DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Trabajo Practico

20 de mayo de 2024 — Algoritmos y Estructuras de Datos

Grupo AlgoTango

Integrante	LU	Correo electrónico
Orsi, Lautaro Manuel	689/23	Lautaorsi@gmail.com
Zerbetto De Palma, Gerardo Gabriel	900/22	g.zerbetto@gmail.com
Simoza Sanchez, Valeria Andreina	1027/22	vsimoza.vs@gmail.com
Prieto, Matias	382/23	matiasprieto2003@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)
Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA
Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina
Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300
http://www.exactas.uba.ar

1. Especificación

1.1. Redistribucion De Los Frutos

proc redistribucionDeLosFrutos (in recursos : $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in cooperan: $seq\langle\text{Bool}\rangle$) : $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$

requiere $\{|recursos| = |cooperan| \land recursosValidos(recursos)\}$

asegura $\{|res| = |recursos| \land_L (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |recursos| \longrightarrow_L \Big(\Big((cooperan[i] = true) \longrightarrow_L res[i] = \frac{fondoMonetario(recursos, cooperan)}{|recursos|}\Big) \land \Big((cooperan[i] = false) \longrightarrow_L res[i] = recursos[i] + \frac{fondoMonetario(recursos, cooperan)}{|recursos|})\Big)\Big)\}$

aux fondoMonetario (recursos:$seq\langle\mathbb{R}\rangle$,cooperan:$seq\langle\text{Bool}\rangle$) : $\mathbb{R} = \sum_{j=0}^{|recursos|-1} \Big(\text{if } \big(cooperan[j] = true\big) \text{ then } \big(recursos[j]\big) \text{ else } \big(0\big) \text{ fi}\Big)$;

pred recursosValidos (recursos:$seq\langle\mathbb{R}\rangle$) {
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |recursos| \longrightarrow_L recursos[i] > 0)$
}

Desarrollo 1.1

Para este ejercicio implementamos un aux *fondoMonetario* que calcula —en base a las listas *cooperan* y *recursos*— una sumatoria de la totalidad de recursos que seran redistribuidos al finalizar el paso temporal, sumando al fondo los recursos de aquellos que cooperen y sin sumar los que no.

Empleamos este aux para luego calcular el recurso de cada individuo, si este decidia cooperar su recurso sera la division equitativa y si no cooperaba su recurso sera la plata obtenida mas la division equitativa.

1.2. Trayectoria De Los Frutos Individuales a Largo Plazo

proc trayectoriaDeLosFrutosIndividualesALargoPlazo (inout trayectorias: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in cooperan: $seq\langle\text{Bool}\rangle$, in apuestas: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in pagos: $seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, in eventos: $seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$)

requiere $\{trayectoriasValidas(trayectorias)$
$\land\ mismaLongitud(trayectorias, pagos, apuestas, eventos, cooperan)$
$\land\ pagosPositivos(pagos)$
$\land\ apuestasValidas(apuestas)$
$\land\ longitugApuestasPagos(apuestas, pagos)$
$\land\ longitudSublistas(pagos)$
$\land\ longitudSublistas(apuestas)$
$\land\ longitudSublistas(eventos)$
$\land\ longitudEventosApuestas(eventos, apuestas)\}$

asegura $\{|trayectorias| = |old(trayectorias)| \land (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |old(trayectorias)| \longrightarrow_L (trayectorias[i][0] = (old(trayectorias)[i])[0]) \land_L (\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |eventos[i]| \longrightarrow_L trayectorias[i][j+1] = calculoDeRecursosSegunCooperacion(trayectorias, pagos, apuestas, eventos, cooperan, i, j)))\}$

aux calculoDeRecursosSegunCooperacion (trayectorias,pagos,apuestas:$seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$,eventos:$seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$,cooperan:$seq\langle\text{Bool}\rangle$,individuo:$\mathbb{Z}$,ronda:$\mathbb{Z}$) : $\mathbb{R}$ = if $cooperan[individuo] = true$ then $fondoMonetarioRepartido(trayectorias, pagos, apuestas, eventos, cooperan, ronda)$ else $calculoRecursos(trayectorias[individuo][ronda], pagos[individuo][eventos[individuo][ronda]], apuestas[individuo[eventos[individuo][ronda]]]) + fondoMonetarioRepartido(trayectorias, pagos, apuestas, eventos, cooperan, ronda)$ fi ;

