Rio de Janeiro, 30 de Novembro de 2009.
PROVA 2 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER
DURAÇÃO: 3 HORAS

1. (2.0pt) Seja $T(n)$ o número distintos de árvores binárias ordenadas com n nós. Sabe-se que $T(n)$ respeita a seguinte equação de recorrência:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i) \times T(n-1),$$

se $n > 1$ e $T(1) = 1$.

a) Descreva um algoritmo eficiente para calcular $T(n)$

b) Analise a complexidade do algoritmo

2. (2.0pt) Em sala de aula estudamos o problema de determinar a ordem ótima para multiplicar uma sequência de n matrizes $A_1, A_2, ..., A_n$, aonde a matriz $A(i)$ tem $p(i-1)$ linhas e $p(i)$ colunas. Assuma que já calculamos, para todo $1 \leq i < j \leq n$, o custo da solução ótima para multiplicar a subsequência de matrizes $A_i...A_j$ e armazenamos este valor na posição $M[i,j]$ de uma tabela M. Note que

$$M[i,j] = \min_{i \leq k < j} \{M(i,k) + M(k+1,j) + p(i-1)p(k)p(j)\},$$

se $i < j$ e $M(i,j) = 0$, se $i = j$.

Descreva um pseudo-código para determinar o menor k tal que as matrizes A_k e A_{k+1} são multiplicadas na solução ótima. Exemplo: se a solução ótima para multiplicar $A_1, ..., A_5$ consiste na seguinte parentização $(A_1(A_2(A_3A_4)))A_5$ então o valor de k é 3. Por outro lado, se a parentização é $(A_1A_2)((A_3A_4)A_5)$ então o valor de k é 1.

3.(2.0pt) Seja $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ um conjunto de números reais **distintos** e seja b_i o i-ésimo menor elemento de A. Dados os inteiros K e L, com $1 \leq K < L \leq n$, descreva como seria um algoritmo eficiente para calcular $\sum_{j=K}^{L} b_j$ e analise sua complexidade. Quanto mais eficiente o algoritmo maior a pontuação.

4. (2.0pt) Considere um conjunto de n moedas $A = \{c_1, \ldots, c_n\}$, aonde o valor da moeda c_i é o número inteiro **positivo** v_i. Dado um inteiro positivo V, o problema do troco consiste em encontrar o menor subconjunto S de moedas de A que devemos utilizar para dar um troco de valor V. Para responder os itens

abaixo assuma $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_n$ e também que existe um subconjunto $T \subseteq A$ tal que a soma dos valores das moedas de T seja V, ou seja, só estamos considerando entradas para o problema que tem pelo menos uma solução possível. Considere o algoritmo guloso abaixo.

$aux \leftarrow V$
$S \leftarrow \emptyset$
Para $i = 1$ até n
    Se $v_i \leq aux$
        $S \leftarrow S \cup \{c_i\}$
        $aux \leftarrow aux - v_i$
    Fim Se
Fim Para

a) O algoritmo guloso sempre calcula a solução ótima? Por que?

b) Neste item considere que todos os v_i's são potências de 2. Mostre que o algoritmo guloso sempre calcula a solução ótima. Esse item vale entre (-0.5pt e 1.0pt). Soluções que demonstrem total falta de conhecimento receberam nota -0.5.

5(3.0pt). Seja $G = (V, E)$ um grafo onde cada vértice corresponde a um ponto do conjunto $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 25$ e x, y são inteiros positivos$\}$.

Cada par de vértices esta ligado por uma aresta e o custo da aresta entre dois vértices associados aos pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é $|x_1 - x_2| + y_1 + y_2$. O custo de um conjunto de arestas é a soma dos custos das arestas do conjunto.

a) Quantos vértices e quantas arestas tem esse grafo? Quem são os pontos associados aos vértices?

b) Um conjunto de aresta E' é dito k-bom se o grafo $G' = (V, E')$ tem k componentes conexas. Encontre o conjunto de arestas 6-bom de menor custo. Qual é seu custo?

c) Assuma agora que existe uma aresta entre dois vértices (x_1, y_1) e (x_2, y_2) **se e somente se** $|x_1 - x_2| \leq 1$ e $|y_1 - y_2| \leq 1$. Qual o caminho de custo mínimo entre os vértices correspondentes aos pontos $(1, 1)$ e $(3, 4)$ em G?