

附件 5

厦门大学一流本科课程申报书 (2021 年)

课程名称：数学分析 III

专业类代码：0701

授课教师（课程负责人）：刘轼波

联系电话：18959282023

申报类型： 线下一流课程

线上线下混合式一流课程

社会实践一流课程

申报学校：厦门大学

推荐单位：数学科学学院

填表日期：2021 年 1 月 18 日

填报说明

1. 每门课程根据已开设两学期的实际情况，只能从“线下一流课程”“线上线下混合式一流课程”“社会实践一流课程”中选择一类进行申报。
2. 申报课程名称、授课教师（含课程负责人）须与教务系统中已完成的学期一致，并须截图上传教务系统中课程开设信息。
3. 相同授课教师、不同选课编码的同一名称课程，若教学设计和教学实施方案相同，教学效果相近，可以合并申报。
4. 专业类代码指《普通高等学校本科专业目录（2012）》中的代码。没有对应学科专业的课程，填写“0000”。
5. 申报书与附件材料一并按每门课程单独装订成册，一式两份。

一、课程基本信息

(一) 线下一流课程

课程名称	数学分析 III		
课程编码+选课编码 (教务系统中的编码)	130080010109		
课程类型	<input type="radio"/> 文化素质课	<input type="radio"/> 公共基础课	<input checked="" type="checkbox"/> 专业课
课程性质	<input checked="" type="checkbox"/> 必修 <input type="radio"/> 选修		
开课年级	二年级		
面向专业	数学类各专业		
学时	96		
学分	4		
先修(前序)课程名称	数学分析 I&II、高等代数、解析几何		
后续课程名称	复变函数、实变函数、微分几何、偏微分方程等		
主要教材	数学分析(下 ISBN 978-7-04-015549-5)、陈纪修等、高教社、2004		
最近两期开课时间	20年9月13日—21年1月9日(上传教务系统截图) 19年9月14日—20年1月11日(上传教务系统截图)		
最近两期学生总人数	337		

注:(教务系统截图须至少包含课程编码、选课编码、开课时间、授课教师姓名等信息)

(二) 线上线下混合式一流课程

课程名称	
课程编码 (教务系统中的编码)	
课程类型	<input type="radio"/> 文化素质课 <input type="radio"/> 公共基础课 <input type="radio"/> 专业课 <input type="checkbox"/> 实验课
课程性质	<input type="radio"/> 必修 <input type="radio"/> 选修
开课年级	
面向专业	
学时	总学时: 线上学时: 课堂学时:
学分	
先修(前序)课程名称	
后续课程名称	
主要教材	书名、书号、作者、出版社、出版时间(上传封面及版权页)
最近两期开课时间	年 月 日— 年 月 日(上传教务系统截图) 年 月 日— 年 月 日(上传教务系统截图)
最近两期学生总人数	

授课教师（课程负责人）教学情况（300字以内）

（教学经历：近5年来在承担学校教学任务、开展教学研究、获得教学奖励方面的情况）

2020-2021学年第1学期，《数学分析3》，4学分

2019-2020学年第1学期，《数学分析3》，4学分

2018-2019学年第1学期，《数学分析3》，4学分

2017-2018学年第2学期，《拓扑学》，3学分，

2017年公派访美没承担教学任务

2016-2017学年第1学期，《数学分析3》，4学分

积极开展《数学分析》教学研究工作，对多元微积分基础理论取得原创性研究成果并用于教学实践，与教过的本科生合作在《美国数学月刊》、《数学研究》发表与数学分析有关的论文2篇；在国内的教学类刊物《高等数学研究》、《大学数学》发表论文2篇。多次应邀在教学研讨会和北大、北师大、南大、浙大等高校做数学分析方面的学术报告。

三、课程目标（300字以内）

（结合本校办学定位、学生情况、专业人才培养要求，具体描述学习本课程后应该达到的知识、能力水平。）

厦门大学作为国家重点综合性研究型大学，除培养满足经济建设需要的实用型人才之外，为我国科技事业造就一批杰出的研究型人才也是本校的重要任务。数学科学学院生源质量优秀，学风优良，每年有很多毕业生进入国内外著名研究生院深造。我院对培养数学研究和应用人才采取多种举措，力求使学生掌握扎实的数学基础理论知识、具备数学建模和计算机运用能力，为今后进一步深造和实际工作打好基础。

本课程内容是多元微积分，是后续几乎所有课程的先修课。通过本课程学生应掌握高维欧氏空间的映射的极限和连续性，进一步领会微积分基本思想；熟练运用微分学理论分析非线性映射的局部性质，掌握把实际问题转化为积分的微元法以及相关的各种积分的基本理论。

四、课程建设及应用情况（1500字以内）

（本课程的建设发展历程，课程与教学改革要解决的重点问题，课程内容与资源建设及应用情况，课程教学内容及组织实施情况，课程成绩评定方式，课程评价及改革成效等情况。）

数学分析是全球各高校数学系学生都必须学习的课程。过去几十年，厦门大学每学期都按数学分析I、数学分析II和数学分析III三门课为一、二年级本科生开设数学分析课。经过几代教师数十年的实践和积累，并汲取兄弟院校同行的经验，厦门大学的数学分析课已发展得比较成熟，多年前就入选校级精品课程。

近年来，随着国家对高校本科教学的重视，学校出台了一些课程建设项目。

刘轼波领衔的“数学分析 III”入选 2015 年大类平台课建设项目；2019 年，刘轼波领衔的“数学分析 III”入选厦门大学一流本科课程建设计划。

数学分析 III 是数学类本科生最后一学期的数学分析课。我们认为它是数学类专业学生的**第一门综合性课程**：在这里，学生首次把数学分析 I、II 中学的一元微积分与高等代数中学的线性代数结合起来，研究高维空间中的非线性问题；此外，我们的教学中还创造性地运用了学生同时在学的常微分方程的理论。因此，这门课对人才培养工作有着**特殊的重要性**。因此，加大对本课程的建设力度，持续地进行教学改革对本课程进行完善，是一项重要工作。本课程的教学改革需要重点解决以下问题。

（一）与高等代数的衔接

本课程的活动舞台是高维的欧氏空间，我们在以往的教学实践中感到学生虽然已经学完高等代数，但还不习惯从线性空间的高度用线性代数的语言来处理本课程研究的多元函数（包括向量值函数）。这也许与目前流行的教材大都以二、三元函数为例研究多元数量值函数的微积分有关。这无疑严重制约了本课程的深化发展。

（二）课程的现代化

本课程历史悠久，内容已经比较成熟。但是随着科技的蓬勃发展，它仍有不断更新、不断发展的必要。在内容上局限于古典微积分的狭隘天地，在教法上墨守陈旧的传统教材，是不能造就一流课程的。

本课程是现代数学的基础，与现代数学有着密切的联系。我们要从当前数学前沿的高度来考察这门课程，用现代数学的思想来指导课程内容的革新。适当地把现代数学引入数学分析，既深化了课程的内容，又能引起学生的兴趣、增强学生的能力。我们在这方面已有一些成功的尝试，今后还应进一步探索。

（三）对学生的训练

学习包括本课程在内的数学类课程，离不开一定的习题训练。目前，在流行的数学分析教材和参考书中，好的多元微积分习题，特别是证明题还有些不足，这有待进一步整理完善。国内外很多数学期刊专门发表适合各阶段大学生的研究论文，其中的典型代表包括国内的《高等数学研究》、《大学数学》和国外的《美国数学月刊》。训练学生的另一重要途径是引导学生阅读这些期刊上论文，这不但能增进学生的数学水平，还能使学生在阅读文献和撰写文章方面得到训练。

本课程在内容与资源建设方面已有一些成果。课程负责人刘轼波近几年对本课程有一些原创性见解。例如：在教学中加强了向量值函数微分学的内容；受 do Carmo 的微分几何教材中一道习题启发给出 n 重积分换元公式的简便证明，由此得到 n 维 Brouwer 不动点定理。近几年他在《美国数学月刊》和《数学研究》各发表 1 篇关于多元微积分的论文；应张恭庆院士邀请在北大做报告，又在北师大、南大、浙大等校给本科生做过报告；在复旦大学楼红卫教授组织的数学分析教学研讨会做特邀报告；在国家天元数学东南中心举办的课程建设研讨会做的邀请报告，将在《大学数学》发表。刘轼波撰写的多元微积分讲义，受到许多同行的好评。

课程组主要成员都从事与数学分析相关领域（调和分析、几何分析）的研究，

对本课程有深刻的理解和丰富的教学经验。

本课程的教学内容涵盖公认的应该讲授的内容，在讲法上渗入现代数学的思想，一些定理的证明大为简化。教学组织方面由课程组全体成员依据各自专长分工合作，并经常进行相关问题的交流。作为一门基础课，本课程采取闭卷考试的传统考核方式结合平时表现评定成绩。

五、课程特色与创新（500 字以内）

（概述本课程的特色及教学改革创新点。）

现代数学要求学生适应向量记法并能熟练操作向量值函数。我们还深刻地认识到若局限于数量值函数则无法充分展现微分学的基本思想！因此，在课程开始我们就趁学生刚学完高等代数，直接在 n 维欧氏空间中讨论问题，并系统讲授向量值函数微分学；大大加强微分学基本理论，以形式上最简单的反函数定理为纲，推出隐函数定理、秩定理，并给出大量应用。对约束极值的 Lagrange 乘数法我们给出三种证明。

我们强调与现代数学建立联系。例如，我们由极值必要条件通过求辅助函数的最小值给出某些非线性代数方程组解的存在性，这是现代变分方法的思想；此外我们用微分学的理论重点研究(与解方程有关的)关于欧氏空间之间的映射何时为满射的经典结果，并介绍我们的推广(美国数学月刊，2018)。

重积分换元公式是公认的难点。基于链法则和散度定理我们给出简单的证明(数学研究，2017)，此证明在思想上与定积分情形一脉相承，并立刻导出高维的 Brouwer 不动点定理。

与他人的教学方法比较，我们的讲授用到 Cauchy-Binet 公式、行列式按行展开、Cramer 法则、初等矩阵等更多的线性代数知识。此外我们大胆运用学生正在学的常微分方程证明非常有用的余面积公式。这种课程间的交叉融合有助于培养学生对数学的整体观念和融会贯通的运用能力。

六、课程建设计划（500 字以内）

（今后五年课程的持续建设计划、需要进一步解决的问题，改革方向和改进措施等。）

作为一门重要的专业基础课，本课程的建设是长期的工作。我们的“数学分析 III”这门课目前已有一定的水准(详见“附件材料 11”的第 2 个文件“数学专业多元微积分教学的几点体会”，它是课程负责人刘轼波对本课程的一个总结)。

今后五年，我们大体上有如下的计划：

1. 将刘轼波所写的课程讲义《多元函数的数学分析》进一步完善(该讲义的电子版见 <http://www.liusb.com/bk.pdf>)，包括进一步优化内容的安排和表述、增选一些好的习题、绘制一些必要的插图等；争取在著名的出版社出版
2. 向学院申请服务器空间，建设课程网站，把一些资料放在网上，方便学生下

载参考，也方便兄弟院校的师生浏览。

3. 继续贯彻我们“把教学与科研相结合”的理念，不断研究与数学分析相关的数学前沿理论(例如我们已认识到本课程还与微分拓扑学有一些联系，但对我们对微分拓扑还不是很熟悉)，把本课程进一步提升到新的高度。
4. 进行一些教学法方面的探索，研究在课上课下如何与学生有更多的交流。探讨如何组织学生以讨论班的形式，开展有规律的研讨活动。
5. 考虑开展本课程的慕课或微课建设，借助网络手段使我们的教研成果更快速地传播。

七、附件材料清单

1. 课程负责人的 10 分钟“说课”视频（必须提供）

[含课程概述、教学设计思路、教学环境（课堂或线上或实践）、教学方法、创新特色、教学效果评价与比较等。技术要求：分辨率 720P 及以上，MP4 格式，图像清晰稳定，声音清楚。视频中标注出镜人姓名、单位，课程负责人出镜时间不得少于 3 分钟。]

2. 教学设计样例说明（必须提供）

（提供一节代表性课程的完整教学设计和教学实施流程说明，尽可能细致地反映出教师的思考和教学设计，在文档中应提供不少于 5 张教学活动的图片。要求教学设计样例应具有较强的可读性，表述清晰流畅。课程负责人签字。）

3. 最近一学期的教学日历（必须提供）

（申报学校教务处盖章。）

4. 最近一学期的测验、考试（考核）及答案（成果等）（必须提供）

（申报学校教务处盖章。）

5. 最近两学期的学生成绩分布统计（必须提供）

（申报学校教务处盖章。）

6. 最近两学期的学生在线学习数据（仅混合式课程必须提供）

（申报学校教务处盖章。）

7. 最近一学期的课程教案（选择性提供）

（课程负责人签字。）

8. 最近一学期学生评教结果统计（选择性提供）

（申报学校教务处盖章。）

9. 最近一次学校对课堂教学评价（选择性提供）

（申报学校教务处盖章。）

10. 教学（课堂或实践）实录视频（选择性提供）

（完整的一节课堂实录，至少 40 分钟，技术要求：分辨率 720P 及以上，MP4 格式，图像清晰稳定，声音清楚。教师必须出镜，视频中需标注教师姓名、单位；要有学生的镜头，并须告知学生可能出现在视频中，此视频会公开。）

11. 其他材料，不超过 2 份（选择性提供）

以上材料均可能在网上公开，请严格审查，确保不违反有关法律及保密规定。

八、课程负责人诚信承诺

本人已认真填写并检查以上材料，保证内容真实有效。

课程负责人（签字）：

年 月 日

九、学院教学委员会课程评价意见

请学院填写

负责人（签字）：

年 月 日

十、学院政治审查意见

该课程内容及上传的申报材料无危害国家安全、涉密及其他不适宜公开传播的内容，思想导向正确，不存在思想性问题。

该课程团队负责人及成员遵纪守法，无违法违纪行为，不存在师德师风问题、学术不端等问题，五年内未出现过重大教学事故。

学院党委（盖章）

年 月 日

十一、申报学院承诺意见

学院对课程有关信息及课程负责人填报的内容进行了核实，保证真实性。经对该课程评审评价，择优申报推荐。

该课程如果被认定为“国家级一流本科课程”，学院承诺为课程团队提供政策、经费等方面的支持，确保该课程继续建设五年。学院同意课程建设和改革成果在指定的网站上公开展示和分享。学院将监督课程教学团队经审核程序后更新资源和数据。

主管院领导签字（盖章）：

年 月 日

十二、中央部门教育司（局）或省级教育行政部门推荐意见

（单位公章）

年 月 日

最近两期开课(2020秋、2019秋)教务系统截图

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY 本科教务系统

欢迎您：刘斌波 修改密码 退出系统
今天是：2021年1月19日 星期二欢迎访问本系统

我的菜单

- 教师服务 >
- > 个人课表
- > 教学进度维护
- > 成绩录入
- > 考勤表打印
- > 监考信息查询

教师课表查询

学年学期：* 2020-2021学年 第一学期

(刘斌波 2020-2021学年 第一学期) 教师课程表

	节次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
	第1节			数学分析 (III) 1-11周 1-2节 海韵教学楼208 [30]		数学分析 (III) 1-11周 1-2节 海韵教学楼208 [30]		
	第2节			数学分析 (III) 12-16周 1-2节 海韵教学楼407 [30]		数学分析 (III) 12-16周 1-2节 海韵教学楼407 [30]		
	第3节	数学分析 (III) 1-11周 3-4节 海韵教学楼208 [30]						
	第4节	数学分析 (III) 12-16周 3-4节 海韵教学楼306 [30]						
	第5节							
	第6节							
	第7节							
	第8节							
	第9节							
	第10节							
	第11节							
时间设置		上午：第1节 08:00-08:45; 第2节 08:55-09:40; 第3节 10:10-10:55; 第4节 11:05-11:50; 下午：第5节 14:30-15:15; 第6节 15:25-16:10; 第7节 16:40-17:25; 第8节 17:35-18:20; 晚上：第9节 19:10-19:55; 第10节 20:05-20:50; 第11节 21:00-21:45;						

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY 本科教务系统

欢迎您：夏超 修改密码 退出系统
今天是：2021年1月18日 星期一欢迎访问本系统

我的菜单

- 教师服务 >
- > 个人课表
- > 教学进度维护
- > 成绩录入
- > 考勤表打印
- > 监考信息查询

教师课表查询

学年学期：* 2020-2021学年 第一学期

(伍火熊 2020-2021学年 第一学期) 教师课程表

	节次	周一	周二	周三	周四	周五
	第1节			数学分析 (III) 1-16周 1-2节 海韵教学楼402 [79]		
	第2节					
	第3节	数学分析 (III) 1-16周 3-4节 海韵教学楼201 [79]				
	第4节					
	第5节					
	第6节					
	第7节					
	第8节					
	第9节					
	第10节					
	第11节					
时间设置		上午：第1节 08:00-08:45; 第2节 08:55-09:40; 第3节 10:10-10:55; 第4节 11:05-11:50; 下午：第5节 14:30-15:15; 第6节 15:25-16:10; 第7节 16:40-17:25; 第8节 17:35-18:20; 晚上：第9节 19:10-19:55; 第10节 20:05-20:50; 第11节 21:00-21:45;				

厦门大学 XIAMEN UNIVERSITY 本科教务系统

欢迎您：夏超 修改密码 退出系统
今天是：2021年1月18日 星期一欢迎访问本系统

我的菜单

- 教师服务 >
- > 个人课表
- > 教学进度维护
- > 成绩录入
- > 考勤表打印
- > 监考信息查询
- > 评教查询

教师课表查询

学年学期：* 2020-2021学年 第一学期

(夏超 2020-2021学年 第一学期) 教师课程表

	节次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
	第1节			数学分析 (III) 1-16周 1-2节 学生公寓205 [54]		数学分析 (III) 1-16周 1-2节 学生公寓205 [54]		
	第2节							
	第3节	数学分析 (III) 1-16周 3-4节 学生公寓205 [54]						
	第4节							
	第5节							
	第6节							
	第7节							
	第8节							
	第9节							
	第10节							
	第11节							
时间设置		上午：第1节 08:00-08:45; 第2节 08:55-09:40; 第3节 10:10-10:55; 第4节 11:05-11:50; 下午：第5节 14:30-15:15; 第6节 15:25-16:10; 第7节 16:40-17:25; 第8节 17:35-18:20; 晚上：第9节 19:10-19:55; 第10节 20:05-20:50; 第11节 21:00-21:45;						



本科教务系统

我的菜单

- 教师服务 >
- > 个人课表
- > 教学进度维护
- > 成绩录入
- > 考勤表打印
- > 监考信息查询

教师课表查询

学年学期：* 2019-2020学年 第一学期

(刘轼波 2019-2020学年 第一学期) 教师课程表

节次	周一	周二	周三	周四	周五
第1节					
第2节					
第3节	数学分析(III) 1-15周 3-4节 海韵教学楼308 [31]		数学分析(III) 1-15周 3-4节 海韵教学楼308 [31]		
第4节					
第5节					
第6节					
第7节					
第8节					
第9节					
第10节					
第11节					
时间设置	上午: 第1节 08:00~08:45; 第2节 08:55~09:40; 第3节 10:10~10:55; 第4节 11:05~11:50; 下午: 第5节 14:30~15:15; 第6节 15:25~16:10; 第7节 16:40~17:25; 第8节 17:35~18:20; 晚上: 第9节 19:10~19:55; 第10节 20:05~20:50; 第11节 21:00~21:45.				



