PRESENTACIÓN:

1. Autora: Laura Silva Loureiro.
2. Título: Transporte de minerales eficiente.
3. Función: La variable independiente en esta función es x.

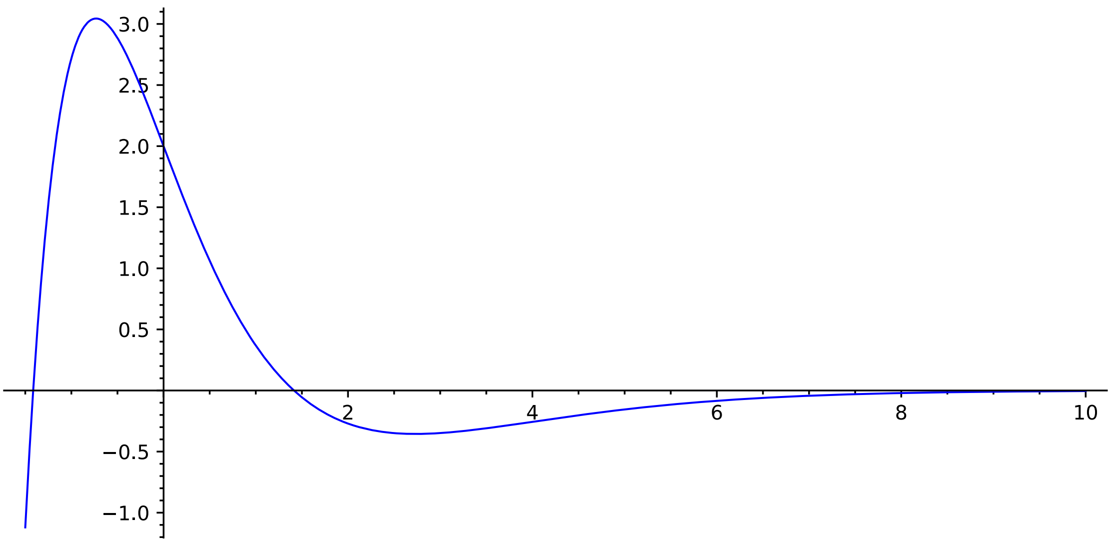
$f(x) = (2 - x^2) \cdot e^{-x}$

Intervalo: [0,3]

4. Comando para la gráfica:

```
1. f(x)= (2-x^2)*e^(-x)
2. plot(f,1.5,10)
```

5. Gráfica:



6. Justificación de la existencia de solución en el intervalo escogido:

Según el Teorema de Bolzano : [1] " Sea f una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y que toma valores de signo contrario en los extremos, entonces existe al menos un valor c ∈ (a, b) tal que f(c) = 0."

En este caso este Teorema se cumple ya que:

$f(0) = \left(2 - 0^2\right) \cdot e^0 = 2$

$f(3) = \left(2 - 3^2\right) \cdot e^{-3} = -7 \cdot e^{-3} \cong -0.3485$

$$f(0) > 0 > f(3)$$

7. Justificación de unicidad en el intervalo:

$f(x)$ es una composición de funciones continuas y derivables de [0,+∞], entonces también lo será en el intervalo [0,3]. Como no es posible ver analíticamente si $f'(x) = 0$ en el intervalo, empleamos la función de Sage `solve(diff(f), x)`, que nos devuelve `[x == -sqrt(2), x == sqrt(2)]`, en este caso en la función se hallan dos raíces para poder encontrar la raíz que pertenece a nuestro intervalo utilizamos la función de Sage `find_root(f,0,3)`, que nos devuelve `1.4142135623730951`. Por tanto, la raíz de nuestra función en el intervalo [0,3] es única y es igual a $\sqrt{2}$.

