Versuch 103 "Biegung elastischer Stäbe"

Robert Konradi
robert.konradi@tu-dortmund.de

Lauritz Klünder
lauritz.kluender@tu-dortmund.de

Durchführung: 10.11.2017, Abgabe: 17.11.2017

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Gestalt- und Volumenveränderungen treten dann auf, wenn Kräfte an der Oberfläche eines Körpers angreifen. Die Kräfte auf eine Flächeeinheit bezeichnet die Physik als Spannung. Die Senkrechtekomponente zur Oberfläche heißt Normalspannung σ oder Druck. Die parallele Komponente zur Oberfläche heißt Tangential oder Schubspannung. Das Hookesche Gesetz bezeichnet einen linearen Zusammenhang zwischen Deformation von der relativen Änderung $\frac{\delta L}{L}$ und der Spannung σ (s. Abbildung 1)
Der Proportionalitätsfaktor E wird als Elastizitätsmodul bezeichnet. In der Technik ist

$$\sigma = E \frac{\Delta L}{L} \quad .$$

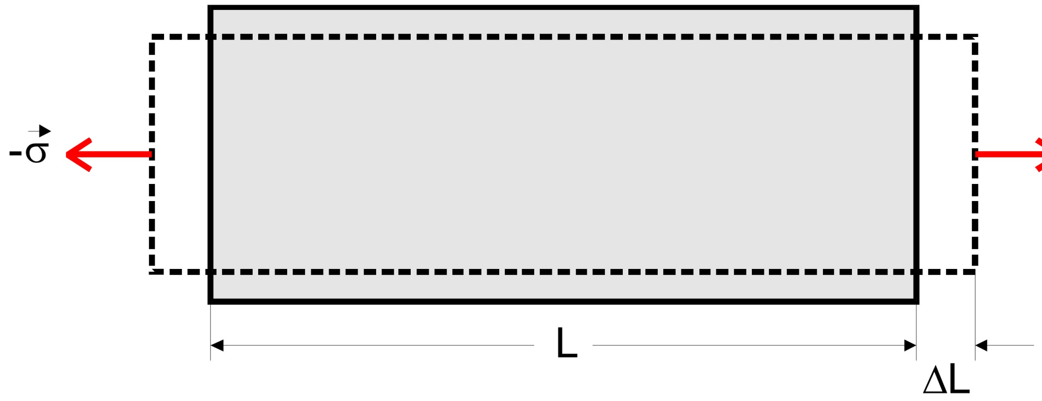


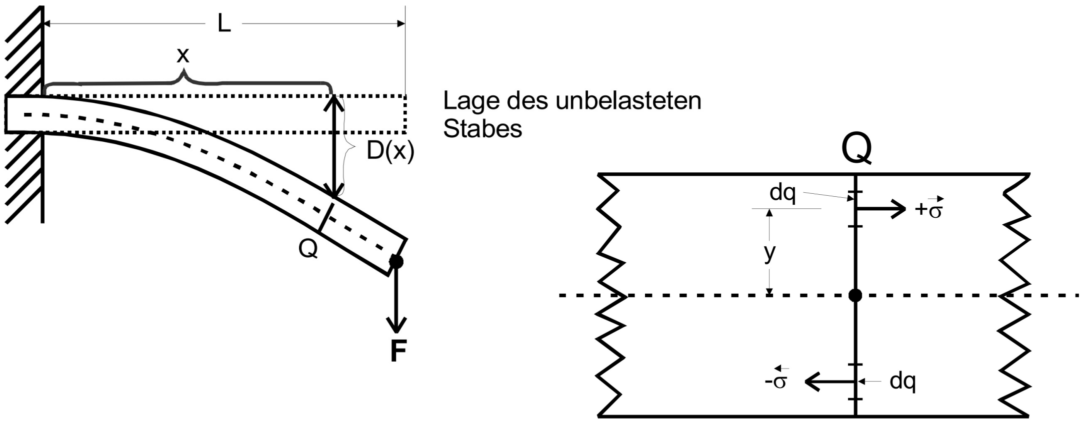
Abbildung 1: Dehung einer Probe unter Einfluss einer Normalspannung

das Modul eine wichtige Eigenschaft zur Bestimmung verschiedener Materialien. Durch kleine Längenänderung, wie in Abb.1, kann das Elastizitätsmodul aus Dehnung oder Stauchung eines Körpers auch bestimmt werden.

1.1 Biegung bei einseitiger Einspannung

Eine Kraft wirkt auf ein Körper und wird dabei gebogen, sowie in Abb.2 (a) dargestellt ist, dabei ist D(x) die Durchbiegung eines Oberflächenpunktes, die verschoben ist, um die Stelle x zwischen belastetem und unbelastetem Zustand. In der Abb.2 (a) kann eine Drehmomentgleichung aufstellen werden, um die Funktion D(x) zu bestimmen.

