Rio de Janeiro, 27 de Junho de 2011.

PROVA 2 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

DURAÇÃO: 3:00h

1. (1.0pt) Seja G um grafo direcionado com pesos nas arestas e seja s um nó de G. Assuma que G não tem ciclos negativos. Seja $OPT(i, v)$ o custo do caminho de custo mínimo de s até o nó v que utiliza **no máximo** i arestas. Encontre uma equação de recorrência para $OPT(i, v)$.

2. (2.0pt) O número $B(n)$ de árvores binárias com n nós satisfaz a seguinte equação de recorrência

$$B(n) = \sum_{i=0}^{n-1} B(i)B(n-i+1)$$

para $n > 1$ e $B(0) = 1$.

a) Projete um algoritmo **recursivo e eficiente** que recebe n e devolve o número de árvores binárias de tamanho n.

b) Analise a complexidade de tempo do algoritmo proposto.

3. (3.0pt) Um conjunto independente em um grafo $G = (V, E)$ é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que não existe arestas entre vértices de S. O peso de um conjunto independente é a soma dos pesos dos nós que constituem o conjunto. Seja T uma árvore com n nós e seja w_i, para $i = 1, ..., n$, o peso do nó i.

a) Explique como seria um algoritmo eficiente para encontrar o conjunto independente para T de peso máximo e analise sua complexidade.

b) Como seria um algoritmo para encontrar o conjunto independente para T de peso mínimo dentre aqueles que possuem exatamente 3 vértices? Analise sua complexidade.

4. (2.0pt) Nos anos 80, muitos computadores utilizavam fitas K7 como unidade de armazenamento. O acesso a informação nestas fitas é sequencial, ou seja, deve-se partir da posição inicial da fita e ir percorrendo os arquivos em ordem até chegar no arquivo desejado. Como exemplo, considere uma fita K7 com 3 arquivos armazenados: A,B e C, com tamanhos 3Kb, 5Kb e 2Kb. Além disso, assuma que B encontra-se antes de A que, por sua vez, encontra-se antes de C. Neste caso, o custo para acessar o arquivo B é 0, o custo para acessar A é 5 e o custo de acesso à C é $5 + 3 = 8$.

Problema Dados n arquivos $A_1, \ldots, A_n$, com tamanhos $l_1, \ldots, l_n$ e probabilidades de acesso $p_1, \ldots, p_n$, o problema consiste em determinar de que maneira devemos ordenar os arquivos na fita de modo a minimizar o custo esperado de acesso, que é definido como

$$\sum_{i=1}^{n} p_{(i)} c_{(i)},$$

aonde $p_{(i)}$ (não confunda com p_i) e $c_{(i)}$ são, respectivamente, a probabilidade de acesso e o custo do i-ésimo arquivo na ordenação.

a) Considere a estratégia gulosa que consiste em ordenar os arquivos por ordem crescente de tamanhos. Mostre uma instância do problema, com $n = 4$, em que esta estratégia funciona e outra instância, também com $n = 4$, em que esta estratégia não funciona.

b) Considere a estratégia gulosa que consiste em ordenar os arquivos por ordem crescente da razão entre o tamanho do arquivo e a probabilidades de acesso. Prove que esta estratégia é ótima.

5. (1.0pt) Considere o procedimento $MULT(L)$ apresentado abaixo. Na linha (*), $L_i \cdot L_j$ indica a lista obtida ao contacatenar as listas L_i e L_j. Assuma que essa concatenação pode ser realizada em $O(1)$. Seja $T(n)$ a complexidade de tempo do algoritmo para uma lista de tamanho n. Ache uma equação de recorrência para $T(n)$, não é necessário resolvê-la.

MULT(L: lista)

    Se $|L| \leq 3$

        Return 1

    Senão

        Divida L em três sublistas L_1, L_2 e L_3 de mesmo tamanho.

        Calcule as medianas m_1, m_2 e m_3 de L_1, L_2 e L_3 utilizando o algoritmo com menor complexidade assintótica que você conhecer.

        Return $m_1 + m_2 + m_3+$ MULT($L_1 \cdot L_2$) + MULT($L_1 \cdot L_3$) + MULT($L_2 \cdot L_3$) (*)

    Fim Se

6. (1.0pt) Resolva a equação de recorrência $T(n) = 7T(n/2) + n^2$, para $n > 1$ e $T(1) = 1$.

7 (2.0pt). Seja V um vetor com n números distintos. Seja S_i a soma dos i menores números de V e e L_i a soma dos i maiores números de V. Explique como seria um algoritmo linear para calcular $S_{n/4} \times L_{n/3}$