本科教务系统

我的菜单

- 教师服务 >
- > 个人课表
- > 教学进度维护
- > 成绩录入
- > 考勤表打印
- > 监考信息查询
- > 评教查询

教师课表查询

学年学期：* 2019-2020学年 第一学期

(夏超 2019-2020学年 第一学期) 教师课程表

	节次	周一	周二	周三	周四	周五
	第1节					
	第2节					
	第3节	数学分析(III) 1-15周 3-4节 学生公寓305 [57]		数学分析(III) 1-15周 3-4节 学生公寓305 [57]		
	第4节					
	第5节					
	第6节					
	第7节					
	第8节					
	第9节					
	第10节					
	第11节					
时间设置	上午: 第1节 08:00~08:45; 第2节 08:55~09:40; 第3节 10:10~10:55; 第4节 11:05~11:50; 下午: 第5节 14:30~15:15; 第6节 15:25~16:10; 第7节 16:40~17:25; 第8节 17:35~18:20; 晚上: 第9节 19:10~19:55; 第10节 20:05~20:50; 第11节 21:00~21:45.					



本科教务系统

我的菜单

- 教师服务 >
- > 个人课表
- > 教学进度维护
- > 成绩录入
- > 考勤表打印
- > 监考信息查询

教师课表查询

学年学期：* 2019-2020学年 第一学期

(伍火熊 2019-2020学年 第一学期) 教师课程表

	节次	周一	周二	周三	周四	周五
	第1节					
	第2节					
	第3节	数学分析(III) 1-15周 3-4节 海韵教学楼102 [86]		数学分析(III) 1-15周 3-4节 海韵教学楼202 [86]		
	第4节					
	第5节					
	第6节					
	第7节					
	第8节					
	第9节					
	第10节					
	第11节					
时间设置	上午: 第1节 08:00~08:45; 第2节 08:55~09:40; 第3节 10:10~10:55; 第4节 11:05~11:50; 下午: 第5节 14:30~15:15; 第6节 15:25~16:10; 第7节 16:40~17:25; 第8节 17:35~18:20; 晚上: 第9节 19:10~19:55; 第10节 20:05~20:50; 第11节 21:00~21:45.					

附件材料

国家级一流本科课程“数学分析III”申报书

目 录

附件一 课程负责人的10分钟“说课”视频	3
附件二 教学设计样例说明	4
附件三 最近一学期的教学日历	6
附件四 最近一学期的测验、考试（考核）及答案（成果等）	8
附件五 最近两学期的学生成绩分布统计	35
附件十 教学（课堂或实践）实录视频	38
附件十一 其他材料	39

关于页码的说明 这套附件由若干文件组成，每个文件可能自有页码。

以上目录中标示的页码，是每页顶部显示的页码。

附件一 课程负责人的**10分钟**“说课”视频

课程负责人的**10分钟**“说课”视频已另行提交,但也可以通过如下地址下载:

- <https://pan.xmu.edu.cn/s/SVoMesQxQs0>

附件二 教学设计样例说明

这次课于 2019 年 11 月 27 日讲授, 课程负责人刘轼波因为该学期担任厦门大学教学示范岗而进行了一次 2 学时公开课, 教务处派人来录制了视频, 该视频作为本申报书的附件 10 (教学实录视频) 提交.

这次课的任务是完成 n - 重积分换元公式的证明. 在这次课之前, 我们在系统地讲授 n - 重积分的概念 (包括 Lebesgue 定理: 可积的充要条件是不连续点之集为零测集)、性质和化重积分为累次积分之后, 给出了 n - 重积分换元公式的定理 (暂时不证):

定理 0.1 (n - 重积分的换元公式). 设 D 和 Ω 是 \mathbb{R}^n 中 Jordan 可测的有界开集, $\varphi \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ 是 C^2 - 微分同胚. 若 $f \in C(\bar{D})$, 则有

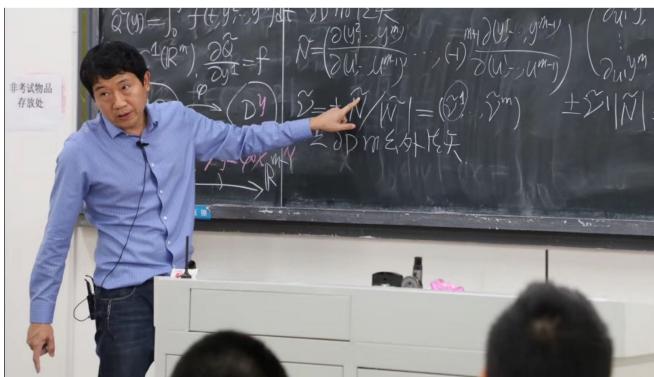
$$\int_D f(y) dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) |J_{\varphi}(x)| dx. \quad (0.1)$$

这里 $J_{\varphi}(x) = \det \varphi'(x)$ 是 φ 在 $x \in \Omega$ 的 Jacobi 行列式.

然后我们通过一些典型的变量替换的例子, 让学生熟悉该定理的运用. 这个定理的关键条件是换元映射 φ 是开区域 Ω 和 D 之间的微分同胚. 我们通过用极坐标计算

$$\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy$$

这个最简单的例子, 说明如何用反函数定理证明开区域之间的光滑双射是微分同胚: 已知是光滑双射的话, 只需 Jacobi 行列式处处非零, 则由反函数定理可知逆映射必光滑, 从而所论映射是微分同胚. 这样的细微之处是值得特别向学生强调的.

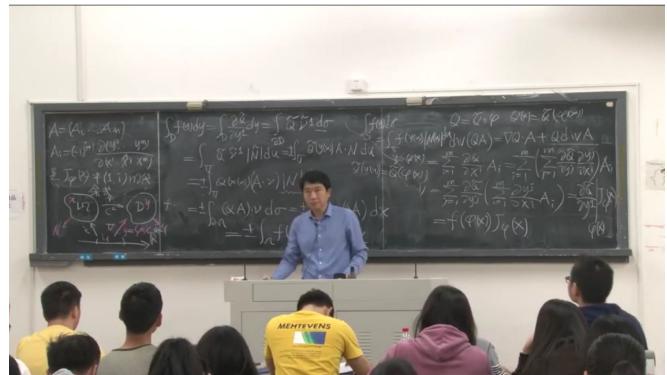


我们采用我们 2017 年发表于《数学研究》的文章中的方法来证明重积分换元公式, 这个证明是受 do Carmo 的名著 Differential Geometry of Curves and Surfaces 中一道习题的启发而做出的. 该习题让读者用 Green 公式证明二重积分的换元公式, 我们的文章用数学归纳法, 把这思想推广到了高维.

我们的思路是: 在一元微积分中已证明 1- 重积分, 即定积分的换元公式是成立的. 假设 $(n-1)$ - 重积分的换元公式成立, 则可利用 \mathbb{R}^n 中的 $(n-1)$ - 维曲面 S 的参数表示 $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ 定义 S 上的连续函数 $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 的曲面积分为

$$\int_S f(x) d\sigma = \int_U f(x(u)) |N(u)| du,$$

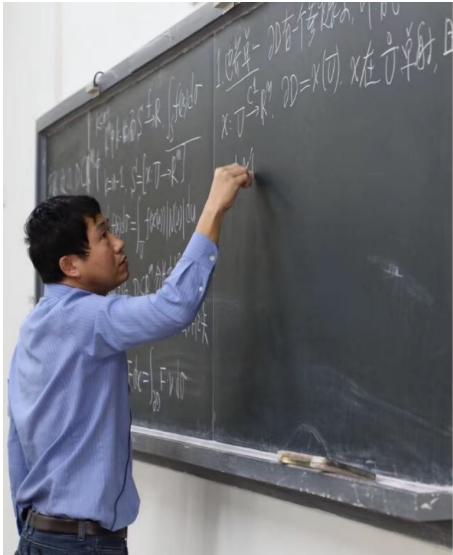
这里, $N(u)$ 是此参数表示给出的曲面在点 $x(u)$ 处的法向量. 由归纳假设, $(n-1)$ - 重积分的换元公式成立, 所以上式右端的 $(n-1)$ - 重积分与 S 的参数表示的选择无关. 进而用化重积分为累次积分, 我们前一次课已经证明了散度定理.



这次课的任务是在这些准备工作的基础上, 完成 n - 重积分换元公式的证明. 需要指出的是, 在我们证明 n - 重积分换元公式的过程中, 也同时建立了曲面积分的理论.

这次课, 作为“热身”我们首先回顾了上面所做的准备, 然后先对以下特殊情形证明定理:

1. f 是某 $C^1(\mathbb{R}^n)$ 函数在 \bar{D} 上的限制.
2. Ω 是所谓的“单一区域”, 即其边界曲面可用一个参数表示覆盖, 例如球体之类的区域都是单一的, 而圆柱体则不是.



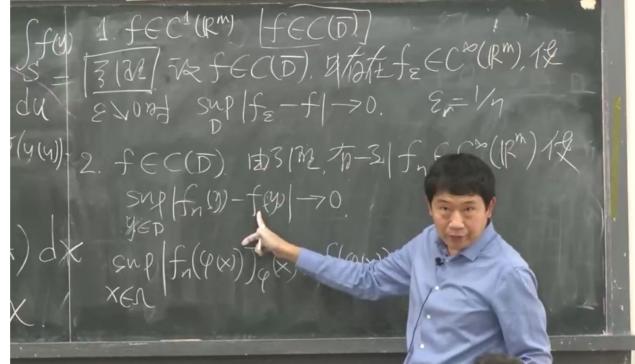
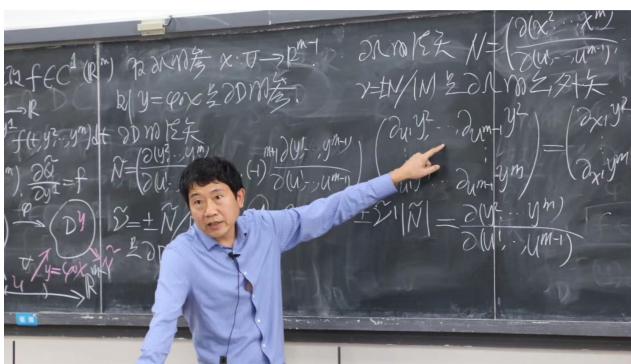
在这种情形, 我们只需假设换元映射 φ 将 $\partial\Omega$ 微分同胚地映成 ∂D , 就能得到 n - 重积分的换元公式. 这个证明其实是利用 $\partial\Omega$ 的参数表示 $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 得到 ∂D 的参数表示 $y = \varphi \circ x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ (因为 φ 是边界曲面之间的微分同胚). 取 f 对 y^1 的不定积分 Q , 则 $\partial_{y^1} Q = f$. 我们对向量场 $F = (Q, 0, \dots, 0)$ 运用散度定理, 注意 $\operatorname{div} F = f$, 便可将 $\int_D f$ 化为 ∂D 上的曲面积分, 再通过边界曲面之间的微分同胚 φ , 化为 $\partial\Omega$ 上的曲面积分, 其被积函数恰是一个向量值函数与 $\partial\Omega$ 的单位外法向量的内积, 因此可以再次运用散度定理把该积分化为 Ω 上的 n - 重积分, 而其被积函数恰是换元公式中的那个函数, 这样就完成了证明.

以上是定理证明的思路. 在具体实现时, 需要一定的计算技巧. 这里, 我们恰到好处地运用了线性代数中的行列式按行展开定理, 以及关于扁矩阵与瘦矩阵之积的行列式的 Cauchy-Binet 公式. 正因如此, 上述证明所需的计算其实是很简单的.

为了去掉上述对 f 的光滑性的要求, 我们引述一个连续函数的光滑逼近定理 (下节课证明), 然后运用一致收敛性在积分号下取极限, 就得到 $f \in C(\bar{D})$ 情形的结果.

这就是这一节课 (1 学时, 45 分钟) 的内容. 课间休息后, 我们将用与磨光核卷积的标准方法, 证明上面提到的光滑逼近定理, 进而用球填充的方法 (因为球是单一区域), 证明一般区域情形的重积分换元公式, 即定理 0.1.

最后, 因为对于球体之类的单一区域, 我们只需要求换元映射是边界曲面之间的微分同胚 (换元映射在区域内部不必是单射, 可以“多对一”), 这就使得我们可以利用已得到的单一区域情形的换元公式, 立刻推出 C^2 - 情形的非收缩引理, 也就是得到了 n - 维的 Brouwer 不动点定理. 这是本次两学时的课第 2 段 (1 学时, 45 分钟) 的内容.



厦门大学一流本科课程申报课程教学日历 (2021)

申报学院 (盖章) :

课程名称: 数学分析III

课程负责人: 刘轼波

申报类型: 线下一流课程

申报学院 (盖章) :

附件三 最近一学期的教学日历

第 6 页

序号	日期	周次	讲次	学时 (分钟)	教学内容 (要点)	授课地点	学生人数	教学形式
1	2020年9月14日	1	1	2学时(90分钟)	欧氏空间及欧氏空间中的点集	海韵208	30	课堂讲授
2	2020年9月16日	1	2	2学时(90分钟)	欧氏空间中的基本定理	海韵208	30	课堂讲授
3	2020年9月18日	1	3	2学时(90分钟)	多元函数的极限	海韵208	30	课堂讲授
4	2020年9月21日	2	4	2学时(90分钟)	欧氏空间之间的连续映射	海韵208	30	课堂讲授
5	2020年9月23日	2	5	2学时(90分钟)	连续映射的性质	海韵208	30	课堂讲授
6	2020年9月25日	2	6	2学时(90分钟)	偏导数与映射的可微性	海韵208	30	课堂讲授
7	2020年9月27日	3	7	2学时(90分钟)	导数的计算, 锁链法则	海韵208	30	课堂讲授
8	2020年9月28日	3	8	2学时(90分钟)	微分中值定理, 微分中值不等式	海韵208	30	课堂讲授
9	2020年9月30日	3	9	2学时(90分钟)	方向导数和梯度	海韵208	30	课堂讲授
10	2020年10月5日	4	10	2学时(90分钟)	高阶导数和Taylor公式	海韵208	30	课堂讲授
11	2020年10月7日	4	11	2学时(90分钟)	多元函数的极值	海韵208	30	课堂讲授
12	2020年10月9日	4	12	2学时(90分钟)	微分学的几何应用	海韵208	30	课堂讲授
13	2020年10月12日	5	13	2学时(90分钟)	小测	海韵208	30	小测
14	2020年10月14日	5	14	2学时(90分钟)	反函数定理	海韵208	30	课堂讲授
15	2020年10月16日	5	15	2学时(90分钟)	隐函数定理, 隐函数求导法	海韵208	30	课堂讲授
16	2020年10月19日	6	16	2学时(90分钟)	局部满射定理, 局部单射定理, 秩定理	海韵208	30	课堂讲授
17	2020年10月21日	6	17	2学时(90分钟)	隐函数定理的应用, 曲面上预定切矢的曲线	海韵208	30	课堂讲授
18	2020年10月23日	6	18	2学时(90分钟)	条件极值, Lagrange乘数法	海韵208	30	课堂讲授
19	2020年10月26日	7	19	2学时(90分钟)	高维矩形上的积分	海韵208	30	课堂讲授
20	2020年10月28日	7	20	2学时(90分钟)	Riemann可积的充要条件	海韵208	30	课堂讲授
21	2020年10月30日	7	21	2学时(90分钟)	零测集, Lebesgue定理	海韵208	30	课堂讲授
22	2020年11月2日	8	22	2学时(90分钟)	化重积分为累次积分	海韵208	30	课堂讲授
23	2020年11月4日	8	23	2学时(90分钟)	一般有界集上的积分	海韵208	30	课堂讲授

