Rio de Janeiro, 28 de Setembro de 2005.
PROVA 1 DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS
PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER
DURAÇÃO: 2 HORAS

Questão 1 Nos anos 80, muitos computadores utilizavam fitas K7 como unidade de armazenamento. O acesso a informação nestas fitas era sequencial, ou seja, devia-se partir da posição inicial da fita e ir percorrendo os arquivos em ordem até chegar no arquivo desejado. Como exemplo, considere uma fita K7 com 3 arquivos armazenados: A,B e C, com tamanhos 3Kb, 5Kb e 2Kb. Além disso, assuma que A esta armazenado antes de B que esta aramazenado antes de C. Neste caso, o custo para acessar o arquivo A é 0, o custo para acessar B é 3 e o custo de acesso à C é $3 + 5 = 8$.

Problema Dados n arquivos $A_1, \ldots, A_n$ com tamanhos $l_1, \ldots, l_n$ e probabilidades de acesso $p_1, \ldots, p_n$, o problema consiste em determinar de que maneira devemos ordenar os arquivos na fita de modo a minimizar o custo esperado de acesso, que é definido como

$$\sum_{i=1}^{n} p_{(i)} \left(\sum_{j=0}^{i-1} c_{(j)} \right),$$

onde $p_{(i)}$ e c$_{(i)}$)($não confunda com$ p$_i$ e c_i) são, respectivamente, a probabilidades de acesso e o custo do i-ésimo arquivo colocado na fita.

a) Considere a estratégia gulosa que consiste em ordenar os arquivos por ordem crescente de tamanhos. Mostre uma instância do problema, com $n = 4$, em que esta estratégia funciona e outra instância, também com $n = 4$, em que esta estratégia não funciona.

a) Considere a estratégia gulosa que consiste em ordenar os arquivos por ordem decrescente de probabilidades de acesso. Mostre uma instância do problema, com $n = 4$, em que esta estratégia funciona e outra instância, também com $n = 4$, em que esta estratégia não funciona.

c) Considere a estratégia gulosa que consiste em ordenar os arquivos por ordem crescente da razão entre a probabilidades de acesso e o custo. Prove que esta estratégia é ótima.

Questão 2 Dada uma sequência A de n números distintos $(a_1, \ldots, a_n)$, o problema consiste em encontrar o tamanho da maior subsequência crescente de A. Como exemplo, se $A = (2, 6, 4, 7, 3, 1, 9)$, então o tamanho da maior subsequência crescente é 4, devido as subsequências $(2, 4, 7, 9)$ e $(2, 6, 7, 9)$.

a) Defina $L(i)$ como o tamanho da maior subsequência crescente de $a_1, \ldots, a_i$ que inclui a_i. Determine o valor de $L(1)$ e uma relação de recorrência entre $L(i)$ e $L(1), \ldots, L(i-1)$, para $i > 1$.

b) A partir da relação obtida no item anterior, indique como seria um algoritmo polinomial para calcular os valores dos $L(i)$'s e análise a complexidade deste.

c) Uma vez que os $L(i)$'s já foram calculados, mostre como obter o valor da maior subsequência crescente em tempo linear ?

Questão 3 Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado e seja e uma aresta em E.

a) Explique como seria um algoritmo polinomial para determinar se G tem uma ciclo que inclui a aresta e ou não. Analise a complexidade do algoritmo.

b) Explique como seria um algoritmo polinomial para encontrar o menor ciclo de G que contem a aresta e. Analise a complexidade do algoritmo.

c) Explique como seria um algoritmo polinomial para encontrar o menor ciclo do grafo. Analise a complexidade do algoritmo proposto.

Questão 4 Considere uma árvore binária T n nós. Cada nó v de T esta rotulado com um número real x_v. Assuma que todos rótulos são distintos. Um nó v é um mínimo local se o rótulo de v é menor que o rótulo de todos nós ligados a ele.

a) Mostre que um mínimo local sempre existe.

b) Mostre como encontrar um mínimo local em T utilizando no máximo $O(\log n)$ entre rótulos.