

T in s
1.61
1.41
1.67
1.63
1.49

Der Mittelwert der Schwingungsdauer mit der zugehörigen Standardabweichung wird mit den folgenden Gleichungen bestimmt:
$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} T_i$

$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_i (T_i - \bar{T})^2}$

Somit ist der Mittelwert von den gemessenen T-Werten:

$$\bar{T} = (1{,}562 \pm 0{,}048)\,\mathrm{s}$$

Mit der Gleichung (9) lässt sich dann das Trägheitsmoment der Kugel bestimmen. Der zugehörige Fehler wird mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet.

$\Delta I_k = \sqrt{\left(\frac{\partial I_k}{\partial \bar{D}} \cdot \Delta\bar{D}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_k}{\partial \bar{T}} \cdot \Delta\bar{T}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_k}{\partial I_D} \cdot \Delta I_D\right)^2}$

$$I_k = (-6{,}7817 \pm 4{,}2450) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Das Trägheitsmoment der Kugel lässt sich auch mit dieser Gleichung berechnen:

$$I_k = \frac{2}{5} m \frac{D^2}{4} \tag{10}$$

Die geometrischen Abmessungen der Kugel sind:

- Masse: $m = 812{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Durchmesser: $D = 13{,}77 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Damit ist das errechnete Trägheitsmoment der gleichen Kugel:

$$I_k = 1{,}541 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.3 Trägheitsmoment Zylinder

Die Gleichung zur Bestimmung des Trägheitsmoment von einen Zylinder lässt sich wieder aus der Gleichung (3) herleiten.

$$I_z = \frac{\bar{D}}{4\pi^2}\bar{T}^2 - I_D \tag{11}$$

Tabelle 4: Tabelle mit den Messwerten für den Zylinder

T in s
2.23
2.26
2.24
2.26
2.23

Die Messwerte der Schwingungsdauer müssen wieder gemittelt werden. Den Mittelwert und die Standardabweichung werden mit den folgenden Gleichungen berechnet.

$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} T_i$

$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_i (T_i - \bar{T})^2}$

Der Mittelwert der Schwingungsdauer ist also:

$$\bar{T} = (2{,}244 \pm 0{,}007)\,\mathrm{s}$$

Nun lässt sich das Trägheitsmoment des Zylinders bestimmen und den Feher mit Gauß´scher Fehlerfortpflanzung:

$\Delta I_z = \sqrt{\left(\frac{\partial I_z}{\partial \bar{D}} \cdot \Delta\bar{D}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_z}{\partial \bar{T}} \cdot \Delta\bar{T}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_z}{\partial I_D} \cdot \Delta I_D\right)^2}$

Das Trägheitsmoment ist also:

$$I_z = (8{,}9193 \pm 4{,}1741) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Auch das Trägheitsmoment des Zylinders lässt sich auch wieder mithilfe der geometrischen Abmessungen bestimmen:

$$I_z = \frac{mD^2}{8} \tag{12}$$

- Masse: $m = 2{,}3961\,\mathrm{kg}$
- Durchmesser: $D = 10{,}025 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

- Höhe: $h = 14 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Damit ergibt sich das Trägheitsmoment zu:

$$I_z = 3{,}01 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.4 Trägheitsmoment der Puppe mit Arme zur Seite

Das Trägheitsmoment der Puppe wird wieder genauso bestimmt wie bei den zwei anderen geometrischen Figuren. Die Formel ist also:

$$I_{p1} = \frac{\bar{D}}{4\pi^2}\bar{T}^2 - I_D \tag{13}$$

Tabelle 5: Tabelle mit den Messwerten für die Puppe mit Armen zur Seite

T in s
1.44
1.25
1.35
1.36
1.41

Der Mittelwert und die Standardabweichung der Schwingungsdauer müssen nun wieder bestimmt werden.

$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} T_i$

$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_i (T_i - \bar{T})^2}$

Der Mittelwert ist damit:

$$\bar{T} = (1{,}362 \pm 0{,}032)\,\mathrm{s}$$

Um den Fehler des Trägheitsmoments zu bestimmen muss wieder eine Gauß´sche Fehlerfortpflanzung durchgeführt werden.

