Rio de Janeiro, 20 de Julho de 2011.

PROVA FINAL DE PROJETO E ANÁLISE DE ALGORITMOS

PROFESSOR: EDUARDO SANY LABER

DURAÇÃO: 3:00h

1 (2.0pt). Seja $U = \{o_1, ..., o_n\}$ um conjunto de itens, onde o item o_i tem peso w_i e valor v_i, para $i = 1, \ldots, n$. Além disso, seja uma mochila que suporta no máximo W unidades de peso, aonde W é um número positivo. Assuma que os itens são divisíveis, ou seja, é possível levar uma fração de cada item (e.g. se o item i pesa 3kg então é possível levar 2.7Kg dele).

a) Proponha um algoritmo que encontra o valor máximo que pode ser colocado na mochila sem exceder a capacidade W. Analise a complexidade do algoritmo proposto.

a) Mostre que o algoritmo proposto no item (a) é ótimo.

2. (3.0pt) Seja $U = \{o_1, ..., o_n\}$ um conjunto de itens, onde o item o_i tem peso **inteiro** w_i e valor v_i, para $i = 1, \ldots, n$. Além disso, seja uma mochila que suporta no máximo W unidades de peso, aonde W é um número inteiro positivo. Definimos $OPT(i, P)$, para $i = 1, \ldots, n$ e $0 \leq P \leq W$, como o valor máximo que pode ser obtido colocando um subconjunto de $\{o_1, ..., o_i\}$ na mochila sem exceder o peso P.

a) Explique como seria um procedimento polinoial em n e W para calcular $OPT(n, W)$. Análise a complexidade de tempo e de espaço do procedimento

b) Como seria um procedimento não recursivo para calcular $OPT(n, W)$. O espaço utilizado tem que ser $O(W)$.

c) Assuma que temos disponível uma tabela $M[0, .., n, 0, .., W]$, onde $M[i, P]$ armazena $OPT(i, P)$. Escreva o pseudo-código de um algoritmo para obter em tempo $O(n)$ um subconjunto de itens ótimo, ou seja, um subconjunto com peso menor ou igual a W e com valor $OPT(n, W)$.

3. (3.0pt) Seja $G = (V, E)$ um grafo direcionado com pesos nas arestas e sem ciclos negativos.

a) Como seria um algoritmo para descobrir se existe um vértice $u \in V$ tal que u alcança todos vértices de V e todos vértices de V alcançam u. Quanto mais eficiente (assintoticamente) o algoritmo maior a pontuação.

b) Responda o item (a) assumindo que todos os pesos das arestas são números positivos.

c) Responda o item (a) assumindo que todas as arestas tem peso 1.

4. (2.0pt) Considere os pseudo-códigos abaixo.

a) Faça a análise assintótica do procedimento abaixo, ou seja, determine uma função $f(n)$ tal que $T(n) = \theta(f(n))$.

Pseudo1

```
t ← 0
Cont ← 1
Para  i=1 até n^2
    Cont ← cont+1
Fim Para
Enquanto cont ≥ 1
    Cont ← cont/2
    Para j = 1 a n
        t++
    Fim Para
Fim Enquanto
```

(b) Faça a análise assintótica do procedimento abaixo, ou seja, determine uma função $f(n)$ tal que $T(n) = \theta(f(n))$.

Pseudo2

```
t ← 1
Enquanto t < n
    t ← 2t
    Para i = 1 a t
        cont ← 0
    Fim Para
Fim Enquanto
```

5.(2.0pt). Seja $G = (V, E)$ um grafo não direcionado com n vértices e m arestas. Uma cobertura para um grafo G é um conjunto de vértices $S \subseteq V$ tal que toda aresta de G é extremidade de pelo menos um vértice de S

a) Como seria um algoritmo para testar em tempo polinomial se existe uma cobertura para G de tamanho 4? Não é necessário se preocupar com a eficiência do algoritmo, basta garantir que ele é polinomial em n e m.

b) Analise a complexidade do algoritmo proposto.