

1 数学专业多元微积分教学的几点体会

2 刘轼波*

3 厦门大学数学系, 厦门 361005

5 本文介绍了我在厦门大学数学系为二年级第 1 学期的本科生讲授多元微
6 积分的一些做法. 我们特别强调向量值函数的微分学和将实际问题转化
7 为积分的微元分析法. 另外, 我们举例说明如何把学生已掌握的线性代数
8 和常微分方程知识引入多元微积分中来, 得到有重要意义的结果.

9 1 引言

10 数学分析是数学类专业本科生最重要的基础课, 因此各高校的数学院系
11 对这门课都极为重视. 2009 年, 我国启动基础学科拔尖学生培养试验计划.
12 从 2014 年秋季起, 厦门大学数学科学学院对入选该计划的本科生的主要课程
13 实行小班教学, 由我负责该班二年级第 1 学期的数学分析 (即数学分析 3) 的
14 教学工作. 这门课的主要内容就是多元微积分. 为了行文方便, 下文中的数学
15 分析也专指多元微积分.

16 对这些优秀学生实行小班教学的意图, 当然是希望在教学内容等方面突破
17 传统教材的框架, 力求有所创新, 更好地完成数学人才培养任务. 因此, 我对这
18 门课进行了一些思考和探索, 逐步形成了有特色的课程内容体系, 在几年的教
19 学过程中逐步形成了一份讲义 [4]. 此外, 我与教过的本科生合作, 发表了两篇
20 关于多元微积分的论文 [19, 20]; 这些结果现在已经成为我的课程的标准内容.
21 此外, 我在北京大学、北京师范大学、南京大学和浙江大学等高校为本科生做
22 有关的学术报告 [5], 介绍我们在数学分析方面的工作; 2017 年、2018 年应邀
23 在复旦大学举办的数学分析教学研讨会做报告.

24 2019 年 6 月, 我应邀在国家天元数学东南中心举办的数学专业课程建设
25 研讨会做报告¹. 本文是根据这个报告的内容整理而成.

26 作者感谢北京大学张恭庆院士对基础课教学工作的关心和邀请我到北
27 京大学做报告, 感谢复旦大学楼红卫教授连续两次邀请我到复旦大学举办的

*email: liusb@xmu.edu.cn

¹此次课程建设研讨会网址: <http://tianyuan.xmu.edu.cn/activities/19-20/sxkc2019/index.html>

28 数学分析教学研讨会做报告, 感谢安排我为本科生做报告的有关高校. 作者
29 的教学改革和科学研究工作分别受到教育部基础学科拔尖学生培养试验计
30 划 (20180707) 以及国家自然科学基金项目 (11671331) 的资助.

31 2 课程现代化及与现代数学的联系

32 现代数学很多内容都是高维的, 适应向量记法并能熟练操作向量值函数,
33 是成为优秀数学家必须的素养. 因此, 我在讲授多元微积分时, 特别强调向量
34 的记法以及向量值函数. 可能很多人都已经意识到: 数学分析中很多概念和定
35 理, 用分量形式表达非常繁琐, 而用向量形式则非常简洁, 并且更能凸显数学
36 内容的实质和内在联系; 这应该已经成为很多同行的共识了. 除此之外我在教
37 学中还进一步发现: 若不涉及向量值函数, 则无法充分展现微分学的基本思想!
38 这一点我们将在下文进一步阐述 (见注 3.3). 由此可见, 在多元微积分教学中
39 仔细讲解向量值函数, 是在教学中应该提倡的一项举措.

40 数学分析通常被认为是一门古老的学问. 其实, 只要细加研究, 是可以发
41 现数学分析的内容与现代数学的一些联系的. 我们在教学中, 应该善于找到这
42 些联系并展现给学生. 以下我结合自己的教学实践举几个例子.

43 例 2.1. \mathbb{R}^m 中不存在既开又闭的非空真子集.

44 众所周知, 在拓扑学中这个结论就是 \mathbb{R}^m 的连通性. 在拓扑课中一般是先
45 利用确界讨论得到 \mathbb{R} 的连通性, 再由连通空间的乘积空间也连通得到 \mathbb{R}^m 的
46 连通性. 当然, 如果先证明道路连通空间必连通, 则这个结论也可以直接由 \mathbb{R}^m
47 道路连通这个显而易见的事实推出. 下面我们提供一个更直观的证明.

48 证. 设 \mathbb{R}^m 的非空子集 U 既开又闭, $U \neq \mathbb{R}^m$. 取 $a \in \mathbb{R}^m \setminus U$, 因 U 闭,
49 有 $x \in U$ 使

$$50 \quad |x - a| = \inf_{y \in U} |y - a|.$$

51 因 U 开, 可在 x 附近取点 $x' \in U$ 使 $|x' - a| < |x - a|$; 这就与上式矛盾.

52 我们在数学分析课中介绍这个简单的例 2.1, 是为了得到以下经典结果.

53 例 2.2. 设 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 C^1 -映射, 对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\det f'(x) \neq 0$. 若 f 是强
54 制的, 即 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $|f(x)| \rightarrow \infty$, 则 $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$.

55 证. 事实上, 运用反函数定理, 由 f 的 Jacobi 行列式处处非零可知 f 的值域
56 为开集; 由 f 强制可知 f 的值域为闭集. 因此由例 2.1 即知 f 的值域是 \mathbb{R}^m .

