Versuch 351 ”Fourier-Analyse und Synthese”

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 08.12.2017, Abgabe: 15.12.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

In der Physik sind periodische Vorgänge sehr wichtig. Es lassen sich fast alle periodische Vorgänge, die in der Natur vorkommen, beschreiben durch das Fouriersche Theorem. Dieses Theorem besagt, dass die in Gleichung (1) gezeigte Reihe eine beliebige periodische Funktion darstellt, falls sie gleichmäßig konvergiert.

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right) \right) \tag{1}$$

Die Koeffizienten a_n und b_n können mit der folgenden Formel bestimmt werden:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\, \mathrm{d}t \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi n}{T} t\right)\, \mathrm{d}t \tag{2}$$

Bei der Bestimmung der Amplituden ist es wichtig ob die zu beschreibende Funktion gerade oder ungerade ist. Ist die Funktion gerade, also ist $f(t) = f(-t)$, dann sind alle $b_n = 0$. Falls die Funktion ungerade ist, also $f(t) = -f(-t)$ gilt, sind alle $a_n = 0$. Oberschwingungen werden die einzelnen Komponenten der Fourierreihe genannt. Die erste Oberschwingung, also für $n = 1$ hat die Frequenz der beschriebenen Funktion. Die nachfolgenden Oberschwingungen sind ganzzahlige Vielfache von der Grundfrequenz. Bei den Sinus und Cosinus Funktionen in der Fourier-Reihe ist es wichtig, dass nur Phasenverschiebungen von entweder $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ oder $\frac{3\pi}{2}$ vorkommen.
Eine Anforderung an die Funktion ist, dass sie stetig ist aber sie muss nicht unbedingt differenzierbar sein. Falls die Funktion an einer Stelle nicht stetig ist, wie zum Beispiel eine Rechteckspannung, dann wird an dieser Stelle immer eine gleich große Abweichung sein, wenn sie duch eine Fourier-Reihe beschrieben wird.

Das gesamte Frequenzspektrum einer Funktion, die nicht periodisch sein muss, kann durch eine Fourier-Transformation ermittelt werden. Die Formel für diese Transformation ist in Gleichung (3) dargestellt.

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t)\, \mathrm{d}t \tag{3}$$

Für eine periodische Funktion ergibt sich mit dieser Gleichung eine Reihe von -Funktionen, also ein Linienspektrum. In Abbildung (1) ist ein solches Linienspektrum abgebildet. Da in Realität nicht unendlich lange gemessen werden kann, ergeben sich, anstatt -Funktionen, ein Linienspektrum mit endlicher Breite. Bei nicht periodischen Funktionen ergibt sich ein kontinuierliches Spektrum.

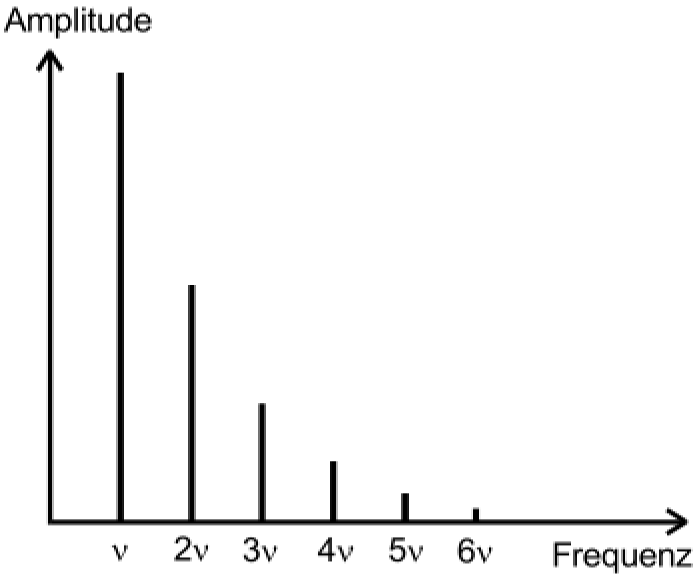


Abbildung 1: Darstellung eines Linienspektrums einer periodischen Funktion [1].

2 Durchführung

2.1 Fourier-Analyse

Bei diesem Teil des Versuches sollen die Amplituden der einzelnen Oberwellen von drei verschiedenen Spannungen bestimmt werden. Diese drei Spannungen sind eine Rechteckspannung, eine Dreieckspannung und eine Sägezahnspannung.