DICOTOMÍA:

8. Fórmula implícita para el número máximo de iterantes (k):

$xtol \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{k}(b-a)$ Siendo b=3, a =0 y xtol = 1e-12 , despejamos k:

$k \geq \log_2\left(\frac{b-a}{xtol}\right) = \log_2\left(\frac{3-0}{1e-12}\right)$

$k \geq 41.4480996393695 \cong 42$

9. Comandos de Sage para calcular dicotomía:

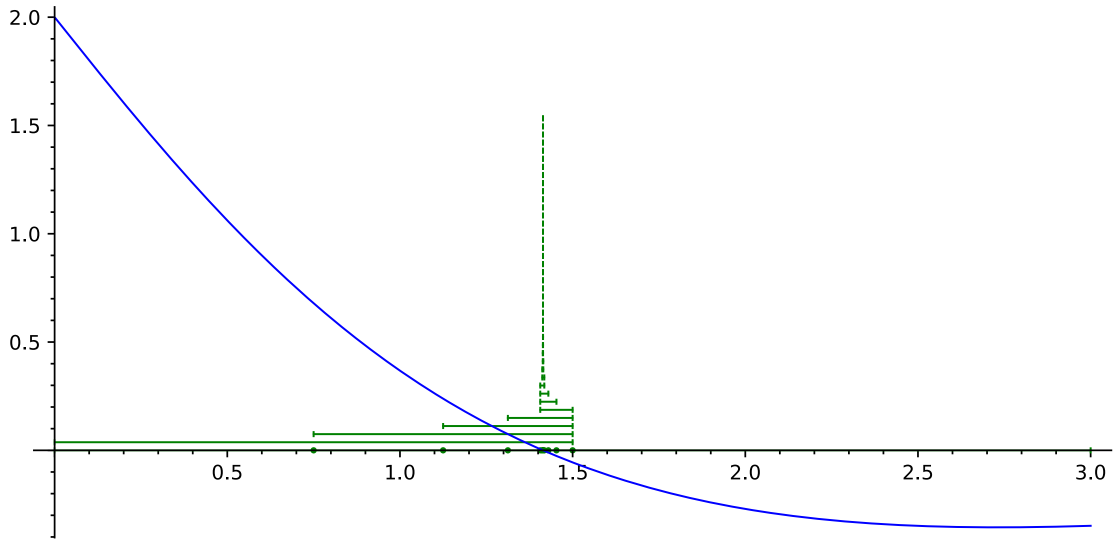
Para poder calcular la dicotomía hemos cargado en Sage: 'resolve.sage':

```
1. load('resolve.sage')
2. f(x)= (2-x^2)*e^(-x)
3. dicotomia(f, 0, 3) [0:2]
sage: (1.41421356237265, 42)
```
(aproximación de la raíz, iterantes)

10. Comandos Sage para obtener la gráfica de los iterantes:

```
1. load('resolve.sage')
2. f(x)= (2-x^2)*e^(-x)
3. debuxa_dicotomia(f, 0, 3)
```

11. Gráfica de los iterantes:



NEWTON:

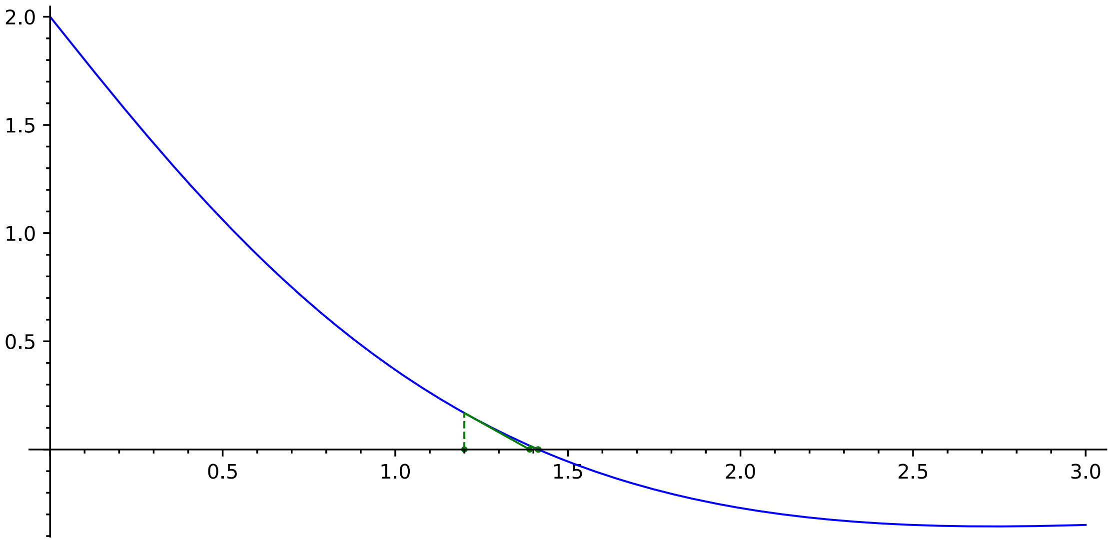
12. Comandos de Sage para calcular Newton:

```
1. load('resolve.sage')
2. f(x)= (2-x^2)*e^(-x)
3. newton(f, diff(f), 1.2) [0:2]
sage: (1.41421356237309, 5)
```
(aproximación de la raíz, iterantes)

