Departamento de Informática, PUC-Rio
17 de outubro de 2016

PROJETO E ANALISE DE ALGORITMOS (INF 2926)

$1^a$ Prova

- **Você deve justificar todas as suas respostas**;
- Não é permitida a consulta a livros ou anotações;
- A nota máxima da prova é 10.
- **O plágio ou a tentativa de plágio implicará na nota zero**.

1. (2,5)

   - Ordene as seguintes funções em ordem crescente de complexidade assintótica:
     $f_1(n) = n\log(n),\ f_2(n) = \sqrt{n},\ f_3(n) = 2^n,\ f_4(n) = 2^{\log_{10}(n)},\ f_5(n) = 2^{\log_{10}(2^n)},\ f_6(n) = n^3$.
     Não é necessário provar. A sua resposta pode ser escrita como $\mathcal{O}(f_i) \leq \mathcal{O}(f_j) \leq \mathcal{O}(f_k) \leq \ldots$

   - Escolha e prove **<u>duas</u>** das relações encontradas acima.

---

2. (2,0) Encontre uma função $f(n)$ tal que a complexidade de tempo do pseudo-código abaixo é $\Theta(f(n))$. Assuma que todas as operações de soma, multiplicação e divisão tem complexidade $\mathcal{O}(1)$. Justifica a sua resposta.

```
for int i = 1 to n/2 do
    for int j = 1 to n do
        k ← 1 ;
        while k^2 ≤ j do
            k ← k + 1 ;
        end
        k ← n ;
        while k ≥ 1 do
            k ← k/2 ;
        end
    end
end
```

3. (2,0) Considere um vetor não-ordenado com $n$ inteiros. O problema de k-Seleção tem por objetivo de encontrar o k-ésimo menor elemento do vetor. Descreva três algoritmos para resolver k-Seleção, com as seguintes complexidades:

   - $\Theta(kn)$
   - $\Theta(n + k \log n)$
   - $\Theta(n)$ (Você pose assumir a existência dum algoritmo que acha a mediana ($\lfloor n/2 \rfloor$-ésimo elemento) em $\Theta(n)$).

   (Bônus 1,0) Considere um vetor não-ordenado com $n$ inteiros. Descreva um algoritmo em $\Theta(n)$ para determinar se existe um numero $A_i$ repetido $\lceil n/2 \rceil$ vezes o mais.

---

4. (2,0) Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado, sem pesos, armazenado como uma lista de adjacências. Dado dois vértices $u$ e $v$, um caminho $P$ entre $u$ e $v$, e uma função $f(P, e)$ que verifica em $\mathcal{O}(1)$ se a aresta $e \in P$, responda os itens abaixo.

   a) Como seria um algoritmo polinomial para decidir se existe um caminho $Q$ entre $u$ e $v$ que não tem arestas em comum com $P$ ? Discuta a complexidade do algoritmo proposto.

   b) Como seria um algoritmo polinomial para decidir se existe um caminho $R$ entre $u$ e $v$ que tem no máximo uma aresta em comum com $P$ ? Discuta a complexidade do algoritmo proposto.

---

5. (1,5) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, não direcionado, sem pesos. A centralidade de um vértice $v$ é definida como

$$centralidade(v) = \sum_{u \in V} d(u, v) \tag{1}$$

   aonde $d(u, v)$ denota a distancia entre $u$ e $v$ em $G$. Assuma que o grafo é representado por uma lista de adjacências.

   Descreva um algoritmo eficiente que receba como entrada um vértice $v$ e devolva a centralidade de $v$. Analise a sua complexidade em função de $|V|$ e $|E|$. Quanto mais eficiente o algoritmo maior a pontuação.