

Rio de Janeiro, 6 de Dezembro de 2010.  
PROVA FINAL DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS  
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER  
DURAÇÃO: 2 HORAS

1. (2.0pt) Seja  $T(n)$  o número distintos de árvores binárias ordenadas com  $n$  nós. Sabe-se que  $T(n)$  respeita a seguinte equação de recorrência:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) \times T(n-i),$$

se  $n > 1$  e  $T(1) = 1$ .

- a) Descreva um algoritmo eficiente para calcular  $T(n)$ .
- b) Analise a complexidade do algoritmo.

2. (2.0pt) Fomos contratados para definir um planejamento de tarefas para uma equipe para as próximas  $n$  semanas. Para cada semana existem 3 tarefas possíveis: A, B e C. A realização da tarefa A na semana  $i$  gera um lucro de  $a_i$ ; a realização da tarefa B na semana  $i$  gera um lucro de  $b_i$  e a realização da tarefa C na semana  $i$  gera um lucro de  $c_i$ . Sabe-se também que, para  $i = 2, \dots, n$ , a tarefa C só pode ser realizada na semana  $i$  se a tarefa B for realizada na semana  $i - 1$ .

a) Seja  $OPT(i)$  o rendimento máximo que pode ser obtido nas  $i$  primeiras semanas. Encontre uma equação de recorrência para  $OPT(i)$ .

b) Assuma que já temos o vetor  $M$  preenchido com os valores de  $OPT$ , ou seja,  $M[i] = OPT(i)$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Escreva um algoritmo polinomial e para computar as tarefas que devem ser realizadas a cada semana de modo a maximizar o rendimento total.

3. (3.0) Seja  $G = (V, E)$  um grafo direcionado com pesos positivos na arestas e seja  $e$  uma aresta em  $E$ .

a) Explique como seria um algoritmo polinomial para determinar se  $G$  tem uma ciclo que inclui a aresta  $e$  ou não. Analise a complexidade do algoritmo.

b) Explique como seria um algoritmo polinomial para encontrar o ciclo de  $G$  com menor peso dentre aqueles ciclos que contem a aresta  $e$ . Analise a complexidade do algoritmo. Note que o peso de um ciclo é definido como a soma dos pesos de suas arestas.

c) Explique como seria um algoritmo polinomial para encontrar o ciclo do grafo de menor peso. Analise a complexidade do algoritmo proposto.

4. (2.0) Análise em função de  $N$  a complexidade de tempo dos procedimentos 1 e 2 abaixo?

```

Proc1( $N$ )
     $t \leftarrow N$ 
    Enquanto  $t > 0$  faça.
         $q \leftarrow 1$ 
        Enquanto  $2q \leq t$ 
             $q \leftarrow 2q$ 
        Fim Enquanto
         $t \leftarrow t - 1$ 
    Fim Enquanto
Fim Proc1

```

```

Proc2( $N$ )
    Para  $j = 1, \dots, N^2$ 
        soma ++
    Fim Para
    Proc2( $N/2$ )
    Proc2( $N/2$ )
Fim Proc2

```

5. (2.0) Um grafo não direcionado  $G = (V, E)$  é 2-robusto se e somente se  $G - S$  é conexo para todo conjunto  $S \subseteq E$  de duas arestas. Descreva como seria um algoritmo polinomial para determinar se  $G$  é 2-robusto. Analise sua complexidade.