57 注 2.3. 例 2.2 的结论相当于对 $\forall b \in \mathbb{R}^m$, 都有 $x \in \mathbb{R}^m$ 使 $f(x) = b$. 因此
 58 例 2.2 可以看作非线性代数方程组的求解问题. 此例也可以通过研究 $\varphi : x \mapsto$
 59 $|f(x) - b|^2$ 的最值来证明. 进一步, 对 φ 应用山路定理 [12], 还可以证明在
 60 例 2.2 的条件下 f 是单射, 因此 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是微分同胚, 详见 [17].

61 鉴于方程的求解是数学的中心问题, 以及例 2.2 的简单性, 我们认为任何
 62 学过多元微积分的数学类本科生都应该至少知道例 2.2 的上述两种证明方法.
 63 不幸的是在某些 985 高校, 即使是入选拔尖计划的优秀学生也完全不知道这个
 64 例子.

65 注 2.4. 在 [19] 中, 我们把例 2.2 的结论推广为: 设 $n \geq 2$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
 66 是 C^1 -映射, 仅有至多有限个 $x \in \mathbb{R}^m$ 使 $\text{rank } f'(x) < n$. 若 $f(\mathbb{R}^m)$ 是闭集,
 67 则 $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. 由这个结果, 我们立刻得到代数基本定理.

68 变分方法在近现代数学中有重要的地位. 我们在多元函数积分学部分, 作
 69 为散度定理的应用, 可以用变分的思想推导极小曲面方程; 这是把泛函极值问
 70 题转化为求解偏微分方程. 为了研究数学、物理中一些重要的非线性偏微分
 71 方程解的存在性, 我们也可以反其道而行之, 把方程求解的问题归结为寻找
 72 某个能量泛函的极值点或更一般的临界点, 这就是非线性微分方程的变分方
 73 法 [10, 14]. 在数学分析这样的基础课中当然不可能过多涉及偏微分方程, 但是
 74 通过研究非线性代数方程来展示变分方法的威力, 应该是很有趣的.

75 例 2.5. 设 $A = (a_i^j)_{m \times m}$ 是正定矩阵, $\theta \in (1, 2)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^m)$ 满足 $|F(x)| \leq$
 76 $C(1 + |x|^\theta)$, $f = \nabla F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. 则非线性代数方程组

$$77 \quad \sum_{i=1}^m a_i^j x^i = f^j(x^1, \dots, x^m), \quad (j = 1, \dots, m)$$

78 即 $Ax = f(x)$ 有解.

79 证. 考虑 C^1 -函数 $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,

$$80 \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - F(x).$$

81 则 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $\Phi(x) \rightarrow +\infty$, 于是 Φ 在 \mathbb{R}^m 中的某点 ξ 达到最小值. 由多元
 82 函数极值的必要条件 (Fermat 定理) 我们有 $\nabla \Phi(\xi) = 0$, 即 $A\xi = f(\xi)$. 这 ξ
 83 就是 $Ax = f(x)$ 的解.

84 作为我们在 [20] 中给出的 m -重积分换元公式新证明的简单推论, 我们立
 85 刻得到 m -维 Brouwer 不动点定理 (见注 4.8). 不动点理论也是现代数学中的
 86 重要内容, 应用 Brouwer 不动点定理我们可以改进例 2.5 的结果. 在以下的
 87 例 2.6 中, A 不必是对称矩阵, f 也不必是某个数量值函数 F 的梯度.

88 例 2.6. 设 A 是 m -阶可逆矩阵, $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续且

89
$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0, \quad (2.1)$$

90 则非线性代数方程组 $Ax = f(x)$ 有解.

91 设 $b \in \mathbb{R}^m$, 常值映射 $f: x \mapsto b$ 显然满足例 2.6 要求的条件. 于是由
92 例 2.6 可知当 A 是可逆矩阵时, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解. 因此例 2.6
93 可以看作线性代数中的 Cramer 法则的非线性推广. 方程组 $Ax = f(x)$ 的求
94 解问题等价于求映射 $g: x \mapsto A^{-1}f(x)$ 的不动点. 运用 (2.1) 我们可以找到充
95 分大的 $r > 0$ 使 $g(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$, 这里 \bar{B}_r 是球心在原点半径为 r 的闭球, 于是可
96 以应用 Brouwer 不动点定理得到 $g: \bar{B}_r \rightarrow \bar{B}_r$ 的不动点. 具体细节我们留给
97 读者.

98 3 充分展现微积分的基本思想

99 进行多元微积分的教学, 当然应该透彻地讲清楚微积分的基本思想, 把它
100 展现在学生面前. 我们先来谈微分学, 首先回顾一下非线性映射 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$
101 在点 $a \in \mathbb{R}^m$ 的导数的概念. 如果有 $n \times m$ 矩阵 A , 使得当 $h \rightarrow 0$ 时

102
$$f(a+h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad (3.1)$$

103 就称 f 在点 a 可微; 并将由此性质唯一确定的 A 称为 f 在 a 的 (全) 导数,
104 记为 $f'(a)$. 熟知, A 其实就是 f 在 a 点的 Jacobi 矩阵. 当然, 我们也可以
105 把 $A = f'(a)$ 视为 \mathbb{R}^m 到 \mathbb{R}^n 的线性映射.