13. Comandos de Sage para obtener a gráfica de los iterantes:

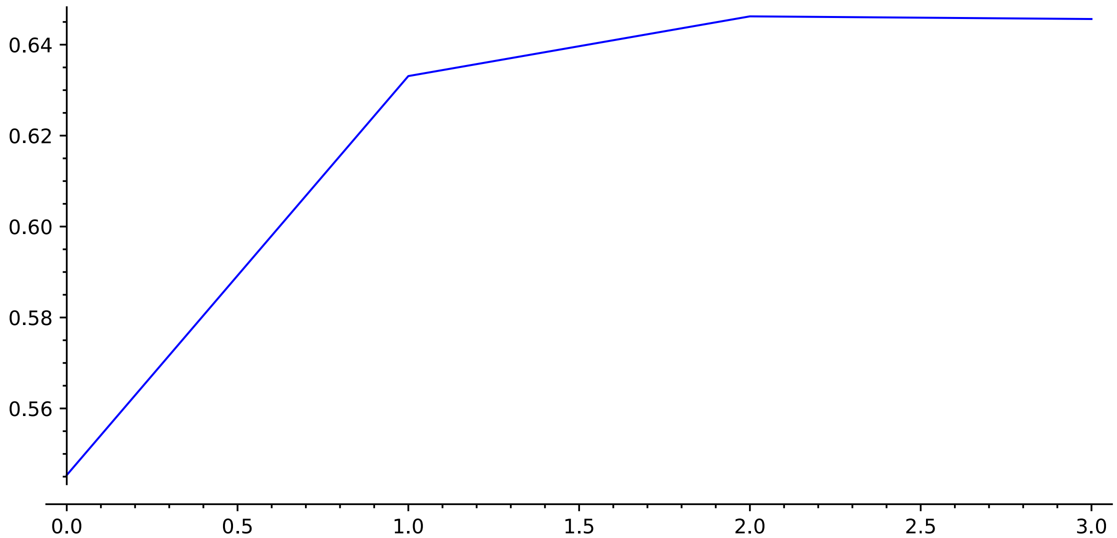
```
1. load('resolve.sage')
2. f(x)= (2-x^2)*e^(-x)
3. debuxa_newton(f, diff(f), 1.2, 0, 3)
```

14. Gráfica de los iterantes:



15. Comandos de Sage para calcular las cotas del coeficiente de converxencia:

```
1. coef = debuxa_newton(f, diff(f), 1.2, 0, 3,
   return_coef=True)
2. line(zip(range(len(coef)), coef))
```




```
Iterante 1: 1.38918918918919; coeficiente da orde de conv.: 0.545342419720641
Iterante 2: 1.41381710356077; coeficiente da orde de conv.: 0.633099046806601
Iterante 3: 1.41421346079870; coeficiente da orde de conv.: 0.646231437017888
Iterante 4: 1.41421356237309; coeficiente da orde de conv.: 0.645643845257852
```

En este caso podemos observar una convergencia adecuada ya que al ser un punto muy próximo a la raíz Newton no presenta problemas al realizarse.

