

Versuch 353 "Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 24.11.2017, Abgabe: 01.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
3	Durchführung	4
4	Auswertung	6
4.1	Bestimmung der Zeitkonstante über Auf- und Entladungsvorgang	6
4.2	Bestimmung der Zeitkonstante über den Tiefpassvorgang	9
4.3	Bestimmung der Zeitkonstante mit Hilfe der Phasenverschiebung	11
4.4	Integrator	14
5	Diskussion	17
	Literatur	17

1 Einleitung

In diesem Versuch soll Relaxationserscheinungen anhand eines RC-Kreises untersucht werden. Dazu wird die Zeitkonstante von dem RC-Kreis auf verschiedenen Wegen bestimmt.

2 Theorie

Relaxationserscheinungen werden beobachtet wenn ein System nicht-oszillatorisch in seinen Ausgangszustand zurückkehrt, in dem Fall des RC-Kreises exponentiell.

Ein RC-Kreis besteht aus einem Widerstand und einem Kondensator, die in Reihe geschaltet sind. Wenn eine Spannungsquelle an diese Schaltung angeschlossen wird, lädt sich der Kondensator auf. Für diesen Fall lässt sich eine Differentialgleichung herleiten.

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q(t) \quad (1)$$

Mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = 0$ und $Q(\infty) = CU_0$ ergibt sich für den Aufladevorgang:

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \right) \quad (2)$$

Wenn die Spannungsquelle nach der Aufladung entfernt wird, entlädt sich der Kondensator. Es ergibt sich für die Differentialgleichung die selbe wie beim Aufladevorgang, nun sind allerdings die Anfangsbedingungen anders $Q(\infty) = 0$. Daraus ergibt sich dann die Gleichung:

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \quad (3)$$

Die Zeitkonstante des Systems ist RC , denn sie beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich das System seinen Endzustand annähert. Dabei ist R der Widerstand und C die Kapazität des Kondensators.

Für den Fall, dass die Spannungsquelle eine Sinusspannung mit der Frequenz ω ist, ergibt sich eine Phasenverschiebung $\phi(\omega)$ zwischen der Kondensatorspannung und der Spannungsquelle. Diese Phasenverschiebung wird größer, je größer ω wird.

Um eine Gleichung für die Phasenverschiebung herzuleiten, wird zunächst die in Abbildung (1) gezeigte Schaltung mithilfe des Kirchhoffschen Gesetzes beschrieben.

$$U(t) = U_R(t) + U_C(t) \quad (4)$$

Damit ergibt sich die Gleichung:

$$U_0 \cos(\omega t) = -A\omega RC \sin(\omega t + \phi) + \cos(\omega t + \phi) \quad (5)$$

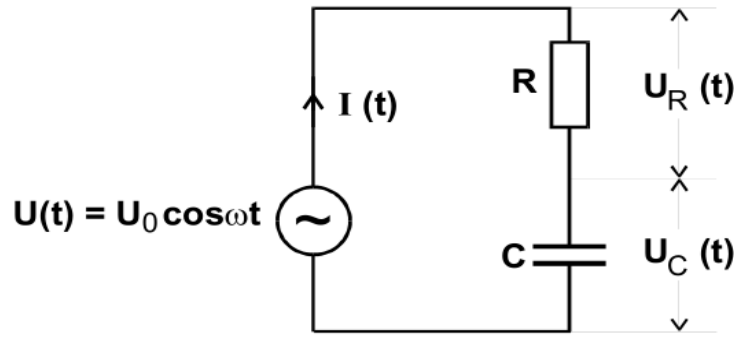


Abbildung 1: Schaltungsbeispiel eines RC-Kreises mit Sinusspannung [1].

Wird der Fall $\omega t = \frac{\pi}{2}$ betrachtet folgt für die Phasenverschiebung:

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (6)$$

Nun soll die Gleichung (5) für den Fall $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$ betrachtet werden. Damit lässt sich eine Gleichung für die Amplitude der Kondensatorspannung herleiten, die auch von der Frequenz der Spannungsquelle abhängt.

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (7)$$

Die Gleichung (4) wird nun mit der Relation $I(t) = C \frac{dU_C}{dt}$ umgeschrieben zu:

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} + U_C(t)$$

Unter der Voraussetzung, dass $\omega \gg \frac{1}{RC}$ ist kann die Gleichung zu einem Integral umgeformt werden:

$$U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' \quad (8)$$

3 Durchführung

Wie bereits erwähnt soll die Zeitkonstante eines RC-Gliedes auf verschiedene Arten bestimmt werden. Zunächst wird die Zeitkonstante RC bestimmt indem ein Entladevorgang des Kondensators gemessen wird. Dabei wird die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit gemessen mithilfe von einem Oszilloskop. Die dafür geeignete Schaltung ist in Abbildung (2) dargestellt. Die Spannungsquelle generiert hierbei eine Rechteckspannung.