aux calculoRecursos (recurso,pago,apuesta:$\mathbb{R}$) : $\mathbb{R} = recurso * pago * apuesta$;

aux fondoMonetario (trayectorias,pagos,apuestas:$seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle, eventos : seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle, cooperan : seq\langle\text{Bool}\rangle, ronda : \mathbb{Z}\rangle\rangle$) : $\mathbb{R} = \sum_{h=0}^{|cooperan|-1}$ if $cooperan[h] = true$ then $calculoRecursos(trayectorias[h][ronda], pagos[h][eventos[h][ronda]], apuestas[h][eventos[h][ronda]])$ else 0 fi ;

aux fondoMonetarioRepartido (trayectorias,pagos,apuestas:$seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$,eventos:$seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$,cooperan:$seq\langle\text{Bool}\rangle$,ronda:$\mathbb{Z}$) : $\mathbb{R} = \frac{fondoMonetario(trayectorias, pagos, apuestas, eventos, cooperan, ronda)}{|cooperan|}$;

aux sumaApuestas (apuestas:$seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, individuo: $\mathbb{Z}$) : $\mathbb{R} = \sum_{h=0}^{|apuestas[individuo]|-1} apuestas[individuo][h]$;

pred mismaLongitud (lista: $seq\langle T\rangle$,pagos,apuestas:$seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$,eventos:$seq\langle seq\langle\mathbb{N}\rangle\rangle$,cooperan:$seq\langle\text{Bool}\rangle$) {
$|lista| = |cooperan| = |apuestas| = |pagos| = |eventos|$
}

pred trayectoriasValidas (trayectorias:$seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$) {

$|trayectorias| > 0 \wedge (\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |trayectorias| \longrightarrow_L |trayectorias[i]| = 1 \wedge_L (\forall x : \mathbb{R})(x \in trayectorias[i] \longrightarrow_L x > 0))$

}

`pred pagosPositivos` (pagos:$seq\langle seq\langle \mathbb{R} \rangle\rangle$) {

$(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |pagos| \wedge_L (0 \leq j < |pagos[i]| \longrightarrow_L pagos[i][j] > 0))$

}

`pred apuestasValidas` (apuestas:$seq\langle seq\langle \mathbb{R} \rangle\rangle$) {

$(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |apuestas| \longrightarrow_L sumaApuestas(apuestas, i) = 1 \wedge_L (0 \leq j < |apuestas[i]| \longrightarrow_L 0 < apuestas[i][j] < 1))$

}

`pred longitudApuestasPagos` (apuestas,pagos:$seq\langle seq\langle \mathbb{R} \rangle\rangle$) {

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |apuestas| \longrightarrow_L |apuestas[i]| = |pagos[i]|)$

}

`pred longitudSublistas` (lista:$seq\langle seq\langle T \rangle\rangle$) {

$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |lista| \longrightarrow_L (|lista[0]| > 0 \wedge_L |lista[0]| = |lista[i]|))$

}

`pred longitudEventosApuestas` (eventos:$seq\langle seq\langle \mathbb{N} \rangle\rangle$,apuestas:$seq\langle seq\langle \mathbb{R} \rangle\rangle$) {

$(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |eventos| \wedge_L 0 \leq j < |eventos[i]| \longrightarrow_L eventos[i][j] < |apuestas[i]|)$

}

Desarrollo 1.2

En este ejercicio actualizamos la trayectoria de cada individuo basandonos en sus recursos y evento correspondiente por ronda (con su respectivo pago y apuesta). Usamos el aux *calculoDeRecursosSegunCooperacion* en el que calculamos los recursos que le quedarán al individuo teniendo en cuenta primeramente si coopera o no. En el primer caso recibe recursos únicamente del fondo monetario distribuido entre el total de los individuos (aux *fondoMonetarioRepartido*) y en el otro caso se calcula su ganancia individual (aux *calculoRecursos*) y se suma el fondo monetario distribuido.