Eine Kraft übt senkrecht zur Stabachse zur stehenden Querschnittfläche Q ein Drehmoment M_f von seiner Ruhelage in vertikaler Richtung aus. Ebenso durch die Einspannung des Körpers ist seine obere Schicht gedehnt und die untere Schicht gestaucht. Die Fläche zwischen den beiden Schichten bezeichnet man als neutrale Faser (s. Abb.3(b)). Zwischen der Zugspannung, was die obere Schicht ist, und der Druckspannung, was die untere Schicht ist, bewirken ein Drehmoment M_σ. Da nun die beiden Drehmomente



(a) Darstellung 1

(b) Darstellung 2

Abbildung 2: Schematische Darstellung bei einseiter Einspannung, Abbildung(b): Schematische Darstellung des Drehmoments M_σ

übereinstimmen müssen, sind die gleich:

$$M_\mathrm{f} = M_\sigma \tag{1}$$

Mit $M_\mathrm{f} = F \cdot (L - x)$ und $M_\sigma = \int_Q y\sigma(y)dq$
Die Normalspannung lässt sich mithilfe Hookeschen Gesetz berechnen.

$$\sigma(y) = E\frac{\partial x}{\Delta x} \tag{2}$$

In Abb 3. lässt sich eine weitere Beziehung zur Bestimmung der Normalspannung

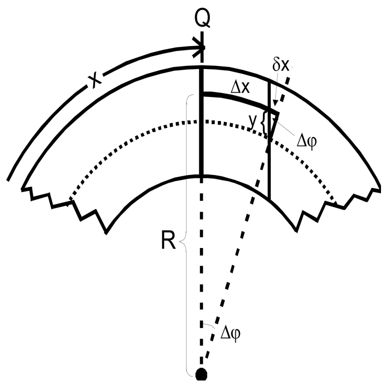


Abbildung 3: Skizze zur Berechnung der Normalspannung

herleiten.

$$\sigma(y) = E \cdot y \cdot \frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} \tag{3}$$

Eingesetzt in die Gleichung (1) haben wir folgenden Ausdruck

$$E \cdot \frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}x^2} \cdot \int_Q y^2 dq = F \cdot (L - x) \tag{4}$$

Dabei ist $I = \int_Q y^2 dq$ das Flächenträgheitsmoment.
Durch Integration erhält die Durchbiegung D(x) folgende Darstellung:

$$D(x) = \frac{F}{2EI}(L \cdot x^2 - \frac{x^3}{3}) \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq L \tag{5}$$

die Integrationskonstante fällt weg, da an D(0)=0 ist.

1.2 Biegung bei einer beidseitige Einspannung

Ein Stab an denen beiden Enden festgehalten wird und eine Kraft in der Stabmitte angreift, wie in Abb 5. zu sehen ist, lässt sich ebenfalls das Elastizitätsmodul errechnet. Die Kraft F/2 greift mit dem Hebelarm x an der Querschnittsfläche Q an. Daher gilt

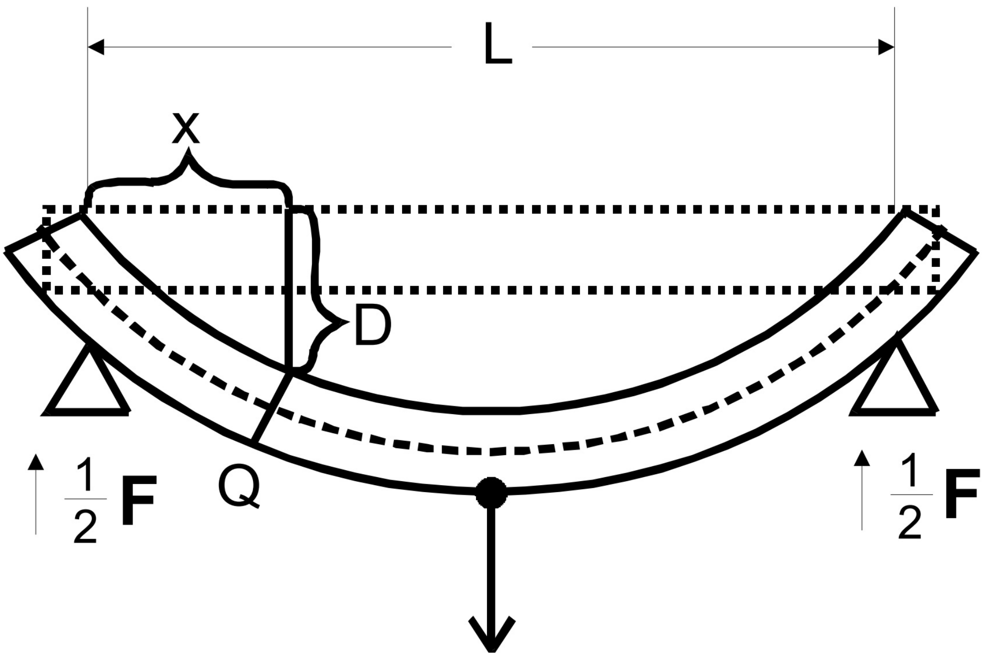


Abbildung 4: Durchbiegung bei zweiseitiger Auflage

für diesen Bereich für das Drehmoment M_f von $0 \leq x \leq L/2$ für die andere Hälfte $L/2 \leq x \leq L$

$$\frac{d^2 D}{dx^2} = -\frac{F \cdot x}{E \cdot I \cdot 2} \tag{6}$$

$$\frac{d^2D}{dx^2} = -\frac{F}{2 \cdot E \cdot I} \cdot \text{(L-x)} \tag{7}$$

Aus Gleichung (4) und durch die Integration folgt nun die Gleichungen:

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{Fx^2}{4E \cdot I} + C \quad \text{für 0<x<L/2} \tag{8}$$

$$\frac{dD}{dx} = -\frac{F}{2E \cdot I} \cdot (Lx - \frac{x^2}{2}) + C' \quad \text{für L/2<x<L} \tag{9}$$