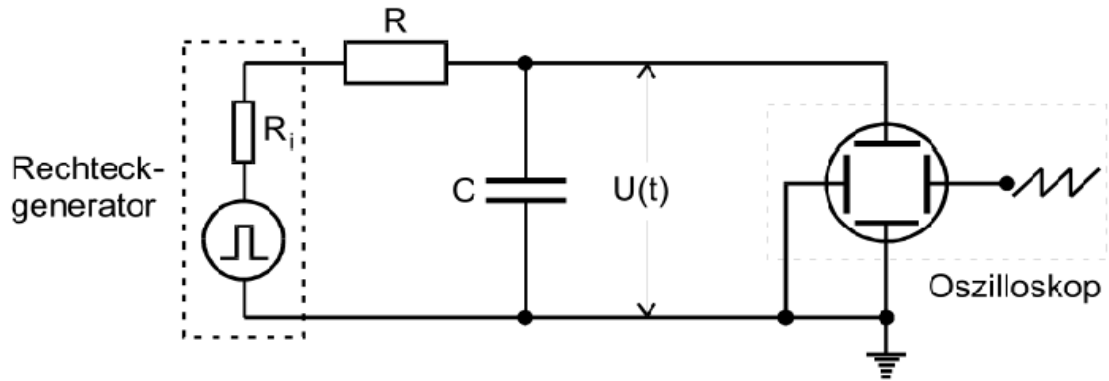


Abbildung 2: Schaltung zur Messung des Entladevorgangs am Kondensator [1].

Bei der zweiten Messreihe wird an dem Generator eine Sinusspannung eingestellt. Daraufhin wird, wieder mithilfe eines Oszilloskopes, die Amplitude der Spannung am Kondensator in Abhängigkeit von der am Generator eingestellten Frequenz gemessen. Für diese Messung wird die in Abbildung(3) gezeigte Schaltung benutzt.

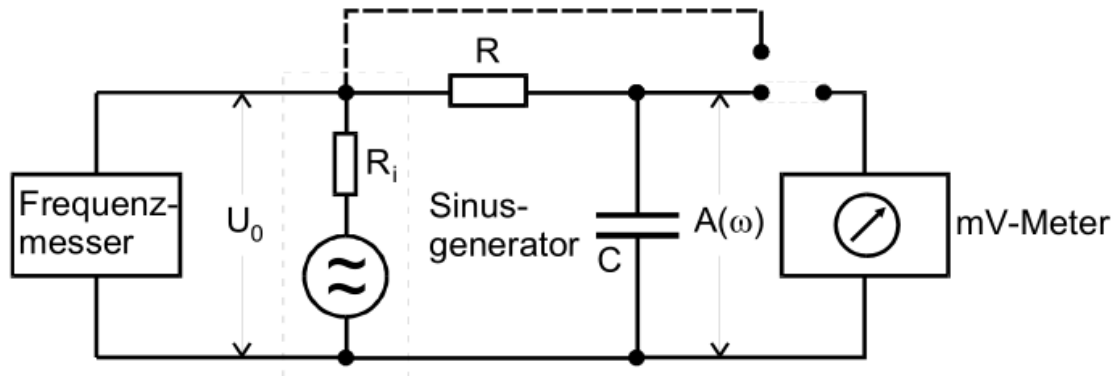


Abbildung 3: Schaltung zur Messung der Amplitude des Kondensators [1].

Nun soll die Phasenverschiebung zwischen der Generatorspannung und der Kondensatorspannung gemessen werden. Dazu wird ein Zweikanal-Oszilloskop benötigt, wo beide Spannungen gleichzeitig angezeigt werden. Bei den beiden Spannungen wird zum einen der zeitliche Abstand der Nulldurchgänge und zum anderen die Periodenlänge der Generatorspannung in Abhängigkeit von der Frequenz der Generatorspannung gemessen. In Abbildung(4) sind diese Größen bildlich dargestellt.

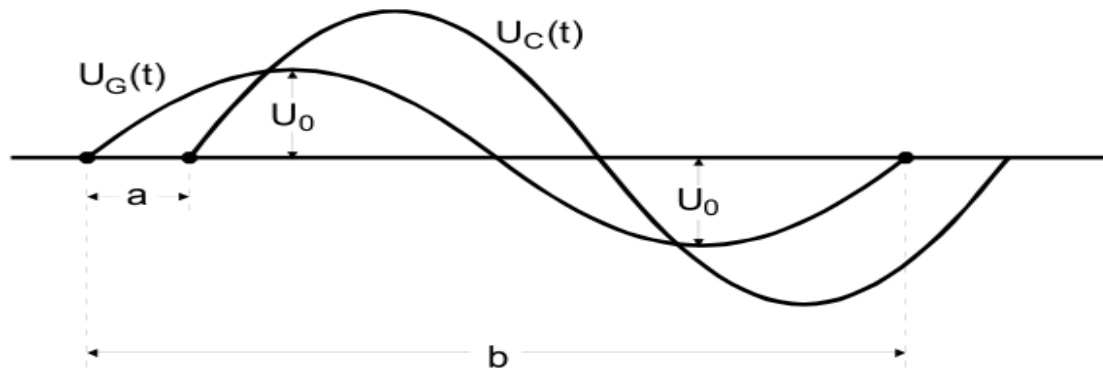


Abbildung 4: Schaltung zur Messung der Phasenverschiebung [1].