106 从定义来看, 线性映射 $f'(a)$ 是非线性映射 $h \mapsto f(a+h) - f(a)$ 的近似,
107 因此有时也称其为 f 在 a 点的线性化. 由于线性映射比非线性映射容易研究,
108 我们很自然就希望能够通过考察 $f'(a)$ 来研究 f .

109 我们认为微分学的基本思想就是通过研究非线性映射 $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在
110 点 a 的导数 $f'(a)$ 来推断 f 在 a 附近的局部性质. 大体上说: $f'(a)$ 如何, f
111 就大约如何 (见例 3.1). 这里需要向学生强调的是, 由于 f 在 a 点的可微性
112 以及其导数的值都只与 f 在 a 点附近的行为有关, 所以我们只能期望得到 f
113 在 a 点附近的局部性质. 我们来看一个典型的例子. 为了方便起见, 我们用 \mathcal{N}_a
114 表示含 a 的开集构成的集族.

115 例 3.1. 设 $\Omega \in \mathcal{N}_a$, $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^k -映射.

116 (1) 若 $f'(a): \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 可逆 (必 $m = n$), 则 f 在 a 局部可逆. 即有 $U \in \mathcal{N}_a$
117 及 $V \in \mathcal{N}_{f(a)}$ 使 $f: U \rightarrow V$ 是双射, 且 f^{-1} 也是 C^k -映射.

(2) 若 $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是满射 (必 $m \geq n$), 则 f 在 a 局部满. 其确切含义是: $b = f(a)$ 是 $f(\Omega)$ 的内点. 也就是说 b 点附近的点都在 f 的值域中, 所以我们把这个结论称为局部满射定理. 特别地, 如果对 $\forall x \in \Omega$, $f'(x)$ 都是线性满射, 则 $f(\Omega)$ 是 \mathbb{R}^n 的开子集.

(3) 若 $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射 (必 $m \leq n$), 则 f 在 a 局部单.

注 3.2. 结论 (1) 正是反函数定理. 结论 (2)、(3) 则是其推论; 它们以及更一般的秩定理, 都可以通过补充量的方法转化为相同维数的空间之间的映射, 然后应用反函数定理来证明. 这是应用反函数定理的典型手法.

注 3.3. 我们认为例 3.1 是体现微分学基本思想的最佳范例: 它很好地表现了 $f'(a)$ 如何, f 就大约如何这个思想. 只有用向量值函数, 才能把它表达得如此简练、清楚. 如果按传统的教法, 只讨论数量值函数 (即 $n = 1$ 的情形), 则情形 (1)、(3) 不可能出现, 而情形 (2) 也只在 $f'(a) \neq 0$ 这个平凡的情形出现, 因此就没法通过这个最佳范例展现微分学的基本思想, 这无疑是一个巨大的损失.

局部满射定理、局部单射定理以及更一般的秩定理, 对学生今后学习微分流形非常重要. 因此在数学分析课中应该不回避向量值函数、把这几个并不困难的定理讲清楚. 这样一来, 数学分析的教学才能进入广阔的新天地. 例如, 郑州大学马建国编著的教材 [6] 中用局部满射定理给出约束极值的 Lagrange 乘数法的一个有趣的几何证明; 注 2.4 中提到的我们的工作 [19] 也是用局部满射定理证明的.

下面我们来谈谈多元函数积分学. 积分学用于实际问题的关键是微元法, 我们认为这就是积分学的基本思想. 至于各种积分的性质和计算方法乃至它们之间的关系形成的整套理论体系, 当然也很重要, 但大家在教学中都对此给予了足够的重视. 所以我们下面着重谈一下微元法.

由于在数学上的重要性, 我们认为微元法最重要的应用是定义 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面的面积. 在我们的多元微积分教学体系中, 这是引入 \mathbb{R}^m 中的曲面积分, 进而用我们的方法证明 m -重积分换元公式的前期准备.

例 3.4 (曲面的面积). 利用 Gram-Schmidt 正交化可以定义并证明 \mathbb{R}^m 中以 a 为顶点, 以线性无关向量组 $v = \{v_i\}_{i=1}^k$ 为边的平行 $2k$ -面体 $P_a[v] = P_a[v_1, \dots, v_k]$ 的体积

$$\mu(P_a[v]) = \sqrt{\det(G^T G)}, \quad (3.2)$$

其中 $G = (v_1, \dots, v_k)$ 是以 v_i 为列向量的 $m \times k$ 矩阵.

150 设 \mathbb{R}^m 中的 k 维曲面 S 有参数表示 $x: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, 其中 U 是 \mathbb{R}^k 中有界
151 的 Jordan 可测开集, x 是满足 $\text{rank } x'(u) \equiv k$ 的单射. 则:

152 • x 将 U 中以 $du = \{du^i \varepsilon_i\}_{i=1}^k$ 为边的无穷小 $2k$ -面体 $P_{u_0}[du]$ 映成 S 上
153 面积为 $d\sigma$ 的曲面片. 这里 ε_i 是 \mathbb{R}^k 中的标准基向量, du^i 是 ε_i 方向
154 的小增量 (即这种小多面体第 i 条边的长).