Mit den Integrationskostanten:

$$C = \frac{F \cdot L^2}{16E \cdot I} \tag{10}$$

$$C' = \frac{3 \cdot F \cdot L^2}{16E \cdot I} \tag{11}$$

Eine weitere Integration zeigt, dass die Integrationskonstante für das linke Auflager null ist und für die rechte Seite D(L) = 0 ist. Damit hat die Gleichung von $0 \leq x \leq L/2$ folgenden Ausdruck:

$$D(x) = \frac{F}{48E \cdot I} \cdot (3L^2x - 4x^3) \tag{12}$$

Und $L/2 \leq x \leq L$ diesen Ausdruck:

$$D(x) = \frac{F}{48E \cdot I} \cdot (4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3) \tag{13}$$

2 Versuchsaufbau

In Abb. 5. ist die schematische Darstellung zum Theorieteil 1. Dabei wird der Stab

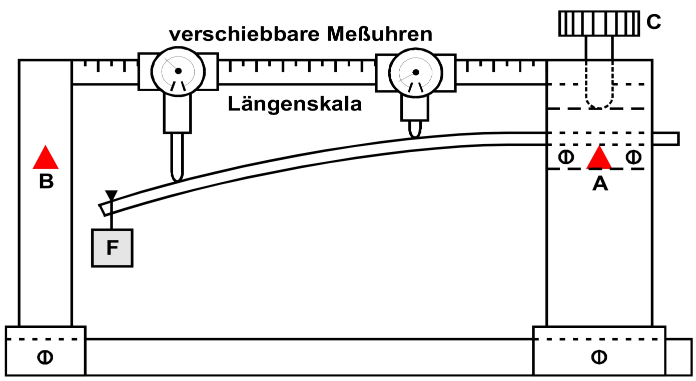


Abbildung 5: Darstellung der Messaperatur

an Punkt A fixiert und mithilfe einer Spannvorrichtung C eingespannt. Ein weiterer Bestandteil der Messung für die Durchbiegung, sind 2 Messuhren. Sie messen den Abstand der Durchbiegung an der Stelle X. Eine weitere Länge-Skala misst den Abstand vom

Nullpunkt zur verschiedenen X Stellen. Wie in der Abbildung 5 hängt die Kraft am Ende des Körpers. Für den zweiten Theorieteil wird der Stab noch zusätzlich am Punkt B fixiert. Dann wird die Kraft in der Mitte des Stabes befestigt.

3 Durchführung

Da in beiden Messmethoden der Probestab nicht parallel zur Probeachse bzw. Länge-Skala liegt wird eine Messdurchführung ohne Last durchgeführt. Dabei geht man entlang des Stabes an den verschiedene X Stellen mit der Messuhr ab und zeichnet dort die jeweiligen Werte auf. Dies wird dann als $D_0(x)$ aufgezeichnet. Anschließend wird die Messdurchführung nochmal durchgeführt mit Last und als $D_\mathrm{m}(x)$ aufgezeichnet. Für die tatsächliche Durchbiegung ist $D(x) = D_\mathrm{m}(x) - D_0(x)$.

4 Auswertung

4.1 Quadratischer Stab bei einseitiger Aufhängung

Vor der Bestimmung des Elastizitätsmoduls muss zunächst das Material des Stabes bestimmt werden. Das geschieht über die Dichte des Stabes, welche mit folgender Formel bestimmt werden kann:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L \cdot b^2} \tag{14}$$

Die geometrischen Abmessungen des quadratischen Stabes sind:

1. Länge: L=55 cm = 0,55 m
2. Masse: m=435,5 $\cdot 10^{-3}$ kg
3. Breite:
   a) Messwerte: 10,4 mm, 10,1 mm, 10,2 mm, 10,1 mm, 10,1 mm, 10,1 mm, 10,1 mm, 10,1 mm, 10,1 mm, 10,1 mm
   b) Mittelwert: b = $(10{,}14 \pm 0{,}03) \cdot 10^{-3}$ m

Der Mittelwert der Breite wird mit dieser Gleichung bestimmt:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N} x_i \tag{15}$$

Daraufhin wird die Standartabweichung von dem Mittelwert ermittelt:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{N}\sqrt{N-1}} \sqrt{\sum_i (x_i - \bar{x})^2} \tag{16}$$

Nun ergibt sich für den quadratischen Stab die Dichte:

$$\rho = 7701,04 \pm 45,57 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Der Fehler der Dichte lässt sich mithilfe der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnen:

$$\Delta\rho = \sqrt{\left(\frac{\partial\rho}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2} \tag{17}$$

Wenn dieser Wert mit Literaturwerten verglichen wird folgt, dass die Dichte von Eisenstahl am ähnlichsten ist.

$$\rho_{ES} = 7700 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Mithilfe der Messwerte, die in Tabelle 1 dargestellt sind, lässt sich nun eine Ausgleichsrechnung durchführen um das Elastizitätsmodul zu bestimmen. Dafür wird die Durchbiegung D(x) und $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ im Plot aufgetragen. Die Ausgleichsgerade wird mithilfe von Python 3.6 bestimmt. Die Parameter der Ausgleichsgerade sind:

$$y = mx + b \tag{18}$$

- m $= (33{,}557 \pm 0{,}547) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2}$
- b $= (5{,}45 \pm 2{,}24) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$

Durch Vergleichen von den Gleichungen (5) und (18) folgt für das Elastizitätsmodul:

$$m = \frac{F}{2EI} \iff E = \frac{F}{2mI} \tag{19}$$

Das Flächenträgheitsmoment I lässt sich mit der oben genannten Formel bestimmen:

$$I_{quadrat} = \frac{b^4}{12} = (8{,}81 \pm 0{,}10) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4$$

Der Fehler wird wieder mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung bestimmt, wie bei Gleichung (17).