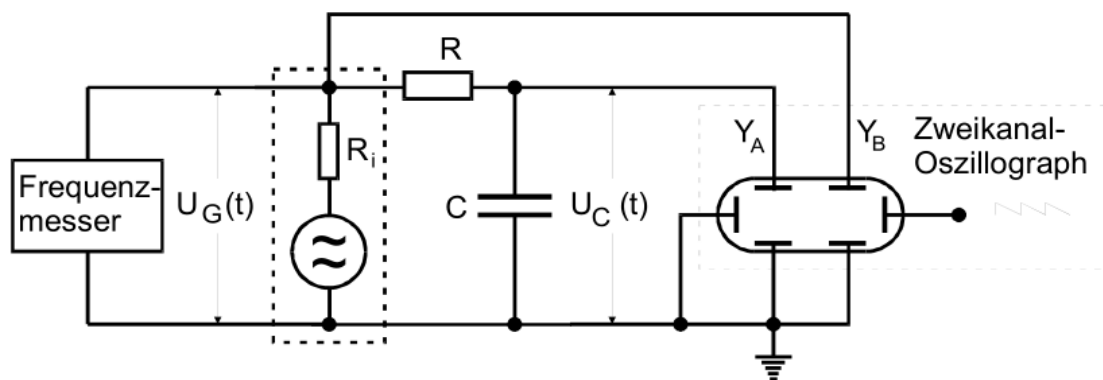


Abbildung 5: Bildliche Darstellung der Messgrößen [1].

Als letztes soll eine Integration dargestellt werden. Dazu wird auch die Schaltung benutzt, die in Abbildung (5) dargestellt ist. In diesem Fall werden der Reihe nach Rechteck-, Sinus- und Dreiecksspannungen bei dem Generator eingestellt, auf dem Oszilloskop dargestellt und in Form von Thermodrücken gespeichert.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung der Zeitkonstante über Auf- und Entladungsvorgang

Zur Bestimmung der Zeitkonstante RC werden die Messdaten wie in Tabelle(1) in ein Diagramm (6) dargestellt und mit Hilfe einer linearen Ausgleichsrechnung berechnet.

Tabelle 1: Tabelle zur Bestimmung der Zeitkonstante mit $U_0 = 10V$

U_c/V	$\ln(\frac{U_c}{U_0})$	t/ms
10,0	-0,000	0,00
9,04	-0,100	0,10
8,48	-0,165	0,16
7,84	-0,243	0,24
7,12	-0,340	0,34
6,80	-0,386	0,40
6,16	-0,485	0,50
5,36	-0,624	0,66
4,88	-0,717	0,78
4,32	-0,839	0,96
3,76	-0,978	1,14
3,52	-1,044	1,24
3,28	-1,115	1,36
3,04	-1,191	1,50
2,72	-1,302	1,80
2,48	-1,394	2,06
2,32	-1,461	2,28
2,24	-1,496	2,50
2,16	-1,532	2,76
2,08	-1,570	3,00
2,08	-1,570	3,22
2,00	-1,609	3,38
2,00	-1,609	3,56
2,00	-1,609	3,86
2,00	-1,609	4,06
2,00	-1,609	4,30
2,00	-1,609	4,46
2,00	-1,609	4,48
2,00	-1,609	4,52