24	2020年11月9日	9	24	2学时(90分钟)	期中考试	海韵208	30	期中考试
25	2020年11月11日	9	25	2学时(90分钟)	Jordan可测集及其体积	海韵208	30	课堂讲授
26	2020年11月13日	9	26	2学时(90分钟)	重积分换元公式的叙述及其应用	海韵208	30	课堂讲授
27	2020年11月16日	10	27	2学时(90分钟)	欧氏空间中高维超曲面的面积	海韵208	30	课堂讲授
28	2020年11月18日	10	28	2学时(90分钟)	高维超曲面上的曲面积分	海韵208	30	课堂讲授
29	2020年11月20日	10	29	2学时(90分钟)	散度定理及其应用	海韵208	30	课堂讲授
30	2020年11月23日	11	30	2学时(90分钟)	用散度定理证明n重积分换元公式	海韵208	30	课堂讲授
31	2020年11月25日	11	31	2学时(90分钟)	Brouwer不动点定理, 非线性代数方程	海韵208	30	课堂讲授
32	2020年11月27日	11	32	2学时(90分钟)	第一类曲线、曲面积分的计算	海韵208	30	课堂讲授
33	2020年11月30日	12	33	2学时(90分钟)	余面积公式及其应用	海韵208	30	课堂讲授
34	2020年12月2日	12	34	2学时(90分钟)	多元反常积分	海韵306	30	课堂讲授
35	2020年12月4日	12	35	2学时(90分钟)	第二类曲线、曲面积分	海韵407	30	课堂讲授
36	2020年12月7日	13	36	2学时(90分钟)	小测	海韵407	30	小测
37	2020年12月9日	13	37	2学时(90分钟)	Green第一、第二公式, 调和函数均值定理	海韵306	30	课堂讲授
38	2020年12月11日	13	38	2学时(90分钟)	Stokes公式	海韵407	30	课堂讲授
39	2020年12月14日	14	39	2学时(90分钟)	散度旋度的意义, 与路径无关的曲线积分	海韵407	30	课堂讲授
40	2020年12月16日	14	40	2学时(90分钟)	含参积分及其分析性质	海韵306	30	课堂讲授
41	2020年12月18日	14	41	2学时(90分钟)	含参反常积分的一致收敛性	海韵407	30	课堂讲授
42	2020年12月21日	15	42	2学时(90分钟)	一致收敛含参积分的分析性质	海韵407	30	课堂讲授
43	2020年12月23日	15	43	2学时(90分钟)	应用含参积分理论计算积分	海韵306	30	课堂讲授
44	2020年12月25日	15	44	2学时(90分钟)	Euler积分	海韵407	30	课堂讲授
45	2021年1月7日	17	45	2学时(90分钟)	期末考试	海韵107	30	期末考试

说明:

1. 请按照最近已完成的一学期实际课程开设情况填写。
2. 推荐类别为“线下一流课程”、“线上线下混合式一流课程”、“社会实践课程”中的一种。
3. 日期须写清年月日，授课地点须填写具体地点（教室），如果是非集中的在线学习，填写“在线”即可。
4. 教学形式请填写：线上、课堂、理论、实践等。
5. 不得变动表格行、列的位置和布局，表格内容按照时间顺序依次填写，序号应连续且不重复。

附件四 最近一学期的测验、考试（考核）及答案（成果等）

以下部分依次是2020年秋季学期为2019级讲授的数学分析III的：

1. 期末 A 卷,
2. 期末 A 卷参考答案,
3. 期末 B 卷,
4. 期末 B 卷参考答案,
5. 期中考卷,
6. 期中考卷参考答案.



厦门大学《数学分析 III》课程试卷

数学科学学院数学与应用数学系 2019 年级各专业

主考教师：伍火熊、刘轼波、夏超 试卷类型：A 卷

1.

分数	阅卷人

(10分) 计算 $\iiint_{4x^2+9y^2 \leq t^2 \leq 1} \frac{1}{2+t^3} dx dy dt.$

2.

分数	阅卷人

(10分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{z},$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ 截下的顶部, 这里 $h \in (0, a)$.

3.

分数	阅卷人

(10分) 设 $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ ($x > 0$). 试证明:

$$f(x) - f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

4.

分数	阅卷人

(10分) 设 $f(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$. 记 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ 的外侧. 试求面积分:

$$I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{x}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 \right] dy dz + \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 \right] dz dx + \left[-\frac{z}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + z^3 \right] dx dy.$$

分数	阅卷人

(10分) 计算 $I = \int_L xdy - ydx$, 其中 $L : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x^2 + y^2 = x$ 在上半空间 $\{z \geq 0\}$ 中的交线, 从 z 轴正向看去是逆时针方向.

分数	阅卷人

(10分) 设 $P(x, y) = \frac{2xy}{x^4 + y^\lambda}$, $Q(x, y) = -\frac{x^2}{x^4 + y^\lambda}$. 试问 λ 取何值时, 向量 $(P(x, y), Q(x, y))$ 是 $f(x, y)$ 在 $x > 0$ 半平面上的梯度, 并求出 $f(x, y)$ 的表达式.

分数	阅卷人

(10分) 设一元函数 $f(t) \in C([0, +\infty))$. 令

$$F(t) = \iiint_{\Omega_t} f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz,$$

其中 $\Omega_t = \left\{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq t^2\right\}$. 证明 $F(t) \in C^1[0, +\infty)$, 并求出 $F'(t)$ 的表达式.

8.

分数	阅卷人

 (10分) 设 $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 对每个 $y \in [\alpha, \beta]$, 积分 $\int_a^\infty f(x, y) dx$ 收敛, 但积分 $\int_a^\infty f(x, \beta) dx$ 发散. 证明积分 $\int_\alpha^\infty f(x, y) dx$ 在 $[\alpha, \beta)$ 非一致收敛.

9.

分数	阅卷人

 (10分) 设 $f(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha (1-x)^{\alpha-1}} dx$. 试证明 $f \in C(0, 2)$.

10.

分数	阅卷人

 (10分) 设 Ω 和 D 是 \mathbb{R}^2 中的有界光滑区域, 正则变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 将 Ω 变成 D , 且满足

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}.$$

若 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续可微, 证明

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv.$$

厦门大学数学科学学院 2019 级数学分析 3 期末 A 卷参考答案

1. (10 分) 计算 $\iiint_{4x^2+9y^2 \leq t^2 \leq 1} \frac{1}{2+t^3} dx dy dt.$

解. 积分区域 Ω 由锥面 $t = \sqrt{4x^2 + 9y^2}$ 与平面 $t = 1$ 围成.

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 dt \iint_{4x^2+9y^2 \leq t^2} \frac{1}{2+t^3} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2+t^3} \pi \cdot \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{3} dt = \frac{\pi}{18} \ln 3. \end{aligned}$$

2. (10 分) 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{dS}{z},$$

其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 被平面 $z = h$ 截下的顶部, 这里 $h \in (0, a)$.

解. 曲面 Σ 的方程为

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{x^2 + y^2 \leq a^2 - h^2\}.$$

于是有

$$\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= \iint_D \frac{a}{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= a \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{a^2-h^2}} \frac{r}{a^2 - r^2} dr = 2\pi a \ln \frac{a}{h}. \end{aligned}$$

3. (10 分) 设 $f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt$ ($x > 0$). 试证明: $f(x) - f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-u^2} du$.

证. 对 $\forall x_0 \in (0, \infty)$, 可取 $a, b > 0$ 使

$$x_0 \in [a, b] \subset (0, \infty).$$

于是对 $(x, t) \in [a, b] \times (0, \infty)$ 有

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \right) \right| = \frac{t^2}{t^2+1} e^{-t^2 x} \leq e^{-at^2}.$$

由于 $\int_0^\infty e^{-at^2} dt < \infty$, 所以积分号下求导后的积分 $\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \right) dt$ 对 $x \in [a, b]$ 一致收敛, 而 $x_0 \in [a, b]$. 因此对 $\forall x_0 \in (0, \infty)$ 有

$$\frac{d}{dx} \Big|_{x=x_0} \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \right) dt.$$

于是, 对 $x \in (0, \infty)$,

$$\begin{aligned} f(x) - f'(x) &= \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt - \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} \right) dt \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} - (-t^2) \frac{e^{-t^2 x}}{t^2 + 1} \right] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t^2 x} dt \stackrel{u=\sqrt{xt}}{=} \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{x}}. \end{aligned}$$

4. (10 分) 设 $f(t) \in C^1(\mathbb{R}^1)$. 记 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ 的外侧. 试求面积分:

$$I = \iint_{\Sigma} \left[\frac{x}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 \right] dy dz + \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 \right] dz dx + \left[-\frac{z}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + z^3 \right] dx dy.$$

解. 设 B 是球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$. 由散度定理

$$\begin{aligned} I &= \int_B \left\{ \left[\frac{x}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + x^3 \right]_x + \left[f\left(\frac{x}{y}\right) + y^3 \right]_y + \left[-\frac{z}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + z^3 \right]_z \right\} dV \\ &= \int_B \left\{ \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{x}{-y^2} f'\left(\frac{x}{y}\right) + 3y^2 - \frac{1}{y} f\left(\frac{x}{y}\right) + 3z^2 \right\} dV \\ &= 3 \iiint_B (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 6\pi \int_0^{\pi/2} \frac{(2R \cos \varphi)^5}{5} \sin \varphi d\varphi = \frac{32}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

5. (10 分) 计算 $I = \int_L x dy - y dx$, 其中 $L : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 与 $x^2 + y^2 = x$ 在上半空间 $\{z \geq 0\}$ 中的交线, 从 z 轴正向看去是逆时针方向.

解. 曲线 L 可表示为

$$x^2 + y^2 = x, \quad z = \sqrt{1-x}.$$

即

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \\ \frac{1}{2} \sin \theta \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta} \end{pmatrix}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right) \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right)' - \left(\frac{1}{2} \sin \theta \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \theta \right)' \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \right) d\theta = \frac{1}{2}\pi. \end{aligned}$$

6. (10 分) 设 $P(x, y) = \frac{2xy}{x^4+y^\lambda}$, $Q(x, y) = -\frac{x^2}{x^4+y^\lambda}$. 试问 λ 取何值时, 向量 $(P(x, y), Q(x, y))$ 是 $f(x, y)$ 在 $x > 0$ 半平面上的梯度, 并求出 $f(x, y)$ 的表达式.

解. 为了 $\nabla f = (P, Q)$, 需要

$$\begin{aligned} 0 &= Q_x - P_y = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x^2}{x^4+y^\lambda} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{2xy}{x^4+y^\lambda} \right) \\ &= -\frac{2x(y^\lambda - x^4)}{(y^\lambda + x^4)^2} - \frac{2x(y^\lambda - y^\lambda \lambda + x^4)}{(y^\lambda + x^4)^2} \\ &= \frac{2xy^\lambda(\lambda - 2)}{(y^\lambda + x^4)^2}. \end{aligned}$$

因此 $\lambda = 2$. 此时

$$\begin{aligned} f(\xi, \eta) &= \int_{(0,1)}^{(\xi, \eta)} P dx + Q dy = \int_{(0,1)}^{(\xi, \eta)} \frac{2xy}{x^4+y^2} dx - \frac{x^2}{x^4+y^2} dy \\ &= \int_0^\xi \frac{2x}{x^4+1^2} dx - \int_1^\eta \frac{\xi^2}{\xi^4+y^2} dy \\ &= \arctan \xi^2 - \left(\arctan \xi^2 - \arctan \frac{\xi^2}{\eta} \right) = \arctan \frac{\xi^2}{\eta}. \end{aligned}$$

7. (10 分) 设一元函数 $f(t) \in C([0, +\infty))$. 令

$$F(t) = \iiint_{\Omega_t} f \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx dy dz,$$

其中 $\Omega_t = \{(x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq t^2\}$. 证明 $F(t) \in C^1([0, +\infty))$, 并求出 $F'(t)$ 的表达式.

证. 作广义球坐标变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\rho \sin \varphi \cos \theta \\ b\rho \sin \varphi \sin \theta \\ c\rho \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} \rho &\in (0, t), \\ \varphi &\in (0, \pi), \\ \theta &\in (0, 2\pi). \end{aligned}$$

其 Jacobi 行列式为 $|J| = abc\rho^2 \sin \varphi$. 于是

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi f(\rho^2) \cdot abc\rho^2 \sin \varphi d\varphi \\ &= \int_0^t 4\pi abc\rho^2 \cdot f(\rho^2) d\rho. \end{aligned}$$

因 f 连续, F 是可微的, $F'(t) = 4\pi abct^2 \cdot f(t^2)$.

8. (10 分) 设 $f : [a, \infty) \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 对每个 $y \in [\alpha, \beta]$, 积分 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 收敛, 但积分 $\int_a^\infty f(x, \beta)dx$ 发散. 证明积分 $\int_a^\infty f(x, y)dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 非一致收敛.

证. 若 $\int_\alpha^\infty f(x, y)dx$ 在 $[\alpha, \beta]$ 一致收敛. 则由 Cauchy 准则, $\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a$, 当 $A_1, A_2 > A_0$ 时对 $y \in [\alpha, \beta]$ 有

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx \right| < \varepsilon. \quad (\star)$$

由于 f 在 $[A_1, A_2] \times [\alpha, \beta]$ 连续, 函数

$$y \mapsto \int_{A_1}^{A_2} f(x, y)dx$$

在 $[\alpha, \beta]$ 上是连续的. 于是在 (\star) 中令 $y \rightarrow \beta^-$ 即得

$$\left| \int_{A_1}^{A_2} f(x, \beta)dx \right| \leq \varepsilon,$$

由此根据 Cauchy 准则推知积分 $\int_a^\infty f(x, \beta)dx$ 收敛, 与题设矛盾.

9. (10 分) 设 $f(\alpha) = \int_0^1 \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1}} dx$. 试证明 $f \in C(0, 2)$.

证. 易知对 $\alpha \in (0, 2)$, 分别以 0 及 1 为瑕点的积分

$$f_0(\alpha) = \int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1}} dx, \quad f_1(\alpha) = \int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1}} dx$$

都是收敛的. 所以 $f(\alpha) = f_0(\alpha) + f_1(\alpha)$ 也收敛. 因此 $\alpha \mapsto f(\alpha)$ 是在 $(0, 2)$ 有定义的函数.

对 $\forall \alpha_0 \in (0, 2)$, 取 $c, d \in \mathbb{R}$ 使 $\alpha_0 \in [c, d] \subset (0, 2)$. 则

$$\varphi : (x, \alpha) \mapsto \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1}}$$

在 $(0, \frac{1}{2}] \times [c, d]$ 及 $[\frac{1}{2}, 1) \times [c, d]$ 均连续,

- 对 $(x, \alpha) \in (0, \frac{1}{2}] \times [c, d]$, 因

$$\frac{1}{(1-x)^\alpha} < \frac{1}{(\frac{1}{2})^\alpha} = 2^\alpha \leq 2^d, \quad \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{x^d},$$

我们有

$$|\varphi(x, \alpha)| = \left| \frac{(1-x)\sin x}{x^\alpha(1-x)^\alpha} \right| \leq \frac{(1-x)\sin x}{x^d}.$$

由于 $x \rightarrow 0$ 时

$$\frac{(1-x)\sin x}{x^d} \sim \frac{1}{x^{d-1}}$$

而 $d-1 < 1$, 积分 $\int_0^{1/2} \frac{(1-x)\sin x}{x^d} dx$ 收敛. 于是

$$f_0(\alpha) = \int_0^{1/2} \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1}} dx$$

对 $\alpha \in [c, d]$ 一致收敛, f_0 在 $[c, d]$ 连续, 特别 f_0 在 α_0 连续.

- 对 $(x, \alpha) \in [\frac{1}{2}, 1) \times [c, d]$, 因

$$\frac{1}{(1-x)^{\alpha-1}} < \frac{1}{(1-x)^{d-1}}, \quad \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{(\frac{1}{2})^\alpha} = 2^\alpha \leq 2^d,$$

我们有

$$|\varphi(x, \alpha)| = \left| \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^\alpha} \right| \leq \frac{2^d \sin x}{(1-x)^{d-1}}.$$

由于 $x \rightarrow 1$ 时

$$\frac{2^d \sin x}{(1-x)^{d-1}} \sim \frac{2^d \sin 1}{(1-x)^{d-1}}$$

而 $d-1 < 1$, 积分 $\int_{1/2}^1 \frac{2^d \sin x}{(1-x)^{d-1}} dx$ 收敛. 于是

$$f_1(\alpha) = \int_{1/2}^1 \frac{\sin x}{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1}} dx$$

对 $\alpha \in [c, d]$ 一致收敛, f_1 在 $[c, d]$ 连续, 特别 f_1 在 α_0 连续.

综上所述, $f = f_0 + f_1$ 在 α_0 连续. 所以 $f \in C(0, 2)$.

10. (10 分) 设 Ω 和 D 是 \mathbb{R}^2 中的有界光滑区域, 正则变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 将 Ω 变成 D , 且满足

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\partial y}{\partial u}.$$

若 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续可微, 证明

$$\iint_D \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2 \right] du dv.$$

证. 由链法则,

$$f_u = f_x x_u + f_y y_u, \quad f_v = f_x x_v + f_y y_v.$$

由题设条件有 $x_u y_u + x_v y_v = 0$,

$$\begin{aligned} x_u^2 + x_v^2 &= x_u y_v - x_v y_u = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0, \\ y_u^2 + y_v^2 &= y_v x_u - y_u x_v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} > 0. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} (f_u^2 + f_v^2)_{(u,v)} &= (f_x x_u + f_y y_u)^2 + (f_x x_v + f_y y_v)^2 \\ &= f_x^2 (x_u^2 + x_v^2) + f_y^2 (y_u^2 + y_v^2) + 2 f_x f_y (x_u y_u + x_v y_v) \\ &= (f_x^2 + f_y^2)_{(x(u,v), y(u,v))} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}. \end{aligned}$$

由重积分换元公式

$$\begin{aligned} \iint_D (f_x^2 + f_y^2) dx dy &= \iint_{\Omega} (f_x^2 + f_y^2)_{(x(u,v), y(u,v))} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \\ &= \iint_{\Omega} (f_x^2 + f_y^2)_{(x(u,v), y(u,v))} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \\ &= \iint_{\Omega} (f_u^2 + f_v^2) du dv. \end{aligned}$$



厦门大学《数学分析3》课程试卷

数学科学学院 数学与应用数学系 2019 年级 各专业

主考教师: 伍火熊、刘轼波、夏超 试卷类型: B 卷

1. 分数

阅卷人

(10分) 计算 $I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$, 其中 D 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围区域.

