化简二次曲面方程的矩阵方法

刘轼波*

摘要 本文利用矩阵运算, 结合向量的数量积和外积, 介绍一种化二次曲面一般方程为标准形的简便方法.

关键词 标准方程; 直角坐标变换; 特征值; 特征向量

中图分类号 O182.2

§1 引言

在解析几何中, 将给定的二次曲面一般方程

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy \\ + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

通过直角坐标变换化为标准形是一个重要的课题. 在许多教科书 [1, 2, 3] 中, 求得所需坐标变换

$$\begin{cases} x = q_{11}x' + q_{12}y' + q_{13}z' + x_1 \\ y = q_{21}x' + q_{22}y' + q_{23}z' + y_1 \\ z = q_{31}x' + q_{32}y' + q_{33}z' + z_1 \end{cases} \tag{1.2}$$

后, 需要通过将 (1.2) 代入 (1.1) 来得到标准方程. 这种方法计算量大, 书写繁复, 比较容易出错.

本文运用矩阵运算的方法, 结合向量的数量积和外积, 介绍一种较简便的方法. 在以下的叙述中, 如同 [4] 一样, 为了方便我们没有使用黑体来表示向量, 这并不会引起混淆.

§2 化简步骤

为了应用矩阵方法, 我们把 (1.1) 写成矩阵形式:

$$(x, y, z)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + c = 0, \tag{2.1}$$

其中 $A = (a_{ij}), a_{ij} = a_{ji}$; $b = (b_1, b_2, b_3)$. 由线性代数知存在正交阵 Q 使 $\Lambda = Q^{\mathrm{T}}AQ$ 是对角阵. 作正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

则 (2.1) 化为

$$(x', y', z')\, \Lambda \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} + c = 0, \tag{2.3}$$

其中 $b' = bQ = (b_1', b_2', b_3')$. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. 如果 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, 则 A 必然已经是对角阵. 以下设 λ_1 是 A 的单重特征值, 有特征向量 e_1. 我们先采用以下的步骤求出上述正交矩阵 Q, 以消去方程 (2.1) 中的交叉项:

情形 (1) 若 $\lambda_2 = \lambda_3$, 我们用以下方法选取 e_2, 以使 $b_2' = 0$.

(i) 若 $e_1 \times b \neq 0$, 即 e_1 与 b 不平行, 取 $e_2 = e_1 \times b$;

(ii) 若 $e_1 \times b = 0$, 则取 $e_2 = e_1 \times \varepsilon$. 其中 $\varepsilon \in \left\{(1,0,0)^{\mathrm{T}}, (0,1,0)^{\mathrm{T}}, (0,0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$ 是使 $e_1 \times \varepsilon \neq 0$ 的标准基向量.

再取

$$e_3 = e_1 \times e_2, \qquad q_i = \frac{1}{|e_i|}e_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

则 e_2, e_3 都是对应于特征值 $\lambda_2 = \lambda_3$ 的特征向量, 并且 $b_2' = b \cdot q_2 = \dfrac{b \cdot e_2}{|e_2|} = 0$.

令 $Q = (q_1, q_2, q_3)$, 则 Q 是正交阵, 并且满足

$$\Lambda = Q^{\mathrm{T}}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

*刘轼波: 男, 1975 年 11 月生, 教授. 研究方向: 非线性分析. E-mail: liusb@xmu.edu.cn

$$b' = bQ = (b_1', b_2', b_3') = (b_1', 0, b_3'),$$

因此 (2.3) 成为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_3' z' + c = 0. \tag{2.4}$$

情形 (2) 若 $\lambda_2 \neq \lambda_3$, 取 λ_2 的特征向量 e_2. 再取

$$e_3 = e_1 \times e_2, \qquad q_i = \frac{1}{|e_i|} e_i, \qquad i = 1, 2, 3.$$

则 e_3 是对应特征值 λ_3 的特征向量. 令 $Q = (q_1, q_2, q_3)$. 则 Q 是正交阵, 且

$$\Lambda = Q^{\mathrm{T}} A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

方程 (2.3) 成为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3' z' + c = 0. \tag{2.5}$$

至此, 新的方程 (2.4) 或 (2.5) 中不再含有交叉项. 不难用配方法得到适当的平移将方程 (2.4) 或 (2.5) 化为标准形.

注2.1. (i) 在上述情形 (1) 中, 利用外积得到 e_2 使 $b_2' = 0$. 这不但使得到的新方程 (2.4) 具有较简单的系数, 而且对 $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$ 的情形尤为重要. 对这种情形, 如果不这样选 e_2 使 $b_2' = 0$, 则作正交变换 (2.2) 后, (2.3) 成为

$$\lambda_1 x'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3' z' + c = 0.$$

这方程还得再经过一次坐标轴的旋转, 才能化为标准形. 显然, 我们这里给出的方法显著地减小了计算量.

(ii) 在情形 (2) 中, 特征向量 e_3 通过外积得到, 计算量也显著减少.

(iii) 在求得正交矩阵 Q 之后, 我们只需计算 $b' = bQ$, 即一次项的系数. 二次项系数就是 A 的特征值, 而常数项没有改变, 因此都无须 计算.

§3 应用实例

例3.1. $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 4xy + 4xz - 8yz + 6x + 6z - 5 = 0$.

解. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}$, $b = (6, 0, 6)$, $c = -5$. A 的特征值 $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

特征值 $\lambda_1 = 9$ 对应特征向量 $e_1 = (1, -2, 2)^{\mathrm{T}}$,

$$e_2 = e_1 \times b = (-12, 6, 12)^{\mathrm{T}},$$
$$e_3 = e_1 \times e_2 = (-36, -36, -18)^{\mathrm{T}}.$$
$$Q = (q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{e_1}{|e_1|}, \frac{e_2}{|e_2|}, \frac{e_3}{|e_3|} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

则 $bQ = (6, 0, -6)$. 作正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

依照注 2.1 (iii), 无须计算, 由 (2.4) 知方程化为 $9x'^2 + 6x' - 6z' - 5 = 0$. 配方得

$$9\left(x' + \frac{1}{3}\right)^2 - 6\left(z' + 1\right) = 0.$$

再移轴:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

曲面方程化为标准方程 $9x''^2 - 6z'' = 0$. 这是抛物柱面. 将 (3.2) 代入 (3.1), 我们得到相应的坐标变换公式:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{9} \\ \frac{8}{9} \\ \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

例3.2. $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy - 2xz + 2yz - 6x + 6y - 6z + 10 = 0$.

解. $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $b = (-6, 6, -6)$, $c = 10$. A 的特征值: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = -2$. 相应的特征向量

$$e_1 = (-1, 1, 2)^{\mathrm{T}}, \qquad e_2 = (-1, 1, -1)^{\mathrm{T}},$$
$$e_3 = e_1 \times e_2 = (-3, -3, 0)^{\mathrm{T}}.$$

$$Q=(q_1,q_2,q_3)=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}.$$

则 $bQ=\left(0,6\sqrt3,0\right)$. 作正交变换

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix},\tag{3.3}$$

无须计算, 由 (2.5) 知方程化为 $6x'^2+3y'^2-2z'^2+6\sqrt3y'+10=0$. 配方得

$$6x'^2+3\left(y'+\sqrt3\right)^2-2z'^2+1=0.$$

再移轴,

$$\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\\sqrt3\\0\end{pmatrix},\tag{3.4}$$

方程化为 $6x''^2+3y''^2-2z''^2=-1$. 这是双叶双曲面. 将 (3.4) 代入 (3.3) 即得相应坐标变换公式

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt6}&\frac{1}{\sqrt3}&\frac{-1}{\sqrt2}\\\frac{2}{\sqrt6}&\frac{-1}{\sqrt3}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

需要指出的是: 虽然我们这里用线性代数的矩阵方法可以比较方便地将二次曲面的一般方程化为标准形, 但是解析几何课程中二次曲面的一般理论部分讲述的渐近方向, 径面, 奇向等几何概念还是非常重要的. 学好这些概念对培养我们的几何直观能力大有裨益, 而且这些几何概念及其性质在一些解析几何习题中有着很灵活有趣的应用. 须知: 二次曲面一般理论绝不仅仅是为了化简二次曲面的一般方程.

§4 关于解析几何与高等代数的教学

空间解析几何与高等代数都是数学系学生的基础课, 它们之间有着密切的联系. 将线性代数的方法应用于解析几何的问题是很自然的事, 应该得到鼓励. 目前国内也出版了一些将这两门课合并成一门高等代数和空间解析几何课程的教材 [5]. 但也应看到大部分院校还是分别开设这两门课程. 北京大学数学系编写的高等代数教材 [6] 在国内被广泛地使用. 此书第一章讲述多项式的理论, 于是线性代数的内容被延迟了. 根据我们讲授空间解析几何的经验, 这导致学生在学习解析几何中的向量积、混合积等内容时就会碰到对行列式不熟悉的困难. 在学习平面、直线的位置关系时, 学生在高等代数课程中却还未学到线性方程组的理论. 二次曲面的一般理论部分中的许多具体计算和理论推导, 本来利用矩阵的运算会很方便, 但是教学进行到此时学生对矩阵的运算还不熟悉. 总之因为先讲多项式, 高等代数的内容是处处滞后于解析几何课程的需要, 非常不利于教学, 严重地影响教学效果.

因此, 我们建议在使用 [6] 作为高等代数教材的时候, 应该从第二章行列式开始讲起, 依次介绍行列式, 线性方程组, 矩阵及其运算, 然后再讲第一章的多项式理论.

致谢 在原稿 §2 情形 (1) 的讨论中, 没有考虑到 $e_1\times b=0$ 的情形. 作者衷心感谢审稿人指出这一纰漏.

参考文献

[1] 吕林根, 许子道, 解析几何 (第四版) [M], 北京: 高等教育出版社, 2006.

[2] 宋卫东, 解析几何 [M], 北京: 高等教育出版社, 2003.

[3] 南开大学空间解析几何引论编写组, 空间解析几何引论 (第二版) [M], 北京: 高等教育出版社, 1989.

[4] M.P. do Carmo, 曲线和曲面的微分几何学 [M], 田畴等译, 上海: 上海科学技术出版社, 1988.

[5] 孟道骥, 高等代数与解析几何 (第二版) [M], 北京: 科学出版社, 2004.

[6] 北京大学数学系, 高等代数 [M], 北京: 高等教育出版社.