$\Delta I_{p1} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{p1}}{\partial \bar{D}} \cdot \Delta\bar{D}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{p1}}{\partial \bar{T}} \cdot \Delta\bar{T}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{p1}}{\partial I_D} \cdot \Delta I_D\right)^2}$

$$I_{p1} = (-1{,}0319 \pm 0{,}4177) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.5 Trägheitsmoment der Puppe mit Armen nach oben

Zuletzt wird das Trägheitsmoment der Puppe in einer anderen Position bestimmt. In dem fall hat die Puppe die Arme nach oben gestreckt. Die Formel zur berechnung des Trägheitsmoments lässt sich wieder aus der Gleichung (3) herleiten.

$$I_{p2} = \frac{\bar{D}}{4\pi^2}\bar{T}^2 - I_D \tag{14}$$

Tabelle 6: Tabelle mit den Messwerten für die Puppe mit Armen nach oben

T in s
0.76
0.46
0.46
0.44
0.45

Zur Berechnung des Trägheitsmomentes wird zunächst der Mittelwert und der Fehler der Messungen bestimmt.

$\bar{T} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N} T_i$

$\Delta\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}}\sqrt{\sum_i (T_i - \bar{T})^2}$

Mithilfe dieser Formeln ergibt sich nun der Mittelwert:

$$\bar{T} = (0{,}514 \pm 0{,}062)\,\mathrm{s}$$

Für den Fehler des Trägheitsmomentes wird wieder die Gauß´sche Fehlerfortpflanzung benutzt:

$\Delta I_{p2} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_{p2}}{\partial \bar{D}} \cdot \Delta\bar{D}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{p2}}{\partial \bar{T}} \cdot \Delta\bar{T}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_{p2}}{\partial I_D} \cdot \Delta I_D\right)^2}$

$$I_{p2} = (-1{,}9942 \pm 0{,}4158) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.6 Trägheitsmoment der Puppe über geometrische Abmessungen

Auch bei der Puppe lässt sich wieder das Trägheitsmoment über die geometrischen Abmessungen bestimmen, indem die einzelnen Körperteile als Zylinder angenommen werden.

Tabelle 7: Tabelle mit den Durchmessern für die Puppe

Kopf in 10^{-2} m	Rumpf in 10^{-2} m	Arm in 10^{-2} m	Bein in 10^{-2} m
3.635	5.91	2.1	2.54
3.44	5.62	2.09	2.18
2.77	4.21	1.8	1.8
2.245	3.5	1.53	1.49
	4.7	1.92	2.35
	4.96	1.71	1.79
		1.4	1.64

Die gemessenen Durchmesser müssen gemittelt werden und die Standardabweichung muss bestimmt werden mit folgenden Formeln:

$\bar{d} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} d_i$

$\Delta\bar{d} = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_i (d_i - \bar{d})^2}$

Damit ergeben sich die geometrischen Abmessungen der Puppe zu:

- Kopf:
  - Höhe: $h = 7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (3{,}0225 \pm 0{,}3186) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Rumpf:
  - Höhe: $h = 12{,}03 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (4{,}817 \pm 0{,}364) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Arm:
  - Höhe: $h = 17{,}13 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
  - Durchmesser: $\bar{d} = (1{,}793 \pm 0{,}101) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$
- Bein:
  - Höhe: $h = 18{,}99 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

– Durchmesser: $\bar{d} = (1{,}97 \pm 0{,}15) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$

Nun werden die Massen der einzelnen Körperteile bestimmt, aus der Gesamtmasse der Puppe $m_{ges} = 341{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$. Dazu wird folgende Gleichung benutzt:

$$\frac{V}{V_{ges}} = \frac{m}{m_{ges}} \iff m = \frac{V \cdot m_{ges}}{V_{ges}} \tag{15}$$

Also müssen zunächst die Volumina der Körperteile berechnet werden. Da sie alle als Zylinder angenommen werden kann die Formel $V = \frac{\pi}{4}\bar{d}^2 h$ dafür verwendet werden.
Da die Durchmesser fehlerbehaftet sind muss der Fehler des Volumens mithilfe der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet werden.

$$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial \bar{d}} \cdot \Delta \bar{d}\right)^2}$$

- Kopf: $V_k = (5{,}0 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$
- Rumpf: $V_r = (21{,}9 \pm 3{,}3) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$
- Arm: $V_a = (4{,}3 \pm 0{,}5) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$
- Bein: $V_b = (5{,}8 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$

Das Gesamtvolumen der Puppe ist damit:

$$V_{ges} = (47 \pm 4) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$$

Um mit der Gleichung (15) nun die eizelnen Massen zu bestimmen muss außerdem wieder der Fehler der Massen mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet werden:

$$\Delta m = \sqrt{\left(\frac{\partial m}{\partial V} \cdot \Delta V\right)^2 + \left(\frac{\partial m}{\partial V_{ges}} \cdot \Delta V_{ges}\right)^2}$$

Die Massen der einzelnen Körperteile der Puppe sind:

- Kopf: $m_k = (4{,}1 \pm 1{,}3) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Rumpf: $m_r = (159 \pm 28) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Arm: $m_a = (31 \pm 4) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$
- Bein: $m_b = (42 \pm 7) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$

Nun können die Trägheitsmomente der einzelnen Körperteile einzeln ausgerechnet werden und zu dem Gesamtträgheitsmoment aufsummiert werden. Da die Puppe zwei unterschiedliche Stellungen hat, wird diese Rechnung für beide Fälle einzeln durchgeführt.