2. 分数

阅卷人

(10分) 计算 $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

3.

分数	阅卷人

 (10分) 设 b, v 为常数, $f \in C(\mathbb{R})$. 二阶可微函数 K 满足

$$\begin{cases} K'' + bK' + cK = 0, \\ K(0) = 0, K'(0) = 1. \end{cases}$$

证明 $x(t) = \int_0^t f(s)K(t-s)ds$ 满足方程 $x'' + bx' + cx = f$.

4.

分数	阅卷人

 (10分) 计算 $I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, S 是上半单位球面的上侧.

5.

分数	阅卷人

 (10分) 计算曲线积分:

$$I = \int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz,$$

其中 L 是用平面 $x + y + z = \frac{1}{2}$ 截立方体 $0 \leq x, y, z \leq 1$ 所得表面的截痕, 从 x 轴的正向看去时逆时针方向.

6.

分数	阅卷人

 (10分) 设曲线积分 $\int_L \sin x \cos y dx + \sin y \varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数, 且 $\varphi(0) = 1$, 计算

$$I = \int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} \sin x \cos y dx + \sin y \varphi(x) dy.$$

7.

分数	阅卷人

 (10分) 设 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ 及它对第 4 变元 t 的偏导函数 $f_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ 都是连续的, 对每个 $t \geq 0$, Ω_t 是 \mathbb{R}^3 中满足 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ 的点 (x, y, z) 构成的集合. 证明

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega_t} f_t(x, y, z, t) dx dy dz + \iint_{\partial \Omega_t} f(x, y, z, t) dS.$$

8.

分数	阅卷人

 (10分) 设 $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 有 $C > 0, p > 3$ 使得 $|f(t)| \leq Ct^{-p}, \forall t \geq 1$. 证明对 $t \geq 1$, 积分

$$I(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz$$

收敛, 因而定义了一个函数 $I : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. 设 ω_3 是 \mathbb{R}^3 中单位球面的面积, 证明 I 可微且

$$I'(t) = -\omega_3 f(t)t^2.$$

9.

分数	阅卷人

 (10分) 设 $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ 连续, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} f(0).$$

10.

分数	阅卷人

 (10分) 设 S 是 \mathbb{R}^3 中球心在原点, 半径为 R 的球面. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 若 Q 为 \mathbb{R}^3 的正交变换, $g = f \circ Q$. 证明

$$\iint_S f dS = \iint_S g dS.$$

厦门大学数学科学学院 2019 级数学分析 3 期末 B 卷参考答案

1. 计算 $I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$, 其中 D 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围区域.

解. 积分区域在柱坐标下可表为

$$A = \{(r, \theta, z) \mid r^2 + z^2 \leq 4, r^2 \leq 3z\}.$$

A 在 (r, θ) 平面的投影为 $\{0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

对固定的 $(r, \theta), z$ 的变化范围为 $\left[\frac{1}{3}r^2, \sqrt{4-r^2}\right]$. 因此

$$I = \iiint_A z \cdot r \, dr \, d\theta \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r \, dr \int_{\frac{1}{3}r^2}^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz = \frac{13}{4}\pi.$$

2. 计算 $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$, $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

解(一). 上半球面是 $D : x^2 + y^2 \leq R^2$ 上的函数 $z : (x, y) \mapsto \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ 的图像,

$$\begin{aligned} dS &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy \\ &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy. \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} I &= 2 \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}} r \, dr = \pi^2 R^3. \end{aligned}$$

3. 设 b, v 为常数, $f \in C(\mathbb{R})$. 二阶可微函数 K 满足

$$\begin{cases} K'' + bK' + cK = 0, \\ K(0) = 0, K'(0) = 1. \end{cases}$$

证明 $x(t) = \int_0^t f(s)K(t-s) \, ds$ 满足方程 $x'' + bx' + cx = f$.

证. 由于

$$(t, s) \mapsto \partial_t [f(s)K(t-s)] = f(s)K'(t-s)$$

在 \mathbb{R}^2 连续, $K(0) = 0$, 所以

$$x'(t) = \int_0^t \partial_t [f(s)K(t-s)] \, ds + f(t)K(t-t) = \int_0^t f(s)K'(t-s) \, ds.$$

由于

$$(t, s) \mapsto \partial_t [f(s)K'(t-s)]$$

在 \mathbb{R}^2 连续, $K'(0) = 1$, 所以

$$\begin{aligned} x''(t) &= \int_0^t \partial_t [f(s)K'(t-s)] ds + f(t)K'(t-t) \\ &= \int_0^t f(s)K''(t-s) ds + f(t). \end{aligned}$$

于是利用 $K'' + bK' + cK = 0$, 有

$$\begin{aligned} x'' + bx' + cx &= \left(\int_0^t f(s)K''(t-s) ds + f(t) \right) ds \\ &\quad + b \int_0^t f(s)K'(t-s) ds + c \int_0^t f(s)K(t-s) ds \\ &= \int_0^t f(s) [K''(t-s) + bK'(t-s) + cK(t-s)] ds + f(t) = f(t). \end{aligned}$$

4. 计算 $I = \iint_S x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy$, S 是上半单位球面的上侧.

证. 取 $S_0 = \{x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$. 则 S 与 S_0 围得上半球体 D . 易知 $\iint_{S_0} = 0$, 于是由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} I &= I + \iint_{S_0} = \iiint_D \left(\frac{\partial(x^3)}{\partial x} + \frac{\partial(y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(z^3)}{\partial z} \right) dxdydz \\ &= 3 \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \\ &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \cdot \rho \sin \varphi d\rho \\ &= 6\pi \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

5. 计算曲线积分:

$$I = \int_L (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz,$$

其中 L 是用平面 $x + y + z = \frac{1}{2}$ 截立方体 $0 \leq x, y, z \leq 1$ 所得表面的截痕, 从 x 轴的正向看去时逆时针方向.

证. 设 S 是平面与立方体的截面, 它是一个边长为 $1/\sqrt{2}$ 的等边三角形, 其定向是 $\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_L (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)dy + (x^2 - y^2)dz \\
 &= \iint_S \det \begin{pmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2 \end{pmatrix} \\
 &= -2 \iint_S (y+z) dydz + (z+x) dzdx + (x+y) dxdy \\
 &= -2 \iint_S (y+z, z+x, x+y) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} d\sigma \\
 &= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S (x+y+z) d\sigma = -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_S \frac{1}{2} d\sigma \\
 &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{A}(S) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{8} \sqrt{3} = -\frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

6. 设曲线积分 $\int_L \sin x \cos y dx + \sin y \varphi(x) dy$ 与路径无关, 其中 $\varphi(x)$ 具有连续导数, 且 $\varphi(0) = 1$, 计算

$$I = \int_{(0,0)}^{(\pi,\pi)} \sin x \cos y dx + \sin y \varphi(x) dy.$$

解. 既然积分与路径无关, 取折线 $(0,0) \xrightarrow{L_1} (0,\pi) \xrightarrow{L_2} (\pi,\pi)$. 在 L_1 上 $x = 0, dx = 0$, 在 L_2 上 $y = \pi, dy = 0$, 所以

$$\begin{aligned}
 I &= \left(\int_{L_1} + \int_{L_2} \right) \sin x \cos y dx + \sin y \varphi(x) dy \\
 &= \int_{L_1} \sin y \varphi(x) dy + \int_{L_2} \sin x \cos y dx \\
 &= \varphi(0) \int_0^\pi \sin y dy - \int_0^\pi \sin y dy \\
 &= 2\varphi(0) - 2 = 0.
 \end{aligned}$$

7. 设 $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ 及它对第 4 变元 t 的偏导函数 $f_t : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ 都是连续的, 对每个 $t \geq 0$, Ω_t 是 \mathbb{R}^3 中满足 $x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$ 的点 (x, y, z) 构成的集合. 证明

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega_t} f_t(x, y, z, t) dx dy dz + \iint_{\partial\Omega_t} f(x, y, z, t) dS.$$

证. 由余面积公式,

$$\iiint_{\Omega_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \int_0^t d\tau \iint_{\partial\Omega_\tau} f(x, y, z, t) dS.$$

利用含参变量积分的求导公式,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} f(x, y, z, t) dx dy dz &= \int_0^t d\tau \iint_{\partial\Omega_\tau} f_t(x, y, z, t) dS + \iint_{\partial\Omega_t} f(x, y, z, t) dS \\ &= \iiint_{\Omega_t} f_t(x, y, z, t) dx dy dz + \iint_{\partial\Omega_t} f(x, y, z, t) dS. \end{aligned}$$

8. 设 $f : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 有 $C > 0, p > 3$ 使得 $|f(t)| \leq Ct^{-p}, \forall t \geq 1$. 证明对 $t \geq 1$, 积分

$$I(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \geq t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) dx dy dz$$

收敛, 因而定义了一个函数 $I : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. 设 ω_3 是 \mathbb{R}^3 中单位球面的面积, 证明 I 可微且

$$I'(t) = -\omega_3 f(t)t^2.$$

证(一). 对 $I(t)$ 做球坐标变换

$$(x, y, z) = (\rho \sin \varphi \cos \varphi, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi),$$

这里 $\rho \in [t, +\infty), \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi]$. Jacobi 行列式为 $J = \rho^2 \sin \varphi$. 因为 $p > 3$ 及

$$|f(\rho)\rho^2| \leq \frac{C}{\rho^{p-2}},$$

积分 $\int_t^{+\infty} f(\rho)\rho^2 d\rho$ 绝对收敛, 于是

$$\begin{aligned} I(t) &= \iiint_{[t, +\infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]} f(\rho)\rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi d\varphi \int_t^{+\infty} f(\rho)\rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= 2\pi \left(\int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \right) \int_t^\infty f(\rho)\rho^2 d\rho \\ &= 4\pi \int_t^\infty f(\rho)\rho^2 d\rho \end{aligned}$$

收敛, 并且 $I'(t) = -4\pi f(t)t^2 = -\omega_3 f(t)t^2$.

9. 设 $f : [0, 1] \rightarrow (0, +\infty)$ 连续, 证明

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy = \frac{\pi}{2} f(0).$$

证. 首先注意 $x \rightarrow 0^+$ 时

$$\int_0^1 \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \arctan \frac{y}{x} \Big|_0^1 = \arctan \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\pi}{2}.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta > 0$ 使 $y \in (0, \delta)$ 时 $|f(y) - f(0)| < \varepsilon$. 因为

$$(x, y) \mapsto \frac{x(f(y) - f(0))}{x^2 + y^2}$$

在 $[0, 1] \times [\delta, 1]$ 连续, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \int_\delta^1 \frac{x(f(y) - f(0))}{x^2 + y^2} dy \right| = 0.$$

再注意

$$\left| \int_0^\delta \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right| = \arctan \frac{y}{x} \Big|_0^\delta = \arctan \frac{\delta}{x} < \frac{\pi}{2},$$

以及

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \\ &= \left| \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy - \int_0^1 \frac{xf(0)}{x^2 + y^2} dy \right| + \left| \int_0^1 \frac{xf(0)}{x^2 + y^2} dy - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \\ &\leq \left| \int_\delta^1 \frac{x(f(y) - f(0))}{x^2 + y^2} dy \right| + \int_0^\delta \frac{x|f(y) - f(0)|}{x^2 + y^2} dy + \left| \int_0^1 \frac{xf(0)}{x^2 + y^2} dy - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \\ &= o(1) + \varepsilon \left| \int_0^\delta \frac{x}{x^2 + y^2} dy \right| < o(1) + \frac{\pi}{2} \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $x \rightarrow 0^+$ 得

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow 0^+} \left| \int_0^1 \frac{xf(y)}{x^2 + y^2} dy - \frac{\pi}{2} f(0) \right| \leq \frac{\pi}{2} \varepsilon.$$

10. 设 S 是 \mathbb{R}^3 中球心在原点, 半径为 R 的球面. $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数. 若 Q 为 \mathbb{R}^3 的正交变换, $g = f \circ Q$. 证明

$$\iint_S f dS = \iint_S g dS.$$

证. 设 S 的参数表示为 $\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, 则 $\mathbf{p} = Q \circ \mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ 也是 S 的参数表示. 我们有

$$\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v = (Q\mathbf{r}_u) \times (Q\mathbf{r}_v) = Q(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v).$$

由于 Q 是正交变换,

$$|\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| = |Q(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|.$$

于是

$$\begin{aligned}
 \iint_S f \, dS &= \iint_D f(\mathbf{p}(u, v)) |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v| \, du \, dv \\
 &= \iint_D f(Q\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv \\
 &= \iint_D g(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv = \iint_S g \, dS.
 \end{aligned}$$

厦门大学数学科学学院 2019 级数学分析 3 期中试题

1. (15 分) 考虑 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $f_x(a, b)$ 存在, f_y 在 (a, b) 连续. 证明 f 在 (a, b) 可微.
2. (10 分) 设 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $a \in \mathbb{R}^m$ 可微. $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_k$ 是 k 个单位向量. 若 $\sum_{i=1}^k \mathbf{l}_i = \mathbf{0}$, 证明
$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_i} \Big|_a = 0.$$
3. (15 分) 求方程
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
经自变量变换 $\xi = x + y, \eta = 3x - y$ 得到的新方程, 这里 $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
4. (10 分) 设 $p \in \mathbb{R}^m, K$ 是 \mathbb{R}^n 中的紧集. 若有 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ 中的开集 U 使得 $\{p\} \times K \subset U$, 证明存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon^m(p) \times K \subset U$. 这里 $B_\varepsilon^m(p)$ 表示 \mathbb{R}^m 中以 p 为心, ε 为半径的开球.
5. (10 分) 设曲面 S 的一般方程是 $F(x, y, z) = 1$, 其中 F 是可微的 n 次齐次函数, 即
$$F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z), \quad \forall (t, x, y, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3.$$
设 $p_0 \in S, \nabla F(p_0) \neq 0$. 证明曲面 S 在 p_0 的切平面方程为
$$x \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{p_0} + y \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{p_0} + z \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{p_0} = nF(p_0).$$
6. (15 分) 设曲面 S_1, S_2 的一般方程分别是 $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$, 其中 $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 - 函数, 对 $x \in S_i$ 有 $\nabla f_i(x) \neq 0$. 又设 S_1 是紧的. 证明:
 - 存在 $p_i \in S_i$, 使
$$|p_1 - p_2| = \inf_{x \in S_1, y \in S_2} |x - y|.$$
 - 向量 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 是 S_1 和 S_2 的公共法向量.
7. (15 分) 设 A 是 n 阶对称矩阵. 考虑二次函数 $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,
$$\Phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b \cdot x + c,$$
其中 $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. 若 x_0 是 Φ 的极小值点, 则它是最小值点.
8. (10 分) 设 $f : B_r^m(a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 a 可微, 对 $x \in B_r^m(a)$ 有
$$|f(x) - f(a)| \geq |x - a|.$$
证明 $\text{rank } f'(a) = m$. 这里 $f'(a)$ 表示 f 在 a 的 Jacobi 矩阵, $B_r^m(a)$ 表示 \mathbb{R}^m 中以 a 为心, r 为半径的开球.

厦门大学数学科学学院2019级数学分析3期中试题参考答案

1. (15 分) 考虑 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. 设 $f_x(a, b)$ 存在, f_y 在 (a, b) 连续. 证明 f 在 (a, b) 可微.

证. 记 $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$, 设 f_y 在 $B_r(a, b)$ 存在. 当 $\rho \rightarrow 0$ 时我们有

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - [f_x(a, b)h + f_y(a, b)k]}{\rho} \right| \\ &= \left| \frac{f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f_y(a, b)k}{\rho} + \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - f_x(a, b)h}{\rho} \right| \\ &= \left| \frac{[f_y(a+h, b+\theta k) - f_y(a, b)]k}{\rho} + \left(\frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - f_x(a, b) \right) \frac{h}{\rho} \right| \\ &\leq |f_y(a+h, b+\theta k) - f_y(a, b)| + \left| \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - f_x(a, b) \right| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

这就证明了 f 在 (a, b) 可微.

2. (10 分) 设 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $a \in \mathbb{R}^m$ 可微. $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_k$ 是 k 个单位向量. 若 $\sum_{i=1}^k \mathbf{l}_i = \mathbf{0}$, 证明

$$\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_i} \Big|_a = 0.$$

证. 因 f 在 a 可微, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}_i} \Big|_a &= \sum_{i=1}^k \nabla f(a) \cdot \mathbf{l}_i \\ &= \nabla f(a) \cdot \sum_{i=1}^k \mathbf{l}_i = \nabla f(a) \cdot \mathbf{0} = 0. \end{aligned}$$

3. (15 分) 求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 6 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

经自变量变换 $\xi = x + y$, $\eta = 3x - y$ 得到的新方程, 这里 $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

证. 由链法则,

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + 3u_\eta, & u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\xi - u_\eta, \\ u_{xx} &= (u_\xi + 3u_\eta)_x = (u_\xi)_x + 3(u_\eta)_x \\ &= u_{\xi\xi} \xi_x + u_{\xi\eta} \eta_x + 3(u_{\eta\xi} \xi_x + u_{\eta\eta} \eta_x) = u_{\xi\xi} + 3u_{\xi\eta} + 3(u_{\eta\xi} + 3u_{\eta\eta}) \\ &= u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}, \\ u_{xy} &= (u_\xi + 3u_\eta)_y = (u_\xi)_y + 3(u_\eta)_y \\ &= u_{\xi\xi} \xi_y + u_{\xi\eta} \eta_y + 3(u_{\eta\xi} \xi_y + u_{\eta\eta} \eta_y) = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} + 3(u_{\eta\xi} - u_{\eta\eta}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta}, \\
 u_{yy} &= (u_\xi - u_\eta)_y = (u_\xi)_y - (u_\eta)_y \\
 &= u_{\xi\xi}\xi_y + u_{\xi\eta}\eta_y - (u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y) = u_{\xi\xi} - u_{\xi\eta} - (u_{\eta\xi} - u_{\eta\eta}) \\
 &= u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}.
 \end{aligned}$$

代入方程, 得

$$\begin{aligned}
 0 &= (u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + 9u_{\eta\eta}) + 2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} - 3u_{\eta\eta}) \\
 &\quad - 3(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) + 2(u_\xi + 3u_\eta) + 6(u_\xi - u_\eta) \\
 &= 16u_{\xi\eta} + 8u_\xi.
 \end{aligned}$$

4. (10 分) 设 $p \in \mathbb{R}^m$, K 是 \mathbb{R}^n 中的紧集. 若有 $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$ 中的开集 U 使得 $\{p\} \times K \subset U$, 证明存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $B_\varepsilon^m(p) \times K \subset U$. 这里 $B_\varepsilon^m(p)$ 表示 \mathbb{R}^m 中以 p 为心, ε 为半径的开球.