Aclaración

En el pred apuestasValidas definimos por interpretación que las apuestas individuales son mayores a 0 y menores a 1, ya que no encontramos referencias en el tp al rango exacto que deben tener.

1.3. Trayectoria Extraña Escalera

`proc trayectoriaExtrañaEscalera` (in trayectoria: $seq\langle \mathbb{R} \rangle$) : Bool

`requiere` $\{|trayectoria| > 0\}$

`asegura` $\{res = true \iff \Big((|trayectoria| = 1) \vee (|trayectoria| = 2 \wedge \neg(todosIguales(trayectoria)) \vee_L (|trayectoria| > 2 \wedge hayUnicoMax(trayectoria))\Big)\}$

`pred hayUnicoMax` (trayectoria: $seq\langle \mathbb{R} \rangle$) {

$(CantidadMaximos(trayectoria) = 1 \wedge \neg(UnMaxEnLimite(trayectoria))) \vee (CantidadMaximos(trayectoria) = 0 \wedge UnMaxEnLimite(trayectoria))$

}

`pred todosIguales` (lista:$seq\langle \mathbb{R} \rangle$) {

$(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |lista| \wedge 0 \leq j < |lista| \wedge i \neq j \longrightarrow_L lista[i] = lista[j])$

}

`pred UnMaxEnLimite` (Trayectoria:$seq\langle \mathbb{R} \rangle$) {

$(lista[0] > lista[1] \wedge lista[|lista| - 1] \leq lista[|lista| - 2]) \vee (lista[0] \leq lista[1] \wedge lista[|lista| - 1] > lista[|lista| - 2])$

}

`aux CantidadMaximos` (lista: $seq\langle \mathbb{R} \rangle$) : $\mathbb{Z} = \sum_{i=1}^{|lista|-2}$ if $\Big(\Big(\big(lista[i-1] < lista[i]\big) \wedge \big(lista[i] > lista[i+1]\big)\Big)\Big)$ then (1) else (0) fi ;

Desarrollo 1.3:

En este ejercicio, utilizamos una separacion en 3 distintos casos, 2 de ellos unicos y uno generalizado, es importante notar que la trayectoria que se recibe es una lista que representa los recursos a medida que avanzan las rondas (o pasos temporales).
El primero, siendo que $|trayectoria|$ es 1 (se juega una ronda) sabemos que sera maximo local pues no tiene vecinos
El segundo, siendo que $|trayectoria|$ es 2 y que, si son distintos, trivialmente alguno es mayor que el otro siendo entonces el maximo local
El ultimo y mas general, dada una secuencia de mas de 2 elementos se busca si efectivamente hay algun numero mayor que sus numeros vecinos y que ademas sea el **unico** con esa propiedad en la secuencia

1.4. Individuo Decide Si Cooperar O No

`proc individuoDecideSiCooperarONo` (in individuo: $\mathbb{N}$, in recursos: $seq\langle \mathbb{R} \rangle$, inout cooperan: $seq\langle$Bool$\rangle$, in apuestas: $seq\langle seq\langle \mathbb{R} \rangle\rangle$, in pagos: $seq\langle \mathbb{R} \rangle$, in eventos: $seq\langle seq\langle \mathbb{N} \rangle\rangle$)