Die Kraft F ist die Gewichtskraft des verwendeten Gewichtes. In diesen Fall ist das Gewicht $m_0 = 534{,}5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ also ergibt sich für die Gewichtskraft:

$$F = m_0 \cdot g = 5,234N$$

Nun lässt sich das Elastizitätsmodul des quadratischen Stabes bestimmen und der Fehler wird wieder mit der Gauß´schen Fehlerfortpflanzung berechnet:

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial} I \cdot \Delta I\right)^2} \tag{20}$$

Also ist das Elastizitätsmodul:

$$E = (88{,}7 \pm 1{,}8) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Tabelle 1: Tabelle mit Messdaten und Daten für die Ausgleichsrechnung

x in m	D(x) in 10^{-3}m	$\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ in 10^{-3}m
0.03	0.03	0.486
0.05	0.04	1.33
0.10	0.24	5.17
0.15	0.47	11.25
0.20	0.75	19.33
0.25	1.07	29.17
0.30	1.4	40.5
0.35	1.88	53.08
0.40	2.22	66.66
0.45	2.78	81

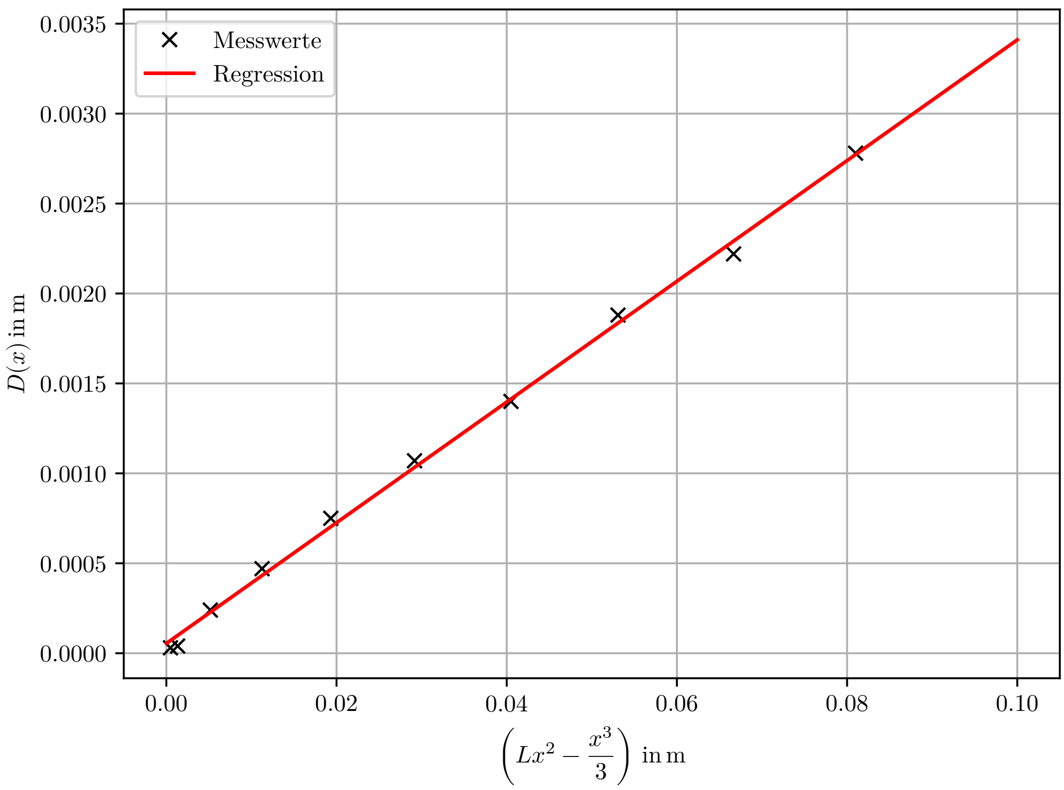


Abbildung 6: Messwerte des quadratuschen Stabes mit linearer Regression

4.2 Runder Stab mit einseitiger Aufhängung

Bei dem Runden Stab muss zunächst wieder die Dichte bestimmt werden um das Material ungefähr bestimmen zu können. Die geometrischen Abmessungen des runden Stabes sind:

1. Länge L = 0,55 m
2. Masse m = $121{,}3 \cdot 10^{-3}$ kg
3. Durchmesser:
   a) Messwerte: 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm, 10 mm
   b) Mittelwert: d = $10 \cdot 10^{-3}$ m

Der Mittelwert wird mithilfe der Gleichung (15) berechnet aber da alle Messwerte gleich sind ist der Mittelwert das gleiche wie die Messwerte und hat keinen Fehler.
Die Dichte des runden Stabes lässt sich nun mit der folgenden Gleichung bestimmen:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{L\pi\frac{d^2}{4}} \tag{21}$$

Somit ergibt sich für die Dichte:

$$\rho = 2808{,}07\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Diese Dichte wird wieder mit Literaturwerten verglichen und es folgt, dass die Dichte von Aluminium am ähnlichsten ist:

$$\rho_A = 2710\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

Tabelle 2: Tabelle mit Messdaten und Daten für die Ausgleichsrechnung

x in m	$D(x)$in 10^{-3}m	$\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ in 10^{-3}m
0.03	0.05	0.486
0.05	0.1	1.33
0.10	0.42	5.17
0.15	0.82	11.25
0.20	2.1	19.33
0.25	1.99	29.17
0.30	2.62	40.5
0.35	3.42	53.08
0.40	4.13	66.66
0.45	4.93	81

In der Tabelle 2 sind die Messwerte für den runden Stab dargestellt. Nun wird wieder die Durchbiegung D(x) und die Werte zum Term $\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right)$ in einem Plot dargestellt und es wird eine Ausgleichsrechnung durchgeführt.
Die Parameter der Ausgleichsgeraden werden wieder mithilfe von Python 3.6 ermittelt:

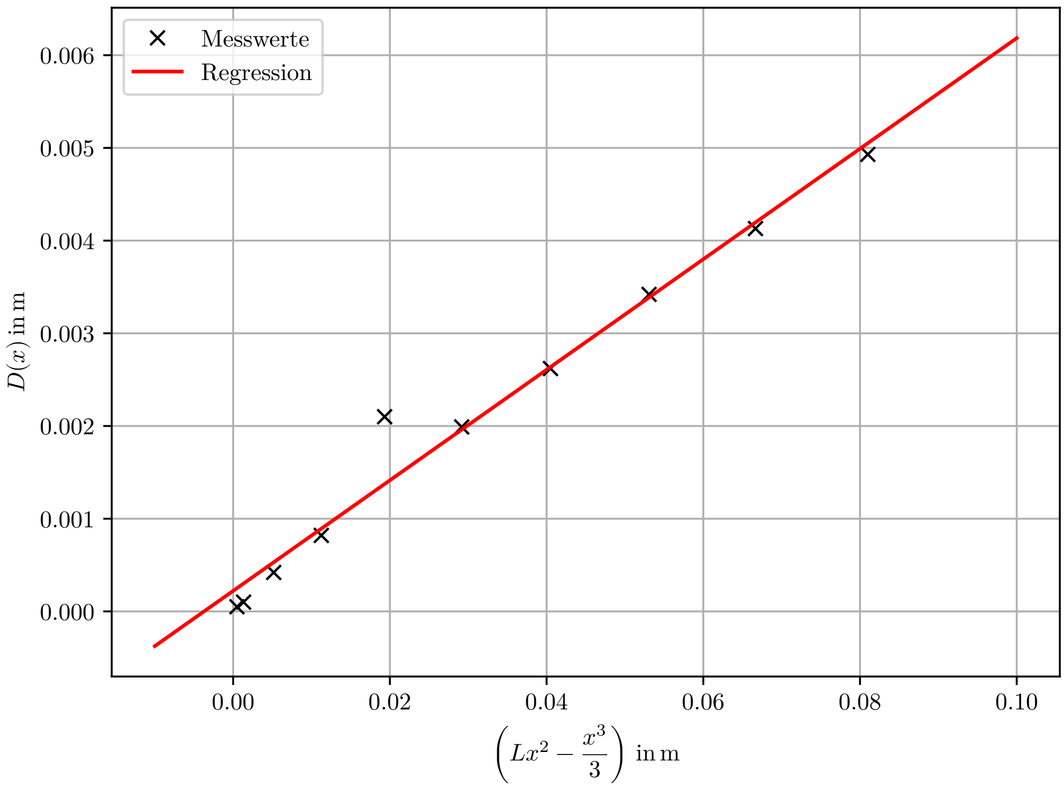


Abbildung 7: Messwerte des runden Stabes mit linearer Regression

- m $= (59{,}623 \pm 3{,}313) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2}$
- b $= (22{,}17 \pm 15{,}59) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$

Durch Vergleichen der Gleichungen (5) und (18) ergibt sich wieder die Gleichung (19). Die Formel für das Flächenträgheitsmoment eines runden Stabes lässt sich auch mit der oben genannten Gleichung ermitteln:

$$I_{Rund} = \frac{\pi}{4}\frac{d}{2}^4 = 490{,}87 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4$$

Die Gewichtskraft für den runden Stab ist die gleiche wie bei dem quadratischen, da die Masse des Gewichtes gleich ist. F ist also $5,243N$.
Das Elastizitätsmodul des runden Stabes lässt sich nun bestimmen und der Fehler wird mit der Gleichung (19) berechnet.

$$E = (90 \pm 5) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

4.3 Quadratischer Stab mit beidseitiger Aufhängung

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch beidseitige Aufhängung müssen zwei Fälle betrachtet werden. Zunächst wird die Durchbiegung von 0 bis $\frac{L}{2}$ durch die Gleichung (12) beschrieben. Der Teil von $\frac{L}{2}$ bis L wird seperat durch die Gleichung (13) beschrieben. Für beide Hälften des Stabes lässt sich nun eine Ausgleichsrechnung durchführen und jeweils ein Elastizitätsmodul bestimmen. Im idealfall sollten die Elastizitätsmodule gleich sein.
Zunächst wird das Elastizitätsmodul für 0 bis $\frac{L}{2}$ bestimmt.

Tabelle 3: Tabelle mit Messdaten und Daten von 0 bis $\frac{L}{2}$

x in m	$D(x)$in 10^{-3}m	$\left(3L^2x - 4x^3\right)$ in 10^{-3}m
0	-0.03	0
0.05	0.24	44.87
0.10	0.42	86.75
0.15	0.66	122.625
0.20	0.89	149.5
0.25	0.88	164.375

Die Ergebnisse der Ausgleichsrechnung, die wieder mit Python 3.6 durchgeführt wurde, lauten:

- $m = (5{,}761 \pm 0{,}305) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2}$
- $b = (-3{,}6 \pm 3{,}4) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$

Für die Berechnung des Elastizitätsmoduls werden die Gleichungen (18) und (12) verglichen. Dadurch ergibt sich wieder die Gleichung (19) für das Elastizitätsmodul. Das Flächenträgheitsmoment für den quadratischen Stab wurde bereits berechnet.