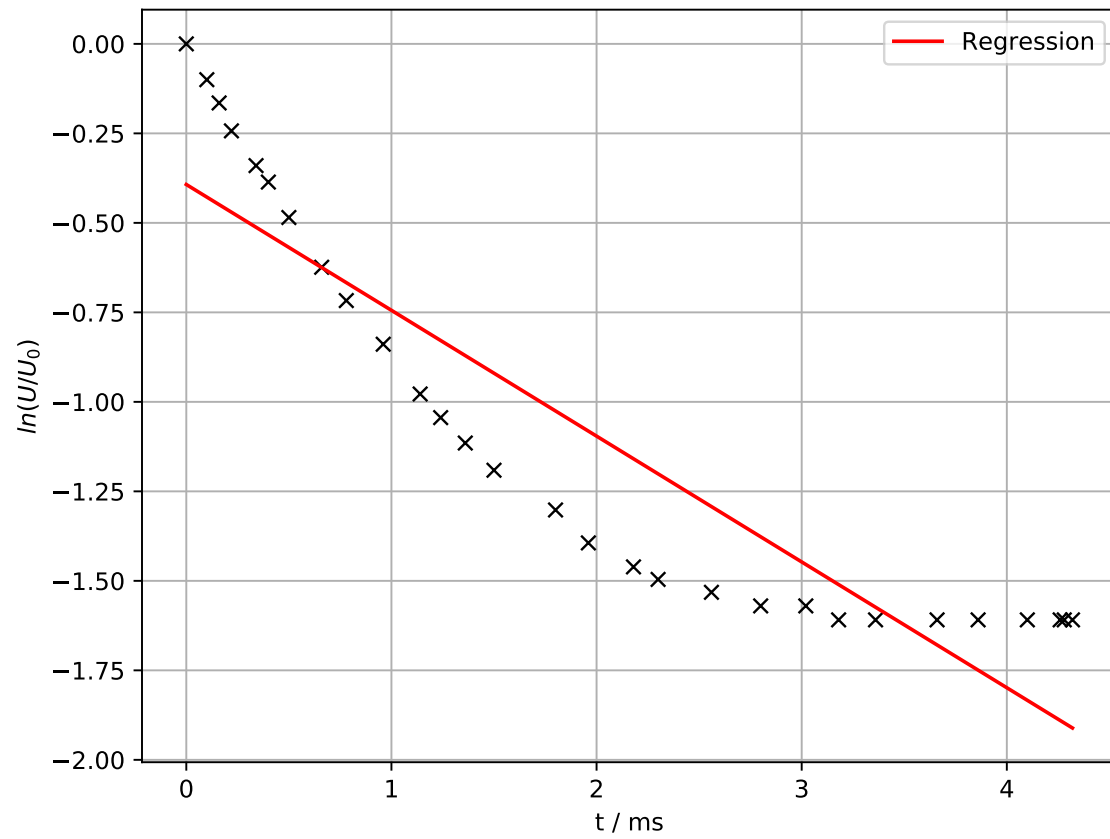


Abbildung 6: Diagrammdarstellung vom Entladungsvorgang

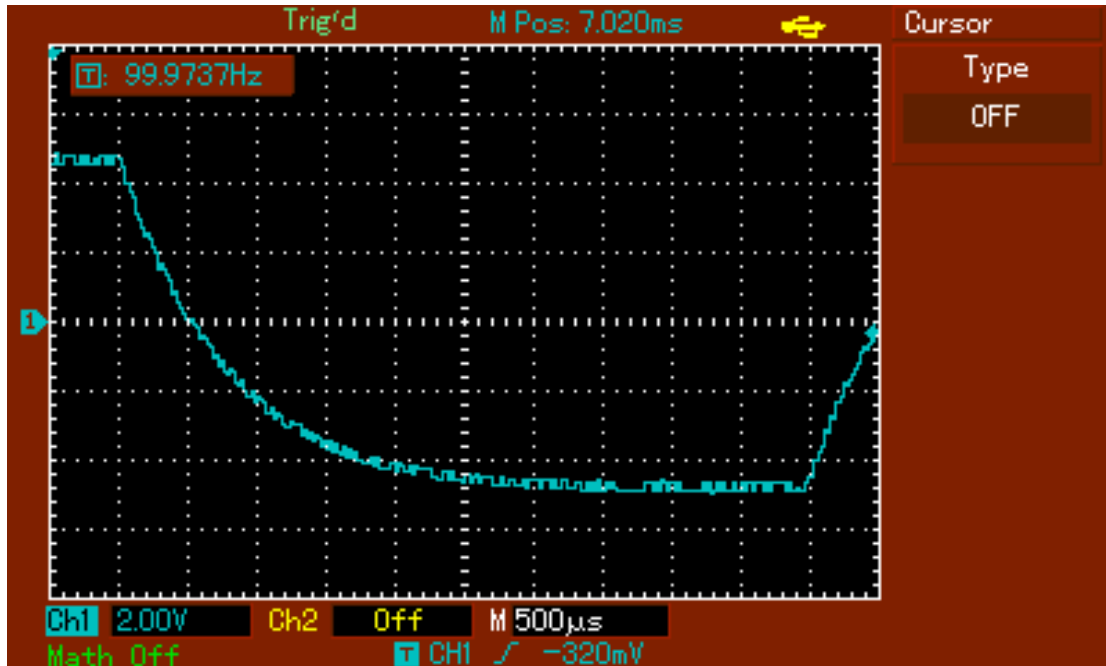


Abbildung 7: Thermodruck vom Entladungsvorgang

Die Ausgleichsrechnung allgemein lautet:

$$y = m \cdot x + b \quad (9)$$

$$m = \frac{\bar{x}\bar{y} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (10)$$

$$b = \frac{\bar{y} \cdot \bar{x}^2 - \bar{x}\bar{y} \cdot \bar{x}}{\bar{x}^2 - \bar{x}^2} \quad (11)$$

Für diese Ausgleichsrechnung wird die Formel (1) umgeschrieben und die errechneten Werte lauten:

$$\ln\left(\frac{U_c}{U_0}\right) = -\frac{1}{m} + b$$

$$\text{mit } m = (2,845 \pm 0,245) \cdot 10^{-3}\text{s}$$

$$\text{und } b = (-0,393 \pm 0,074)$$

Dabei ist m die Zeitkonstante RC .