155 • 模掉一个平移, $x'(u_0): \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ 则将 $P_{u_0}[du]$ 映成 S 在 $x_0 = x(u_0)$ 的
156 切空间 $T_{x_0}S$ 中的小 $2k$ -面体 $P_{x_0}[v]$. 这里 $v = \{v_i\}_{i=1}^k$,

$$157 \quad v_i = x'(u_0)(du^i \varepsilon_i) = du^i \cdot x'(u_0) \varepsilon_i.$$

158 我们用 $P_{x_0}[v]$ 的体积来近似 $d\sigma$ (这是微元法的要点), 则得到面积微元

$$159 \quad d\sigma \approx \mu(P_{x_0}[v]) = du^1 \cdots du^k \cdot \mu(P_{x_0}[x'(u_0)\varepsilon_1, \dots, x'(u_0)\varepsilon_k])$$

$$160 \quad = \sqrt{\det[(x'(u_0))^T x'(u_0)]} du^1 \cdots du^k. \quad (3.3)$$

162 这里第二个等号我们用了 (3.2). 第一个等号用到由 (3.2) 容易推知的事实: 将
163 平行 $2k$ -面体的某边伸缩为原来的 λ 倍, 则其体积变成原来的 λ 倍; 见例 4.1.

164 很自然, 当 u_0 跑遍 U 时, 我们把面积微元 $d\sigma$ 累积起来, 就得到 \mathbb{R}^m
165 中 k -维曲面 S 的面积

$$166 \quad \mathcal{A}(S) = \int d\sigma = \int_U \sqrt{\det[(x'(u))^T x'(u)]} du^1 \cdots du^k.$$

167 运用 k -重积分换元公式, 很容易证明上式右端的 k -重积分与曲面 S 的参数表
168 示的选择无关. 因此这样来定义 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面 S 的面积是合理的.

169 注 3.5. 传统的数学分析一般只处理 \mathbb{R}^3 中的二维曲面的面积, 于是也只能介绍
170 二维曲面上三元函数的曲面积分, 进而对于在偏微分方程理论中非常重要的散
171 度定理也只能讨论三维的情形. 这非常不利于学生今后学习更深入的现代数学
172 知识, 不利于培养高素质的数学研究和应用人才.

173 以下介绍的余面积公式通常并不是数学分析课的教学内容, 但是南京大学
174 梅加强编著的教材 [7] 中对它做了简单的介绍. 鉴于这个公式非常有用, 我在
175 课程中运用学生正在学的常微分方程 (在我校安排在二年级第 1 学期) 的知识
176 证明了余面积公式, 见例 4.11. 这里先用微元法形式上做些推导.

177 例 3.6 (余面积公式). 设 $G \subset \mathbb{R}^m$ 是开区域, $f: G \rightarrow \mathbb{R}$. 视 $\Omega = f^{-1}[a, b]$
178 为 \mathbb{R}^m 中的物体, $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是密度函数. 则 Ω 的质量

$$179 \quad M = \int_{\Omega} g(x) dx.$$

任取 $t \in [a, b]$. 在曲面 $f^{-1}(t)$ 上的点 x 取面元 $d\sigma$. 过 x 作法线交邻近的曲面 $f^{-1}(t + dt)$ 于 y . 则

$$dt = f(y) - f(x) \approx \nabla f(x) \cdot (y - x),$$

这里用到 f 在 x 的 Taylor 展开并略去高阶无穷小量. 由于 $\nabla f(x)$ 和 $y - x$ 都是曲面 $f^{-1}(t)$ 在 x 处的法向量, 即它们是共线的, 在上式两边取模我们得到

$$|y - x| = \frac{dt}{|\nabla f(x)|}.$$

我们用 x 处的密度 $g(x)$ 来近似代替以 $d\sigma$ 为底, $|y - x|$ 为高的柱体中各点的密度. 这柱体的体积 dV 和质量 dm 分别等于

$$dV = \frac{1}{|\nabla f(x)|} dt d\sigma, \quad dm = \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} dt d\sigma.$$

将 dm 沿曲面 $f^{-1}(t)$ 积分, 就得到环状区域 $f^{-1}[t, t + dt]$ 的质量

$$dM = \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} dt d\sigma = dt \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\sigma.$$

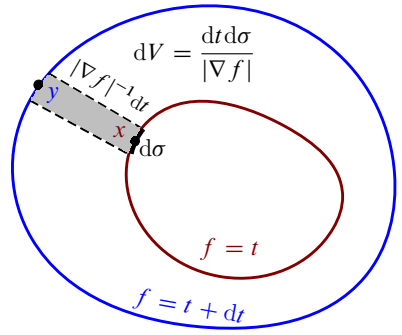
现在在 $[a, b]$ 上对 t 积分, 就得到 Ω 的总质量

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_a^b dt \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\sigma. \quad (3.4)$$

这就是余面积公式. 它其实就是化重积分为累次积分, 只不过里层积分在一个曲面上进行.

注 3.7. 本例在两个层次上运用微元法. 先取 t 方向的微元 dt , 然后在曲面 $f^{-1}(t)$ 上点 x 处取面积微元 $d\sigma$, 得出小柱体 dV 的质量微元 dm 后对 $d\sigma$ 积分得到环状区域 $f^{-1}[t, t + dt]$ 的质量 dM , 再对 dt 积分得到整个区域 $f^{-1}[a, b]$ 的质量. 因此, 这是微元法比较复杂的应用, 但是把它介绍给学生能很好地加强对微元法的理解, 从而提高运用积分解决实际问题的能力.