`requiere` $\{mismaLongitud(recursos, pagos, apuestas, eventos, cooperan)$
$\wedge\, individuo < |eventos|$
$\wedge\, pagosPositivos(pagos)$
$\wedge\, apuestasValidas(apuestas)$
$\wedge\, longitudApuestasPagos(apuestas, pagos)$
$\wedge\, longitudSublistas(apuestas)$
$\wedge\, longitudSublistas(eventos)$
$\wedge\, longitudSublistas(pagos)$
$\wedge\, longitudEventosApuestas(eventos, apuestas)\}$
`asegura` $\{(\exists Trayectorias, TrayectoriasNegadas : seq\langle seq\langle \mathbb{Z}\rangle\rangle)(\exists CooperanNegadaseq\langle \mathsf{Bool}\rangle)$
$\Big(\Big(ValidarTrayectoria(Trayectorias, cooperan, apuestas, pagos, eventos, recursos)\Big)$
$\wedge\, \Big(\neg(old(cooperan)[individuo]) = cooperanNegada[Individuo]\Big)$
$\wedge\, (\forall i : \mathbb{Z})\Big(0 \leq i < |cooperan| \wedge i \neq Individuo \wedge cooperan[i] = cooperanNegada[i]\Big)$
$\wedge\, \Big(ValidarTrayectorias(TrayectoriasNegada, cooperanNegada, apuestas, pagos, eventos, recursos)\Big)\Big)$
$\longrightarrow_L \Big(\Big(\big(Trayectorias[Individuo][|eventos[0]| - 1] \geq TrayectoriasNegada[Individuo][|eventos[0]| - 1]\big)$
$\wedge\, cooperan[Individuo] = old(cooperan[Individuo])\Big)$
$\vee\, \Big(\big(Trayectorias[Individuo][|eventos[0]| - 1] < TrayectoriasNegada[Individuo][|eventos[0]| - 1]\big)$
$\wedge\, cooperan[Individuo] = cooperanNegada[Individuo]\Big)\Big)\}$

`pred ValidarTrayectoria` (trayectorias: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$,cooperan: $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, apuestas: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos: $seq\langle \mathbb{R}\rangle$,eventos: $seq\langle seq\langle \mathbb{N}\rangle\rangle$, recursos: $seq\langle \mathbb{R}\rangle$) {
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |recursos| \longrightarrow_L (trayectorias[i][0] = recursos[i]) \wedge_L$
$(\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |eventos[i]| \longrightarrow_L$
$trayectorias[i][j{+}1] = calculoDeRecursosSegunCooperacion(trayectorias, pagos, apuestas, eventos, cooperan, i, j)))$
}

*preds pagosPositivos, apuestasValidas, longitudApuestasPagos, longitudSublistas, mismaLongitud, longitudEventosApuestas y calculoDeRecursosSegunCooperacion (con sus dependencias) declarados en ejercicio 1.2

Desarrollo 1.4:

La dificultad de este ejercicio aparece en no tener la secuencia de trayectorias individuales, viendo que calcularlas llevaria mucha complejidad planteamos un cuantificador y predicamos sobre el, analizando las posibles secuencias *trayectorias y trayectoriasNegada* (siendo esta ultima la que corresponderia al caso de la negacion del booleano de cooperacion del individuo) podemos, utilizando los predicados y auxiliares del ejercicio 1.2 y la lista de recursos verificar que efectivamente estas listas son las que deberiamos obtener si calcularamos las trayectorias al largo plazo.

Para validar esta trayectoria comparamos que las primeras posiciones de la trayectoria correspondan a los recursos (basicamente, que el punto de partida de la trayectoria sea correcta) y luego, verificamos que cada posicion N de la lista, sea correspondiente a calcular los recursos N rondas para cada individuo, partiendo de la base de la ronda 0 (recursos). Es importante notar, que para el caso *trayectoriasNegada* utilizaremos la lista *cooperanNegada*, pues el calculo dependera de si el individuo coopera o no.

Al final, podemos observar que utilizando la comparacion de la ultima posicion de *trayectoria* del individuo (basandonos en la cantidad de eventos) con la ultima posicion de la *trayectoriaNegada* asignamos, segun corresponda el valor original (en el primer caso) y el valor negado en el segundo.-

1.5. Individuo Actualiza Apuesta

`proc individuoActualizaApuesta` (in individuo: $\mathbb{N}$, in recursos: $seq\langle \mathbb{R}\rangle$, in cooperan: $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, inout apuestas: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$, in pagos: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$, in eventos: $seq\langle seq\langle \mathbb{N}\rangle\rangle$) : `requiere` $\{individuo < |recursos| \wedge pagosPositivos(pagos) \wedge mismaLongitud(recur$
$\wedge\, apuestasValidas(apuestas) \wedge longitudApuestasPagos(apuestas, pagos)$
$\wedge\, longitudEventosApuestas(eventos, apuestas) \wedge longitudSublistas(pagos) \wedge longitudSublistas(apuestas) \wedge$
$longitudSublistas(eventos)\}$
`asegura` $\{(\exists apuestaMax : seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle)(\exists trayectoriaMax : seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle)$
$(apuestasValidas(apuestaMax) \wedge_L apuestaIgualExceptoIndividuo(individuo, old(apuestas), apuestaMax)$
$\wedge_L validarTrayectoria(trayectoriaMax, cooperan, apuestaMax, pagos, eventos, recursos)$
$\wedge_L esMaximaApuesta(individuo, recursos, cooperan, trayectoriaMax, pagos, eventos, old(apuestas)) \longrightarrow_L$
$apuestas[individuo] = apuestaMax[individuo])\}$