Diese verschiedenen Spannungen werden von einem Funktionsgenerator erzeugt. Die erzeugte Spannung wird auf ein Oszilloskop übertragen, in dem ein Analog-Digital-Konverter und ein Rechner für eine Fourier-Transformation verbaut sind. Damit lässt sich die Spannung und das Frequenzsprektrum gleichzeitig auf dem Oszilloskop anzeigen. Der Analog-Digital-Konverter besitzt eine sogenannte Abtastfrequenz, da er nur in endlichen Abständen die Spannung messen kann. Aus diesem Grund muss die Frequenz der Spannung viel kleiner sein als die Abtastfrequenz. Es muss viel kleiner sein, da diese Vorraussetzung auch für die Frequenzen der zu messenden Oberwellen gelten muss, die eine größere Frequenz als die Spannung haben. Bei den verwendeten Apparaturen sind diese Vorraussetzungen allerdings immer gegeben und müssen bei der Durchführung nicht berücksichtigt werden.
Nun werden die einzelnen Amplituden der Oberwellen auf dem Oszilloskop dargestellt und können mithilfe von dem Cursor abgelesen werden.

2.2 Fourier-Synthese

Der zweite Teil des Versuches besteht daraus, dass aus einzelnen Oberwellen die drei oben genannten Spannungen zusammengesetzt werden sollen. Dazu müssen vorher die Koeffizienten a_n und b_n für die verschiedenen Schwingungen theoretisch bestimmt werden. Die Rechnungen dazu sind in der Auswertung angegeben.
Es wird ein Signalgenerator, der Sinusschwingungen erzeugt, für diesen Teil verwendet. Der Generator kann bis zu 9 Sinusschwingungen, mit verschiedenen Amplituden und Phasen erzeugen.
Als erstes müssen die verschiedenen Sinusschwingungen in Phase gebracht werden. Dazu wird immer die erste Spannung und der Reihe nach die folgenden Spannungen auf dem Oszilloskop, im XY-Betrieb, dargestellt. Auf dem Oszilloskop lassen sich nun Lissajous-Figuren beobachten, die in Abhängigkeit von der Phasenverschiebung anders aussehen. In Abbildung (2) sind zwei Beispiele gezeigt. Mithilfe der Lissajous-Figuren, werden die einzelnen Sinusspannungen in Phase gebracht. Besteht die zusammengesetzte Schwingung aus Cosinusschwingungen ist zu beachten, dass $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ gilt.

Abbildung 2: Lissajous-Figuren von zwei Cosinusschwingungen mit dem Frequenzverhältnis 1:3, links Phase $\phi = 0$, rechts Phase $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ [1].

Nun müssen noch die Amplituden der einzelnen Sinusschwingungen jeweils für die darzustellende Spannung eingestellt werden. Die Amplituden werden mit einem Millivoltmeter bestimmt. Es wird die Amplitude von der ersten Spannung ermittelt und die anderen Spannungen werden, im Verhältnis zur ersten Spannung so eingestellt, wie es in der theoretischen Rechnung für die jeweiligen Spannungen ermittelt wurde.
Zum Schluss werden die korrekt eingestellten Sinusspannungen durch den Ausgang für die Summenschwingung auf dem Oszilloskop sichtbar gemacht. Es werden nach und nach mehr Spannungen hinzugeschalt und bei jeder zugeschalteten Spannung wird ein Thermodruck angefertigt.

3 Auswertung

3.1 Fourier-Analyse

Zunächst wird mit der Gleichung (2) die Amplituden für die unterschiedlichen Schwingungsformen bestimmt.

Rechteckspannung

Die Funtkion ist ungerade, damit fällt bei der Gleichung (1) a_n weg. Somit kann für die Berechnung der Amplitude die Form b_n nehmen.

$$\text{Für } f(t) \text{ gilt:} \begin{cases} A \,\text{für}\, 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -A \,\text{für}\, -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Damit ist

$$b_n = -\frac{2}{T}[(-A\int_{-\frac{T}{2}}^{0} sin(\frac{2\pi nt}{T})dt) + (A\int_{0}^{\frac{T}{2}} sin(\frac{2\pi nt}{T})dt))]$$
$$\implies b_n = \frac{2A}{T}(\frac{T}{2\pi n}(1 - cos(\pi))$$
$$\implies b_n = \frac{2A}{\pi n}(1 - (-1)^n)$$

Nun folgt, dass für

$$\text{n} \begin{cases} gerade \implies b_n = 0 \\ ungerade \implies b_n = \frac{4A}{\pi n} \end{cases}$$

Somit lautet die Funktion $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi(2n-1)} \cdot sin(\frac{2\pi}{T} \cdot (2n-1)t)$.