微元法的另一精彩应用是由 Gauss 公式推导 Archimedes 浮力定律. 这是欧阳光中编著的教材 [8] 中的一道例题, 也是陈纪修等编著的教材 [1] 中的一道习题. 因此我们这里就略而不谈了.



205 4 不同课程之间融会贯通

206 在我国大部分高校数学院系的课程设置方案中, 数学分析 3 (即多元微积
207 分) 一般被安排在二年级第 1 学期. 此时, 学生已经学完了线性代数. 传统的
208 数学分析课运用了一些线性代数的知识, 主要限于用线性映射和矩阵表达非线
209 性映射的导数 (见 (3.1))、用矩阵乘法表达复合函数求导的链锁法则, 以及通
210 过考察函数在临界点处的 Hesse 矩阵的正定性来研究极值. 另外, 在很多学校
211 二年级第 1 学期的学生同时在学习常微分方程, 但是根据我们对国内外微积分
212 或数学分析教学的了解, 我们没有看到将常微分方程的知识应用于数学分析教
213 学的做法.

214 我们在教学中发现线性代数可以对数学分析的教学发挥更大的作用. 此
215 外, 近年的教学中我们运用学生刚刚掌握的常微分方程知识来处理数学分析中
216 的一些重要问题, 也取得了很好的效果. 以下我们分别介绍这两方面的典型例
217 子.

218 4.1 线性代数

219 例 4.1 (初等矩阵的妙用). 在 (3.2) 中我们给出了 \mathbb{R}^m 中的平行 $2k$ -面体体积
220 的计算公式. 在应用中往往需要用到平行多面体的体积的性质, 这些性质可以
221 利用公式 (3.2) 结合初等矩阵来得到. 例如, 讨论 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面的面积时,
222 在 (3.3) 式我们需要以下等式

$$223 \quad \mu(P_a[v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_k]) = |\lambda| \mu(P_a[v_1, \dots, v_i, \dots, v_k]).$$

224 设 E_λ 为 k -阶单位矩阵的第 i 行乘以 λ 所得的初等矩阵, 并分别记以上式左
225 右端中括号中的向量为列向量的 $m \times k$ 矩阵为 \tilde{G} 和 G , 则由初等矩阵的性质
226 即知 $\tilde{G} = GE_\lambda$, 于是立刻就得到所需结论:

$$227 \quad \sqrt{\det(\tilde{G}^T \tilde{G})} = \sqrt{\det(E_\lambda^T G^T G E_\lambda)} = \sqrt{\lambda^2 \det(G^T G)} = |\lambda| \sqrt{\det(G^T G)}.$$

228 例 4.2 (超曲面的法向量). 设 U 是 \mathbb{R}^{m-1} 中的开集, 我们来求 \mathbb{R}^m 中以正
229 则 C^1 -映射 $x: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为参数表示的曲面 S 在点 $x_0 = x(u_0)$ 的法向量 N .

230 对 $\forall h \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\gamma: t \mapsto x(u_0 + th)$ 是 S 上过 x_0 的曲线, 其切向量

$$231 \quad \dot{\gamma}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x(u_0 + th) = x'(u_0)h.$$

232 由于 N 与 $\dot{\gamma}(0)$ 正交, 我们有

$$233 \quad 0 = \dot{\gamma}(0) \cdot N = (x'(u_0)h) \cdot N = h^T \left([x'(u_0)]^T N \right).$$

234 由 h 的任意性可知 $[x'(u_0)]^T N = 0$. 法向量 N 至少有一个非零分量, 于是
 235 此式实际上是以剩余 $m - 1$ 个分量为未知量的非齐次线性方程组. 由 x 正则
 236 即 $\text{rank } x'(u_0) = m - 1$ 可知此方程组的系数行列式非零, 于是由 Cramer 法则
 237 可求出法向量

$$238 \quad N = \left(\frac{\partial(x^2, \dots, x^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, -\frac{\partial(x^2, \dots, x^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, \dots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(x^1, \dots, x^{m-1})}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})} \right).$$

239 注 4.3. 大部分数学分析教材只用三维空间中向量的叉乘讨论 $m = 3$ 的情
 240 形, 有些教材 (例如 [7]) 运用学生比较陌生的 $(m - 1)$ 个 m -维向量的叉乘讨
 241 论 m -维情形. 例 4.2 用学生熟悉的线性代数来研究, 显得更为自然. 作为课后
 242 的练习还可以让学生运用关于 k 个含 $m - 1$ 个未知数的非齐次线性方程组的
 243 理论研究 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面的法向量问题.

244 定向是流形等一些数学对象的一个整体性质. 我们常常说 Jacobi 行列式
 245 大于零的映射保持定向, 指的是: 设 $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$, $\det \varphi'(a) > 0$,
 246 若 $\{X_i\}_{i=1}^m$ 是 $T_a \mathbb{R}^m$ 的正基, 则 $\{\varphi_* X_i\}_{i=1}^m$ 是 $T_{\varphi(a)} \mathbb{R}^m$ 的正基. 以下的例 4.4
 247 从另一个重要的角度讨论 Jacobi 行列式的符号与定向的关系.

