

Rio de Janeiro, 03 de Outubro de 2011.

PROVA 1 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

DURAÇÃO: 3:00h

1. (3.0pt) Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado sem pesos. A centralidade de um nó v é definida como

$$centralidade(v) = \sum_{u \in V} d(v, u) + \sum_{u \in V} d(u, v),$$

aonde $d(u, v)$ denota a distância entre u e v em G . Assuma que o grafo é representado por uma lista de adjacências.

a) Descreva como seria um algoritmo eficiente que recebe como entrada um nó v e devolve a centralidade de v . Analise a sua complexidade em função de $|V|$ e $|E|$. Quanto mais eficiente o algoritmo maior a pontuação.

b) Exiba o pseudo-código do algoritmo proposto.

2. (2.0pt) Considere um cadastro com cerca de 180×10^6 registros contendo a data de nascimento de cada cidadão brasileiro. Estamos interessado em descobrir o menor inteiro t tal que pelo menos 70% da população tem no máximo t anos de idade. Explique como seria um algoritmo para determinar o valor de t de forma eficiente. Quanto mais eficiente o algoritmo maior a pontuação, mas não gaste tempo otimizando fatores constantes. Assuma que se uma pessoa nasceu em 03/10/1987, por exemplo, então hoje ela tem 24 anos, independente do horário de nascimento.

3. (3.0pt) Um site de música na Internet decidiu criar um ranking com as melhores canções da última década, a partir de n canções, s_1, \dots, s_n , pré-selecionadas. Durante um mês, sempre que um usuário acessava o site, duas canções escolhidas aleatoriamente eram exibidas, e o usuário devia marcar qual das duas ele preferia. Ao término deste processo, temos um conjunto de triplas $S = \{(s_i, s_j, d_{ij}) | 1 \leq i < j \leq n\}$, aonde $d_{ij} = i$ se a maioria das pessoas prefere s_i à s_j , $d_{ij} = j$ se a maioria das pessoas prefere s_j à s_i e $d_{ij} = 0$ se não há uma preferência entre as canções.

Um ranking R é consistente com a lista S se e somente se para todo par de canções s_i e s_j a seguinte condição é válida: se s_i vem antes da canção s_j no ranking R , então a maioria das pessoas prefere s_i à s_j ou não há uma preferência entre tais canções.

a) Descreva um algoritmo eficiente para verificar se é possível criar um ranking de canções consistente com a pesquisa. Note que o algoritmo deve responder SIM ou NÃO. Analise a complexidade de pior caso do algoritmo proposto em função de n . Explique as estruturas de dados utilizadas para obter tal complexidade.

b) Em algumas situações é possível existir mais de um ranking consistente com S . Dados dois rankings R e R' para uma lista S , dizemos que R domina R' se e somente se na primeira posição que R difere de R' , o índice da canção de R é menor que o índice da canção de R' . Por exemplo, se $R = s_1 s_3 s_2 s_4$ e $R' = s_1 s_3 s_4 s_2$, então R domina R' já que os rankings diferem pela primeira vez na terceira posição e s_2 tem índice menor que s_4 . Descreva como seria um algoritmo para determinar um ranking consistente com a lista S que não é dominado por nenhum outro ranking consistente com S . Analise a complexidade do algoritmo proposto em função de n . Explique as estruturas de dados utilizadas para obter tal complexidade.

4. (3.0pt) Considere os pseudo-códigos abaixo.

a) Faça a análise assintótica do trecho abaixo, ou seja, determine uma função $f(n)$ tal que $T(n) = \theta(f(n))$.

```
For  $i = 1$  to  $n$ 
  For  $j = 1$  to  $n^2$ 
     $cont \leftarrow n^{3/2}$ 
    While  $cont \geq 1$ 
       $cont \leftarrow \lfloor cont/2 \rfloor$ 
    End While
  End For
End For
```

b) Faça uma análise assintótica de pior caso do trecho de código abaixo em função de m e n . Quanto mais justa a análise maior a pontuação. Assuma que a função $rand(m)$ devolve, em tempo $O(\log m)$, um número aleatório do conjunto $\{1, \dots, m\}$.

```
 $cont \leftarrow 0$ 
For  $i := 1$  to  $n$ 
   $a \leftarrow rand(m)$ 
  If  $cont \leq m$ 
    For  $j := 1$  to  $a$ 
       $cont ++$ 
    End For
  End if
End For
```