Anzahl	A_{mess}/V	A_{theo}/V	$Abweichung/\%$
1	1070	1070	0
2	656	681	3,67
3	440	454	3,08
4	320	340	5,88
5	288	272	5.88
6	252	227	11,01
7	208	194	7,22
8	160	170	5,88
9	158	151	4,64

Tabelle 1: Darstellung der Messergebnisse zur Rechteckspannung

Beispielrechnung zum ersten Messwert: $b_1 = 1070 \implies A = \frac{b_1 \overset{n=1}{\hat{n}} \pi}{4} = 840$

Dreieckspannung

Die Funktion ist gerade $\implies b_n = 0$ Somit kann für die Berechnung der Amplitude die Form a_n nehmen.

$$f(t) = A \cdot |t| - B \text{ für } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

Zur Berechnung des Integrals wird zunächst das das Intervall von $[0, \frac{T}{2}]$

$$a_n = -\frac{2}{T}(A\int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot cos(\frac{2\pi nt}{T})dt)$$
$$\implies a_n = \frac{AT}{\pi^2 n^2} \cdot cos(\frac{2\pi nt}{T})\Big|_0^{\frac{T}{2}}$$
$$\implies a_n = \frac{AT}{\pi^2 n^2} \cdot (cos(\pi n) - 1)$$

Nun folgt, dass für

$$\text{n}\begin{cases} gerade \implies a_n = 0 \\ ungerade \implies a_n = -\frac{AT}{\pi^2 n^2} \end{cases}$$

Für $-\frac{T}{2} \leq t \leq 0$ liefert das Ergbnis gibt die selbe Lösung wie vorhin ausgerechnet $a_n = \frac{AT}{\pi^2 n^2} \cdot (cos(\pi n) - 1)$ Somit lautet die Funktion $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2AT}{\pi^2 (2n-1)^2} \cdot cos(\frac{2\pi}{T} \cdot (2n-1)t)$.

Anzahl	A_{mess}/V	A_{theo}/V	$Abweichung/\%$
1	1860	1860	0
2	216	465	53,55
3	80	207	61,35
4	40	116	65,52
5	24	74	67,57
6	16,8	52	69,08
7	12	37	67,57
8	8,2	29	71,72
9	6,1	23	73,48

Tabelle 2: Darstellung der Messergebnisse zur Dreieckspannung

Beispielrechnung zum ersten Messwert: $a_1 = 1860 \implies A = \frac{a_1 \overbrace{n^2}^{n=1} \pi^2}{2} = 9178$

Sägezahnspannung

Die Funtkion ist ungerade $\implies a_n = 0$. Somit kann für die Berechnung der Amplitude die Form b_n nehmen.

$$f(t) = A \cdot t, \ \ t \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$$

Damit ist

$$b_n = -\frac{2}{T}[(A\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \cdot sin(\frac{2\pi nt}{T})dt)]$$

$$\implies b_n = \frac{A}{\pi n}[(-\frac{Tt}{2\pi n} \cdot cos(\frac{2\pi nt}{T})|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{T}{2\pi n} sin(\frac{2\pi nt}{T})dt)$$

$$\implies b_n = -\frac{AT}{\pi n} \cdot cos(\pi n) = \frac{AT}{\pi n} \cdot (-1)^{n+1}$$

Nun folgt, dass für

$$\text{n}\begin{cases} gerade \implies b_n = -\frac{AT}{\pi n} \\ ungerade \implies b_n = \frac{AT}{\pi n} \end{cases}$$

Somit lautet die Funktion $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{AT}{\pi n}(-1)^{n+1} \cdot sin(\frac{2\pi}{T})$.

Anzahl	A_{mess}/V	A_{theo}/V	$Abweichung/\%$
1	1520	1520	0
2	808	760	6,32
3	536	506	5,93
4	356	380	6,32
5	328	303	8,25
6	260	253	2,77
7	220	217	1,38
8	204	190	7,37
9	160	169	5,33

Tabelle 3: Darstellung der Messergebnisse zur Sägezahnspannung

Beispielrechnung zum ersten Messwert: $a_1 = 1520 \implies A = a_1 \overset{n=1}{\widehat{n}} \pi = 4775$

Die Abweichung in den Tabellen(1),(2) und (3) sind mit der Formel:

$$\sigma = \left|\frac{A_{theo} - A_{mess}}{A_{theo}}\right| \cdot 100$$

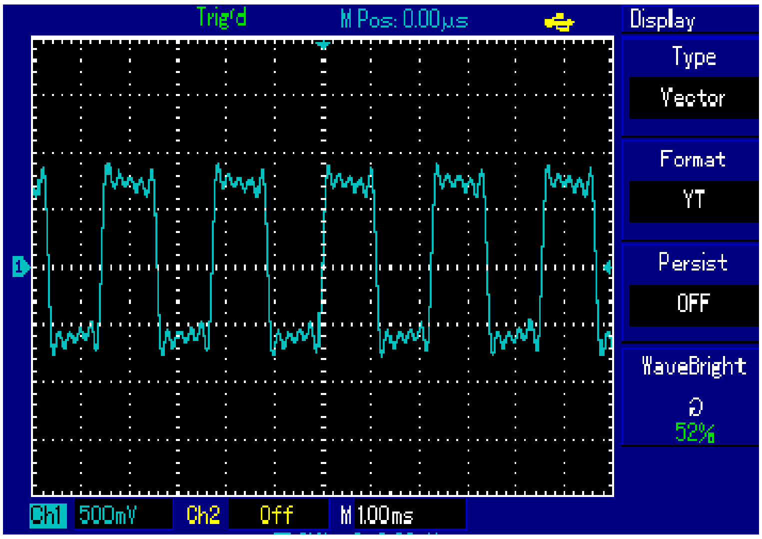
3.2 Fourier-Synthese

Es werden die 3 Schwingungsformen (Rechteckspannung, Dreieckspannung, Sägezahnspannung) untersucht. Die Amplituden werden in der Tabellen(4),(5) und (6) dargestellt und die dazugehörige Bildschirmfotos präsentiert.

Rechteckspannung

Anzahl	b_n / V
1	0,6204
3	0,2068
5	0,1240
7	0,0886
9	0,0689

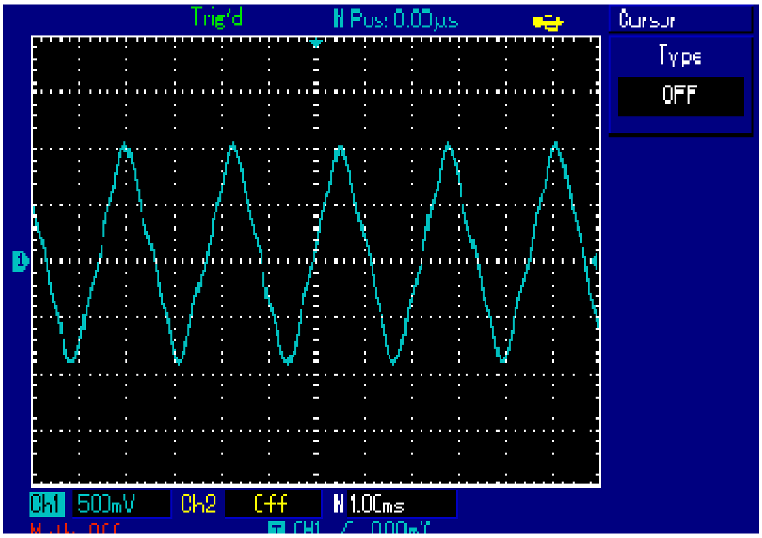
Tabelle 4: Darstellung der Amplitude zur Rechteckspannung



Dreieckspannung

Anzahl	a_n / V
1	0,6204
3	0,0689
5	0,0248
7	0,0126
9	0,00076

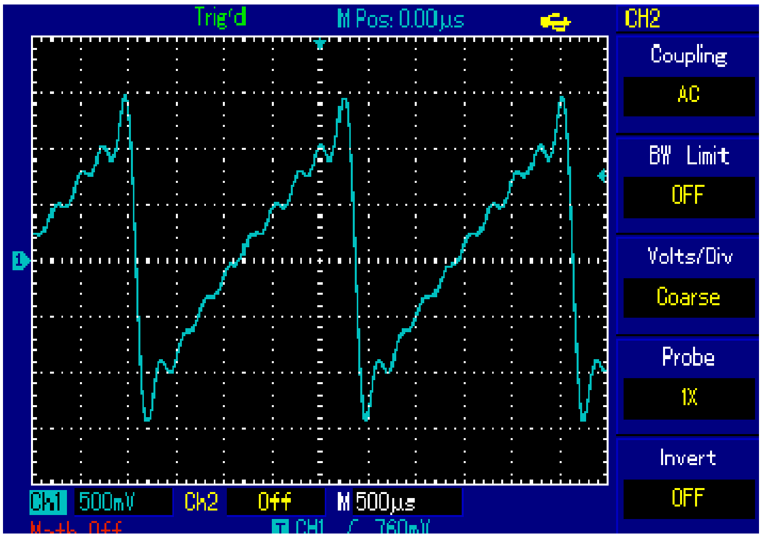
Tabelle 5: Darstellung der Amplitude zur Dreieckspannung



Sägezahnspannung

Anzahl	b_n / V
1	0,6204
2	0,3102
3	0,2068
4	0,1551
5	0,1240
6	0,1034
7	0,0886
8	0,0775
9	0,0689

Tabelle 6: Darstellung der Amplitude zur Sägezahnspannung



4 Diskussion

Bei der Anaylse liegen die Werte im Toleranzbereich bis auf die Dreieckspannung. Die Abweichung liegen über 60%.

Literatur

[1] TU Dortmund. *Anleitung zum Versuch 351: Fourier-Analyse und Synthese*. 2017.