4.2 Bestimmung der Zeitkonstante über den Tiefpassvorgang

Dabei wird die normierte Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz wie in der Tabelle(2) in einen Diagramm dargestellt.

Tabelle 2: Tabelle von der Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz mit $U_0 = 4,48V$

$\frac{A(\omega)}{U_0}$	ω in Hz
1.000	10
1.000	20
1.000	30
0.982	40
0.982	50
0.964	60
0.946	70
0.929	80
0.929	90
0.893	100
0.732	200
0.589	300
0.482	400
0.393	500
0.339	600
0.301	700
0.268	800
0.250	900
0.214	1000
0.100	2000
0.066	3000
0.050	4000
0.040	5000
0.034	6000
0.028	7000
0.025	8000
0.022	9000
0.020	10000

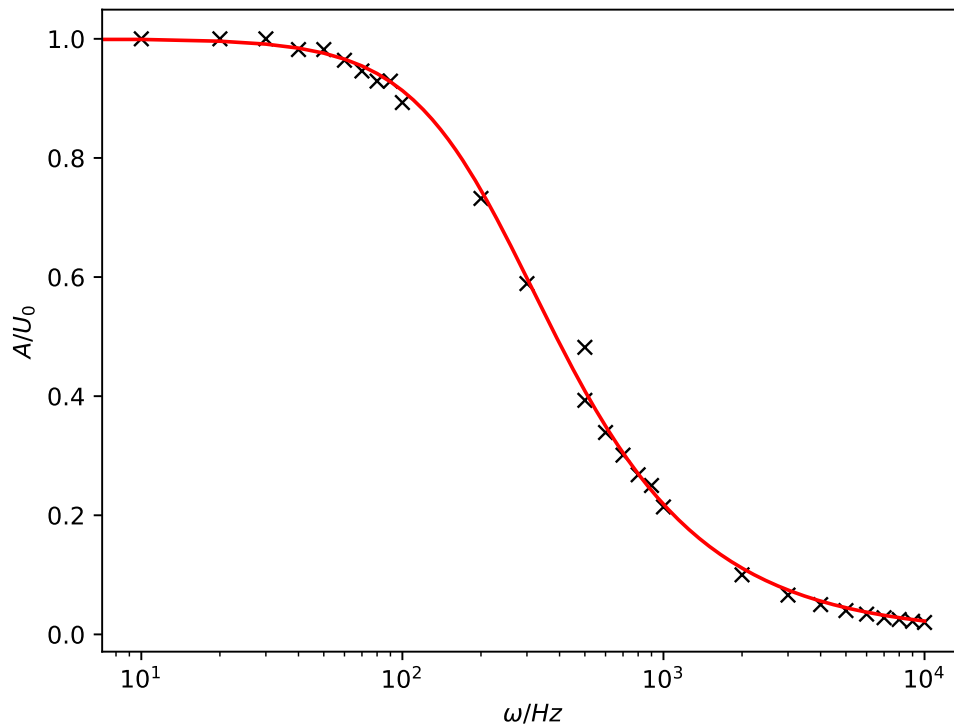


Abbildung 8: Diagrammdarstellung von der relativen Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz

Für die nicht-lineare Ausgleichsrechnung wird die Gleichung (7) verwendet.

$$\frac{A}{U_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega m)^2}}$$

$$\text{mit } m = (4,46 \pm 0.07) \cdot 10^{-3} \text{s}$$

Wie vorhin ist m die Zeitkonstante RC

4.3 Bestimmung der Zeitkonstante mit Hilfe der Phasenverschiebung

Es werden die Daten von der Tabelle(3) in einen Diagramm dargestellt und mit Hilfe einer nicht-linearen Ausgleichsrechnung die Zeitkonstante bestimmt.

Tabelle 3: Tabelle zur Bestimmung der Zeitkonstante mit $\phi = \frac{a}{b} \cdot 2\pi$

ϕ/rad	ω/Hz
0.0000	10
0.0524	20
0.1070	30
0.2010	40
0.2821	50
0.3662	60
0.4057	70
0.4263	80
0.4755	90
0.4547	100
0.7333	200
1.0189	300
1.1058	400
1.1812	500
1.3165	600
1.1600	700
1.5281	800
1.3246	900
1.3320	1000
1.4828	2000
1.5232	3000
1.5582	4000
1.5564	5000
1.5746	6000
1.4060	7000
1.5404	8000
1.5850	9000
1.4828	10000

