Rio de Janeiro, 25 de Setembro de 2007.
PROVA 1 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

1. Encontre uma função $f(n)$ tal que a complexidade de tempo do pseudo-código abaixo é $\Theta(f(n))$. Assuma que todas as operações de soma, multiplicação e divisão tem complexidade $O(1)$.

Pseudo-Código

```
    Cont ← 1
    Para  i=1 até n
        Cont ← 2 × Cont
    Fim Para

    Enquanto Cont ≥ 1
        Cont ← Cont/2
        Para j = 1 a n
            t ← 1
        Fim Para
    Fim Enquanto
```

2. Responda verdadeiro ou falso justificando.

a) O fato de um algoritmo ter complexidade de pior caso $\Omega(n^2)$ implica que existe $c > 0$ e n_0 tal que para toda entrada de tamanho $n > n_0$ o algoritmo executa pelo menos cn^2 operações elementares.

b) O fato de um algoritmo A ter complexidade de pior caso $O(n^3)$ e um algoritmo B ter complexidade de pior caso $O(n^4)$ implica que para toda entrada de tamanho n, B realiza pelo menos o mesmo número de operações elementares que A

c) O fato de um algoritmo A ter complexidade de pior caso $O(n^3)$ e um algoritmo B ter complexidade de pior caso $O(n^4)$ implica que pelo menos para uma entrada de tamanho n o número de operações elementares que B realiza é maior ou igual ao número que A realiza.

d) O fato de um algoritmo A ter complexidade de pior caso $\Theta(n^3)$ e um algoritmo B ter complexidade de pior caso $\Theta(n^4)$ implica que existe n_0 tal que para pelo menos uma entrada de tamanho $n > n_0$ B realiza mais operações elementares que A

3.(2.0pt) Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não direcionado. Uma ponte é uma aresta $e \in E$ tal que se removermos e de G o grafo fica desconectado.

a) Mostre que se a aresta uv não é uma ponte então existe um ciclo em G que contem os vértices u e v.

b) Descreva com palavras como seria um algoritmo para contar o número de pontes do grafo. Qual a complexidade deste algoritmo ?

4. No pseudo-código abaixo $rand(j)$ retorna um inteiro aleatóreo entre 1 e j em tempo $O(1)$. Além disso, Q é um tipo abstrato de dados que suporta as seguintes operações

- Insira(Q,j). Esta operação insere o inteiro j em Q
- Remove-Mínimo(Q). Esta operação remove o menor elemento de Q

PSEUDO-CÓDIGO
Para i variando de 1 a n^2 faça.
    Insira(Q, rand($10n^2$))
Para i variando de 1 a n^2 faça.
    Remova-Mínimo(Q)

a) Qual a complexidade do pseudo-código acima em função de n quando Q é implementado como uma lista encadeada ?

b) Qual a complexidade do pseudo-código acima em função de n quando Q é implementado como um heap binário ?

5. (2.0pt) Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado. Assuma que cada vértice v do grafo tem uma importância $Imp(v)$ que pode ser obtida em $O(1)$ acessando o vetor Imp. A *qualidade* de um nó u é dada pela fórmula $\sum_{v \in V} d(u, v) Imp(v)$, onde $d(u, v)$ é a distância de u a v no grafo G.

Modifique o pseudo-código da busca em largura abaixo para que este determine o vértice de V com maior qualidade. Análise a complexidade do algoritmo desenvolvido

BFS

```
Procedure BFS(G,s)
    Marque s como visitado
    ENQUEUE(Q,s)
    while Q ≠ ∅
        u ← DEQUEUE(Q)
        For each v ∈ Adj[u]
            if v não visitado then
                Marque v como visitado
                ENQUEUE(Q,v)
        End For
    End While
```

Figura 1: Pseudo-Código de uma BFS