`pred apuestaIgualExceptoIndividuo` (individuo: $\mathbb{Z}$, apuestaOriginal: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$, apuestaNueva: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$)
{
$(\forall i, j : \mathbb{Z})(0 \leq i < |apuestaOriginal| \wedge_L 0 \leq j < |apuestaOriginal[i]| \wedge_L individuo \neq i \wedge$
$|apuestaOriginal| = |apuestaNueva| \wedge |apuestaOriginal[i]| = |apuestaNueva[i]| \longrightarrow_L$
$apuestaOriginal[i][j] = apuestaNueva[i][j])$
}
`pred esMaximaApuesta` (individuo: $\mathbb{N}$, recursos: $seq\langle \mathbb{R}\rangle$,cooperan: $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, trayectoriaMax: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$, pagos: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$,eventos: $seq\langle seq\langle \mathbb{N}\rangle\rangle$ apuestaOriginal: $seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle$) {
$(\forall otraApuesta : seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle)\Big((\exists otraTrayectoria : seq\langle seq\langle \mathbb{R}\rangle\rangle)$
$\big(apuestasValidas(otraApuesta)$
$\wedge_L apuestaIgualExceptoIndividuo(individuo, apuestaOriginal, otraApuesta)$
$\wedge_L validarTrayectoria(otraTrayectoria, cooperan, otraApuesta, pagos, eventos, recursos)$
$\longrightarrow_L trayectoriaMax[individuo][|trayectoriaMax[individuo]| - 1]$
$\geq otraTrayectoria[individuo][|otraTrayectoria[individuo]| - 1]\big)\Big)$
}

*pagosPositivos, mismaLongitud, apuestasValidas, longitudEventosApuestas, longitudSublistas y longitudApuestasPagos definidos en el ejercicio 1.2

Desarrollo 1.5:
En esta especificación se propone la existencia de una secuencia apuestaMaxima que contiente exactamente los mismos elementos que la secuencia apuestas excepto en la posición correspondiente al individuo y que se corresponde con una secuencia trayectoriaMax (validado con validarTrayectoria). Finalmente, se evalua si esa trayectoriaMax genera los mayores recursos finales para el individuo predicando acerca de la no existencia de otras trayectorias que tengan mayores recursos finales para el individuo (predicado esMaximaApuesta). De esta manera, la nueva apuesta del individuo es entonces la apuestaMax.

2. Demostracion de correctitud

`proc frutoDelTrabajoPuramenteIndividual` (in recurso : $\mathbb{R}$, in apuesta : $\langle$ s : $\mathbb{R}$, c : $\mathbb{R}\rangle$, in pago : $\langle$ s : $\mathbb{R}$, c : $\mathbb{R}\rangle$, in eventos : $seq\langle \mathsf{Bool}\rangle$, out res : $\mathbb{R}$)
`requiere` $\{apuesta_c + apuesta_s = 1 \wedge pago_c > 0 \wedge pago_s > 0 \wedge apuesta_c > 0 \wedge apuesta_s > 0 \wedge recurso > 0\}$
`asegura` $\{res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#apariciones(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#apariciones(eventos,False)}\}$

Donde #apariciones(eventos, True) es el auxiliar utilizado en la teorica, y #(eventos, True) es su abreviacion

```
1  res := recurso;
2  i := 0;
3  while (i < |eventos|) do
4      if eventos[i] then
5          res := res * apuesta.c * pago.c;
6      else
7          res := res * apuesta.s * pago.s;
8      endif
9      i := i + 1
10 endwhile
```

