

Rio de Janeiro, 2 de Dezembro de 2013.

PROVA 3 DE ANÁLISE DE ALGORITMOS

PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

DURAÇÃO: 1:50h

- Algumas questões pedem para explicações com palavras. Pode-se utilizar referências a algoritmos vistos em aula e a explicação deve ser suficientemente boa para permitir que alguém implemente, sem muitas dúvidas, a solução proposta.
- Cabe ao aluno deixar bastante clara a solução proposta e não ao professor gastar muita energia para entendê-la.

1. (2.5pt) Considere uma árvore  $T$ , enraizada em  $r$ , com  $n$  nós e que tem as seguintes propriedades: (i) cada nó exceto as folhas tem exatamente  $d$  filhos; (ii) cada nó  $v \in T$  está rotulado com um número real  $x_v$  e todos os rótulos são distintos; (iii) todas as folhas estão situadas no mesmo nível.

Dizemos que um nó  $v$  é um mínimo local se o rótulo de  $v$  é menor que o rótulo de todos vizinho de  $v$ .

Explique com palavras ou através de um pseudo-código como seria um algoritmo eficiente para encontrar um mínimo local em  $T$  e analise sua complexidade em função de  $n$  e  $d$ . Quanto mais eficiente o algoritmo maior a pontuação.

2. (1.5pt) Seja  $T(n)$  a complexidade de pior caso do algoritmo abaixo. Encontre  $f(n)$  tal que  $T(n) \in \Theta(f(n))$ . Em palavras, analise a complexidade de tempo do pseudo-código abaixo. Se não conseguir chegar a uma forma explícita, deixe as contas indicadas.

Proc( $n$ )

**Se**  $n = 1$  **Return**

**Senão**

**Para**  $i = 1 \dots n$

$cont++$

**Fim Para**

**Para**  $i = 1 \dots 3$

            Proc( $n/4$ )

**Fim Para**

**Fim Se**

3. (3.0pt) A cadeia de restaurantes XYZ esta considerando abrir uma série de restaurante ao longo de uma estrada, modelada neste problema com uma linha reta. Existem  $n$  potenciais localidades para abrir os restaurantes que distam, respectivamente,  $1, 2, \dots, n$  milhas da origem da estrada. Além disso, sabe-se que o lucro esperado de abrir o restaurante na  $i$ -ésima localidade é  $\ell_i$ .

Finalmente, para abrir os restaurantes as seguintes restrições devem ser respeitadas: (i) em cada uma das localidades apenas um restaurante pode ser aberto; (ii) Não é permitido abrir dois restaurantes em localidades que distam menos do que 1.5 milhas entre si.

a) Seja  $OPT(i)$  o lucro máximo que pode ser obtido ao abrir restaurantes nas  $i$  localidades mais próximas da origem da estrada. Encontre uma equação de recorrência para  $OPT(i)$ .

b) Escreva o PSEUDO-CÓDIGO de um algoritmo polinomial **iterativo** para determinar o lucro esperado máximo que pode ser obtido com a abertura dos restaurantes. Analise a complexidade do algoritmo proposto.

c) Escreva o PSEUDO-CÓDIGO de um algoritmo polinomial **iterativo** para determinar quais restaurantes tem que ser aberto de modo a maximizar o lucro.

4. (3pt) Considere dois times  $A$  e  $B$  se enfrentam em uma série de partidas, onde o objetivo é ganhar  $n$  partidas primeiro. Vamos assumir que  $A$  e  $B$  tem probabilidade de 50% de ganhar qualquer partida. Seja  $P(i, j)$  a probabilidade do jogador  $A$  ganhar  $n$  partidas primeiro dado que  $A$  já ganhou  $i$  e  $B$  já ganhou  $j$ . Por exemplo,  $P(n-1, n-3) = 7/8$  já que basta o jogador  $A$  ganhar uma partida dentre as próximas três.
- a) Encontre uma equação relacionando  $P(i, j)$  com  $P(i+1, j)$  e  $P(i, j+1)$  para o caso em que  $i$  e  $j$  são menores que  $n$
- b) Qual o valor de  $P(n, j)$ , para  $j < n$ ? Qual o valor de  $P(i, n)$  para  $i < n$ ?
- c) Escreva o pseudo-código de um algoritmo recursivo e polinomial para computar  $P(i, j)$  e analise sua complexidade.