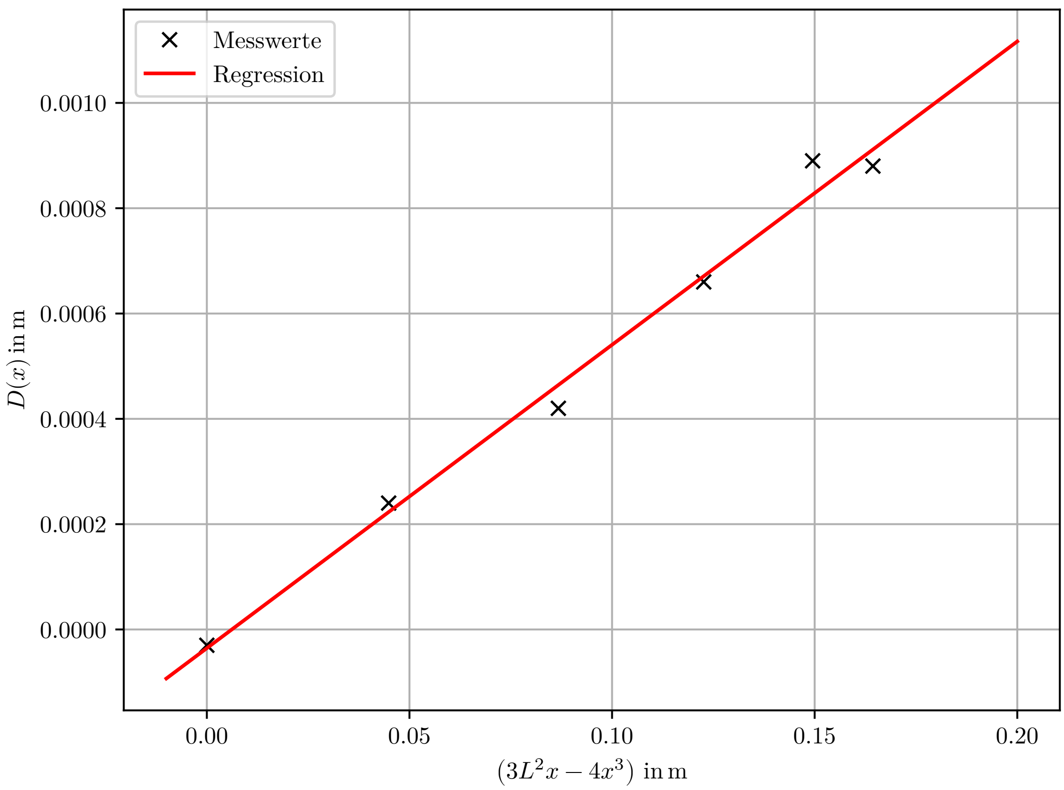


Abbildung 8: Messwerte des quadratischen Stabes für 0 bis $\frac{L}{2}$ mit linearer Regression

Die Gewichtskraft ist diesmal jedoch anders, da die Masse $m_1 = 2{,}362\,\text{kg}$ beträgt. Daraus ergibt sich dann die Kraft $F = 23,171N$.
Nun lässt sich das Elastizitätsmodul für den ersten Teil der Messung bestimmen, wobei der Fehler wieder mit der Gleichung (19) berechnet wird:

$$E = (90 \pm 5) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

Für den zweiten Teil der Messung von $\frac{L}{2}$ bis L sind die Rechnungen identisch nur, dass die Gleichung (13) anstatt (12) verwendet wird.

Tabelle 4: Tabelle mit Messdaten und Daten von $\frac{L}{2}$ bis L

x in m	$D(x)$in 10^{-3}m	$\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right)$ in 10^{-3}m
0.30	1.73	164.375
0.35	1.67	149.5
0.40	1.57	122.625
0.45	1.37	86.75
0.50	1.15	44.875

Damit lauten die Parameter der Ausgleichsgeraden, die mit Python 3.6 bestimmt wurden:

- $m = (4{,}893 \pm 0{,}207) \cdot 10^{-3}\,\text{m}^{-2}$
- $b = (94{,}2 \pm 2{,}5) \cdot 10^{-5}\,\text{m}$

Da alle Rechnungen gleich sind lässt sich sofort das Elastizitätsmodul für den zweiten Teil der Messungen angeben:

$$E = (112 \pm 5) \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$$

4.4 Runder Stab mit beidseitiger Aufhängung

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls für den runden Stab bei beidseitiger Aufhängung müssen wieder zwei Ausgleichsrechnungen durchgeführt werden, für 0 bis $\frac{L}{2}$ und für $\frac{L}{2}$ bis L. Die verwendeten Formeln sind die gleichen wie bei dem quadratischen Stab. Zunächst wird für den ersten Fall 0 bis $\frac{L}{2}$ die Ausgleichsrechnung durchgeführt.
Nun wird die Ausgleichsrechnung mithilfe von Python 3.6 durchgeführt, womit die Parameter der Ausgleichsgeraden bestimmt wird:

- $m = (11{,}580 \pm 0{,}229) \cdot 10^{-3}\,\text{m}^{-2}$
- $b = (3{,}2 \pm 2{,}5) \cdot 10^{-5}\,\text{m}$

Die Rechnungen und Formeln zur bestimmung des Elastizitätsmoduls sind identisch mit denen die für den quadratischen Stab benutzt wurden. Deshalb lässt sich das Elastizitätsmodul direkt angeben:

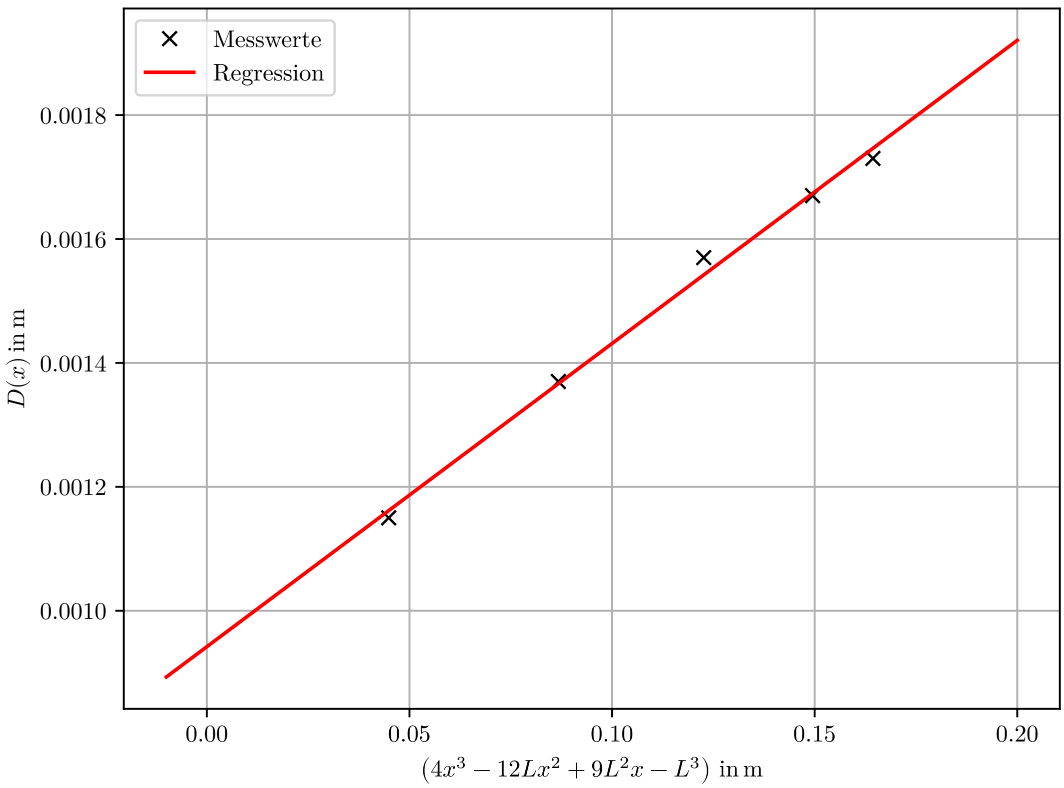


Abbildung 9: Messwerte des quadratischen Stabes für $\frac{L}{2}$ bis L mit linearer Regression

Tabelle 5: Tabelle mit Messdaten und Daten von 0 bis $\frac{L}{2}$

x in m	$D(x)$ in 10^{-3}m	$\left(3L^2x - 4x^3\right)$ in 10^{-3}m
0	0	0
0.05	0.6	44.87
0.10	1.02	86.75
0.15	1.47	122.625
0.20	1.76	149.5
0.25	1.92	164.375

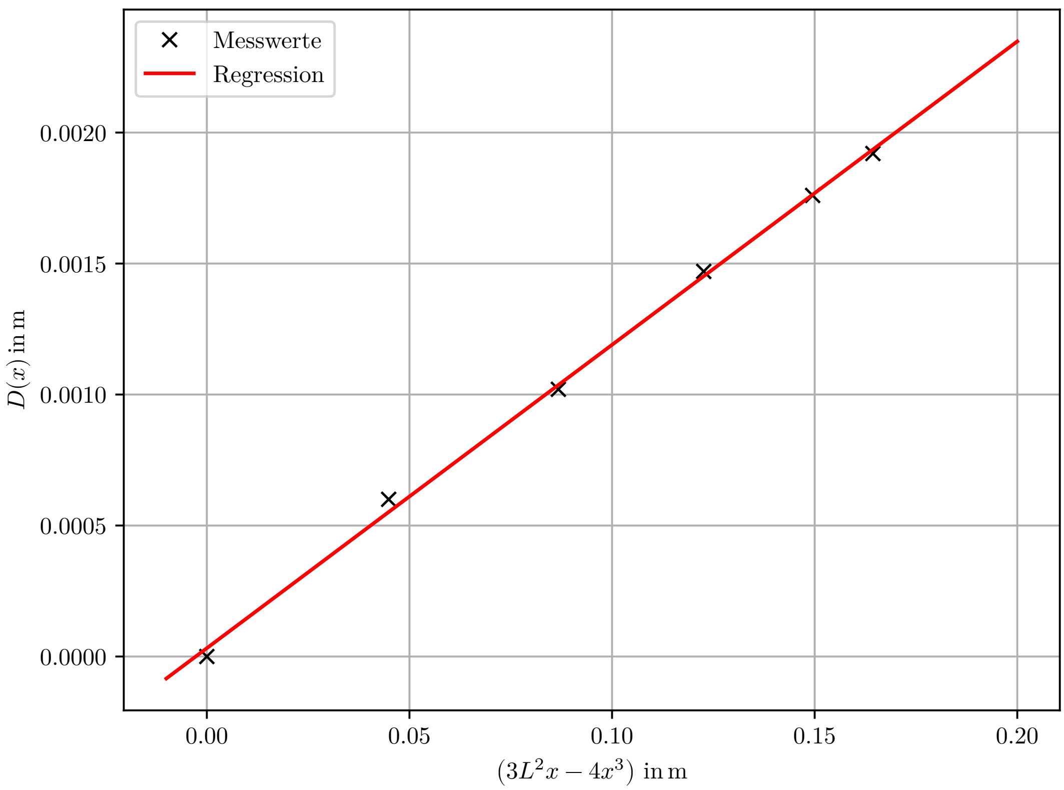


Abbildung 10: Messwerte des runden Stabes für 0 bis $\frac{L}{2}$ mit linearer Regression

$$E = (84{,}9 \pm 2{,}2) \cdot 10^9 \, \frac{N}{m^2}$$

Das Vorgehen für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls für den zweiten Teil der Messungen ist wieder gleich mit dem für den quadratischen Stab.