COMPARATIVA:

El método de Newton presenta una gran ventaja en cuanto al número de iteraciones realizadas frente al método de Dicotomía, ya que Newton es de orden cuadrática. Sin embargo, el método de Dicotomía nos permite una convergencia garantizada ya que gracias a hacer un gran número de iteraciones se aproxima con más precisión al resultado, que comparándolo con el método de Newton esto no siempre sucede. Finalmente, aunque un método nos permite hacerlo en menos tiempo tiene la desventaja de no ser tan preciso como el otro.

BIBLIOGRAFÍA:

[1]: ‘Teorema de Bolzano’ [en línea][fecha de consulta: 06/03/2022] Disponible en: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/derivadas/teorema-de-bolzano.html#tema_teorema-de-bolzano-y-raices-de-una-funcion

Se han utilizado recursos como:

- Stein, William (2005). Sage Notebook [en línea] (cálculos y programación) [fecha de consulta: 06/03/2022] Disponible en: www.sagemath.org

PRESENTACIÓN.

1. MARTA TONG RODRÍGUEZ LÓPEZ

2. "TRANSPORTE DE MINERALES EFICIENTE"

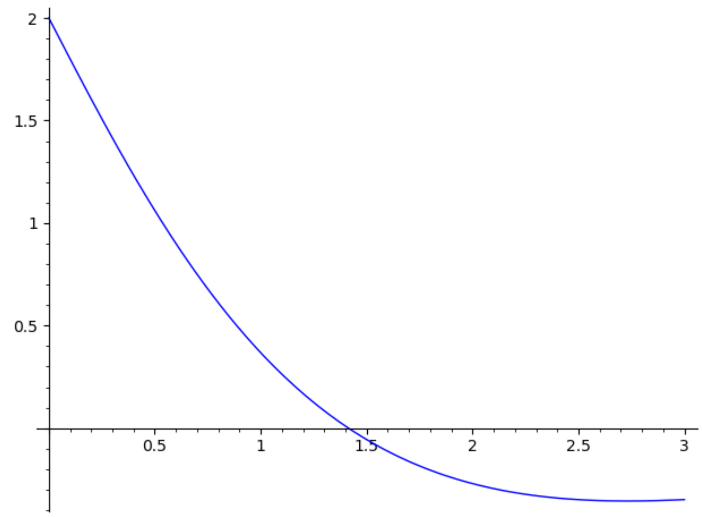
3. La definición matemática de la función, utilizando SageMath, es la siguiente: *f(x)=(2-x^2)*e^(-x).*

Dando como resultado la siguiente gráfica y siendo el punto de corte con el eje X el (2,0). La variable independiente es X y la dependiente es f(x) ó Y.

4. Los comandos para definir la función y la gráfica son:

```
f(x)=(2-x^2)*e^(-x)
plot(f,0,3)
```

5. Dando a continuación la siguiente gráfica:



6. <u>JUSTIFICACIÓN DE LA EXISTENCIA DE SOLUCIÓN."</u>

Con el fin de que la función tenga raíces/soluciones, se debe cumplir una serie de condiciones, recogidas en el *Teorema del Valor Intermedio*. Este Teorema enuncia lo siguiente: "cuando una función es continua en un intervalo [a,b], para cualquier k$\in\mathbb{R}$ cuyo valor esté entre *f(a)* y *f(b)* existe al menos un valor c∈[a,b] tal que f(c)=k y f(a)<k<f(b)"[1]. En este caso particular, el valor de *k* sería 0, ya que lo que buscamos es una raíz.

Lo primero que haremos es demostrar la continuidad de la función en su intervalo de definición:

f(x) es continua, ya que está formada por una multiplicación en la que tanto (2-x^2) es continua por ser polinómica como e^(-x) por ser exponencial.

A continuación, se calcularía f(0) y f(3):

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = (2-0^2)\cdot e^{-0} = 2 \\ \\ f(3) = (2-3^2)\cdot e^{-3} = -\frac{7}{e^3} \approx -0{,}35 \end{array}\right\} \quad \text{f(3)<0<f(0)}$$

De esta forma, se cumpliría el Teorema del Valor Intermedio, confirmando así la existencia de al menos una solución dentro del intervalo cerrado [0,3].