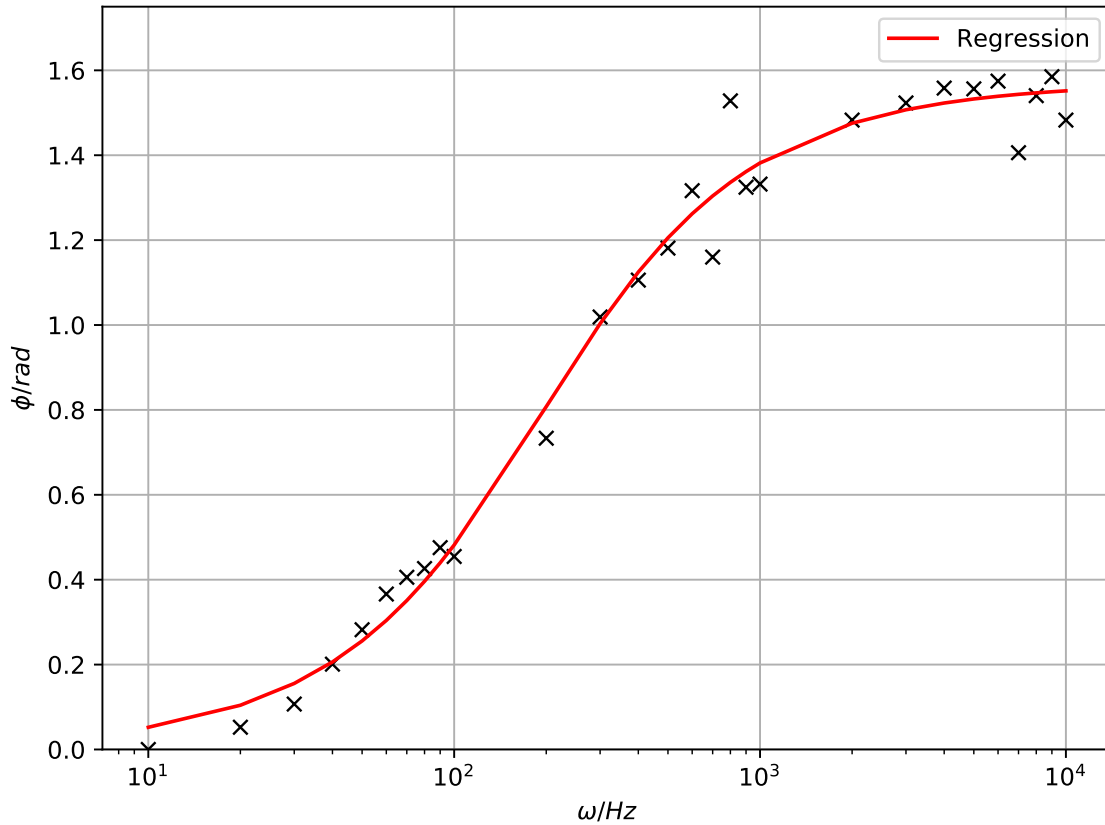


Abbildung 9: Diagrammdarstellung von der Phasenverschiebung in Abhängigkeit von der Frequenz

Dabei wird die Gleichung (6) verwendet und umgeschrieben:

$$\phi = \arctan(m * \omega)$$

Dabei ist $m = (5,228 \pm 0,259) \cdot 10^{-3} \text{s}$

Wie auch hier ist m die Zeitkonstante RC .

Nun wird die relative Amplitude in Abhängigkeit der Phase in einen Polarkoordinaten aufgetragen.

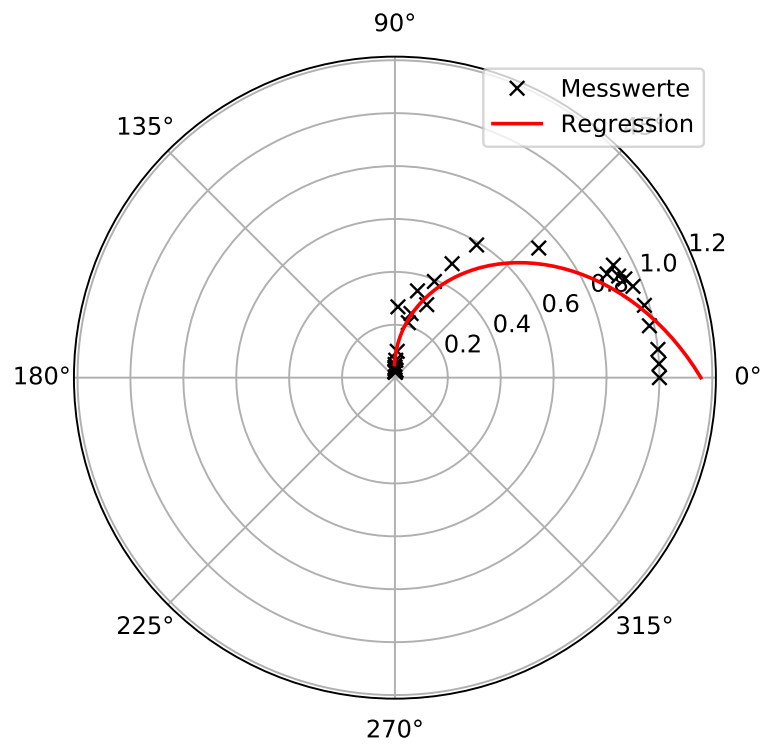


Abbildung 10: Polarkoordinatendarstellung

4.4 Integrator

In diesem Fall wird die Gleichung (8) verwendet.