248 例 4.4 (Jacobi 行列式的符号与定向). 设 Ω 和 D 是 \mathbb{R}^m 中的光滑闭区域,
 249 $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 是微分同胚. 设 U 是 \mathbb{R}^{m-1} 中的开集, $x : U \rightarrow \partial\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 在
 250 点 $a \in \partial\Omega$ 附近的局部参数表示, 熟知 $y = \varphi \circ x : U \rightarrow \partial D$ 是 ∂D 在 $b = \varphi(a)$
 251 附近的局部参数表示. 若 $\det \varphi'(a) > 0$, 并且

$$252 \quad N = \left(\frac{\partial(x^2, \dots, x^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, \dots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(x^1, \dots, x^{m-1})}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})} \right)$$

253 是 $\partial\Omega$ 在 a 点的外法向量, 则

$$254 \quad \tilde{N} = \left(\frac{\partial(y^2, \dots, y^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, \dots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(y^1, \dots, y^{m-1})}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})} \right)$$

255 是 ∂D 在 $b = \varphi(a)$ 点的外法向量.

256 注 4.5. 设 N 是 $\partial\Omega$ 在 $a \in \partial\Omega$ 的法向量. 若有 $\varepsilon > 0$, 使得当 $t \in (-\varepsilon, 0)$
 257 时 $a + tN \in \Omega^\circ$, 就称 N 是 $\partial\Omega$ 在 a 处的外法向量. 例 4.4 的关键是证明 D
 258 中的曲线 $\gamma : t \mapsto \varphi(a + tN)$ 在 $b = \varphi(a)$ 的切向量 v 与 \tilde{N} 的夹角是锐角.
 259 为此我们运用了扁矩阵与瘦矩阵之积的行列式的 Cauchy-Binet 公式, 以
 260 及 $A^* A = (\det A) I_m$ 等线性代数知识; 这里 A^* 是 A 的伴随矩阵, I_m 是 m -阶
 261 单位阵; 详情可见 [18].

例 4.6 (重积分换元公式). 设 D 和 Ω 是 \mathbb{R}^m 中 Jordan 可测的有界闭区域,
 $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 是 C^1 -微分同胚. 若 $f \in C(D)$, 则我们有 m -重积分的换元公式

$$\int_D f(y)dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx. \quad (4.1)$$

重积分换元公式的证明是数学分析教学中比较困难的问题. do Carmo 的名著 [15] 中有一道习题, 让读者用 Green 公式证明二重积分换元公式. 受其启发, 在 [20] 中我们把这道习题的思想推广到高维, 用数学归纳法给出 m -重积分换元公式 (4.1) 的一个比较简单的证明.

首先我们如下定义 \mathbb{R}^m 中 $(m-1)$ -维曲面 S 上的曲面积分

$$\int_S f(x)d\sigma = \int_U f(x(u)) |N(u)| du.$$

其中 $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是曲面 S 的参数表示, N 是由此参数表示按例 4.2 给出的 S 的法向量场. 由归纳假设, 即 $(m-1)$ -重积分换元公式, 容易证明上式右端与 S 的参数表示的选择无关.

然后, 利用化重积分为累次积分容易证明 m -维散度定理. 最后利用散度定理证明 m -重积分换元公式, 这时我们需要用到 Cauchy-Binet 公式, 行列式按行展开等线性代数知识.

注 4.7. 与划分积分区域并估计每个小块变换后的体积, 进而研究 Riemann 和的传统证明相比, 我们在 [20] 中给出的上述证明完全是巧妙的计算, 便于课堂讲授, 学生也容易掌握. 这个证明基于链法则和微积分基本定理 (即散度定理), 在思想上与一元情形 (即定积分) 是一脉相承的. 因此, 有一定理由相信这是证明重积分换元公式最合理的办法.

在证明的过程中, 我们顺便建立了 (第一类) 曲面积分的理论, 包括 m -维的散度定理. 因此从需要的学时来看, 可能比其他方法会节省一些. 利用曲面的参数表示将曲面积分定义为参数区域上的 $(m-1)$ -维积分, 是近些年来很多数学分析教材 (例如 [2, 7, 8, 22]) 采用的做法. 当然, 这些教材需要先证明重积分换元公式, 以保证曲面积分的定义与曲面的参数表示的选择无关.

注 4.8. 在我们的证明中, 当 Ω 是球体时, 我们只要求换元映射 φ 将 $\partial\Omega$ 微分同胚地映成 ∂D , 也就是说 $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 可以既不单也不满. 于是, 用 [13] 中的想法立刻就得到 m -维 Brouwer 不动点定理. 据我们所知, 国内外出版的数学分析教材中几乎都没能探讨高维的 Brouwer 不动点定理, 除非先花大量篇幅介绍微分流形、微分形式以及流形上的积分和 Stokes 公式 (见 Zorich [24]). 张筑生教授的教材 [11] 用 Green 公式证明了二维的 Brouwer 不动点定理. 关于 Brouwer 不动点定理的其他初等证明 (即只用微积分), 可见 [16, 21].

294 4.2 常微分方程

295 设 $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in S = g^{-1}(0)$ 有 $\nabla g(x) \neq 0$, 则 S 是 \mathbb{R}^m 中的光滑曲
 296 面. 设 $p \in S$. 众所周知, $\nabla g(p)$ 与 S 上任一经过 p 点的曲线 γ 的切向量 $\dot{\gamma}(0)$
 297 都正交, 因此 $\nabla g(p)$ 是 S 在 p 点的法向量. 一个自然的问题是: 设 $h \in \mathbb{R}^m$,
 298 $\nabla g(p) \cdot h = 0$, S 上是否有经过 p 点的曲线以 h 为切向量? 这个问题与约束
 299 极值的 Lagrange 乘数法有关. 对此, 我们有如下结果.