7. JUSTIFICACIÓN DE LA UNICIDAD.

Una función tiene una única solución únicamente si su derivada no se anula en ningún punto. Esto quiere decir que f'(x) no es nunca igual a cero dentro del intervalo de definicón. Esto viene dado por el Teorema de Rolle el cual enuncia lo siguiente: "Sea f(x) una función continua en [a,b], derivable en (a,b) y f(a)=f(b). Entonces existe algún punto c∈(a,b)/f'(c)=0".[2]

A continuación, se llevan a cabo los siguientes pasos:

- Continuidad: demostrada en el apartado anterior
- Derivabilidad: f(x) es continua y derivable.

$$f'(x) = -2 \cdot x \cdot e^{-x} - (2 - x^2) \cdot e^{-x}$$

f(0)≠f(3) => f(0)=2 y f(3)=-$\frac{7}{e^3}$

Esto quiere decir que no existe un punto c dentro del intervalo tal que f'(c)=0 y, por lo tanto, se demuestra la unicidad de solución en [0,3].

```
find_root(f, 0, 3)
```

```
1.4142135623730951
```

Comprobación en SageMath de la existencia de una única raíz.

DICOTOMÍA.

8. La fórmula implícita para hallar el máximo número de iterantes es la siguiente:

Partimos de la fórmula inicial: $\varepsilon \leq (1/2)^k \cdot (b-a)$, siendo a y b el valor del intervalo [0,3] y ε =1e-12

Para despejar k, hacemos lo siguiente:

$$2^k = \frac{b-a}{\varepsilon} => \log_2 2^k = \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon} => k = \log_2 \frac{b-a}{\varepsilon}$$

Al sustituir, obtenemos lo siguiente:

$k = \log_2 \frac{3-0}{\varepsilon} \approx 41.4480996393695$, lo que significa que el número de iteraciones es 42.

Para poder realizar dicotomía se debe cumplir lo siguiente: f(a)·f(b)<0. En este caso se cumple.

9. Los comandos para el cálculo de la raíz por dicotomía son:

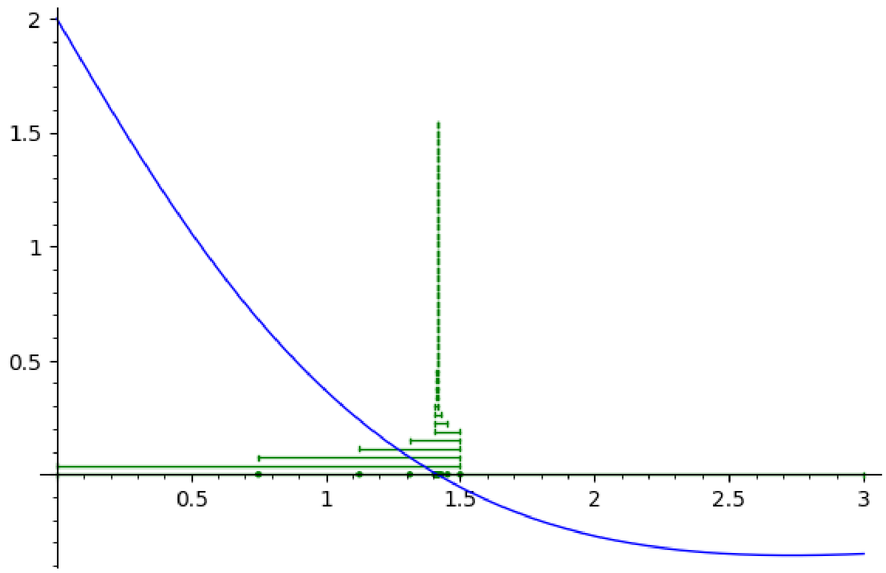
```
load('resolve.sage')
f(x)=(2-x^2)*e^(-x)
dicotomia(f,0,3) [0:2]
```

Dando como aproximación de la raíz 1.41421356237265 y 42 número de iteraciones.

10. La gráfica de los iterantes se obtiene de la siguiente forma:

```
load('resolve.sage')
f(x)=(2-x^2)*e^(-x)
debuxa_dicotomia(f,0,3) [0:2]
```

11. Dando como resultante la siguiente gráfica:



NEWTON.

