TEST 3:

1. Sean $C_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$, $B = \{E_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, E_2 = 2e_1 + e_2 - e_3, E_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3\}$ otra base de $\mathbb{R}^3$ y $h: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal tal que $h(e_i) = E_{4-i} + E_i$.

Determina cuales de las siguientes opciones son **FALSAS**/**VERDADERAS**:

V -> La matriz asociada a h respecto de C_3 es $(h)_{C_3} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

F -> La matriz asociada a h respecto de B y C_3 es $(h)_{BC_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

F -> La matriz asociada a h respecto de B es $(h)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

V -> La matriz asociada a h respecto de C_3 y B es $(h)_{C_3B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

F -> La matriz asociada a h respecto de C_3 es $(h)_{C_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

V -> La matriz asociada a h respecto de B es $(h)_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

F -> La matriz asociada a h respecto de B y C_3 es $(h)_{BC_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

MUY PARECIDOS 2 y 3!!

2. Sea V un K —espacio vectorial de dimensión 4 y $f: V \to V$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de la base $B := \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es

$$(f)_{BB} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \beta & \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 & -\alpha \\ \alpha & \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$, con α y β no nulos:

Elegir de las siguientes afirmaciones las que son **FALSAS**/**VERDADERAS**

V -> $f(u_1 + u_3) = \alpha(u_1 - u_3 + u_4) + \beta(u_2 + u_4)$

F -> $\boldsymbol{Ker}\, f \cap \boldsymbol{Im}\, f \neq 0$

V -> $\boldsymbol{Im}\, f = < u_1 - u_3 + u_4, u_1 - u_2 - u_3 >$.

F -> $u_2 - u_1 \notin \boldsymbol{Ker}\, f$

F -> $u_2 - u_3 \notin \boldsymbol{Ker}\, f$

3. Sea V un K —espacio vectorial de dimensión 4 y $f: V \to V$ la aplicación lineal cuya matriz asociada respecto de la base $B := \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ es

$$(f)_{BB} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & -\alpha & \alpha \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ \alpha & 0 & -\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha \ y \ \beta \text{ no nulos:}$$

Elegir de las siguientes afirmaciones las que son **VERDADERAS**/**FALSAS**:

F -> $\boldsymbol{Ker} f \cap \boldsymbol{Im} f \neq 0$

F -> $u_1 + u_2 - u_4 \notin \boldsymbol{Ker} f$

V -> $f(u_1 + u_4) = 2\alpha(u_1 + u_4) + \beta(u_2 + u_3)$

V -> $\boldsymbol{Im} f = < u_1 + u_4, u_2 + u_3 >.$

F -> $u_1 + u_3 \notin \boldsymbol{Ker} f$

4. Sea $f: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ una aplicación lineal y $\{v_1, \dots, v_n\}$ un subconjunto de V.

Determina cuales de las siguientes opciones son **FALSAS**/**VERDADERAS**:

V -> Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de $\boldsymbol{V}$ y $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es una base de $\boldsymbol{W}$**,** entonces f es un isomorfismo.

F -> Si $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es una base de W, entonces f es un isomorfismo.

F -> Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V y $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente dependiente, entonces f no es sobreyectiva.

V -> Si es f inyectiva y $dimV = dimW$, entonces f es un isomorfismo.

V -> Si es f sobreyectiva y $dimV = dimW$, entonces f es un isomorfismo

F -> Si $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente dependiente, entonces f no es inyectiva.

F -> Si $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ es una base de W, entonces f es inyectiva.

5. Considerar la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $f(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} x + y & y + z \\ z + t & t - \alpha x \end{pmatrix}$.

Elegir de las siguientes afirmaciones las que son **FALSAS**/**VERDADERAS**:

V -> Si $\alpha > 1$, entonces f es isomorfismo.

F -> $e_{12} + e_{21} \notin Im f$ para algún α ...

V -> Si α < -2, entonces f es inyectiva.

F -> $\forall \alpha, \ e_{22} \in Im f$

V -> $\exists\alpha < 0$ tal que $Im\, f = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| \, a + c = b + d\right\}$

V -> $\exists\alpha < 1$ tal que $f(e_1 + e_3) = f(e_2 + e_4)$

V -> $\exists\alpha < 1$ tal que $f(e_1 - e_2) = f(e_4 - e_3)$

F -> Si α < 0, entonces f es sobreyectiva

V -> $\forall\alpha,\ \ e_{12} + e_{21} \in Im\, f$

F -> $\forall\alpha\ \ \ e_{12} + e_{21} \notin Im\, f$

V -> $\exists\alpha < 0$ tal que f es inyectiva.

F -> f sobre $\Rightarrow \alpha < -2$

F -> $\forall\alpha \neq 0, f$ es sobreyectiva.

V -> $\exists\alpha < 1$ tal que $\dim(Ker\, f) = 1$

F -> $\exists\alpha$ tal que $\dim(Ker\, f) = 2$

6. Sean $C_3 = \{e_1', e_2', e_3'\}$ y $C_4 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, respectivamente las bases canónicas de $\mathbb{R}^3\ y\ \mathbb{R}^4$ y $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la aplicación lineal dada por:

$f(e_1') = e_1 + 2e_2, f(e_2') = e_1 + e_2 - e_4\ \ y\ \ f(e_3') = e_2 + e_4,$

Determina cuales de las siguientes opciones son **FALSAS**/**VERDADERAS**:

V -> Si $U \oplus Ker\, f = \mathbb{R}^3$, entonces $f(U) = \{(x, y, z, t)\ /\ z = 0 = 2x - y + t\}$

F -> $\dim Ker\, f > 1$

F -> $dim\left(f^{-1}(W)\right) = 1$, con $W = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_4\rangle$

V -> $W = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_4\rangle, f^{-1}(W) = \{(x', y', z')\ /\ x' = y'\}$.

F -> $dim\left(f^{-1}(W)\right) = 1$, con $W = \langle e_1, e_1 + e_2, e_3 + e_4\rangle$

F -> Si $W = \langle e_1, e_1 + e_2, e_3 + e_4\rangle, f^{-1}(W) = \{(x', y', z')/z' = 0 = y'\}$

V -> $Ker\, f \neq \{0\}$

F -> $W = \langle e_1 + e_2, e_1 + e_3, e_3 + e_4\rangle, f^{-1}(W) = \{(x', y', z')/x' = 0 = y'\}$

MUY PARECIDOS 7 y 8!!

7. Sexa $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z, t) = (x + z, x - z, t - y)$.

Determina cuales de las siguientes opciones son **FALSAS**/**VERDADERAS**

F -> La dimensión de $Ker\, f$ no es 1.

V -> $Im\, f$ está generada por el conjunto $\{(1,1,1), (1,1,0), (0,0,1), (1,2,3)\}$.

V -> $\{(0,3,0,3)\}$ es una base de $Ker\, f$

F -> $Im\, f \neq \mathbb{R}^3$.

8. Sexa $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z, t) = (x + z, x - z, z - y)$.

Determina cuales de las siguientes opciones son **FALSAS**/**VERDADERAS**:

F -> $Im\, f$ está generada por el conjunto $\{(1,1,1), (1,1,0), (0,0,a)\}$ para cualquier valor real de $a \neq 0$.

F -> La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas tiene como segunda fila $(0,0,-1)$

V -> $\{(0,3,0,3)\}$ es una base de $Ker\, f$

F -> $Ker\, f = \{(0,0,0,1)\}$