Para demostrar que la especificacion es correcta respecto a la implementacion, hay que demostrar la tripla de Hoare del requiere, la implementacion y el asegura.
Primero demostramos la correctitud del ciclo. Para esto planteamos:
$P_c \equiv i = 0 \wedge res = recurso \wedge apuesta_c + apuesta_s = 1 \wedge pago_c > 0 \wedge pago_s > 0 \wedge apuesta_c > 0 \wedge apuesta_s > 0 \wedge recurso > 0$
$Q_c \equiv res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)}$
$I \equiv 0 \leq i \leq |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)}$
$B \equiv i < |eventos|$
$Fv = |eventos| - i$

Queremos ver que se cumplan:
1)$P_c \longrightarrow I$
2)$\{I \wedge B\}while....endwhile\{I\}$
3)$I \wedge -B \longrightarrow Q_c$
4)$\{I \wedge B \wedge v_0 = Fv\}while....endwhile\{Fv < v_0\}$
5)$I \wedge Fv \leq 0 \longrightarrow -B$

1) $P_c \longrightarrow I$:
$(i = 0 \land res = recurso \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$(0 \leq i \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)})$

Aumo que el antecedente es verdadero. Como i = 0, reemplazo i por 0

$(res = recurso \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$(0 \leq 0 \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,0),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,0),False)})$

$\equiv (res = recurso \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(<>,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(<>,False)}$

$\equiv (res = recurso \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^0(apuesta_s pago_s)^0$

$\equiv (res = recurso \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$res = recurso$

Como siempre es verdadero, se cumple $P_c \longrightarrow I$

2) $\{I \land B\}$ while....endwhile $\{I\}$: Para demostrar esto hay que demostrar $I \land B \longrightarrow wp(while...endwhile, I)$

wp(while...endwhile, I) $\equiv$ wp(if...endif, wp(i := i+1, I) $\equiv wp(if...endif, def(i) \land_L (0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)}))$

$\equiv (def(eventos[i]) \land_L (eventos[i] = \text{true} \land wp(res := res * apuesta_c * pago_c, 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)})) \lor (eventos[i] = \text{false} \land$
$wp(res := res * apuesta_s * pago_s, 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)})))$

$\equiv 0 \leq i < |eventos| \land_L (eventos[i] = \text{true} \land 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)-1}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)}) \lor (eventos[i] = \text{false} \land$
$0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)-1})$

Utilizando la propiedad $P \longrightarrow (Q \lor R) \leftrightarrow (P \longrightarrow Q) \lor (P \longrightarrow R)$ vemos los casos de la implicacion original por separado
Caso eventos[i]=true:

$(0 \leq i \leq |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} \land$
$i < |eventos|) \longrightarrow (0 \leq i < |eventos| \land_L (eventos[i] = \text{true} \land 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)-1}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)}))$

$\equiv (0 \leq i < |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} \longrightarrow$
$0 \leq i < |eventos| \land_L (eventos[i] = \text{true} \land 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)-1}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)})$

$\equiv (0 \leq i < |eventos| \land_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} \longrightarrow$
$(eventos[i] = \text{true} \land 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)-1}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)})$

Asumo verdadero el antecedente y reemplazo res
$\equiv 0 \leq i < |eventos| \longrightarrow (eventos[i] = \text{true} \land 0 \leq i+1 \leq |eventos| \land_L$
$recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} =$
$recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)-1}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)})$

Este predicado significa que si el elemento actual es true, contar las apariciones de trueen eventos hasta el elemento anterior va a dar uno menos, lo cual es verdadero

Caso eventos[i]=false:

$(0 \leq i \leq |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} \wedge$
$i < |eventos|) \longrightarrow (0 \leq i < |eventos| \wedge_L (eventos[i] = \text{false} \wedge 0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge_L$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)-1}))$

Haciendo lo mismo que en el caso anterior:
$\equiv 0 \leq i < |eventos| \longrightarrow (eventos[i] = \text{false} \wedge 0 \leq i+1 \leq |eventos| \wedge_L$
$recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} =$
$recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i+1),False)-1})$

Este predicado significa que si el elemento actual es false, contar las apariciones de falseen eventos hasta el elemento anterior va a dar uno menos, lo cual es verdadero
Como ambos casos de la implicacion son verdaderos, la implicacion es verdadera.