12. Los comandos para el cálculo de la raíz por Newton son:

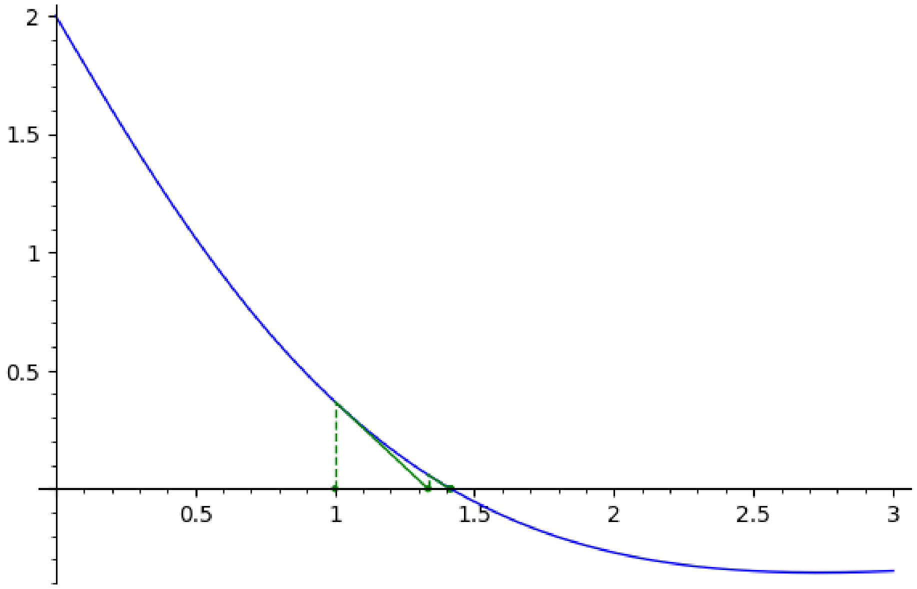
```
load('resolve.sage')
f(x)=(2-x^2)*e^(-x)
newton(f,diff(f),0) [0:2]
```

Obteniendo como aproximación de la raíz 1.41421356237309 y 7 número de iteraciones.

13. La gráfica de los iterantes se obtiene de la siguiente forma:

```
load('resolve.sage')
f(x)=(2-x^2)*e^(-x)
debuxa_newton(f,diff(f),x0=1, a=0, b=3)
```

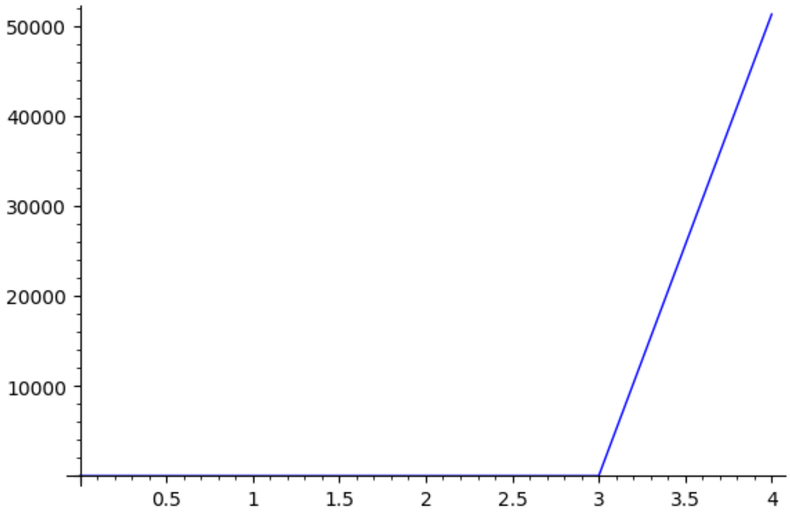
14.



15. Para justificar si el método de Newton converge de forma esperada o no, se utilizarían los siguientes comandos:

```
coef=debuxa_newton(f, diff(f),x0=1, a=0, b=3, return_coef=True)
line(zip(range(len(coef)),coef))
```

Obteniendo, de esta forma, la siguiente gráfica:



Como se podría observar, la función converge de una forma óptima hasta que el valor de x es igual a 3.

