Rio de Janeiro, 28 de Junho de 2005.
PROVA 3 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER
DURAÇÃO: 2 HORAS

1. Considere o cenário de uma enchente em uma região. Os paramédicos identificaram n pessoas feridas que precisam ser conduzidas imediatamente a um dos k hospitais disponíveis. Para que o socorro não seja em vão uma pessoa só pode ser transferida para um hospital se este estiver no raio de 40Km do local onde a pessoa se encontra. Além disso, cada hospital só pode receber no máximo $\lceil n/k \rceil$ pessoas. Exiba um algoritmo polinomial que permita decidir se todas as n pessoas podem ser atendidas de modo que as restrições indicadas sejam satisfeitas.

2. Seja um grafo direcionado $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$, $E = \{(b, a), (a, c), (b, e), (d, c), (e, c), (e, d)\}$. As demandas/suprimentos dos nós são $dem(a) = 5, dem(b) = -3, dem(c) = 4, dem(d) = -3, dem(e) = -3$. Finalmente, as capacidades são $cap(a, b) = 3$, $cap(a, c) = 3$,$cap(b, e) = 3$,$cap(c, d) = 3$, $cap(c, e) = 3$, $cap(d, e) = 3$. Determine se este grafo apresenta ou não uma circulação viável.

3. Decida se as seguintes afirmativas são verdadeiras ou falsas. Se a afirmativa for verdadeira, justifique. Caso contrário, exiba um contra-exemplo.

a) Seja G uma rede de fluxos arbitrária, com fonte s, sumidouro t e uma capacidade inteira c_e em cada aresta e. Se f é um fluxo máximo em G então $f(e) = c_e$ para toda aresta e que parte de s.

b) Seja G uma rede de fluxos arbitrária, com fonte s, sumidouro t e todas as capacidades iguais a 1. Então o número máximo de caminhos disjuntos por arestas entre s e t é igual a capacidade do corte mínimo de em G.

4. Seja A uma sequência de n números distintos $(a_1, \ldots, a_n)$. se $A = (2, 6, 4, 7, 3, 1, 9)$, então o tamanho da maior subsequência crescente é 4, devido as subsequências $(2, 4, 7, 9)$ e $(2, 6, 7, 9)$.

a) Defina $L(i)$ como o tamanho da maior subsequência crescente de $a_1, a_2, \ldots, a_i$ que **inclui** a_i. Como exemplo, se $A = (2, 6, 4, 7, 3, 1, 9)$ então $L(7) = 4$, $L(6) = 1$ e $L(5) = 2$. Determine o valor de $L(1)$ e uma relação de recorrência que relacione $L(i)$ e $L(1), \ldots, L(i-1)$, para $i > 1$.

b) A partir da relação obtida no item anterior, escreva o pseudo-código de um algoritmo polinomial para calcular os valores dos $L(i)$'s. Faça a melhor análise possível para a complexidade deste.

c) Dado o vetor L, mostre como obter um vetor M de n posições onde $M(i)$, para $i = 1, \ldots, n$, armazena o tamanho da maior subsequência crescente de $a_1, a_2, \ldots, a_i$.

d) Considere que o vetor M do item anterior é dado. Mostre como obter em tempo linear os índices da maior subsequência crescente de A.