证. 若结论不成立, 即 $\forall \varepsilon > 0$, $B_\varepsilon^m(p) \times K \not\subset U$. 则对 $\forall i \in \mathbb{N}$, 有

$$(x_i, y_i) \in (B_{1/i}^m(p) \times K) \setminus U.$$

由于 $\{y_i\} \subset K$ 而 K 紧, 还可设 $y_i \rightarrow q \in K$. 从而

$$(x_i, y_i) \in U^c, \quad (x_i, y_i) \rightarrow (p, q).$$

注意到 U^c 是闭集, 于是 $(p, q) \in \overline{U^c} = U^c$. 这与 $(p, q) \in \{p\} \times K$ 矛盾.

5. (10 分) 设曲面 S 的一般方程是 $F(x, y, z) = 1$, 其中 F 是可微的 n 次齐次函数, 即

$$F(tx, ty, tz) = t^n F(x, y, z), \quad \forall (t, x, y, z) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}^3.$$

设 $p_0 \in S$, $\nabla F(p_0) \neq 0$. 证明曲面 S 在 p_0 的切平面方程为

$$x \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{p_0} + y \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_{p_0} + z \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{p_0} = nF(p_0).$$

证. 设 $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. 曲面 S 在 p_0 的切平面的方程是 $(p - p_0) \cdot \nabla F(p_0) = 0$, 即

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (F_x(p_0), F_y(p_0), F_z(p_0)) = 0,$$

$$\begin{aligned}
 xF_x(p_0) + yF_y(p_0) + zF_z(p_0) &= x_0F_x(p_0) + y_0F_y(p_0) + z_0F_z(p_0) \\
 &= nF(p_0),
 \end{aligned}$$

这里最后的等号是因为 F 是 n 次齐次函数, 所以处处满足

$$xF_x + yF_y + zF_z = nF.$$

6. (15 分) 设曲面 S_1, S_2 的一般方程分别是 $f_1(x) = 0, f_2(x) = 0$, 其中 $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 是 C^1 - 函数, 对 $x \in S_i$ 有 $\nabla f_i(x) \neq 0$. 又设 S_1 是紧的. 证明:

(a) 存在 $p_i \in S_i$, 使

$$|p_1 - p_2| = \inf_{x \in S_1, y \in S_2} |x - y|.$$

(b) 向量 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 是 S_1 和 S_2 的公共法向量.

证. a) 取极小化点列 $\{x_k\} \subset S_1, \{y_k\} \subset S_2$, 使

$$|x_k - y_k| \rightarrow \inf_{x \in S_1, y \in S_2} |x - y|. \quad (0.1)$$

因 S_1 紧, 不妨设 $x_k \rightarrow p_1 \in S_1$. 由 (0.1) 知 $\{y_k\}$ 是有界的, 有收敛子列 $\{y_{k_i}\}$. 因 S_2 是闭集, 设 $y_{k_i} \rightarrow p_2 \in S_2$. 我们有

$$\begin{aligned} |p_1 - p_2| &= \lim_{i \rightarrow \infty} |x_{k_i} - y_{k_i}| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - y_k| = \inf_{x \in S_1, y \in S_2} |x - y|. \end{aligned}$$

b) 考虑 C^1 - 函数 $\varphi, F_1, F_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} |x - y|^2, \quad F_1(x, y) = f_1(x), \quad F_2(x, y) = f_2(y).$$

则 (p_1, p_2) 是 φ 在约束条件

$$F_1(x, y) = 0, \quad F_2(x, y) = 0$$

下的最小值点. 由 Lagrange 乘数法, 有 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 使

$$\nabla \varphi(p_1, p_2) = \lambda \nabla F_1(p_1, p_2) + \mu \nabla F_2(p_1, p_2).$$

即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_1 - p_2 \\ p_2 - p_1 \end{pmatrix} &= \lambda \begin{pmatrix} \nabla f_1(p_1) \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla f_2(p_2) \end{pmatrix}. \\ p_1 - p_2 &= \lambda \nabla f_1(p_1) = -\mu \nabla f_2(p_2). \end{aligned}$$

所以 $\overrightarrow{p_1 p_2}$ 与 S_i 在 p_i 的法向量共线.

7. (15 分) 设 A 是 n 阶对称矩阵. 考虑二次函数 $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b \cdot x + c,$$

其中 $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$. 若 x_0 是 Φ 的极小值点, 则它是最小值点.

证(一). 因 x_0 是 Φ 的极小点, $\nabla\Phi(x_0) = 0$, 而 $H_\Phi(x_0)$ 是半正定的¹. 任取 $h \in \mathbb{R}^n$, 注意到对 $i_1, i_2, i_3 \in \bar{n}$ 及 $\xi \in \mathbb{R}^n$ 有

$$\partial_{i_1 i_2 i_3} \Phi(\xi) = 0,$$

由 Lagrange 余项的 Taylor 公式, $\exists \xi \in [x_0, x_0 + h]$ 使 (我们用了 Einstein 求和约定)

$$\begin{aligned}\Phi(x_0 + h) &= \Phi(x_0) + \nabla\Phi(x_0) \cdot h + \frac{1}{2} h^\top H_\Phi(x_0) h + \frac{1}{3!} \partial_{i_1 i_2 i_3} \Phi(\xi) h^{i_1} h^{i_2} h^{i_3} \\ &= \Phi(x_0) + \frac{1}{2} h^\top H_\Phi(x_0) h \geq \Phi(x_0).\end{aligned}$$

由 $h \in \mathbb{R}^n$ 任意, 这就证明了 x_0 是 Φ 的最小值点.

证(二). 因 x_0 是 Φ 的极小点,

$$Ax_0 + b = \nabla\Phi(x_0) = 0$$

而 $A = H_\Phi(x_0)$ 是半正定的. 对 $\forall h \in \mathbb{R}^n$, 由 Lagrange 中值定理, $\exists \theta \in (0, 1)$ 使

$$\begin{aligned}\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) &= \nabla\Phi(x_0 + \theta h) \cdot h \\ &= (A(x_0 + \theta h) + b) \cdot h \\ &= (\theta Ah) \cdot h = \theta h^\top Ah \geq 0,\end{aligned}$$

因此 x_0 是极小值点.

证(三). 这个证法比前两种繁琐一点 (因此不算好的方法), 但也很有意思. 其中通过比较 (0.2) 两边的分量推出 Φ 只与 x^1, \dots, x^r 有关 (把 n 元函数问题转化为 r 元函数问题, $r < n$), 是很有启发性的. 请注意证明中的楷体字部分.

由于 x_0 是 φ 的极小值点, $H_f(x_0) = A$ 是半正定矩阵. 有正交阵 Q 及 $r \in \bar{n}$ 使

$$Q^\top A Q = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0), \quad \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_r > 0.$$

由于所论性质在正交变换下是不变的, 不妨设

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0).$$

于是

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^r \lambda_i (x^i)^2 + \sum_{i=1}^n b_i x^i + c.$$

¹若不然, $H_\Phi(x_0)$ 的第一特征值 $\lambda_1 < 0$. 设 h 是对应的单位特征向量, 则 $h^\top H_\Phi(x_0) h = \lambda_1 |h|^2 = \lambda_1$. 由 Taylor 公式, 当 $t \rightarrow 0$ 时

$$\Phi(x_0 + th) = \Phi(x_0) + \frac{1}{2} (th)^\top H_\Phi(x_0) (th) + o(t^2) = \Phi(x_0) + \frac{\lambda_1 t^2}{2} + o(t^2).$$

因此当 $|t| \ll 1$ 时

$$\Phi(x_0 + th) < \Phi(x_0) + \frac{\lambda_1 t^2}{3} < \Phi(x_0),$$

与 x_0 是 Φ 的极小点矛盾.

因 x_0 是极小点,

$$0 = \nabla \Phi(x_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_0^1 + b_1 \\ \vdots \\ \lambda_r x_0^r + b_r \\ b_{r+1} \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (0.2)$$

于是 $b_{r+1} = \dots = b_n = 0$, Φ 只与 x^1, \dots, x^r 有关. 所以 只需考虑 A 是正定的情形, 此时

$$0 = \nabla \Phi(x) = Ax + b$$

只有唯一解, 所以 x_0 是 Φ 唯一的极小点.

$$\Phi(x) \geq \frac{1}{2} \lambda_n |x|^2 + b \cdot x + c \rightarrow +\infty, \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty,$$

因此 Φ 能取到最小值, 唯一的极小点 x_0 就是最小点.

8. (10 分) 设 $f : B_r^m(a) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在 a 可微, 对 $x \in B_r^m(a)$ 有 $|f(x) - f(a)| \geq |x - a|$. 证明 $\text{rank } f'(a) = m$. 这里 $B_r^m(a)$ 表示 \mathbb{R}^m 中以 a 为心, r 为半径的开球.

证. 若 $\text{rank } f'(a) < m$, 则有 $h \in \partial B_1^m(0)$, 使 $f'(a)h = 0$. 当 $|t| < r$ 时 $a + th \in B_r^m(a)$. 于是

$$\left| \frac{f(a + th) - f(a)}{t} \right| \geq |h| = 1.$$

令 $t \rightarrow 0$ 得 $|f'(a)h| \geq 1$, 与 $f'(a)h = 0$ 矛盾.

附件五 最近两学期的学生成绩分布统计

数学分析 (III) 课程成绩考核登记表

课程类型：学科通修 学时：96.0 学分：4.0 任课教师：刘轼波

2020-2021学年 第一学期成绩统计

课程名称	130080010109-数学分析 (III)							学分/学时		4.0/96.0	
教师	刘轼波			上课人数		30		考试人数		30	
最高分	97			最低分		37		平均分		75.4	
分数段	95~100	90~94	85~89	81~84	78~80	75~77	72~74	68~71	64~67	60~63	0~59
人数	2	2	6	3	0	3	2	3	2	6	1
百分比	7%	7%	20%	10%	0%	10%	7%	10%	7%	20%	3%

Score Range	Number of Students
95~100	2
90~94	2
85~89	6
81~84	3
78~80	0
75~77	3
72~74	2
68~71	3
64~67	6
60~63	1
0~59	0

任课老师签字：_____

教研室负责人签字：_____

年 月 日

年 月 日

数学分析 (III) 课程成绩考核登记表

课程类型：学科通修 学时：90.0 学分：4.0 任课教师：刘轼波

2019-2020学年 第一学期成绩统计

课程名称	130080010109-数学分析 (III)							学分/学时		4.0/90.0	
教师	刘轼波			上课人数		31		考试人数		31	
最高分	96			最低分		25		平均分		80.7	
分数段	95~100	90~94	85~89	81~84	78~80	75~77	72~74	68~71	64~67	60~63	0~59
人数	4	4	9	3	2	2	2	0	2	2	1
百分比	13%	13%	29%	10%	6%	6%	6%	0%	6%	6%	3%

Score Range	Number of Students
95~100	4
90~94	4
85~89	9
81~84	3
78~80	2
75~77	2
72~74	2
68~71	0
64~67	2
60~63	2
0~59	1

任课老师签字：_____

教研室负责人签字：_____

年 月 日

年 月 日

数学分析 (III) 课程成绩考核登记表

课程类型: 学科通修 学时: 96.0 学分: 4.0 任课教师: 伍火熊

2020-2021学年 第一学期成绩统计

课程名称	130080010109-数学分析 (III)								学分/学时	4.0/96.0																									
教师	伍火熊			上课人数		79		考试人数		79																									
最高分	95			最低分		0		平均分		66.2																									
分数段	95~100	90~94	85~89	81~84	78~80	75~77	72~74	68~71	64~67	60~63	0~59																								
人数	2	2	5	11	3	6	4	5	5	23	13																								
百分比	2%	2%	6%	14%	4%	8%	5%	6%	6%	29%	16%																								
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Score Range</th> <th>Number of Students</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>95~100</td><td>2</td></tr> <tr><td>90~94</td><td>2</td></tr> <tr><td>85~89</td><td>5</td></tr> <tr><td>81~84</td><td>11</td></tr> <tr><td>78~80</td><td>3</td></tr> <tr><td>75~77</td><td>6</td></tr> <tr><td>72~74</td><td>4</td></tr> <tr><td>68~71</td><td>5</td></tr> <tr><td>64~67</td><td>5</td></tr> <tr><td>60~63</td><td>23</td></tr> <tr><td>0~59</td><td>13</td></tr> </tbody> </table>												Score Range	Number of Students	95~100	2	90~94	2	85~89	5	81~84	11	78~80	3	75~77	6	72~74	4	68~71	5	64~67	5	60~63	23	0~59	13
Score Range	Number of Students																																		
95~100	2																																		
90~94	2																																		
85~89	5																																		
81~84	11																																		
78~80	3																																		
75~77	6																																		
72~74	4																																		
68~71	5																																		
64~67	5																																		
60~63	23																																		
0~59	13																																		

任课老师签字: _____
年 月 日教研室负责人签字: _____
年 月 日

数学分析 (III) 课程成绩考核登记表
课程类型: 学科通修 学时: 90.0 学分: 4.0 任课教师: 伍火熊
2019-2020学年 第一学期成绩统计

课程名称	130080010109-数学分析 (III)								学分/学时	4.0/90.0																									
教师	伍火熊			上课人数		86		考试人数		86																									
最高分	93			最低分		0		平均分		66.7																									
分数段	95~100	90~94	85~89	81~84	78~80	75~77	72~74	68~71	64~67	60~63	0~59																								
人数	0	3	6	9	10	7	5	11	5	17	13																								
百分比	0%	4%	7%	10%	12%	8%	6%	13%	6%	20%	15%																								
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Score Range</th> <th>Number of Students</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>95~100</td><td>0</td></tr> <tr><td>90~94</td><td>3</td></tr> <tr><td>85~89</td><td>6</td></tr> <tr><td>81~84</td><td>9</td></tr> <tr><td>78~80</td><td>10</td></tr> <tr><td>75~77</td><td>7</td></tr> <tr><td>72~74</td><td>5</td></tr> <tr><td>68~71</td><td>11</td></tr> <tr><td>64~67</td><td>5</td></tr> <tr><td>60~63</td><td>17</td></tr> <tr><td>0~59</td><td>13</td></tr> </tbody> </table>												Score Range	Number of Students	95~100	0	90~94	3	85~89	6	81~84	9	78~80	10	75~77	7	72~74	5	68~71	11	64~67	5	60~63	17	0~59	13
Score Range	Number of Students																																		
95~100	0																																		
90~94	3																																		
85~89	6																																		
81~84	9																																		
78~80	10																																		
75~77	7																																		
72~74	5																																		
68~71	11																																		
64~67	5																																		
60~63	17																																		
0~59	13																																		

任课老师签字: _____
年 月 日教研室负责人签字: _____
年 月 日

数学分析 (III) 课程成绩考核登记表

课程类型: 学科通修 学时: 96.0 学分: 4.0 任课教师: 夏超

2020-2021学年 第一学期成绩统计



课程名称	130080010109-数学分析 (III)								学分/学时	4.0/96.0																								
教师	夏超			上课人数		54		考试人数		54																								
最高分	100			最低分		0		平均分		59.4																								
分数段	95~100	90~94	85~89	81~84	78~80	75~77	72~74	68~71	64~67	60~63	0~59																							
人数	1	2	1	0	4	2	6	1	8	16	13																							
百分比	2%	4%	2%	0%	7%	4%	11%	2%	15%	30%	24%																							
<table border="1"> <thead> <tr> <th>分数段</th> <th>人数</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>95~100</td><td>1</td></tr> <tr><td>90~94</td><td>2</td></tr> <tr><td>85~89</td><td>1</td></tr> <tr><td>81~84</td><td>0</td></tr> <tr><td>78~80</td><td>4</td></tr> <tr><td>75~77</td><td>2</td></tr> <tr><td>72~74</td><td>6</td></tr> <tr><td>68~71</td><td>1</td></tr> <tr><td>64~67</td><td>8</td></tr> <tr><td>60~63</td><td>16</td></tr> <tr><td>0~59</td><td>13</td></tr> </tbody> </table>											分数段	人数	95~100	1	90~94	2	85~89	1	81~84	0	78~80	4	75~77	2	72~74	6	68~71	1	64~67	8	60~63	16	0~59	13
分数段	人数																																	
95~100	1																																	
90~94	2																																	
85~89	1																																	
81~84	0																																	
78~80	4																																	
75~77	2																																	
72~74	6																																	
68~71	1																																	
64~67	8																																	
60~63	16																																	
0~59	13																																	