300 例 4.9. 设 $g \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $p \in S = g^{-1}(0)$, $\text{rank } g'(p) = n$. 若 $g'(p)h = 0$,
 301 则有 C^1 -映射 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 使 $\gamma(0) = p$ 且 $\dot{\gamma}(0) = h$.

302 利用这个结论, 可以研究 $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ 在约束条件 $g(x) = 0$ 下的约束极
 303 值问题, 证明 Lagrange 乘数法. 一些数学分析教材运用隐函数定理给出例 4.9
 304 的证明, 这是隐函数定理的漂亮应用, 我们的课上当然也会讲. 但是, 我们还运
 305 用常微分方程的方法给出如下证明.

306 证. 因 $\text{rank } g'(p) = n$, 可取 $\delta > 0$ 使 $\{\nabla g^i\}_{i=1}^n$ 在 $B_\delta(p)$ 线性无关. 对 $q \in$
 307 $B_\delta(p)$, 令 $Y(q)$ 是 h 在 $T_q S$ 的投影, 则得 C^1 -映射 $Y : B_\delta(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$. 由常微
 308 分方程解的存在唯一性定理可知初值问题

$$309 \quad \dot{\gamma}(t) = Y(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = p \quad (4.2)$$

310 有解 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$, 显然 $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = Y(p) = h$.

311 用 Gram-Schmidt 正交化将向量场 Y 用 ∇g^i 线性表示, 并利用 (4.2) 以
 312 及 $g'(p)h = 0$ 容易验证 $(g \circ \gamma)'(t) = 0$. 故 $g(\gamma(t)) = g(p) = 0$, 即 $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset$
 313 S .

314 注 4.10. 我们要求 $g \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 是为了对 (4.2) 应用常微分方程解的存在
 315 唯一性定理. 如果用隐函数定理来证明的话, 只需要 $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. 上述
 316 证明是受 [23, Ch3] 启发做出的, 那里考虑的是 $n = 1$ 的情形, 此时

$$317 \quad Y(q) = h - \frac{h \cdot \nabla g(q)}{|\nabla g(q)|^2} \nabla g(q).$$

318 在例 3.6 中我们曾用微元法导出余面积公式. 作为常微分方程对数学分析
 319 的应用的另一个例子, 我们现在来证明余面积公式.

320 例 4.11 (余面积公式). 设 $G \subset \mathbb{R}^m$ 为有界开集, $f \in C^2(G)$, $\Omega = f^{-1}[a, b]$.
 321 对任意 $x \in \Omega$ 有 $\nabla f(x) \neq 0$. 若 $g \in C(\Omega)$, 则

$$322 \quad \int_{\Omega} g(x) dx = \int_a^b dt \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\sigma.$$

证. 为简单起见我们只考虑 $f^{-1}(a)$ 有统一的参数表示的情形, 设 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是其参数表示. 利用常微分方程初值问题

$$\dot{x} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad x(a) = p \in f^{-1}(a) \quad (4.3)$$

的解 $x = x(t, p)$ 可构造微分同胚 $T: U \times [a, b] \rightarrow \Omega$, $(u, t) \mapsto x(t, \varphi(u))$. 利用行列式按列展开、共线向量内积的绝对值等于它们的模之积以及 (4.3), 容易算出

$$|\det T'(u, t)| = \frac{|N_t(T(u, t))|}{|\nabla f(T(u, t))|}.$$

这里 N_t 是曲面 $f^{-1}(t)$ 的参数表示 $u \mapsto T(u, t)$ 按照例 4.2 的方式确定的法向量. 于是由重积分换元公式和化重积分为累次积分即得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) dx &= \int_{U \times (a, b)} g(T(u, t)) |\det T'(u, t)| du dt \\ &= \int_a^b dt \int_U g(T(u, t)) \frac{|N_t(T(u, t))|}{|\nabla f(T(u, t))|} du = \int_a^b dt \int_{f=t} \frac{g}{|\nabla f|} d\sigma. \end{aligned}$$

注 4.12. 上述余面积公式的证明与我的研究领域临界点理论 [10] 中的形变引理有密切关系. 这个证明也可以看作伍洪熙等教授的书 [9] 第 11 章讲述的 Riemann 流形上的余面积公式在欧氏空间情形的初等版本. 然而 [9] 中的证明需要很多微分流形和 Riemann 几何方面的预备知识, 所以我需要把这些高级的概念解包, 整理成上述的初等证明, 其中的一个关键之处是上述证明中提及的对 $\det T'(u, t)$ 的巧妙计算. 我们给出的这个改编的证明把常微分方程、线性代数完美地结合起来, 很值得玩味, 应该会使学生受到很大的启发.

注 4.13. 我在 2018 年秋季讲完余面积公式后, 很惊喜地发现有学生运用这个公式给出如下关于等值面的 Catalan 公式的极简证明: 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 对 $\forall v \in \mathbb{R}$, 等值面 $f^{-1}(v)$ 都是封闭曲面, 设其所围立体的体积为 $F(v)$, 并且 $F \in C^1[a, b]$. 则

$$\int_{f^{-1}[a, b]} f(x) dx = \int_a^b v F'(v) dv.$$

当 $n \leq 3$ 时, Catalan 公式是林源渠、方企勤的习题集 [3] 中的题目. 由于相应教材中没讲余面积公式, 我的学生用余面积公式给出的证明当然不是 [3] 的作者期望的证明.