3) $I \wedge -B \longrightarrow Q_c$
$0 \leq i \leq |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} \wedge$
$i \geq |eventos| \longrightarrow res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)}$

$\equiv i = |eventos| \wedge_L res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,i),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,i),False)} \longrightarrow$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)}$

Asumo verdadero el antecedente y reemplazo i por $|eventos|$

$\equiv res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(subseq(eventos,0,|eventos|),True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(subseq(eventos,0,|eventos|),False)} \longrightarrow$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)}$

Como $subseq(eventos, 0, |eventos|) =$ eventos:

$\equiv res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)} \longrightarrow$
$res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)}$

Ambos lados de la implicacion son iguales, entoces la implicacion es verdadera

4) $\{I \wedge B \wedge v_0 = Fv\} while....endwhile \{Fv < v_0\}$:
Para demostrar esto hay que demostrar: $(I \wedge B \wedge v_0 = Fv) \longrightarrow wp(while...endwhile, Fv < v_0)$

$wp(while...endwhile, |eventos| - i < v_0) \equiv wp(if...endif, wp(i := i+1, |eventos| - i < v_0)$
$\equiv wp(if...endif, |eventos| - (i+1) < v_0)$

$\equiv def(eventos[i]) \wedge_L ((eventos[i] = \text{true} \wedge wp(res := res * apuesta_c * pago_c, |eventos| - (i+1) < v_0)) \vee$
$(eventos[i] = \text{false} \wedge wp(res := res * apuesta_s * pago_s, |eventos| - (i+1) < v_0)))$
$\equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L (eventos[i] = \text{true} \wedge |eventos| - (i+1) < v_0) \vee (eventos[i] = \text{false} \wedge |eventos| - (i+1) < v_0)$
$\equiv 0 \leq i < |eventos| \wedge_L (eventos[i] = \text{true} \vee eventos[i] = \text{false}) \wedge |eventos| - (i+1) < v_0 \equiv |eventos| - (i+1) < v_0$

Volviendo a la equivalencia original:
$(I \wedge B \wedge v_0 = Fv) \longrightarrow wp(while...endwhile, Fv < v_0) \equiv (I \wedge B \wedge v_0 = |eventos| - i) \longrightarrow$
$0 \leq i < |eventos| \wedge_L |eventos| - (i+1) < v_0$

Asumo verdadero el antecedente y reemplazo v_0 por $|eventos| - i$
$\equiv (I \wedge B) \longrightarrow 0 \leq i < |eventos| \wedge_L |eventos| - (i+1) < |eventos| - i \equiv (I \wedge B) \longrightarrow 0 \leq i < |eventos| \wedge_L |eventos| - i - 1 <$
$|eventos| - i$

Como el consecuente es siempre verdadero, la implicacion es verdadera

5) $I \wedge Fv \leq 0 \longrightarrow -B$

$I \wedge |eventos| - i \leq 0 \longrightarrow i \geq |eventos| \equiv I \wedge |eventos| \leq i \longrightarrow i \geq |eventos|$

La implicacion es siempre verdadera

Con esto queda demostrado, por Teorema del Invariante y Teorema de Terminacion de Ciclo, que vale la siguiente tripla de Hoare:
$\{i = 0, res = recurso\} while....endwhile \{res = recurso(apuesta_c pago_c)^{\#(eventos,True)}(apuesta_s pago_s)^{\#(eventos,False)}\}$

Solo queda demostrar que P_c cumple:

$(apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$wp(res := recurso; i := 0, P_c)$

$\equiv (apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$wp(res := recurso; wp(i := 0, res = recurso \land i = 0 \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0))$

$\equiv (apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$wp(res := recurso; res = recurso \land 0 = 0 \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0)$

$\equiv (apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0) \longrightarrow$
$recurso = recurso \land 0 = 0 \land apuesta_c + apuesta_s = 1 \land pago_c > 0 \land pago_s > 0 \land apuesta_c > 0 \land apuesta_s > 0 \land recurso > 0$

Como el consecuente es siempre verdadero, la implicacion es verdadera

Al demostrar esto queda demostrado que la especificacion es correcta respecto de la implementacion ya que la postcondicion del ciclo es equivalente a la postcondicion