任课老师签字: _____

教研室负责人签字: _____

年 月 日

年 月 日

数学分析 (III) 课程成绩考核登记表

课程类型: 学科通修 学时: 90.0 学分: 4.0 任课教师: 夏超

2019-2020学年 第一学期成绩统计



课程名称	130080010109-数学分析 (III)								学分/学时	4.0/90.0																								
教师	夏超			上课人数		57		考试人数		57																								
最高分	94			最低分		2		平均分		57.4																								
分数段	95~100	90~94	85~89	81~84	78~80	75~77	72~74	68~71	64~67	60~63	0~59																							
人数	0	1	4	6	5	3	0	6	4	13	15																							
百分比	0%	2%	7%	10%	9%	5%	0%	10%	7%	23%	26%																							
<table border="1"> <thead> <tr> <th>分数段</th> <th>人数</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>95~100</td><td>0</td></tr> <tr><td>90~94</td><td>1</td></tr> <tr><td>85~89</td><td>4</td></tr> <tr><td>81~84</td><td>6</td></tr> <tr><td>78~80</td><td>5</td></tr> <tr><td>75~77</td><td>3</td></tr> <tr><td>72~74</td><td>0</td></tr> <tr><td>68~71</td><td>6</td></tr> <tr><td>64~67</td><td>4</td></tr> <tr><td>60~63</td><td>13</td></tr> <tr><td>0~59</td><td>15</td></tr> </tbody> </table>											分数段	人数	95~100	0	90~94	1	85~89	4	81~84	6	78~80	5	75~77	3	72~74	0	68~71	6	64~67	4	60~63	13	0~59	15
分数段	人数																																	
95~100	0																																	
90~94	1																																	
85~89	4																																	
81~84	6																																	
78~80	5																																	
75~77	3																																	
72~74	0																																	
68~71	6																																	
64~67	4																																	
60~63	13																																	
0~59	15																																	

任课老师签字: _____

教研室负责人签字: _____

年 月 日

年 月 日

附件十 教学（课堂或实践）实录视频

课程负责人的教学（课堂或实践）实录视频已另行提交，但也可以通过如下地址下载：

- <https://pan.xmu.edu.cn/s/cE1gHOS0U>

附件十一 其他材料

1. 课程负责人刘轼波教授与其指导的 2014 级本科生刘鹏合作于 2018 年发表在《美国数学月刊》的文章。
2. 课程负责人刘轼波教授根据下图所示的 2019 年 6 月他在国家天元数学东南中心举办的数学专业课程建设研讨会所做的报告撰写的文章数学专业多元微积分教学的几点体会。这是他对自己多年来讲授数学分析III这门课所做的一个总结。
此文已被《大学数学》接受，预计在 2021 年第 2 期发表。





The American Mathematical Monthly

ISSN: 0002-9890 (Print) 1930-0972 (Online) Journal homepage: <http://www.tandfonline.com/loi/uamm20>

On the Surjectivity of Smooth Maps into Euclidean Spaces and the Fundamental Theorem of Algebra

Peng Liu & Shibo Liu

To cite this article: Peng Liu & Shibo Liu (2018) On the Surjectivity of Smooth Maps into Euclidean Spaces and the Fundamental Theorem of Algebra, *The American Mathematical Monthly*, 125:10, 941-943, DOI: [10.1080/00029890.2018.1521241](https://doi.org/10.1080/00029890.2018.1521241)

To link to this article: <https://doi.org/10.1080/00029890.2018.1521241>



Published online: 01 Dec 2018.



Submit your article to this journal



View Crossmark data

Full Terms & Conditions of access and use can be found at
<http://www.tandfonline.com/action/journalInformation?journalCode=uamm20>

On the Surjectivity of Smooth Maps into Euclidean Spaces and the Fundamental Theorem of Algebra

Peng Liu and Shibo Liu

Abstract. In this note, we obtain the surjectivity of smooth maps into Euclidean spaces under mild conditions. As an application, we give a new proof of the fundamental theorem of algebra. We also observe that any C^1 -map from a compact manifold into Euclidean space with dimension $n \geq 2$ has infinitely many critical points.

Let $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a C^1 -map such that for all $x \in \mathbb{R}^n$, we have $\det Df(x) \neq 0$. Suppose moreover that

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |f(x)| = +\infty. \quad (1)$$

Then, it is well known that $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$ (namely f is surjective), see, e.g., [1, p. 24]. In this note, we will prove the following generalization of this result. As we shall see from this result, we can easily obtain the fundamental theorem of algebra.

Let U be an open subset of \mathbb{R}^m and $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a C^1 -map; let $a \in U$. If $\text{rank } Df(a) < n$, that is, the differential map $Df(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ is not surjective, then we say that a is a critical point of f .

Theorem 1. *Let $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ be a C^1 -map with $n \geq 2$. If f has only finitely many critical points and $f(\mathbb{R}^m)$ is a closed subset of \mathbb{R}^n , then $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$.*

Remark. If $m = n$, then $\det Df(x) \neq 0$ says exactly that x is not a critical point of f . If condition (1) is satisfied, then $f(\mathbb{R}^n)$ is closed. In fact, for $y_i \in f(\mathbb{R}^n)$ such that $y_i \rightarrow y$, we may assume that $y_i = f(x_i)$ for some $x_i \in \mathbb{R}^n$. By (1) we see that $\{x_i\}$ is bounded. Up to a subsequence, we may assume that $x_i \rightarrow x$ for some $x \in \mathbb{R}^n$. Now the continuity of f implies $y = f(x) \in f(\mathbb{R}^n)$.

Therefore, the classical result mentioned at the beginning is a corollary of our **Theorem 1**.

To prove this theorem, we need the following lemma.

Lemma 2. *Let $n \geq 2$, A be a nonempty open subset of \mathbb{R}^n . If there exist k points p_1, \dots, p_k such that $A \cup \{p_i\}_{i=1}^k$ is closed, then $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.*

Proof. Because $A \cup \{p_i\}_{i=1}^k$ is closed, we have

$$A \cup \{p_i\}_{i=1}^k = \overline{A \cup \{p_i\}_{i=1}^k} = \overline{A} \cup \{p_i\}_{i=1}^k = A \cup \partial A \cup \{p_i\}_{i=1}^k.$$

Since A is open, $A \cap \partial A = \emptyset$. It follows that

$$\partial A \subset \{p_i\}_{i=1}^k. \quad (2)$$

If $\overline{A} \neq \mathbb{R}^n$, then we can choose $b \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ and $a \in A$. Since both A and $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$ are open, there exists $\varepsilon > 0$ such that

$$B_\varepsilon(a) \subset A, \quad B_\varepsilon(b) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{A}.$$

This means that b is not a boundary point of A .

Since $n \geq 2$, we can take a segment $\ell \subset B_{\varepsilon/2}(a)$ such that ℓ is not parallel to the vector $b - a$. Of course, we can choose $k + 1$ different points $\{x_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \ell$.

Consider the $k + 1$ segments I_i with endpoints b and x_i . Because each such segment not only contains points (those near x_i) in A , but also contains points (those near b) in $\mathbb{R}^n \setminus A$, it is easy to see that for each $i = 1, \dots, k + 1$, there exists at least one boundary point of A in I_i . Since for $i \neq j$, we have $I_i \cap I_j = \{b\}$ and $b \notin \partial A$, we conclude that ∂A contains at least $k + 1$ points. This contradicts (2). ■

Remark. A similar line segment argument is also used in [2, p. 110] to prove that if $n \geq 2$, then the complement of a countable subset of \mathbb{R}^n is connected. On the other hand, in Lemma 2, we are interested in the denseness of certain subset of \mathbb{R}^n . We would like to thank one of the reviewers for pointing out reference [2] to us.

Proof of Theorem 1. Let K be the set of critical points; then K is a finite set. Because $\mathbb{R}^m \setminus K$ is open and rank $Df(x) = n$ for $x \in \mathbb{R}^m \setminus K$, using the inverse function theorem, it is well known that $A = f(\mathbb{R}^m \setminus K)$ is an open subset of \mathbb{R}^n . By the assumption,

$$A \cup f(K) = f(\mathbb{R}^m \setminus K) \cup f(K) = f(\mathbb{R}^m)$$

is closed. Since K is finite, its image $f(K)$ is also finite. Applying Lemma 2, we conclude that $\overline{A} = \mathbb{R}^n$.

Again using the assumption that $f(\mathbb{R}^m)$ is closed, we deduce that

$$f(\mathbb{R}^m) = \overline{f(\mathbb{R}^m)} \supset \overline{f(\mathbb{R}^m \setminus K)} = \overline{A} = \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare$$

Considering the proof of Theorem 1, we find that the domain of our map f can be replaced by an m -dimensional C^1 -manifold M . Therefore, we have the following corollary, whose proof is omitted.

Corollary 3. *Let M be an m -dimensional C^1 -manifold (without boundary) and $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ a C^1 -map with $n \geq 2$. If f has only finitely many critical points and $f(M)$ is a closed subset of \mathbb{R}^n , then $f(M) = \mathbb{R}^n$.*

From this corollary, we can state the following further result.

Corollary 4. *Let M be a compact m -dimensional C^1 -manifold (without boundary) and $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ a C^1 -map with $n \geq 2$. Then f has infinitely many critical points.*

Now, we consider polynomials

$$p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

of degree $n \geq 1$, where the coefficients $a_i \in \mathbb{C}$. As corollary of our theorem, we will give a new proof of the following classical theorem.

Theorem 5 (Fundamental Theorem of Algebra). *If $p(z)$ is a polynomial of degree $n \geq 1$, with complex coefficients a_i , then there exists $\xi \in \mathbb{C}$ such that $p(\xi) = 0$.*

Proof. Write $z = x + iy$, and

$$p(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Then we know that the complex derivative of p is given by

$$p'(z) = u_x + iv_x.$$

If we consider our polynomial as a map $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$p(x, y) = (u(x, y), v(x, y)),$$

then using the Cauchy–Riemann equations ($u_x = v_y$, $u_y = -v_x$), we have

$$\det Dp(x, y) = \det \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} u_x & -v_x \\ v_x & u_x \end{pmatrix} = u_x^2 + v_x^2.$$

Therefore, $p'(z) = 0$ if and only if $\det Dp(x, y) = 0$. Because $p'(z)$ is a polynomial of degree $n - 1$, it has at most $n - 1$ zeros. Thus, the map $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ has at most $n - 1$ critical points.

On the other hand, it is obvious that

$$\lim_{|(x,y)| \rightarrow \infty} |p(x, y)| = +\infty,$$

which implies that $p(\mathbb{R}^2)$ is closed. Applying [Theorem 1](#), we deduce $p(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$. In particular, $(0, 0) \in p(\mathbb{R}^2)$; this is equivalent to the existence of $\xi \in \mathbb{C}$ such that $p(\xi) = 0$. ■

Remark. Although the fundamental theorem of algebra was proved more than 200 years ago, new proofs of this theorem keep emerging even in the last decades, see, e.g., [3, 4]. The spirit of our proof is somewhat similar to [4]. In [4], the concepts of open (and closed) subsets of a topological subspace of \mathbb{C} and the connectedness of such a subspace are employed. In this sense, our proof is more elementary.

ACKNOWLEDGMENT. This work was supported by NSFC (Grant No.11671331) and NSFFJ (Grant No.2014J06002). It was done while S. Liu was visiting the University of Notre Dame; he wants to thank the Mathematics Department for the hospitality, and the Chinese Scholarship Council for financial support. The authors are grateful to the reviewers for their comments on this note. We also want to thank the editor, Professor S. J. Colley, for correcting numerous bugs in our English.

REFERENCES

- [1] Deimling, K. (1985). *Nonlinear Functional Analysis*. Berlin: Springer-Verlag. doi.org/10.1007/978-3-662-00547-7
- [2] Dugundji, J. (1966). *Topology*. Boston, MA: Allyn and Bacon, Inc.
- [3] Lazer, A. C., Leckband, M. (2010). The fundamental theorem of algebra via the Fourier inversion formula. *Amer. Math. Monthly*. 117(5): 455–457. doi.org/10.4169/000298910X485996
- [4] Sen, A. (2000). Fundamental theorem of algebra—yet another proof. *Amer. Math. Monthly*. 107(9): 842–843. doi.org/10.2307/2695742

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China
liupeng1729@qq.com

School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China
liusb@xmu.edu.cn

数学专业多元微积分教学的几点体会

刘轼波*

厦门大学数学系, 厦门 361005

本文介绍了我在厦门大学数学系为二年级第 1 学期的本科生讲授多元微积分的一些做法. 我们特别强调向量值函数的微分学和将实际问题转化为积分的微元分析法. 另外, 我们举例说明如何把学生已掌握的线性代数和常微分方程知识引入多元微积分中来, 得到有重要意义的结果.

1 引言

数学分析是数学类专业本科生最重要的基础课, 因此各高校的数学院系对这门课都极为重视. 2009 年, 我国启动基础学科拔尖学生培养试验计划. 从 2014 年秋季起, 厦门大学数学科学学院对入选该计划的本科生的主要课程实行小班教学, 由我负责该班二年级第 1 学期的数学分析 (即数学分析 3) 的教学工作. 这门课的主要内容就是多元微积分. 为了行文方便, 下文中的数学分析也专指多元微积分.

对这些优秀学生实行小班教学的意图, 当然是希望在教学内容等方面突破传统教材的框架, 力求有所创新, 更好地完成数学人才培养任务. 因此, 我对这门课进行了一些思考和探索, 逐步形成了有特色的课程内容体系, 在几年的教学过程中逐步形成了一份讲义 [4]. 此外, 我与教过的本科生合作, 发表了两篇关于多元微积分的论文 [19, 20]; 这些结果现在已经成为我的课程的标准内容. 此外, 我在北京大学、北京师范大学、南京大学和浙江大学等高校为本科生做有关的学术报告 [5], 介绍我们在数学分析方面的工作; 2017 年、2018 年应邀在复旦大学举办的数学分析教学研讨会做报告.

2019 年 6 月, 我应邀在国家天元数学东南中心举办的数学专业课程建设研讨会上做报告¹. 本文是根据这个报告的内容整理而成.

作者感谢北京大学张恭庆院士对基础课教学工作的关心和邀请我到北京大学做报告, 感谢复旦大学楼红卫教授连续两次邀请我到复旦大学举办的数学分析教学研讨会做报告, 感谢安排我为本科生做报告的有关高校. 作者的教学改革和科学研究工作分别受到教育部基础学科拔尖学生培养试验计划 (20180707) 以及国家自然科学基金项目 (11671331) 的资助.

*email: liusb@xmu.edu.cn

¹此次课程建设研讨会网址: <http://tianyuan.xmu.edu.cn/activities/19-20/sxkc2019/index.html>

2 课程现代化及与现代数学的联系

现代数学很多内容都是高维的, 适应向量记法并能熟练操作向量值函数, 是成为优秀数学家必须的素养. 因此, 我在讲授多元微积分时, 特别强调向量的记法以及向量值函数. 可能很多人都已经意识到: 数学分析中很多概念和定理, 用分量形式表达非常繁琐, 而用向量形式则非常简洁, 并且更能凸显数学内容的实质和内在联系; 这应该已经成为很多同行的共识了. 除此之外我在教学中还进一步发现: 若不涉及向量值函数, 则无法充分展现微分学的基本思想! 这一点我们将在下文进一步阐述 (见注 3.3). 由此可见, 在多元微积分教学中仔细讲解向量值函数, 是在教学中应该提倡的一项举措.

数学分析通常被认为是一门古老的学问. 其实, 只要细加研究, 是可以发现数学分析的内容与现代数学的一些联系的. 我们在教学中, 应该善于找到这些联系并展现给学生. 以下我结合自己的教学实践举几个例子.

例 2.1. \mathbb{R}^m 中不存在既开又闭的非空真子集.

众所周知, 在拓扑学中这个结论就是 \mathbb{R}^m 的连通性. 在拓扑课中一般是先利用确界讨论得到 \mathbb{R} 的连通性, 再由连通空间的乘积空间也连通得到 \mathbb{R}^m 的连通性. 当然, 如果先证明道路连通空间必连通, 则这个结论也可以直接由 \mathbb{R}^m 道路连通这个显而易见的事实推出. 以下我们提供一个更直观的证明.

证. 设 \mathbb{R}^m 的非空子集 U 既开又闭, $U \neq \mathbb{R}^m$. 取 $a \in \mathbb{R}^m \setminus U$, 因 U 闭, 有 $x \in U$ 使

$$|x - a| = \inf_{y \in U} |y - a|.$$

因 U 开, 可在 x 附近取点 $x' \in U$ 使 $|x' - a| < |x - a|$; 这就与上式矛盾.

我们在数学分析课中介绍这个简单的例 2.1, 是为了得到以下经典结果.

例 2.2. 设 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是 C^1 -映射, 对 $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $\det f'(x) \neq 0$. 若 f 是强制的, 即 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $|f(x)| \rightarrow \infty$, 则 $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^m$.

证. 事实上, 运用反函数定理, 由 f 的 Jacobi 行列式处处非零可知 f 的值域为开集; 由 f 强制可知 f 的值域为闭集. 因此由例 2.1 即知 f 的值域是 \mathbb{R}^m .

注 2.3. 例 2.2 的结论相当于对 $\forall b \in \mathbb{R}^m$, 都有 $x \in \mathbb{R}^m$ 使 $f(x) = b$. 因此例 2.2 可以看作非线性代数方程组的求解问题. 此例也可以通过研究 $\varphi : x \mapsto |f(x) - b|^2$ 的最值来证明. 进一步, 对 φ 应用山路定理 [12], 还可以证明在例 2.2 的条件下 f 是单射, 因此 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是微分同胚, 详见 [17].