5.6.1 Puppe mit Armen zur Seite

In diesem Fall geht die Drehachse nur durch den Schwerpunkt des Kopfes und des Rumpfes. Die Trägheitsmomente von diesen beiden Körperteilen kann also mit der Gleichung (12) bestimmt werden.
Der Fehler für diese beiden Trägheitsmomente wird mit folgender Formel berechnet:

$$\Delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial \bar{d}} \cdot \Delta \bar{d}\right)^2}$$

Für die Trägheitsmomente der Arme und der Beine muss der Steinersche Satz angewendet werden. Der Schwerpunkt der Beine ist um $a = \frac{d_b}{2}$ von der Drehachse verschoben. Damit ergibt sich für die Beine die Formel:

$$I_b = \frac{m_b \bar{d_b}^2}{8} + m_b \frac{\bar{d_b}^2}{4}$$

Der Fehler des Trägheitsmomentes der Beine wird mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt:

$$\Delta I_b = \sqrt{\left(\frac{\partial I_b}{\partial m_b} \cdot \Delta m_b\right)^2 + \left(\frac{\partial I_b}{\partial \bar{d_b}} \cdot \Delta \bar{d_b}\right)^2}$$

Der Schwerpunkt der Arme ist um $a = \frac{d_r}{2} + \frac{h_a}{2}$ von der Drehachse verschoben und die Arme stehen auch anders zur Drehachse, deshalb lautet die Gleichung zur bestimmung des Trägheitsmomentes der Arme:

$$I = m\left(\frac{\bar{d}^2}{16} + \frac{h^2}{12}\right)$$

Mit dem Steinerschen Satz folgt dann:

$$I_a = m_a\left(\frac{\bar{d_a}^2}{16} + \frac{h_a^2}{12}\right) + m_a\left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{h_a}{2}\right)^2$$

Der Fehler des Trägheitsmomentes der Arme ergibt sich aus der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta I_a = \sqrt{\left(\frac{\partial I_a}{\partial m_a} \cdot \Delta m_a\right)^2 + \left(\frac{\partial I_a}{\partial \bar{d_a}} \cdot \Delta \bar{d_a}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_a}{\partial \bar{d_r}} \cdot \Delta \bar{d_r}\right)^2}$$

Nun werden die einzelnen Trägheitsmomente der Körperteile bestimmt.

- $I_k = (4{,}1 \pm 1{,}3) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$
- $I_r = (4{,}6 \pm 1{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$
- $I_a = (2{,}82 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$
- $I_b = (6{,}1 \pm 1{,}4) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{kg\,m^2}$

Das gesamte Trägheitsmoment der Puppe in diesem Fall ist also:

$$I_{ges} = (5{,}7 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

5.6.2 Puppe mit Armen nach oben

Da die Stellung von dem Kopf, dem Rumpf und den Beinen identisch zu den vorherigen Fall ist, sind die Trägheitsmomente der genannten Körperteile auch gleich. Nur das Trägheitsmoment der Arme muss neu bestimmt werden.
Nun ist der Schwerpunkt der Arme um den Abstand $a = \frac{d_r}{2} + \frac{d_a}{2}$ von der Drehachse verschoben. Außerdem ist die Stellung der Arme in diesem Fall anders, deshalb kann die Gleichung (12) für den Steinerschen Satz verwendet werden.

$$I_a = \frac{m_a \bar{d_a}^2}{8} + m_a \left(\frac{\bar{d_r}}{2} + \frac{\bar{d_a}}{2}\right)^2$$

Der Fehler wird mit folgender Gleichung berechnet:

$$\Delta I_a = \sqrt{\left(\frac{\partial I_a}{\partial m_a} \cdot \Delta m_a\right)^2 + \left(\frac{\partial I_a}{\partial \bar{d_a}} \cdot \Delta \bar{d_a}\right)^2 + \left(\frac{\partial I_a}{\partial \bar{d_r}} \cdot \Delta \bar{d_r}\right)^2}$$

Damit ergibt sich für das neu bestimmte Trägheitsmoment der Arme:

- $I_a = (3{,}5 \pm 0{,}6) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{kg\,m^2}$

Das gesamte Trägheitsmoment für diesen Fall ist damit:

$$I_{ges} = (1{,}33 \pm 0{,}19) \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$$

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 101: Das Trägheitsmoment*. 2017.