COMPARATIVA.

16. El método de Bisección y el de Newton son dos procedimientos que permiten detectar la existencia de soluciones de una función dentro de un intervalo cerrado. Sin embargo, ambos presentan sus ventajas e inconvenientes. Por un lado tenemos el método de la Bisección, el cual siempre converge. Por el otro lado está el método de Newton el cual converge a gran velocidad y proporciona gran precisión en los resultados. En cambio, presentan inconvenientes como que ambos tienen la necesidad de que la función sea continua en el intervalo marcado o que solo pueden localizar una única raíz. El método de Newton puede ser muy lento

dependiendo de la complejidad de las derivadas y es ineficiente en ecuaciones no lineales. El método de la Bisección por su parte, converge lentamente en el caso de que se le aplique una función compleja y únicamente funciona cuando $f(a)\cdot f(b)<0$, lo que excluye a algunas funciones.

BIBLIOGRAFÍA.

[1]José L. Fernández, “Teoremas de los valores intermedios” [en línea] [fecha de consulta: 05/03/22]. Disponible en: https://www.fisicalab.com/apartado/teorema-valores-intermedios

[2] “Enunciado del Teorema de Rolle” [en línea] [fecha de consulta: 05/03/22]. Disponible en: https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/derivadas/teorema-de-rolle.html

Apuntes Universidad de Concepción, “Ecuaciones no lineales”. Disponible en: https://cv.usc.es/course/view.php?id=28804

Apuntes Universidad de Santiago de Compostela, “Resolución de ecuacións non lineares usando Sage”. Disponible en: https://cv.usc.es/course/view.php?id=28804

Dafne Medina & Michelle Sagnelli, “Portafolio de Métodos Numéricos”. [en línea] [fecha de consulta: 06/03/22]. Disponible en: https://metodosnumericos426.wordpress.com/2017/03/08/comparativo/

Universidad de Alicante, “La norma ISO 690:2010E”. Disponible en:
http://werken.ubiobio.cl/html/downloads/ISO_690/Guia_Breve_IsSO690-2010.pdf

Hoja de SageMath: http://localhost:8888/notebooks/TRANSPORTE%20DE%20MINERALES%20EFICIENTE.ipynb

Correción do traballo anterior:

- **Criterios de evaluación:**

Apartado	*Puntuación máxima*	*Puntuación obtenida*
Presentación	0,12	0,11
Dicotomía	0,14	0,14
Newton	0,14	0,12
Comparativa	0,10	0,10
Bibliografía	0,10	0,08
Total	**0,6**	**0,55**

Se ha repartido la puntuación de los apartados en función de la importancia que estos tengan para el trabajo, dándole así la mayor calificación a los apartados de dicotomía y newton ya que son la esencia del trabajo.

- **Justificación de la puntuación obtenida en cada apartado:**

La corrección del trabajo se ha basado en los criterios indicados por el profesorado de la asignatura y subidos en el campus virtual como 'Protocolo da Tarefa 1', donde se ha expuesto las indicaciones que debe cumplir cada apartado.

Presentación: Es adecuada a los criterios que se exigen e indica de manera ajustada las respuestas a los apartados propuestos. La gráfica adjunta se muestra de manera clara, y las justificaciones asociadas a los apartados 6 y 7 son precisas. La única objeción es la de poner find_root con una captura de pantalla, lo que no permite copiarla para poder probarla.

Dicotomía: Nada que objetar en este apartado, las respuestas son precisas y adecuadas a los criterios, además los cálculos se ajustan a lo pedido.

Newton: Buena elección del punto para calcular newton y las gráficas muestran de manera clara el método empleado. Faltaría un poco de explicación en la convergencia de este método si es esperada o no.

Comparativa: Una comparación concisa y acertada ya que se exponen las ventajas y los inconvenientes de cada método.

Bibliografía: Utilización de la norma ISO de forma correcta, exceptuando algún caso que no se rige del todo por ella.