鉴于方程的求解是数学的中心问题, 以及例 2.2 的简单性, 我们认为任何学过多元微积分的数学类本科生都应该至少知道例 2.2 的上述两种证明方法. 不幸的是在某些 985 高校, 即使是入选拔尖计划的优秀学生也完全不知道这个例子.

注 2.4. 在 [19] 中, 我们把例 2.2 的结论推广为: 设 $n \geq 2$, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^1 -映射, 仅有至多有限个 $x \in \mathbb{R}^m$ 使 $\text{rank } f'(x) < n$. 若 $f(\mathbb{R}^m)$ 是闭集, 则 $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$. 由这个结果, 我们立刻得到代数基本定理.

变分方法在近现代数学中有重要的地位. 我们在多元函数积分学部分, 作为散度定理的应用, 可以用变分的思想推导极小曲面方程; 这是把泛函极值问题转化为求解偏微分方程. 为了研究数学、物理中一些重要的非线性偏微分方程解的存在性, 我们也可以反其道而行之, 把方程求解的问题归结为寻找某个能量泛函的极值点或更一般的临界点, 这就是非线性微分方程的变分方法 [10, 14]. 在数学分析这样的基础课中当然不可能过多涉及偏微分方程, 但是通过研究非线性代数方程来展示变分方法的威力, 应该是很有趣的.

例 2.5. 设 $A = (a_i^j)_{m \times m}$ 是正定矩阵, $\theta \in (1, 2)$, $F \in C^1(\mathbb{R}^m)$ 满足 $|F(x)| \leq C(1 + |x|^\theta)$, $f = \nabla F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. 则非线性代数方程组

$$\sum_{i=1}^m a_i^j x^i = f^j(x^1, \dots, x^m), \quad (j = 1, \dots, m)$$

即 $Ax = f(x)$ 有解.

证. 考虑 C^1 -函数 $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} Ax \cdot x - F(x).$$

则 $|x| \rightarrow \infty$ 时 $\Phi(x) \rightarrow +\infty$, 于是 Φ 在 \mathbb{R}^m 中的某点 ξ 达到最小值. 由多元函数极值的必要条件 (Fermat 定理) 我们有 $\nabla \Phi(\xi) = 0$, 即 $A\xi = f(\xi)$. 这 ξ 就是 $Ax = f(x)$ 的解.

作为我们在 [20] 中给出的 m -重积分换元公式新证明的简单推论, 我们立刻得到 m -维 Brouwer 不动点定理 (见注 4.8). 不动点理论也是现代数学中的重要内容, 应用 Brouwer 不动点定理我们可以改进例 2.5 的结果. 在以下的例 2.6 中, A 不必是对称矩阵, f 也不必是某个数量值函数 F 的梯度.

例 2.6. 设 A 是 m -阶可逆矩阵, $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 连续且

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{|x|} = 0, \tag{2.1}$$

则非线性代数方程组 $Ax = f(x)$ 有解.

设 $b \in \mathbb{R}^m$, 常值映射 $f : x \mapsto b$ 显然满足例 2.6 要求的条件. 于是由例 2.6 可知当 A 是可逆矩阵时, 非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解. 因此例 2.6 可以看作线性代数中的 Cramer 法则的非线性推广. 方程组 $Ax = f(x)$ 的求解问题等价于求映射 $g : x \mapsto A^{-1}f(x)$ 的不动点. 运用 (2.1) 我们可以找到充分大的 $r > 0$ 使 $g(\bar{B}_r) \subset \bar{B}_r$, 这里 \bar{B}_r 是球心在原点半径为 r 的闭球, 于是可以应用 Brouwer 不动点定理得到 $g : \bar{B}_r \rightarrow \bar{B}_r$ 的不动点. 具体细节我们留给读者.

3 充分展现微积分的基本思想

进行多元微积分的教学, 当然应该透彻地讲清楚微积分的基本思想, 把它展现在学生面前. 我们先来谈微分学, 首先回顾一下非线性映射 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在点 $a \in \mathbb{R}^m$ 的导数的概念. 如果有 $n \times m$ 矩阵 A , 使得当 $h \rightarrow 0$ 时

$$f(a + h) - f(a) = Ah + o(|h|), \quad (3.1)$$

就称 f 在点 a 可微; 并将由此性质唯一确定的 A 称为 f 在 a 的(全) 导数, 记为 $f'(a)$. 熟知, A 其实就是 f 在 a 点的 Jacobi 矩阵. 当然, 我们也可以把 $A = f'(a)$ 视为 \mathbb{R}^m 到 \mathbb{R}^n 的线性映射.

从定义来看, 线性映射 $f'(a)$ 是非线性映射 $h \mapsto f(a + h) - f(a)$ 的近似, 因此有时也称其为 f 在 a 点的线性化. 由于线性映射比非线性映射容易研究, 我们很自然就希望能够通过考察 $f'(a)$ 来研究 f .

我们认为微分学的基本思想就是通过研究非线性映射 $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 在点 a 的导数 $f'(a)$ 来推断 f 在 a 附近的局部性质. 大体上说: $f'(a)$ 如何, f 就大约如何(见例 3.1). 这里需要向学生强调的是, 由于 f 在 a 点的可微性以及其导数的值都只与 f 在 a 点附近的行为有关, 所以我们只能期望得到 f 在 a 点附近的局部性质. 我们来看一个典型的例子. 为了方便起见, 我们用 \mathcal{N}_a 表示含 a 的开集构成的集族.

例 3.1. 设 $\Omega \in \mathcal{N}_a$, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是 C^k -映射.

- (1) 若 $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 可逆(必 $m = n$), 则 f 在 a 局部可逆. 即有 $U \in \mathcal{N}_a$ 及 $V \in \mathcal{N}_{f(a)}$ 使 $f : U \rightarrow V$ 是双射, 且 f^{-1} 也是 C^k -映射.
- (2) 若 $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是满射(必 $m \geq n$), 则 f 在 a 局部满. 其确切含义是: $b = f(a)$ 是 $f(\Omega)$ 的内点. 也就是说 b 点附近的点都在 f 的值域中, 所以我们把这个结论称为局部满射定理. 特别地, 如果对 $\forall x \in \Omega$, $f'(x)$ 都是线性满射, 则 $f(\Omega)$ 是 \mathbb{R}^n 的开子集.
- (3) 若 $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射(必 $m \leq n$), 则 f 在 a 局部单.

注 3.2. 结论(1)正是反函数定理. 结论(2)、(3)则是其推论; 它们以及更一般的秩定理, 都可以通过补充分量的方法转化为相同维数的空间之间的映射, 然后应用反函数定理来证明. 这是应用反函数定理的典型手法.

注 3.3. 我们认为例 3.1 是体现微分学基本思想的最佳范例: 它很好地表现了 $f'(a)$ 如何, f 就大约如何这个思想. 只有用向量值函数, 才能把它表达得如此简练、清楚. 如果按传统的教法, 只讨论数量值函数(即 $n = 1$ 的情形), 则情形(1)、(3)不可能出现, 而情形(2)也只在 $f'(a) \neq 0$ 这个平凡的情形出现, 因此就没法通过这个最佳范例展现微分学的基本思想, 这无疑是一个巨大的损失.

局部满射定理、局部单射定理以及更一般的秩定理, 对学生今后学习微分流形非常重要. 因此在数学分析课中应该不回避向量值函数、把这几个并不困难的定理讲清楚. 这样一来, 数学分析的教学才能进入广阔的新天地. 例如, 郑州大学马建国编著的教材 [6] 中用局部满射定理给出约束极值的 Lagrange 乘数法的一个有趣的几何证明; 注 2.4 中提到的我们的工作 [19] 也是用局部满射定理证明的.

下面我们来谈谈多元函数积分学. 积分学用于实际问题的关键是微元法, 我们认为这就是积分学的基本思想. 至于各种积分的性质和计算方法乃至它们之间的关系形成的整套理论体系, 当然也很重要, 但大家在教学中都对此给予了足够的重视. 所以我们下面着重谈一下微元法.

由于在数学上的重要性, 我们认为微元法最重要的应用是定义 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面的面积. 在我们的多元微积分教学体系中, 这是引入 \mathbb{R}^m 中的曲面积分, 进而用我们的方法证明 m -重积分换元公式的前期准备.

例 3.4 (曲面的面积). 利用 Gram-Schmidt 正交化可以定义并证明 \mathbb{R}^m 中以 a 为顶点, 以线性无关向量组 $v = \{v_i\}_{i=1}^k$ 为边的平行 $2k$ -面体 $P_a[v] = P_a[v_1, \dots, v_k]$ 的体积

$$\mu(P_a[v]) = \sqrt{\det(G^T G)}, \quad (3.2)$$

其中 $G = (v_1, \dots, v_k)$ 是以 v_i 为列向量的 $m \times k$ 矩阵.

设 \mathbb{R}^m 中的 k 维曲面 S 有参数表示 $x : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$, 其中 U 是 \mathbb{R}^k 中有界的 Jordan 可测开集, x 是满足 $\text{rank } x'(u) \equiv k$ 的单射. 则:

- x 将 U 中以 $du = \{du^i \varepsilon_i\}_{i=1}^k$ 为边的无穷小 $2k$ -面体 $P_{u_0}[du]$ 映成 S 上面积为 $d\sigma$ 的曲面片. 这里 ε_i 是 \mathbb{R}^k 中的标准基向量, du^i 是 ε_i 方向的小增量 (即这种小多面体第 i 条边的长).
- 模掉一个平移, $x'(u_0) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ 则将 $P_{u_0}[du]$ 映成 S 在 $x_0 = x(u_0)$ 的切空间 $T_{x_0}S$ 中的小 $2k$ -面体 $P_{x_0}[v]$. 这里 $v = \{v_i\}_{i=1}^k$,

$$v_i = x'(u_0)(du^i \varepsilon_i) = du^i \cdot x'(u_0)\varepsilon_i.$$

我们用 $P_{x_0}[v]$ 的体积来近似 $d\sigma$ (这是微元法的要点), 则得到面积微元

$$\begin{aligned} d\sigma &\approx \mu(P_{x_0}[v]) = du^1 \cdots du^k \cdot \mu(P_{x_0}[x'(u_0)\varepsilon_1, \dots, x'(u_0)\varepsilon_k]) \\ &= \sqrt{\det[(x'(u_0))^T x'(u_0)]} du^1 \cdots du^k. \end{aligned} \quad (3.3)$$

这里第二个等号我们用了 (3.2). 第一个等号用到由 (3.2) 容易推知的事实: 将平行 $2k$ -面体的某边伸缩为原来的 λ 倍, 则其体积变成原来的 λ 倍; 见例 4.1.

很自然, 当 u_0 跑遍 U 时, 我们把面积微元 $d\sigma$ 累积起来, 就得到 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面 S 的面积

$$\mathcal{A}(S) = \int d\sigma = \int_U \sqrt{\det[(x'(u))^T x'(u)]} du^1 \cdots du^k.$$

运用 k -重积分换元公式, 很容易证明上式右端的 k -重积分与曲面 S 的参数表示的选择无关. 因此这样来定义 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面 S 的面积是合理的.

注 3.5. 传统的数学分析一般只处理 \mathbb{R}^3 中的二维曲面的面积, 于是也只能介绍二维曲面上三元函数的曲面积分, 进而对于在偏微分方程理论中非常重要的散度定理也只能讨论三维的情形. 这非常不利于学生今后学习更深入的现代数学知识, 不利于培养高素质的数学研究和应用人才.

以下介绍的余面积公式通常并不是数学分析课的教学内容, 但是南京大学梅加强编著的教材 [7] 中对它做了简单的介绍. 鉴于这个公式非常有用, 我在课程中运用学生正在学的常微分方程 (在我校安排在二年级第 1 学期) 的知识证明了余面积公式, 见例 4.11. 这里先用微元法形式上做些推导.

例 3.6 (余面积公式). 设 $G \subset \mathbb{R}^m$ 是开区域, $f : G \rightarrow \mathbb{R}$. 视 $\Omega = f^{-1}[a, b]$ 为 \mathbb{R}^m 中的物体, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ 是密度函数. 则 Ω 的质量

$$M = \int_{\Omega} g(x) dx.$$

任取 $t \in [a, b]$. 在曲面 $f^{-1}(t)$ 上的点 x 取面元 $d\sigma$. 过 x 作法线交邻近的曲面 $f^{-1}(t + dt)$ 于 y . 则

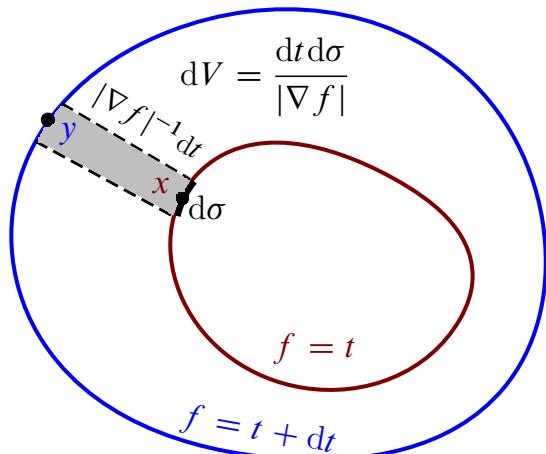
$$dt = f(y) - f(x) \approx \nabla f(x) \cdot (y - x),$$

这里用到 f 在 x 的 Taylor 展开并略去高阶无穷小量. 由于 $\nabla f(x)$ 和 $y - x$ 都是曲面 $f^{-1}(t)$ 在 x 处的法向量, 即它们是共线的, 在上式两边取模我们得到

$$|y - x| = \frac{dt}{|\nabla f(x)|}.$$

我们用 x 处的密度 $g(x)$ 来近似代替以 $d\sigma$ 为底, $|y - x|$ 为高的柱体中各点的密度. 这柱体的体积 dV 和质量 dm 分别等于

$$dV = \frac{1}{|\nabla f(x)|} dt d\sigma, \quad dm = \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} dt d\sigma.$$



将 dm 沿曲面 $f^{-1}(t)$ 积分, 就得到环状区域 $f^{-1}[t, t + dt]$ 的质量

$$dM = \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} dt d\sigma = dt \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\sigma.$$

现在在 $[a, b]$ 上对 t 积分, 就得到 Ω 的总质量

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_a^b dt \int_{f=t} \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\sigma. \quad (3.4)$$

这就是余面积公式. 它其实也是化重积分为累次积分, 只不过里层积分在一个曲面上进行.

注 3.7. 本例在两个层次上运用微元法. 先取 t 方向的微元 dt , 然后在曲面 $f^{-1}(t)$ 上点 x 处取面积微元 $d\sigma$, 得出小柱体 dV 的质量微元 dm 后对 $d\sigma$ 积分得到环状区域 $f^{-1}[t, t + dt]$ 的质量 dM , 再对 dt 积分得到整个区域 $f^{-1}[a, b]$ 的质量. 因此, 这是微元法比较复杂的应用, 但是把它介绍给学生能很好地加强对微元法的理解, 从而提高运用积分解决实际问题的能力.

微元法的另一精彩应用是由 Gauss 公式推导 Archimedes 浮力定律. 这是欧阳中等编著的教材 [8] 中的一道例题, 也是陈纪修等编著的教材 [1] 中的一道习题. 因此我们这里就略而不谈了.

4 不同课程之间融会贯通

在我国大部分高校数学院系的课程设置方案中, 数学分析 3 (即多元微积分) 一般被安排在二年级第 1 学期. 此时, 学生已经学完了线性代数. 传统的数学分析课运用了一些线性代数的知识, 主要限于用线性映射和矩阵表达非线性映射的导数 (见 (3.1))、用矩阵乘法表达复合函数求导的链锁法则, 以及通过考察函数在临界点处的 Hesse 矩阵的正定性来研究极值. 另外, 在很多学校二年级第 1 学期的学生同时在学习常微分方程, 但是根据我们对国内外微积分或数学分析教学的了解, 我们没有看到将常微分方程的知识应用于数学分析教学的做法.

我们在教学中发现线性代数可以对数学分析的教学发挥更大的作用. 此外, 近年的教学中我们运用学生刚刚掌握的常微分方程知识来处理数学分析中的一些重要问题, 也取得了很好的效果. 以下我们分别介绍这两方面的典型例子.

4.1 线性代数

例 4.1 (初等矩阵的妙用). 在 (3.2) 中我们给出了 \mathbb{R}^m 中的平行 $2k$ -面体体积的计算公式. 在应用中往往需要用到平行多面体的体积的性质, 这些性质可以利用公式 (3.2) 结合初等矩阵来得到. 例如, 讨论 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面的面积时, 在 (3.3) 式我们需要以下等式

$$\mu(P_a[v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_k]) = |\lambda| \mu(P_a[v_1, \dots, v_i, \dots, v_k]).$$

设 E_λ 为 k -阶单位矩阵的第 i 行乘以 λ 所得的初等矩阵, 并分别记以上式左右端中括号中的向量为列向量的 $m \times k$ 矩阵为 \tilde{G} 和 G , 则由初等矩阵的性质即知 $\tilde{G} = GE_\lambda$, 于是立刻就得到所需结论:

$$\sqrt{\det(\tilde{G}^T \tilde{G})} = \sqrt{\det(E_\lambda^T G^T G E_\lambda)} = \sqrt{\lambda^2 \det(G^T G)} = |\lambda| \sqrt{\det(G^T G)}.$$

例 4.2 (超曲面的法向量). 设 U 是 \mathbb{R}^{m-1} 中的开集, 我们来求 \mathbb{R}^m 中以正则 C^1 -映射 $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为参数表示的曲面 S 在点 $x_0 = x(u_0)$ 的法向量 N .