1.Fall Sinusspannung

$$f(x) = A * \sin(x) \rightarrow F(x) = -A * \cos(x)$$

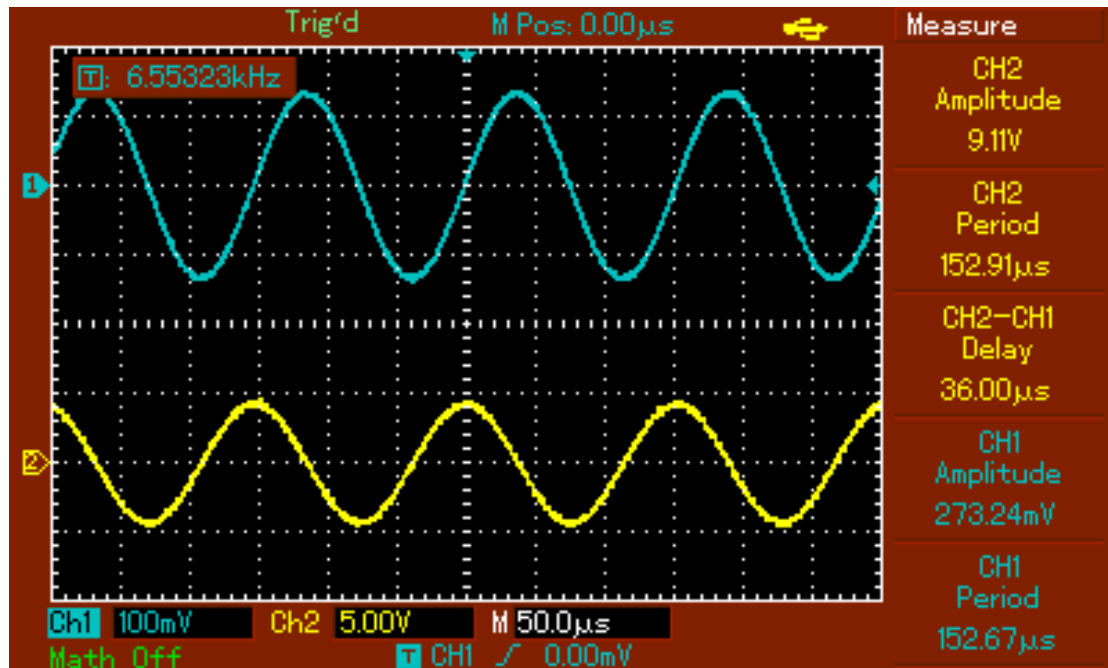


Abbildung 11: Thermodruck von der Sinusspannung

Auf dem Thermodruck zeigt, dass die Integration über die Funktion $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$ ergibt.

2. Fall Dreiecksspannung

$$f_1(x) = c \cdot x \text{ für } -a \leq x \leq a$$

$$f_2(x) = -c \cdot x \text{ für } a \leq x \leq 3a$$

Die Integrationen für diese Funktion $f(x)$ lauten:

$$F_1(x) = \frac{c}{2} \cdot x^2 \text{ für } -a \leq x \leq a$$

$$F_2(x) = -\frac{c}{2} \cdot x^2 \text{ für } a \leq x \leq 3a$$

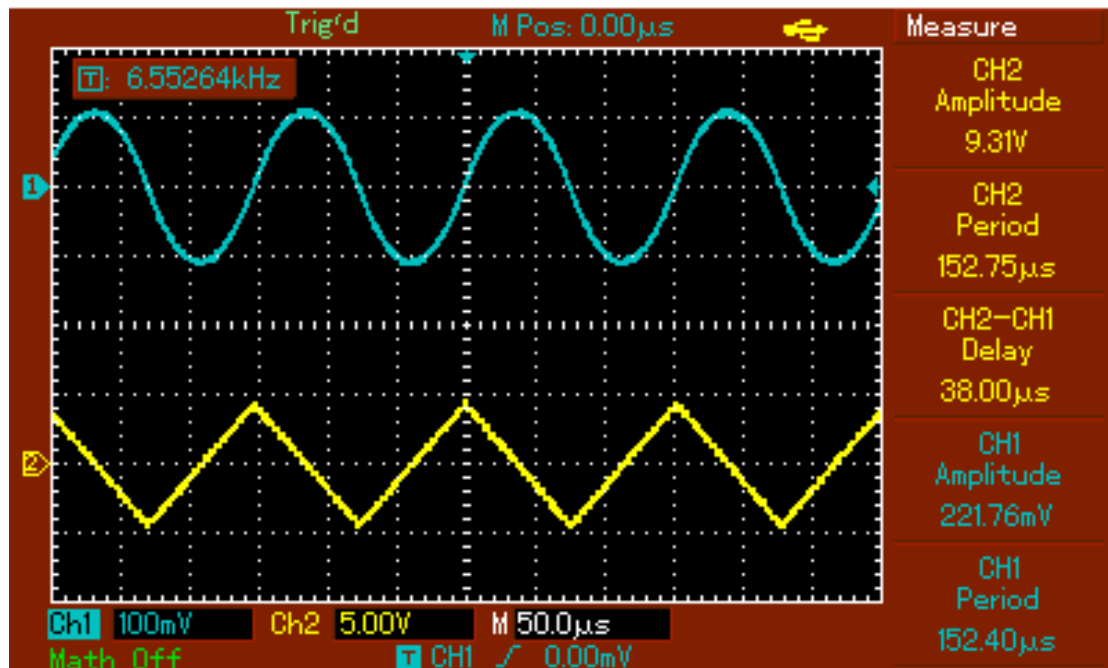


Abbildung 12: Thermodruck von der Dreiecksspannung

Der Thermodruck zeigt auch hier das die Funktion $f(x)$ die Stammfunktion $F(x)$ ergibt.

3.Fall Rechtecksspannung

$$f_1(x) = c \text{ für } 0 \leq x \leq a$$

$$f_2(x) = -c \text{ für } a \leq x \leq 2a$$

Durch Integration über die Funktion $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ergibt sich:

$$F_1(x) = c \cdot x \text{ für } 0 \leq x \leq a$$

$$F_2(x) = -c \cdot x \text{ für } a \leq x \leq 2a$$

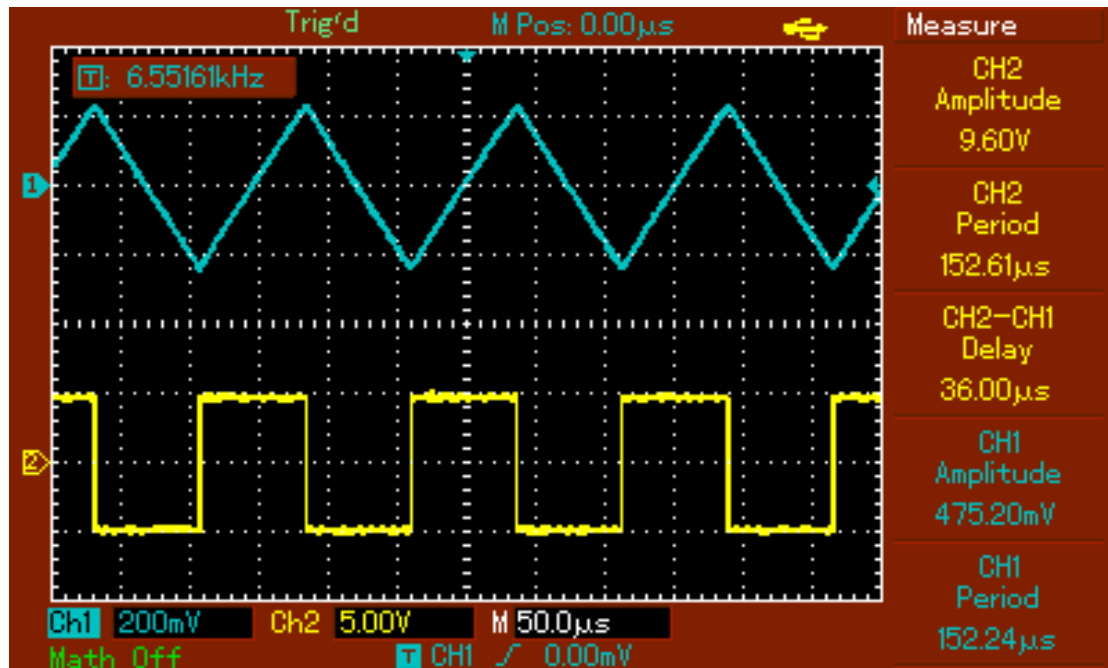


Abbildung 13: Thermodruck von der Rechteckspannung

5 Diskussion

Unsere Zeitkonstante RC weicht bei den unterschiedlichen Messmethoden voneinander ab. In diesem Fall handelt es sich hier um ein systematischen Fehler. Ein möglicher Grund für die Abweichung ist, dass bei der ersten Messmethode am Ende des Entladevorgangs fünf Mal der selben Wert aufgeschrieben wurde. Das könnte daran liegen, dass die Schaltung oder das Oszilloskop nicht einwandfrei funktioniert haben, wodurch das Ende des Entladevorgangs nicht mehr genau gemessen werden konnte. Ein weiterer möglicher Grund ist, dass bei den Messmethoden der innen Widerstand des Oszilloskops vernachlässigt worden ist, was zu falschen Werten geführt haben könnte.

Literatur

- [1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises*. 2017.