Rio de Janeiro, 29 de Junho de 2009.
PROVA 2 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER
DURAÇÃO: 2h:50

1. (3.0pt) Devemos definir um planejamento de tarefas para uma equipe para as próximas n semanas. Para cada semana existem 3 tarefas possíveis: A , B e C. A realização da tarefa A na semana i gera um rendimento de a_i; a realização da tarefa B na semana i gera um rendimento de b_i e a realização da tarefa C na semana i gera um rendimento de c_i. Sabe-se também que, para $i = 2, ..., n$, a tarefa C só pode ser realizada na semana i se a tarefa B for realizada na semana $i - 1$.

a) Seja $OPT(i)$ o rendimento máximo que pode ser obtido nas i primeiras semanas. Encontre uma equação de recorrência para $OPT(i)$.

b) Escreva um algoritmo polinomial e recursivo para computar $OPT(n)$. Analise sua complexidade

c) Escreva um algoritmo polinomial e não recursivo para computar a tarefa que deve ser realizada em cada semana de modo a maximizar o rendimento total. Analise sua complexidade.

2. (2.0pt) Considere um vetor ordenado $A[1..n]$ com n números **inteiros distintos**. Explique com palavras como seria um algoritmo com complexidade $O(\log n)$ para determinar se existe um inteiro i tal que $A[i] = i$. Justifique porque o algoritmo funciona.

3. (2.0pt) Seja $U = \{o_1, ..., o_n\}$ um conjunto de itens, onde o item o_i tem peso w_i e valor v_i, para $i = 1, \ldots, n$. Além disso, seja uma mochila que suporta no máximo W unidades de peso. O objetivo do problema é determinar como carregar itens que somem o maior valor possível sem exceder o peso máximo W. Nessa versão, diferentemente da vista em sala, podemos carregar itens fracionários. Como exemplo, se um item pesa 6Kg e tem valor 4, podemos levar 3kg obtendo valor 2. Proponha um algoritmo guloso para resolver este problema. Análise sua complexidade e prove sua corretude.

4. (3.0pt) Considere um tabuleiro de xadrez (4x4) com as casas numeradas de 1 a 16. Seja $G = (V, E)$ um grafo, aonde $V = \{1, ..., 16\}$ e

$$E = \{ij| \text{ as casas i e j são adjacentes (separadas por uma reta) no tabuleiro}\}.$$

Além disso, assuma que o custo da aresta entre i e j é $i \times j$.

a) Desenhe G e compute uma árvore geradora mínima para G. Explique com palavras o algoritmo utilizado e analise sua complexidade.

b) Encontre a árvore de caminhos mais curtos (de menor peso) entre o nó 4 e os demais nós do grafo. Explique com palavras o algoritmo utilizado e analise sua complexidade.