对 $\forall h \in \mathbb{R}^{m-1}$, $\gamma : t \mapsto x(u_0 + th)$ 是 S 上过 x_0 的曲线, 其切向量

$$\dot{\gamma}(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} x(u_0 + th) = x'(u_0)h.$$

由于 N 与 $\dot{\gamma}(0)$ 正交, 我们有

$$0 = \dot{\gamma}(0) \cdot N = (x'(u_0)h) \cdot N = h^T ([x'(u_0)]^T N).$$

由 h 的任意性可知 $[x'(u_0)]^T N = 0$. 法向量 N 至少有一个非零分量, 于是此式实际上是以剩余 $m - 1$ 个分量为未知量的非齐次线性方程组. 由 x 正则即 $\text{rank } x'(u_0) = m - 1$ 可知此方程组的系数行列式非零, 于是由 Cramer 法则可求出法向量

$$N = \left(\frac{\partial(x^2, \dots, x^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, -\frac{\partial(x^2, \dots, x^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, \dots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(x^1, \dots, x^{m-1})}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})} \right).$$

注 4.3. 大部分数学分析教材只用三维空间中向量的叉乘讨论 $m = 3$ 的情形, 有些教材 (例如 [7]) 运用学生比较陌生的 $(m - 1)$ 个 m -维向量的叉乘讨论 m -维情形. 例 4.2 用学生熟悉的线性代数来研究, 显得更为自然. 作为课后的练习还可以让学生运用关于 k 个含 $m - 1$ 个未知数的非齐次线性方程组的理论研究 \mathbb{R}^m 中 k -维曲面的法向量问题.

定向是流形等一些数学对象的一个整体性质. 我们常常说 Jacobi 行列式大于零的映射保持定向, 指的是: 设 $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $a \in \mathbb{R}^m$, $\det \varphi'(a) > 0$, 若 $\{X_i\}_{i=1}^m$ 是 $T_a \mathbb{R}^m$ 的正基, 则 $\{\varphi_* X_i\}_{i=1}^m$ 是 $T_{\varphi(a)} \mathbb{R}^m$ 的正基. 以下的例 4.4 从另一个重要的角度讨论 Jacobi 行列式的符号与定向的关系.

例 4.4 (Jacobi 行列式的符号与定向). 设 Ω 和 D 是 \mathbb{R}^m 中的光滑闭区域, $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 是微分同胚. 设 U 是 \mathbb{R}^{m-1} 中的开集, $x : U \rightarrow \partial\Omega$ 是 $\partial\Omega$ 在点 $a \in \partial\Omega$ 附近的局部参数表示, 熟知 $y = \varphi \circ x : U \rightarrow \partial D$ 是 ∂D 在 $b = \varphi(a)$ 附近的局部参数表示. 若 $\det \varphi'(a) > 0$, 并且

$$N = \left(\frac{\partial(x^2, \dots, x^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, \dots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(x^1, \dots, x^{m-1})}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})} \right)$$

是 $\partial\Omega$ 在 a 点的外法向量, 则

$$\tilde{N} = \left(\frac{\partial(y^2, \dots, y^m)}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})}, \dots, (-1)^{m+1} \frac{\partial(y^1, \dots, y^{m-1})}{\partial(u^1, \dots, u^{m-1})} \right)$$

是 ∂D 在 $b = \varphi(a)$ 点的外法向量.

注 4.5. 设 N 是 $\partial\Omega$ 在 $a \in \partial\Omega$ 的法向量. 若有 $\varepsilon > 0$, 使得当 $t \in (-\varepsilon, 0)$ 时 $a + tN \in \Omega^\circ$, 就称 N 是 $\partial\Omega$ 在 a 处的外法向量. 例 4.4 的关键是证明 D 中的曲线 $\gamma : t \mapsto \varphi(a + tN)$ 在 $b = \varphi(a)$ 的切向量 v 与 \tilde{N} 的夹角是锐角. 为此我们运用了扁矩阵与瘦矩阵之积的行列式的 Cauchy-Binet 公式, 以及 $A^*A = (\det A)I_m$ 等线性代数知识; 这里 A^* 是 A 的伴随矩阵, I_m 是 m -阶单位阵; 详情可见 [18].

例 4.6 (重积分换元公式). 设 D 和 Ω 是 \mathbb{R}^m 中 Jordan 可测的有界闭区域, $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 是 C^1 -微分同胚. 若 $f \in C(D)$, 则我们有 m -重积分的换元公式

$$\int_D f(y)dy = \int_\Omega f(\varphi(x)) |\det \varphi'(x)| dx. \quad (4.1)$$

重积分换元公式的证明是数学分析教学中比较困难的问题. do Carmo 的名著 [15] 中有一道习题, 让读者用 Green 公式证明二重积分换元公式. 受其启发, 在 [20] 中我们把这道习题的思想推广到高维, 用数学归纳法给出 m -重积分换元公式 (4.1) 的一个比较简单的证明.

首先我们如下定义 \mathbb{R}^m 中 $(m-1)$ -维曲面 S 上的曲面积分

$$\int_S f(x)d\sigma = \int_U f(x(u)) |N(u)| du.$$

其中 $x : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是曲面 S 的参数表示, N 是由此参数表示按例 4.2 给出的 S 的法向量场. 由归纳假设, 即 $(m-1)$ -重积分换元公式, 容易证明上式右端与 S 的参数表示的选择无关.

然后, 利用化重积分为累次积分容易证明 m -维散度定理. 最后利用散度定理证明 m -重积分换元公式, 这时我们需要用到 Cauchy-Binet 公式, 行列式按行展开等线性代数知识.

注 4.7. 与划分积分区域并估计每个小块变换后的体积, 进而研究 Riemann 和的传统证明相比, 我们在 [20] 中给出的上述证明完全是巧妙的计算, 便于课堂讲授, 学生也容易掌握. 这个证明基于链法则和微积分基本定理 (即散度定理), 在思想上与一元情形 (即定积分) 是一脉相承的. 因此, 有一定理由相信这是证明重积分换元公式最合理的方法.

在证明的过程中, 我们顺便建立了 (第一类) 曲面积分的理论, 包括 m -维的散度定理. 因此从需要的学时来看, 可能比其他方法会节省一些. 利用曲面的参数表示将曲面积分定义为参数区域上的 $(m-1)$ -维积分, 是近些年来很多数学分析教材 (例如 [2, 7, 8, 22]) 采用的做法. 当然, 这些教材需要先证明重积分换元公式, 以保证曲面积分的定义与曲面的参数表示的选择无关.

注 4.8. 在我们的证明中, 当 Ω 是球体时, 我们只要求换元映射 φ 将 $\partial\Omega$ 微分同胚地映成 ∂D , 也就是说 $\varphi : \Omega \rightarrow D$ 可以既不单也不满. 于是, 用 [13] 中的想法立刻就得到 m -维 Brouwer 不动点定理. 据我们所知, 国内外出版的数学分析教材中几乎都没能探讨高维的 Brouwer 不动点定理, 除非先花大量篇幅介绍微分流形、微分形式以及流形上的积分和 Stokes 公式 (见 Zorich [24]). 张筑生教授的教材 [11] 用 Green 公式证明了二维的 Brouwer 不动点定理. 关于 Brouwer 不动点定理的其他初等证明 (即只用微积分), 可见 [16, 21].

4.2 常微分方程

设 $g \in C^1(\mathbb{R}^m)$, $\forall x \in S = g^{-1}(0)$ 有 $\nabla g(x) \neq 0$, 则 S 是 \mathbb{R}^m 中的光滑曲面. 设 $p \in S$. 众所周知, $\nabla g(p)$ 与 S 上任一经过 p 点的曲线 γ 的切向量 $\dot{\gamma}(0)$ 都正交, 因此 $\nabla g(p)$ 是 S 在 p 点的法向量. 一个自然的问题是: 设 $h \in \mathbb{R}^m$, $\nabla g(p) \cdot h = 0$, S 上是否有经过 p 点的曲线以 h 为切向量? 这个问题与约束极值的 Lagrange 乘数法有关. 对此, 我们有如下结果.

例 4.9. 设 $g \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $p \in S = g^{-1}(0)$, $\text{rank } g'(p) = n$. 若 $g'(p)h = 0$, 则有 C^1 -映射 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ 使 $\gamma(0) = p$ 且 $\dot{\gamma}(0) = h$.

利用这个结论, 可以研究 $f \in C^1(\mathbb{R}^m)$ 在约束条件 $g(x) = 0$ 下的约束极值问题, 证明 Lagrange 乘数法. 一些数学分析教材运用隐函数定理给出例 4.9 的证明, 这是隐函数定理的漂亮应用, 我们的课上当然也会讲. 但是, 我们还运用常微分方程的方法给出如下证明.

证. 因 $\text{rank } g'(p) = n$, 可取 $\delta > 0$ 使 $\{\nabla g^i\}_{i=1}^n$ 在 $B_\delta(p)$ 线性无关. 对 $q \in B_\delta(p)$, 令 $Y(q)$ 是 h 在 $T_q S$ 的投影, 则得 C^1 -映射 $Y : B_\delta(p) \rightarrow \mathbb{R}^m$. 由常微分方程解的存在唯一性定理可知初值问题

$$\dot{\gamma}(t) = Y(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = p \tag{4.2}$$

有解 $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$, 显然 $\gamma(0) = p$, $\dot{\gamma}(0) = Y(p) = h$.

用 Gram-Schmidt 正交化将向量场 Y 用 ∇g^i 线性表示, 并利用 (4.2) 以及 $g'(p)h = 0$ 容易验证 $(g \circ \gamma)'(t) = 0$. 故 $g(\gamma(t)) = g(p) = 0$, 即 $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \subset S$.

注 4.10. 我们要求 $g \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ 是为了对 (4.2) 应用常微分方程解的存在唯一性定理. 如果用隐函数定理来证明的话, 只需要求 $g \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$. 上述证明是受 [23, Ch3] 启发做出的, 那里考虑的是 $n = 1$ 的情形, 此时

$$Y(q) = h - \frac{h \cdot \nabla g(q)}{|\nabla g(q)|^2} \nabla g(q).$$

在例 3.6 中我们曾用微元法导出余面积公式. 作为常微分方程对数学分析的应用的另一个例子, 我们现在来证明余面积公式.

例 4.11 (余面积公式). 设 $G \subset \mathbb{R}^m$ 为有界开集, $f \in C^2(G)$, $\Omega = f^{-1}[a, b]$. 对任意 $x \in \Omega$ 有 $\nabla f(x) \neq 0$. 若 $g \in C(\Omega)$, 则

$$\int_{\Omega} g(x) dx = \int_a^b dt \int_{f=t}^b \frac{g(x)}{|\nabla f(x)|} d\sigma.$$

证. 为简单起见我们只考虑 $f^{-1}(a)$ 有统一的参数表示的情形, 设 $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是其参数表示. 利用常微分方程初值问题

$$\dot{x} = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|^2}, \quad x(a) = p \in f^{-1}(a) \tag{4.3}$$

的解 $x = x(t, p)$ 可构造微分同胚 $T : U \times [a, b] \rightarrow \Omega$, $(u, t) \mapsto x(t, \varphi(u))$. 利用行列式按列展开、共线向量内积的绝对值等于它们的模之积以及 (4.3), 容易算出

$$|\det T'(u, t)| = \frac{|N_t(T(u, t))|}{|\nabla f(T(u, t))|}.$$

这里 N_t 是曲面 $f^{-1}(t)$ 的参数表示 $u \mapsto T(u, t)$ 按照例 4.2 的方式确定的法向量. 于是由重积分换元公式和化重积分为累次积分即得

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) dx &= \int_{U \times (a, b)} g(T(u, t)) |\det T'(u, t)| du dt \\ &= \int_a^b dt \int_U g(T(u, t)) \frac{|N_t(T(u, t))|}{|\nabla f(T(u, t))|} du = \int_a^b dt \int_{f=t} \frac{g}{|\nabla f|} d\sigma. \end{aligned}$$

注 4.12. 上述余面积公式的证明与我的研究领域临界点理论 [10] 中的形变引理有密切关系. 这个证明也可以看作伍洪熙等教授的书 [9] 第 11 章讲述的 Riemann 流形上的余面积公式在欧氏空间情形的初等版本. 然而 [9] 中的证明需要很多微分流形和 Riemann 几何方面的预备知识, 所以我需要把这些高级的概念解包, 整理成上述的初等证明, 其中的一个关键之处是上述证明中提及的对 $\det T'(u, t)$ 的巧妙计算. 我们给出的这个改编的证明把常微分方程、线性代数完美地结合起来, 很值得玩味, 应该会使学生受到很大的启发.

注 4.13. 我在 2018 年秋季讲完余面积公式后, 很惊喜地发现有学生运用这个公式给出如下关于等值面的 Catalan 公式的极简证明: 设 $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, 对 $\forall v \in \mathbb{R}$, 等值面 $f^{-1}(v)$ 都是封闭曲面, 设其所围立体的体积为 $F(v)$, 并且 $F \in C^1[a, b]$. 则

$$\int_{f^{-1}[a, b]} f(x) dx = \int_a^b v F'(v) dv.$$

当 $n \leq 3$ 时, Catalan 公式是林源渠、方企勤的习题集 [3] 中的题目. 由于相应教材中没讲余面积公式, 我的学生用余面积公式给出的证明当然不是 [3] 的作者期望的证明.

我们在数学分析课中系统地运用常微分方程的知识, 应该说是一个大胆的尝试, 在全世界可能都没有先例. 在我国大部分高校, 常微分方程与数学分析 3 都在二年级第 1 学期开设, 因此, 在数学分析 3 中运用常微分方程的知识是完全可行的. 我们认为这样做有助于培养学生对数学的整体观念和融会贯通地运用不同课程的知识来解决问题的能力.

5 结束语

数学类本科生在一年级主要学习一元微积分和线性代数. 这两门课分别关注一维和高维, 不太可能有实质性的交叉融合; 因此一年级应该是打基础的阶段. 但是正如我们已经看到的, 在二年级第 1 学期, 线性代数和常微分方程可以很自然地进入数学分析的教学, 得到

丰富多彩的结果。现在看来多元微积分应该是学生接触的第一门综合性的课程。这样的交叉融合，也有利于学生更好地理解线性代数和常微分方程。

本文中我们多次强调，数学分析中应该重视向量值函数。在注 3.3 中我们清楚地表明：对向量值函数避而不谈或讲得不够，就很难向学生充分展现微分学的基本思想。如果不熟悉向量值函数，学生也将错过数学分析中很多精彩的内容。在二年级第 1 学期，学生已经学完高等代数，不应该对处理向量和向量值函数有实质性的困难。也许是因为现有的大部分数学分析教材都回避向量值函数（或把它作为选学内容）的原因，有些教师担心学生受不了；这种保守的观念应该改变。

本文谈到的这些体会和看法，虽然是这几年为厦门大学入选拔尖学生培养试验计划的优秀学生讲授多元微积分的过程中对这门课进行思考和探索而产生的，但是我认为这些想法和做法也完全适合其他的学生（包括非重点院校的数学类本科生）。其理由是：在二年级第 1 学期，各类学生在知识储备上几乎没有差别。今后，我希望能有机会把我对本门课程的教学经验应用到更广泛的学生群体，为数学教育事业做出应有的贡献。

参考文献

- [1] 陈纪修, 于崇华, 金路. 数学分析 (下册). 北京: 高等教育出版社. 2014.
- [2] 郁中丹, 刘永平, 王昆扬. 简明数学分析. 北京: 高等教育出版社. 2009.
- [3] 林源渠, 方企勤. 数学分析习题集. 北京: 高等教育出版社. 1986.
- [4] 刘轼波. 多元函数的数学分析, 讲义.
- [5] 刘轼波, 欧氏空间的满射, 重积分换元公式和 Brouwer 不动点定理, 学术报告.
- [6] 马建国. 数学分析 (下册). 北京: 科学出版社. 2011.
- [7] 梅加强. 数学分析. 北京: 高等教育出版社. 2011.
- [8] 欧阳光中, 姚允龙, 周渊. 数学分析 (下册). 上海: 复旦大学出版社. 2012.
- [9] 伍洪熙, 沈纯理, 虞言林. 黎曼几何初步. 北京: 北京大学出版社. 1989.
- [10] 张恭庆. 临界点理论及其应用. 上海: 上海科技出版社. 1986.
- [11] 张筑生. 数学分析新讲 (第三册). 北京: 北京大学出版社. 1991.
- [12] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, Dual variational methods in critical point theory and applications, J. Functional Analysis, 14, 349–381, 1973.
- [13] L. Báez-Duarte, [Brouwer's fixed-point theorem and a generalization of the formula for change of variables in multiple integrals](#), J. Math. Anal. Appl., 177, 412–414, 1993.
- [14] K.-C. Chang, Methods in nonlinear analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

- [15] M. P. do Carmo, Differential geometry of curves and surfaces. New Jersey: Prentice-Hall Inc., 1976.
- [16] Y. Kannai, [An elementary proof of the no-retraction theorem](#), Amer. Math. Monthly, 88, 264–268, 1981.
- [17] G. Katriel, [Mountain pass theorems and global homeomorphism theorems](#), Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, 11, 189–209, 1994.
- [18] S. Liu, [On the sign of Jacobian and orientation of parametrized surfaces](#), preprint.
- [19] P. Liu, S. Liu, [On the surjectivity of smooth maps into Euclidean spaces and the fundamental theorem of algebra](#), Amer. Math. Monthly, 125, 941–943, 2018.
- [20] S. Liu, Y. Zhang, [On the change of variables formula for multiple integrals](#), J. Math. Study, 50, 268–276, 2017.
- [21] J. Milnor, [Analytic proofs of the “hairy ball theorem” and the Brouwer fixed-point theorem](#), Amer. Math. Monthly, 85, 521–524, 1978.
- [22] J. Shurman, [Calculus and analysis in Euclidean space](#). Cham: Springer, 2016.
- [23] J. A. Thorpe, Elementary topics in differential geometry. New York: Springer-Verlag, 1994.
- [24] V. A. Zorich, [Mathematical analysis. II](#). Heidelberg: Springer, 2016.