Tabelle 6: Tabelle mit Messdaten und Daten von $\frac{L}{2}$ bis L

x in m	$D(x)$ in 10^{-3}m	$\left(4x^3 - 12Lx^2 + 9L^2x - L^3\right)$ in 10^{-3}m
0.30	2.77	164.375
0.35	2.64	149.5
0.40	2.36	122.625
0.45	1.91	86.75
0.50	1.4	44.875

Aus den Messdaten ergeben sich nun folgende Parameter für die Ausgleichsgerade, die mit Python 3.6 bestimmt wurde:

- $m = (11{,}599 \pm 0{,}337) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-2}$
- $b = (89{,}8 \pm 4{,}1) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$

Damit lässt sich nun das Elastizitätsmodul des runden Stabes noch einmal bestimmen, mithilfe der Überlegungen für den quadratischen Stab:

$$E = (84{,}8 \pm 2{,}5) \cdot 10^9 \, \frac{N}{m^2}$$

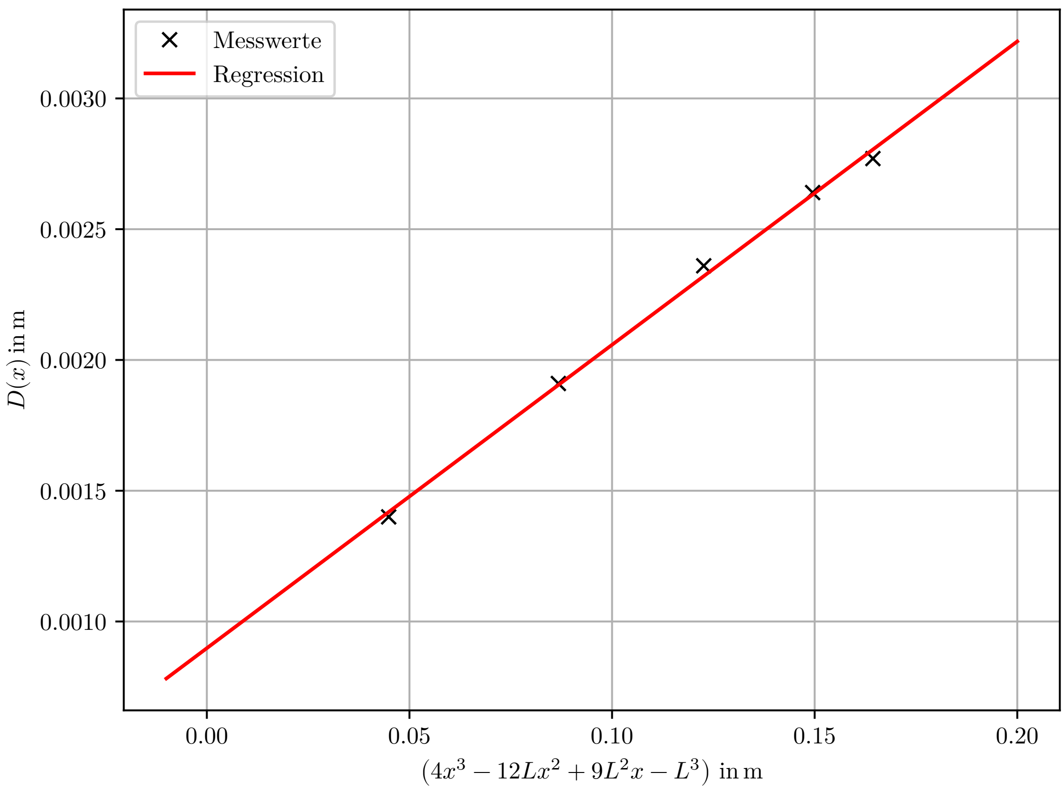


Abbildung 11: Messwerte des runden Stabes für $\frac{L}{2}$ bis L mit linearer Regression

5 Diskussion

In der Auswertung wurden die Dichten der zwei Stäbe bestimmt und somit das Material näherungsweise bestimmt.
Für den quadratischen Stab wurde Eistenstahl als Material angenommen. Der Literaturwert des Elastizitätsmoduls von Eisenstahl beträgt $E = ...\frac{N}{m^2}$. Damit weicht der gemessene Wert um ...
Bei dem Runden Stab wurde Aluminium als Material bestimmt. Der Literaturwert ist in diesem Fall $E = 70e9\frac{N}{m^2}$. Die Abweichung der gemessenen Werte liegt also zwischen 21,1 % und 28,6 %.
Es wird direkt klar, dass es eine Abweichung zu den Literaturwerten geben muss, da die einzelnen Elastizitätsmodule, die mit unterschiedlichen Methoden bestimmt worden sind zum Teil sehr unterschiedlich sind. Diese Fehler könnten durch die Fehlerhafte Messung der Durchbiegung entstanden sein. Die verwendeten Messuhren waren zum Teil etwas ungenau und die Werte waren auch schwierig abzulesen. Außerdem könnte die Bestimmung des Materials auch falsch gewesen sein, da bei dem quadratischen Stab die gemessene Dichte stark von einer Dichte eines möglichen Materials abweicht.