我们在数学分析课中系统地运用常微分方程的知识, 应该说是一个大胆的尝试, 在全世界可能都没有先例. 在我国大部分高校, 常微分方程与数学分析 3 都在二年级第 1 学期开设, 因此, 在数学分析 3 中运用常微分方程的知识是完全可行的. 我们认为这样做有助于培养学生对数学的整体观念和融会贯通地运用不同课程的知识来解决问题的能力.

355 5 结束语

356 数学类本科生在一年级主要学习一元微积分和线性代数. 这两门课分别关
357 注一维和高维, 不太可能有实质性的交叉融合; 因此一年级应该是打基础的阶
358 段. 但是正如我们已经看到的, 在二年级第 1 学期, 线性代数和常微分方程可
359 以很自然地进入数学分析的教学, 得到丰富多彩的结果. 现在看来多元微积分
360 应该是学生接触的第一门综合性的课程. 这样的交叉融合, 也有利于学生更好
361 地理解线性代数和常微分方程.

362 本文中我们多次强调, 数学分析中应该重视向量值函数. 在注 3.3 中我们
363 清楚地表明: 对向量值函数避而不谈或讲得不够, 就很难向学生充分展现微分
364 学的基本思想. 如果不熟悉向量值函数, 学生也将错过数学分析中很多精彩的
365 内容. 在二年级第 1 学期, 学生已经学完高等代数, 不应该对处理向量和向量
366 值函数有实质性的困难. 也许是因为现有的大部分数学分析教材都回避向量值
367 函数 (或把它作为选学内容) 的原因, 有些教师担心学生接受不了; 这种保守的
368 观念应该改变.

369 本文谈到的这些体会和看法, 虽然是这几年为厦门大学入选拔尖学生培养
370 试验计划的优秀学生讲授多元微积分的过程中对这门课进行思考和探索而产
371 生的, 但是我认为这些想法和做法也完全适合其他的学生 (包括非重点院校的
372 数学类本科生). 其理由是: 在二年级第 1 学期, 各类学生在知识储备上几乎没
373 有差别. 今后, 我希望能有机会把我对本门课程的教学经验应用到更广泛的学生
374 群体, 为数学教育事业做出应有的贡献.

375 参考文献

376 [1] 陈纪修, 于崇华, 金路. 数学分析 (下册). 北京: 高等教育出版社. 2014.

377 [2] 郇中丹, 刘永平, 王昆扬. 简明数学分析. 北京: 高等教育出版社. 2009.

378 [3] 林源渠, 方企勤. 数学分析习题集. 北京: 高等教育出版社. 1986.

379 [4] 刘轼波. 多元函数的数学分析, 讲义.

380 [5] 刘轼波, 欧氏空间的满射, 重积分换元公式和 Brouwer 不动点定理, 学术
381 报告.

382 [6] 马建国. 数学分析 (下册). 北京: 科学出版社. 2011.

383 [7] 梅加强. 数学分析. 北京: 高等教育出版社. 2011.

384 [8] 欧阳光中, 姚允龙, 周渊. 数学分析 (下册). 上海: 复旦大学出版社. 2012.

- 385 [9] 伍洪熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步. 北京: 北京大学出版社. 1989.
- 386 [10] 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海: 上海科技出版社. 1986.
- 387 [11] 张筑生. 数学分析新讲 (第三册). 北京: 北京大学出版社. 1991.
- 388 [12] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical
389 point theory and applications, J. Functional Analysis, 14, 349–381, 1973.
- 390 [13] L. Báez-Duarte, [Brouwer’s fixed-point theorem and a generalization of](#)
391 [the formula for change of variables in multiple integrals](#), J. Math. Anal.
392 Appl., 177, 412–414, 1993.
- 393 [14] K.-C. Chang, Methods in nonlinear analysis. Berlin: Springer-Verlag,
394 2005.
- 395 [15] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey:
396 Prentice-Hall Inc., 1976.
- 397 [16] Y. Kannai, [An elementary proof of the no-retraction theorem](#), Amer.
398 Math. Monthly, 88, 264–268, 1981.
- 399 [17] G. Katriel, [Mountain pass theorems and global homeomorphism theo-](#)
400 [rems](#), Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 11, 189–209, 1994.
- 401 [18] S. Liu, [On the sign of Jacobian and orientation of parametrized surfaces](#),
402 preprint.
- 403 [19] P. Liu, S. Liu, [On the surjectivity of smooth maps into Euclidean spaces](#)
404 [and the fundamental theorem of algebra](#), Amer. Math. Monthly, 125,
405 941–943, 2018.
- 406 [20] S. Liu, Y. Zhang, [On the change of variables formula for multiple integrals](#),
407 J. Math. Study, 50, 268–276, 2017.
- 408 [21] J. Milnor, [Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer](#)
409 [fixed-point theorem](#), Amer. Math. Monthly, 85, 521–524, 1978.
- 410 [22] J. Shurman, [Calculus and analysis in Euclidean space](#). Cham: Springer,
411 2016.
- 412 [23] J. A. Thorpe, Elementary topics in differential geometry. New York:
413 Springer-Verlag, 1994.
- 414 [24] V. A. Zorich, [Mathematical analysis. II](#). Heidelberg: Springer, 2016.